МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М.ГОРЬКОГО

Н.Н.ШУНДА

ФУНКЦИЯ КАК ОСНОВА СОВРЕМЕННОГО ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ (на материале тождественных преобразований, уравнений и неравенств действительного переменного).

(По специальности № 13.731 - методика преподавания математики)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

(по методике преподавания математики)

Киев - 1969

Работа выполнена на кафедре элементарной математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - кандидат педагогических наук, доцент КУХАРЬ В.М.

Официальные оппоненты:

Член-корреспондент АПН, заслуженный деятель науки РСФСР, профессор АНДРОНОВ И.К.

Кандидат педагогических наук, доцент БЕЛЫЙ Б.Н.

Внешний отзыв - Черниговский государственный педагогический институт имени Т.Г.Шевченко, кафедра элементарной математики и методики преподавания математики.

Автореферат разослан "5" сентября 1969 г.

Защита диссертации состоится " "______ 1969 г. на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (Киев-30, Бульвар Шевченко, 22/24).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

В постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР "О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы" намечены основные пути качественной перестройки системы обучения и воспитания учащихся.

Движение за повышение уровня школьного образования приобрело международный характер. Проблема обучения и развития школьников была впервые включена в программу Международного психологического конгресса (1966 г.), значительное внимание уделил ей 15-й Международный конгресс математиков (Москва, 1966 г.).

Повышенные требования к знаниям учащихся по математике объясняется прежде всего тем, что математика все глубже проникает в науку, и все больше находит использование в широких областях человеческой деятельности. Перестройка математического образования осуществляется, начиная с начальных классов. В нашей стране принята новая программа по математике, в которой на первый план выдвигается задача овладения учащимися прочными и сознательными математическими знаниями.

Несмотря на некоторые сдвиги в направлении улучшения знаний учащихся по математике за последние годы, уровень подготовки выпускников средней школы все еще отстает от требований жизни.

Одну из причин такого состояния можно объяснить тем, что традиционный школьный курс математики состоит из разрозненных тем и разделов, слабо связанных между собой основными, узловыми понятиями и идеями.

Известно, что одним из основных понятий математики как науки, так и школьного курса, является понятие функции. На причины выделения его среди других важных понятий указывал известный математик и педагог А.Я.Хинчин.[1]

---

[1] А.Я.Хинчин, Педагогические статьи, под редакцией академика АН УССР Б.В.Гнеденко, М., изд.АПН РСФСР, 1963, стр. 68.

Характерной положительной чертой действующей и новой програм по математике для средней школы есть их функциональная направленность. Однако в школьной практике и учебно-методической литературе нередко под этим понимают исследование свойств элементарных функций и построение графиков, что значительно снижает роль понятия функции на современном этапе обучения.

Можно указать целый ряд исследований и методических разработок, посвященных вопросу изучения функциональной зависимости в средней школе. Однако в большинстве из них рассматривается изучение основных элементарных функций и построение их графиков, пропедевтика функциональной зависимости и др.

Вопросу использования свойств элементарных функций для углубленного изучения других тем и разделов посвящено очень мало работ. В этом направлении следует отметить диссертационную работу Ю.Н.Макарычева. Однако, разработав подробно систему изучения элементарных функций в старших классах, автор не раскрыл возможностей использования их свойств в процессе обучения математике. В основном освещен вопрос использования свойств монотонных функций при решении простейших уравнений и неравенств. Такие же свойства функций, как область изменения, периодичность, четность, корни, промежутки знакопостоянства не нашли практического использования при решении уравнений и неравенств.

Наши многолетние наблюдения, изучение опыта работы учителей математики, проведенные контрольные работы в школах, анализ итогов вступительных экзаменов в вузы свидетельствуют о том, что знания учащихся по вопросу свойств функций и построения графиков все еще остаются низкими.

На практике для устранения этих пробелов в знаниях учащихся им предлагают упражнения на установление определенных свойств функций, например, области определения и изменения функции, четности, периодичности, монотонности и др.

Эпизодичность и односторонность таких упражнений не приносит желаемых результатов, ибо, кроме использования свойств функций для построения графиков учащимся не показывают, как эти свойства могут быть с успехом использованы при изучении других вопросов.

Это объясняется недостаточной разработкой методики использования свойств элементарных функций к другим важным разделам и темам школьного курса математики, отсутствием в учебниках, задачниках и в методической литературе соответствующих упражнений.

Глубина знаний учащихся о свойствах функций должна в первую очередь определяться умением применить их к тем вопросам, которые органически связаны с идеей функции. Ибо прочность усвоения учащимися того или иного понятия зависит не столько от многократного возвращения к нему, сколько от рассмотрения его с разных сторон, в разных ситуациях и аспектах, от умения использовать приобретенные знания на практике.

Понятие функции может служить идейной основой при изучении почти всего школьного курса математики, а при изучении уравнений и неравенств также и теоретической основой (особенно в старших классах). Действительно, задачу нахождения решений уравнений и неравенств можно рассматривать как частный случай более общей задачи - исследования свойств функций, а именно, нахождение их корней и промежутков знакопостоянства. Поэтому естественно решение уравнений и неравенств рассматривать сразу же после изучения соответствующих функций.

Искусственная изоляция уравнений от неравенств, уравнений и неравенств от изучения свойств функций в программе и учебниках не позволяет показать учащимся внутренние взаимосвязи между этими важными понятиями, что значительно снижает познавательную активность учащихся. Без широкого использования свойств функций нельзя серьезно говорить об улучшении качества знаний и умений учащихся в решении уравнений и неравенств.

При решении уравнений и неравенств учащимся зачастую стремятся дать определенный алгоритм. Это нередко ведет к мелкой типизации в способах решения уравнений и неравенств и лишает учащихся возможности понять общие закономерности, общий подход к их решению.

Алгоритм играет значительную роль в математике. Однако в процессе обучения использование только алгоритма может отрицательно сказаться на знаниях учащихся, ибо они при этом те или иные операции выполняют полусознательно, часто механически, что нередко ведет к формализму в их знаниях. Не удивительно, что учащийся стает втупик в тех случаях, когда решение задачи или упражнения невозможно или затруднительно получить при помощи известного ему алгоритма.

Значительные трудности составляет для учащихся решение иррациональных и трансцендентных неравенств. Можно указать следующие причины:

а) в школьном курсе математики не уделяется достаточного внимания решению таких неравенств;

б) учащиеся механически переносят способы решения уравнений на соответствующие неравенства, не умеют использовать свойства функций, входящих в неравенства.

Значительная часть ошибок, допускаемых учащимися при решении уравнений и неравенств, вызвана неумением правильно выполнить преобразования иррациональных и трансцендентных выражений, ибо при этом они, как правило, забывают учесть те значения переменных, для которых эти преобразования имеют место.

Подводя итоги контрольных и экзаменационных работ за 1967/68 учебный год в школах РСФСР и УССР, авторы подчеркивают:

"...многие учителя приучают школьников к механическому выполнению алгебраических преобразований, не требуя от них обоснований этих преобразований и различных их конкретных применений. Слабое усвоение тождественных преобразований в VI классе отражается на прохождении курса алгебры в старших классах...

Существенные недостатки в подготовке по алгебре и элементарным функциям обнаружили девятиклассники. Многие из них не понимают основных теорем о равносильности уравнений, не справляются с такими действиями, как умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Эти недостатки являются прежде всего результатом недооценки ...изучения теоретических вопросов... Во многих школах занятия по алгебре сводятся главным образом к выполнению трафаретных упражнений... При решении уравнений и выполнении тождественных преобразований недостаточно рассматриваются вопросы, связанные с допустимыми значениями букв"[1].

"Особенно много ошибок допустили восьмиклассники при решении иррационального уравнения $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x-3}=2$.

Не установив предварительно условий существования радикалов, большинство учащихся выполнили умножение в левой части уравнения и потом пользовались этим уравнением при проверке найденных корней. Вследствие этого была допушена грубая ошибка: посторонний

---

[1] А.В.Соколова, Итоги контрольных работ за 1967/68 учебный год, "Математика в школе", 1969, № 1, стр. 56.

корень $x = -2,5$ был признан пригодным. Досадно, что некоторые учителя согласились с таким решением"[I].

О решении же неравенств не приходится и говорить. Даже простые неравенства вызывают в учащихся и учителей-заочников значительно большие трудности, чем решение сложных уравнений. Учащиеся не подготовлены к их решению не только теоретически, но и психологически.

Все сказанное выше и предопределило выбор нами темы исследования в реферируемой диссертационной работе.

В диссертации поставлены следующие основные задачи:

I/ Дать краткий исторический обзор развития понятия функции в науке и проникновения функциональной зависимости в школьный курс математики.

2/ Провести анализ учебно-методической литературы (в основном последних лет) по вопросу использования понятия функции к изучению некоторых других тем и разделов школьного курса математики.

3/ Разработать методику изучения тождественных преобразований в курсе средней школы на основе понятия функции и множества.

4/ Определить содержание и разработать методику изучения тех свойств элементарных функций, которые будут широко использоваться при решении уравнений и неравенств; практически разработать применение этих свойств для рационализации процесса нахождения решений уравнений и неравенств и активизации мышления учащихся; обосновать необходимость и разработать методику введения в школьный курс математики понятия сложной функции и арифметических операций над элементарными функциями.

5/ Построить теорию равносильности уравнений (неравенств) на основе понятия элементарной функции, множества, тождественных и квазитождественных преобразований.

6/ Показать преимущества и разработать методику одновременного решения уравнений и неравенств, связанных с иррациональными и трансцендентными функциями на основе широкого использования

I И.Ф.Тесленко, Е.С.Дубинчук, А.П.Шатковский, О переводных и выпускных экзаменах в школах УССР в 1967/68 учебном году, "Математика в школе", 1969, № I, стр. 6I.

свойств соответствующих функций и метода сравнения.

7/ Исследовать, как в процессе решения уравнений и неравенств происходит усвоение основных свойств элементарных функций. Для этой цели разработать систему упражнений, которые позволяют последовательно использовать почти все основные свойства функций.

Диссертация написана на основе:

а/ анализа научной и учебно-методической литературы по математике и психологии;

б/ личного опыта работы в школе (7 лет), в Винницком педагогическом институте (2 года), на подготовительных курсах при физико-математическом факультете Киевского пединститута (2 года), на вступительных экзаменах в Винницкий и Киевский педагогические институты и Киевский институт пищевой промышленности;

в/ использования опыта работы лучших учителей математики школ Винницкой области и г.Киева;

г/ констатирующего эксперимента: проведения и анализа самостоятельных и контрольных работ учащихся средних школ и студентов пединститута, анализа экзаменационных работ и устных ответов абитуриентов, материалов районных, областных, республиканских и Всесоюзных школьных математических олимпиад, бесед с учащимися и учителями-заочниками и т.п.;

д/ результатов проведенного нами обучающего эксперимента в ряде школ г.Киева (№№ 57, 58, 101), г.Боярки Киевской области (школа "Юных математиков" на базе средних школ №№ 1, 3, 4), г.Винницы (№№ 15, 18).

Диссертация состоит из введения, четырех глав и библиографии.

В первой главе дан краткий исторический обзор развития понятия функции и его внедрения в школьный курс математики.

В развитии понятия функции выделяется три основных этапа:

а/ отождествление понятия функции с ее аналитическим выражением (или механической кривой);

б/ классическое определение функции;

в/ современное определение функции.

Являясь одним из основных понятий математики, долгое время понятие функции оставалось вне школьного курса.

Начало движения за реформу школьного курса математики на основе идеи функциональной зависимости связывают с именем известного немецкого математика Ф.Клейна и опубликованием в 1906 г. Меранской программы.

В России инициаторами были передовые математики-методисты В.П.Шереметьевский, С.И.Шохор-Троцкий, В.Е.Сердобинский и др.

Значительный вклад в осуществление идеи функциональной зависимости в курсе математики советской школы внесли видные математики и методисты А.Я.Хинчин, В.Л.Гончаров, А.Н.Колмогоров, А.И.Маркушевич, И.К.Андронов, В.М.Брадис, С.И.Новоселов и др.

Этому же вопросу посвящено ряд диссертационных работ (Ю.Н.Макарычева, Е.В.Вандышевой, В.Г.Ашкинузе, И.В.Севбо и др.).

Однако исследования велись в направлении разработки методики изучения отдельных вопросов, связанных с понятием и свойствами функций. Широких же исследований по изучению школьного курса математики на основе понятия функции не проведено.

После введения в среднюю школу учебного предмета - "Алгебра и элементарные функции" изучение функций и их свойств стало в центре внимания многих математиков и методистов. Но при этом основное внимание направляется на перестройку изучения функций в связи с введением в программу понятия производной и очень мало - на использование свойств функций при изучении таких важных традиционных разделов школьного курса математики, как тождественные преобразования, уравнения и неравенства.

В школьном курсе математики явно не вводится понятие сложной функции и операций над элементарными функциями, что значительно затрудняет использование этих понятий к изучению уравнений и неравенств и установлению свойств функций. Так, устойчивой и распространенной ошибкой среди учащихся есть перенесение всех свойств основной внешней функции на сложную. Например, функции

$y=f^2(x)$, $y=a^{f(x)}$, $y=\log_a f(x)$, $y=\sin f(x)$ -

учащиеся называют соответственно степенной, показательной, логарифмической, тригонометрической, что ведет к грубым ошибкам, вроде следующей: "функция $y=\sin x^2$ периодическая, так как она тригонометрическая".

Значительные трудности испытывают учащиеся при нахождении области определения, установлении периодичности, четности, монотонности сложных функций.

Учащиеся не всегда четко понимают, что принимается за сумму, разность, произведение, частное двух и больше элементарных функций. К сожалению, в школьных учебниках этот вопрос не нашел должного освещения. Нет ясности в нем и в методической литературе. Например, часто считают, что вследствие возведения в квадрат функции $f(x)=\sqrt{x-2}$, получим функцию $\mathcal{F}(x)=x-2$ с более широкой областью определения. Здесь происходит смешивание понятия возведения в степень с последующим выполнением преобразований над аналитическим выражением, которым задается функция.

Введение в школьный курс математики понятия арифметических операций над элементарными функциями позволяет более четко изложить некоторые теоремы о равносильности уравнений (неравенств).

Очень слабые знания учащихся и студентов по вопросу четности и периодичности функций. Большинство учащихся руководствуются при определении данных свойств внешними признаками.

Понятия области изменения, ограниченности функций, свойства монотонных функций слабо и односторонне используются при решении задач, уравнений и неравенств. Не только учащиеся, но и будущие учителя математики-студенты не знают в каком случае уравнение $f(x)=f(x_0)$ (x_0 входит в область определения функции $f(x)$) имеет только один корень ($x=x_0$), а в каком, кроме него, есть и другие корни; не всегда четко понимают, в каком случае уравнение $f(x)=a$ имеет решение и при том единственное, а в каком случае их может быть больше одного, в частности, бесконечное множество.

В учебниках, пособиях и сборниках задач еще очень мало примеров на использование свойств монотонных функций при решении уравнений и неравенств вида $f(x)=\varphi(x)$, $f(x)\gtrless\varphi(x)$ в случае, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют противоположные направления монотонности.

Традиционное определение тождества (как равенства, верного при всех допустимых значениях, входящих в него букв), принятое в школьных учебниках и учебно-методической литературе, имеет существенные недостатки: для тождеств, объединенных этим определением, вообще говоря, не выполняется свойство транзитивности, то есть из того, что $A \equiv B$, а $B \equiv C$ нельзя сделать вывод, что $A \equiv C$. Вызвано это тем, что такое определение объединяет в себе два типа равенств: равенства, в которых левая и правая части имеют одинаковые области определения, и равенства, в которых обе части имеют разные области определения. Такое объединение затрудняет построение четкой и простой теории равносильности уравнений и неравенств.

Кроме того, определение тождества, принятое в начале курса алгебры, которое в какой-то степени удовлетворяет потребностям преобразования рациональных выражений, позже механически переносится на преобразования иррациональных и трансцендентных выражений, что нередко приводит к недоразумениям и ошибкам.

В последнее время делаются попытки внести ясность в вопрос определения тождества и тождественных преобразований (академик А.Н.Колмогоров, Ю.А.Шиханович, А.А.Столяр, Е.Ваховский, А.Рывкин и др.). Однако этот вопрос требует дальнейшего уточнения и методической разработки.

Анализируя состояние изучения уравнений и неравенств в старших классах, можно заключить, что в учебно-методической литературе более обстоятельно разработан вопрос решения уравнений отдельно, а неравенств отдельно. Причем, те, кто занимается вопросом методики изучения того или иного вида уравнений, настаивают на увеличении в программе числа часов для их решения, не касаясь при этом методики решения соответствующих неравенств. В работах, посвященных решению неравенств, наоборот, высказываются пожелания об увеличении времени на их изучение, что на практике ставит учителя в затруднительное положение. Действительно, где же взять времени для того, чтобы учащиеся почти в одинаковой мере научились решать и уравнения, и неравенства?

Широкого исследования одновременного решения уравнений и неравенств в старших классах не проведено. Следует отметить работу П.М.Эрдниева[I], в которой рассматривается вопрос одновременного решения уравнений и неравенств соответственно первой и второй степени, то есть таких, для которых процесс нахождения решений один и тот же. А без показа различия в решении неравенств и уравнений нельзя говорить об успешном усвоении учащимися соответствующего материала. Показ этих различий и предупреждает учащихся от механического перенесения способов решения уравнений на неравенства. Кроме того, только при одновременном решении уравнений и неравенств можно в полной мере использовать свойства соответствующих функций.

Одновременное решение уравнений и неравенств дает возможность использовать метод сравнения посредством сопоставления и противопоставления общего и отличительного в способах их решения. Эффективность этого метода обоснована в ряде исследований по психологии (Д.Н.Богоявленский, Н.А.Менчинская, Е.Н.Кабанова-Меллер и др.).

Анализ учебно-методической литературы показал, что методика решения иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств на функциональной основе остается не разработанной. Между тем, на вступительных экзаменах в вузы все чаще предлагаются трансцендентные уравнения и неравенства, которые качественно отличаются от традиционных тем, что для их решения необходимо знать и уметь применить свойства не одной, а сразу нескольких алгебраи-

---

I П.М.Эрдниев, Методика упражнений по арифметике и алгебре, "Просвещение", М., I965.

ческих и трансцендентных функций, не просто знать, а понимать соответствующие теоремы о равносильности уравнений и неравенств, уметь глубоко логически мыслить.

Углубленное усвоение свойств функций и общей теории равносильности уравнений и неравенств в значительной мере повышает теоретическую и педагогическую их ценность в курсе средней школы. Тенденция недооценки роли трансцендентных уравнений и неравенств связана с формальной постановкой их изучения. В школе очень мало еще решается задач практического содержания, которые приводят к трансцендентным уравнениям и неравенствам; уравнения решаются такие, которые не требуют глубоких знаний свойств функций. Мало опираются на свойства функций при выяснении вопроса о равносильности уравнений и неравенств.

На устранение отмеченных недостатков и направлены исследования, проведенные нами в последующих главах диссертации.

В т о р а я г л а в а посвящена методике изучения тождественных преобразований на функциональной основе .

К тождественным преобразованиям можно подходить с двух точек зрения: функциональной и абстрактно-алгебраической.

В школьном курсе математики функциональный подход к изучению тождественных преобразований наиболее приемлем, ибо он находит свое отражение уже с первых шагов ознакомления учащихся с алгебраическими выражениями. Наряду с этим должна найти отражение и вторая точка зрения.

Так называемые традиционные тождества мы разделяем на тождества и квазитождества. Понятие тождества вводится при изучении целых алгебраических выражений, а затем, при изучении дробных выражений оно уточняется (в связи с тем, что дробное выражение может терять смысл для некоторых значений переменных) и вводится понятие квазитождества. Учащимся даются определения:

Тождеством называется равенство, обе части которого имеют одинаковые области определения, и верное для всех числовых значений букв (переменных) из этой области.

Квазитождеством называется равенство, обе части которого имеют не одинаковые области определения, и верное для всех числовых значений букв (переменных) из их общей области определения.

Для определенных таким образом тождеств всегда выполняется свойство транзитивности, а для квазитождеств - не выполняется.

Кроме того, вводится наиболее общее понятие тождества - тождество на множестве, которое включает в себя как тождества, так и квазитождества.

На первом этапе ознакомление учащихся с введенными понятиями происходит на конкретных примерах. Дальнейшее их усвоение осуществляется в процессе тождественных и квазитождественных преобразований, при вычислениях числовых значений выражений с предварительным упрощением, при выполнении сокращения дробей, при нахождении пределов, а в основном - в процессе решения уравнений и неравенств.

Все тождественные и квазитождественные преобразования выполняются на основе использования основных тождеств и квазитождеств, арсенал которых пополняется по мере изучения нового материала. Поэтому, при введении того или иного соотношения указывается, является ли оно тождеством или квазитождеством.

При выполнении преобразований иррациональных и трансцендентных выражений подчеркиваем значение функциональной точки зрения на тождественные и квазитождественные преобразования.

Теоретическая подготовка учащихся старших классов позволяет геометрически иллюстрировать некоторые тождества и квазитождества. В этих классах увеличивается удельный вес использования тождественных и квазитождественных преобразований к решению уравнений и неравенств, к исследованию функций, что дает возможность глубже раскрыть цель и содержание их изучения.

Решая уравнения и неравенства, учащиеся на конкретных примерах убеждаются, что при выполнении только тождественных преобразований в одной или обеих частях уравнения (неравенства) получаем уравнение (неравенство), равносильное данному, а при выполнении квазитождественных преобразований - не равносильное.

Введение понятия квазитождественных преобразований приучает учащихся следить за изменением области определения данного выражения.

Как показал эксперимент, при таком подходе значительно уменьшается количество допускаемых учащимися ошибок, анализ которых был дан в первой главе диссертации.

В третьей главе излагается методика изучения основных свойств элементарных функций и на конкретных примерах показано, как они используются при решении уравнений и неравенств, что позволяет в значительной мере рационализировать процесс получения решений.

Особое внимание обращается на подбор упражнений, решение которых с использованием свойств функций, способствует более глубокому пониманию учащимися этих свойств.

При изучении области определения функции обращается внимание учащихся на то, что функции будут различными, если они задаются одной и той же формулой, но имеют различные области определения. Сопоставляются, например, линейная функция и формула любого члена арифметической прогрессии, квадратная функция и формула суммы членов арифметической прогрессии, что способствует пониманию учащимися этих формул, как функций натурального аргумента.

Понятие области определения функции не может быть рассмотрено на одном уроке или в одной теме. Оно должно расширяться, углубляться по мере изучения новых функций, при введении понятия сложной функции, в процессе выполнения арифметических операций над функциями.

Проведенный нами эксперимент показал, что введение понятия сложной функции и арифметических операций над элементарными функциями ведет к значительному уменьшению типичных ошибок при исследовании функций и построения их графиков, и особенно при решении уравнений и неравенств.

Понятие сложной функции вводилось нами в 9 классе при изучении степенной функции на конкретных примерах в тесной связи с нахождением области определения функции, и лишь затем в общем случае.

Понятие арифметических операций над элементарными функциями вводится на теоретико-множественной основе. Здесь показано различие между понятием суммы, разности, произведения, частного функций и функциями, которые получаются после выполнения последующих квазитождественных преобразований. В большинстве случаев эти понятия смешивают.

Под суммой, разностью, произведением, частным двух или больше функций следует понимать такую функцию, числовые значения которой равны соответственно сумме, разности, произведению, частному соответствующих значений функций в их общей области определения, а для частного из этой области нужно исключить те значения x, для которых значения функции-делителя равны нулю. Подобраны упражнения, способствующие подготовке учащихся к усвоению понятия арифметических операций над функциями.

Обращается внимание на выполнение арифметических операций над функциями, заданными табличным и графическим способами.

Затем показано, как понятия области определения, сложной функции и арифметических операций находят применение.

Пропедевтику понятий множества значений функции, ограниченности функции нужно начинать уже в 7-8 классах, при рассмотрении выражений, содержащих знак абсолютной величины, квадратной функции и др. Наводится система упражнений, способствующая этим целям.

В школьной практике понятие множества значений функции и ограниченности в лучшем случае используется при построении графиков и очень редко при решении уравнений и неравенств. Между тем, как для уравнений типа $f(x)=a$, где a - действительное число, понятие множества значений функции может быть основой для рассмотрения теоремы существования его решений.

Пусть область определения уравнения $f(x)=\varphi(x)$ есть множество X, а множествами значений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут соответственно Y_1 и Y_2. Тогда делаются такие выводы:

а) если $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, то уравнение решения не имеет;

б) необходимым условием существования решения уравнения является $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$;

в) зная общую часть множеств значений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, нередко можно указать границы нахождения корней уравнения. В этом случае ставится по существу задача: найти те значения x, для которых значения обеих функций попадают в один и тот же числовой промежуток?

Если множества Y_1 и Y_2 представляют собой непрерывные числовые промежутки и $Y_1 \cap Y_2 = \phi$, то это значит, что для всех значений x из общей области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполняется только одно из двух неравенств $f(x) > \varphi(x)$ или $f(x) < \varphi(x)$.

На ряде примеров показано применение понятия множества значений функции и ее ограниченности при решении уравнений и неравенств (в том числе "нестандартных").

Пропедевтику понятия четности функции в школьном курсе математики следует проводить уже при изучении алгебраических выражений понятия абсолютной величины числа, координатной плоскости.

В работе излагается методика изучения свойств четных функций. В школьном курсе математики неоправданно поздно рассматривают свойства четных и нечетных функций.

Показано использовывание свойств четных и нечетных функций при решении уравнений и неравенств с целью рационализации этих решений. Делаются выводы:

1/ Для того, чтобы найти решение уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ четная или нечетная функция, достаточно сначала найти его для $x \geq 0$ (или $x \leq 0$). После этого записываются симметрические относительно нуля корни.

2/ Чтобы решить неравенство $f(x) \geq 0$, где $f(x)$ четная функция, достаточно найти его решение для $x \geq 0$ (или $x \leq 0$), ибо тогда будет известным его решение для $x < 0$ (или $x > 0$). Действительно, если решением данного неравенства есть интервал (x_1, x_2), где x_1, x_2 - числа одного знака или одно из них равно нулю, то решением данного неравенства есть и интервал $(-x_2, -x_1)$.

3/ Решение неравенства $f(x)>0$, где $f(x)$ - нечетная функция, проводится в такой последовательности:

а) находится область определения функции $f(x)$;

б) находятся корни функции $f(x)$ для $x>0$;

в) находятся для $x>0$ те промежутки (или значения x), для которых $f(x)>0$;

г) находятся для $x>0$ те значения x, для которых $f(x)<0$.

Для этого достаточно из области определения функции $f(x)$ исключить те значения x, для которых $f(x)=0$, $f(x)>0$;

д) полученным в пункте г) промежуткам записываем симметричные относительно нуля промежутки, которые и будут решением неравенства $f(x)>0$ для $x<0$.

В работе устанавливается тот минимум знаний для учащихся о периодичности функций, который они должны усвоить с целью использования их к решению уравнений и неравенств.

Затем излагается наиболее приемлемая в школе методика определения периода функций вида $y=|f(x)|$, где $f(x)$ - периодическая, так как этот вопрос является для учащихся трудным. Учащимся 10 класса сообщаются некоторые сведения о периодичности сложных функций, у которых или внешняя, или внутренняя функции - периодические.

Опыт показывает, что в учащихся значительные трудности вызывает решение вопроса о периодичности функций $y=f[\varphi(x)]$, когда f периодическая функция, а φ - непериодическая.

Общепринятый подход к решению этого вопроса, который распространен в учебно-методической литературе, связан со сложными выкладками, особенно в том случае, когда функция непериодическая. В этом нет никакой необходимости. Действительно, достаточно показать, что для исследуемой функции непериодически повторяется одно из ее свойств, например, корни, промежутки знакопостоянства, локальные экстремумы и т.д.

Рассматривается также вопрос об арифметических операциях над периодическими функциями.

При решении многих уравнений и неравенств, построении графиков некоторых функций значительные облегчения дает знание периода функций $y=\sin^n x$, $y=\cos^n x$, $y=tg^n x$, $y=ctg^n x$, где n - натуральное число. В методической литературе период таких функций находится способом предварительного понижения степени, что при больших n представляет значительные дополнительные трудности.

В диссертации просто доказывается, что период функций $y=\sin^{2k}x$, $y=\cos^{2k}x$, $y=tg^n x$, $y=ctg^n x$ равен π, а период функций $y=\sin^{2k+1}x$, $y=\cos^{2k+1}x$ — 2π.

При решении уравнений и неравенств, левая часть которых представляет собой произведение тригонометрических функций, а правая нуль, важно знать период функции, находящейся в левой части. К сожалению, при нахождении периода таких функций допускаются ошибки даже в методической литературе.

Для того, чтобы правильно найти период таких функций преобразовывают произведение в алгебраическую сумму, что естественно каждый раз отнимает много времени.

В диссертации устанавливается алгоритм нахождения периода функции вида: $f_k(x)=\prod_{i=1}^{k}\cos n_i x$; $\varphi_k(x)=\prod_{i=1}^{k}\cos(n_i x+\varphi_i)$,

$$f_k(x)=\prod_{i=1}^{k}\sin n_i x \quad ; \quad \varphi_k(x)=\prod_{i=1}^{k}\sin(n_i x+\varphi_i).$$

Учащихся с этим алгоритмом можно ознакомить только для небольших k $(k=3,4,5)$. Подробнее его можно дать учащимся во внеурочное время или на факультативных занятиях.

Использование свойств периодических функций иллюстрируется на конкретных примерах.

Например, для нахождения общего решения неравенства

$$\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$$

с использованием свойств четных и периодических функций достаточно его решить для $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$. Общее решение неравенства при этом запишется с помощью всего двух серий промежутков, вместо восьми, приведенных в сборнике П.С.Моденова[I]. Эффективность получения решения подобных неравенств хорошо проследить, сравнив его с обычными способами.

В диссертации дается критический анализ различных подходов к вопросу кратности корней трансцендентной функции и вводится понятие повторных корней при решении неравенств, у которых левая часть может быть представлена в виде произведения нескольких функций, а правая равна нулю.

На наш взгляд, ничем не оправдано игнорирование в школьном курсе при решении неравенств важным свойством элементарной функции сохранять знак своих значений на промежутке, где она определена и не имеет корней. Это свойство можно сообщить учащимся без доказательства, исходя из геометрического образа. Его использование позволяет вооружить учащихся общим способом решения неравенств $f(x) \gtrless 0$: находится область определения и корни функции $f(x)$, выписываются промежутки знакопостоянства функции и непосредственной подстановкой одного значения из каждого такого промежутка находятся решения

I П.С.Моденов, Сборник задач по специальному курсу элементарной математики, "Высшая школа", М., 1960.

неравенства.

Разумное сочетание этого способа с традиционным школьным способом, основанным на применении свойств числовых неравенств и теорем о равносильности, повышает активность учащихся, их интерес к математике. Кроме того, общий способ решения дает простой и удобный прием проверки решений неравенства в отличие от тех часто громоздких приемов, которые нередко предлагаются в методической литературе.

В работе показано на примерах эффективность использования общего способа решения неравенств и понятия повторных корней соответствующего уравнения.

Так, при решении неравенства

$$\sin 15x - \sin 14x > 0$$

с использованием свойств функций (периодичности, четности, повторного корня и непрерывности) достаточно установить знак функции $F(x) = \sin 15x - \sin 14x$ только в интервале $(0, \frac{\pi}{19})$. Решение данного неравенства записывается с помощью I5-ти серий промежутков. Можно представить ту огромную работу, которую пришлось бы выполнить, устанавливая знак функции на всех этих I5-ти промежутках.

В диссертации дана методика исследования функций на монотонность как элементарными средствами, так и с помощью производной функции.

Учащихся важно ознакомить с теоремой о нахождении характера монотонности сложной функции, в которой внешняя и внутренняя функции монотонные (если обе функции имеют одинаковое направление монотонности, то сложная функция монотонно возрастает, а если противоположное - убывает).

В диссертации подобраны вопросы, решение которых помогает учащимся глубже усвоить свойства монотонных функций. Затрагивается также вопрос о монотонности функций, образованных при помощи арифметических операций.

Показано использование свойств монотонных функций при решении уравнений. Отметим некоторые из них:

а) Если функция $f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x)=f(x_0)$ имеет только один корень $x=x_0$, где x_0 входит в область определения функции $f(x)$;

б) Если же $f(x)$ кусочно-монотонна, то такое уравнение может иметь не только больше одного корня, но и бесконечное их число (в случае, когда $f(x)$ имеет бесконечное число промежутков монотонности);

в) Если функция $f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x)=a$ не может иметь больше одного корня. Например, учащиеся должны четко представлять, что уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}=6$ не может иметь больше одного корня.

Этими свойствами удобно пользоваться при рассмотрении вопроса о равносильности уравнений

$$f(x)=\varphi(x) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{F}[f(x)]=\mathcal{F}[\varphi(x)].$$

Если в уравнении $f(x)=\varphi(x)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ изменяются в противоположных направлениях в области определения уравнения, то оно имеет не больше одного корня.

Сделаны выводы в отношении использования монотонных функций к решению неравенств.

Рассмотренное в диссертации построение графиков функций с помощью геометрических преобразований известного графика позволяет учащимся понять самое общее определение функции, как соответствия между множествами (здесь устанавливается соответствие между множествами, элементами которых являются не числа, а точки плоскости). В работе вводятся такие нечисловые функции как функция симметрии (S), параллельного переноса (φ), сжатия или растяжения к осям координат (K). Показана суперпозиция этих функций, например, график функции $f(x+a)+b$ можна получить из графика функции $f(x)$ с помощью всего одного параллельного переноса на расстояние $d=\sqrt{a^2+b^2}$ в направлении, образующем угол $\beta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ с положительным направлением оси абсцисс.

Построение графиков тесно увязывается с вопросом использования их для решения уравнений и неравенств. Приводится система упражнений для более глубокого усвоения геометрических преобразований графиков и решения уравнений и неравенств. Например, зная решение уравнения $f(x)=0$ (неравенства $f(x)\gtrless 0$), записать решение уравнений

$$f(x+a)=0,\ f(-x)=0,\ f(ax)=0,\ f(ax+b)=0$$

и (неравенств $f(x+a)\gtrless 0,\ f(-x)\gtrless 0,\ f(ax)\gtrless 0,\ f(ax+b)\gtrless 0$).

Решение таких упражнений вызывает значительный интерес в учащихся.

Четвертая глава посвящена одновременному решению уравнений и неравенств, связанных с иррациональными, а затем трансцендентными функциями в старших классах.

Если имеем элементарные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то для любого значения x из их общей области определения X функции принимают определенные числовые значения, которые могут находиться между собой только в одном из трех возможных отношений: равно, больше, меньше. Поставим задачу: для каких значений x, числовые значения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ находятся между собой в каждом из этих отношений?

Чтобы дать ответ на этот вопрос, необходимо решить соответственно уравнение $f(x)=\varphi(x)$ и неравенства:

$$f(x)>\varphi(x)\ ,\quad f(x)<\varphi(x).$$

Через X^0, X^+, X^- обозначаем соответственно решения уравнения и неравенств. Очевидно, что $X=X^0\cup X^+\cup X^-$ и, кроме того, нет такого значения x, которое принадлежало бы хотя бы двум множествам. Если будет известно любых два из трех множеств, то легко найти и третье.

При сопоставлении значения функций может представиться семь случаев (уравнение и оба неравенства имеют решение, уравнение и одно неравенство имеет решение, только одно неравенство имеет решение и т.д.), поэтому функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ подбираются так, чтобы все эти случаи были постепенно рассмотрены.

При экспериментировании материалов этой главы мы ставили такие основные цели:

1) Углубить знания учащихся по свойствам иррациональной, тригонометрических, показательной, логарифмической и других функций.

2) Показать практическое использование введенных нами понятий тождественных и квазитождественных преобразований при одновременном изучении теорем о равносильности уравнений и неравенств.

3) Углубить знания учащихся по общей теории решения уравнений и неравенств. Вооружить их общим подходом к решению уравнений и неравенств на функциональной основе с широким использованием числовых множеств и операций над ними.

4) Показать учащимся использование уравнений и неравенств к решению задач практического и технического содержания.

Разработана теория и методика одновременного изучения вопроса о равносильности уравнений и неравенств с использованием метода сравнения, который позволяет рельефно показать учащимся общие и отличительные стороны в решении уравнений и неравенств.

Первая теорема базируется на понятии выполнения тождественных преобразований, а две последующие - на понятии выполнения квазитождественных преобразований в одной или обеих частях уравнения или неравенства. Теоремы доказываются в общем случае с использованием понятия множества и иллюстрируются на конкретных примерах.

Четвертая и пятая теоремы базируются на введенных понятиях арифметических операций над элементарными функциями, на понятиях тождественных и квазитождественных преобразований и числового множества.

Шестая теорема касается равносильности уравнений и неравенств вида:

$$f(x) = \varphi(x) \text{ и } \mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}[\varphi(x)], \qquad f(x) \gtrless \varphi(x) \text{ и } \mathcal{F}[f(x)] \gtrless \mathcal{F}[\varphi(x)] \text{ или } \mathcal{F}[\varphi(x)] \lesseqgtr \mathcal{F}[\varphi(x)]$$

и доказывается на основе понятия монотонности функции $\mathcal{F}$.

Эта теорема позволяет охватить вопрос равносильности широкого класса уравнений и неравенств (вместо многих частных теорем)

Наконец, седьмая теорема посвящена решению уравнений вида $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ (неравенств $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \gtrless 0$).

Во втором параграфе рассматривается вопрос одновременного решения иррациональных уравнений и неравенств. Этот вопрос рассматривается после изучения свойств степенной функции $y = x^{r}$.

На основании понятия операций над множествами находятся решения уравнения или одного из двух неравенств по известным двум.

Решение неравенств проводится как традиционным, так и общим способами.

В экспериментальных классах, чтобы эффективнее использовать метод сравнения при одновременном решении уравнений и неравенств вместо знаков $=$, $>$, $<$ вводился знак $*$, что возможно в том случае, когда решение уравнения и неравенств опирается на теоремы, являющиеся для них общими. Например, решить уравнения и неравенства $\sqrt[3]{x^3-3x^2+x}=x-1$;

$\sqrt[3]{x^3-3x^2+x}>x-1$; $\sqrt[3]{x^3-3x^2+x}<x-1$.

Тогда записываем

$$\sqrt[3]{x^3-3x^2+x} * x-1 ;$$
$$x^3-3x^2+x * (x-1)^3 ;$$
$$x^3-3x^2+x * x^3-3x^2+3x-1 ;$$
$$x^3-3x^2+x-x^3+3x^2-3x+1 * 0 ;$$
$$-2x+1 * 0 ;$$
$$1 * 2x ;$$
$$\frac{1}{2} * x .$$

Заменив теперь знак * соответственно на =, >, < получим решение уравнения и обеих неравенств: $x=\frac{1}{2}$, $x<\frac{1}{2}$, $x>\frac{1}{2}$.

Такой прием используется и при решении трансцендентных уравнений и неравенств.

Подробно изложена методика одновременного решения уравнений и неравенств, связанных с тригонометрическими функциями. Особое внимание уделяется одновременному решению простейших тригонометрических уравнений и неравенств с использованием единичной окружности и графиков основных тригонометрических функций. Это обеспечивает дальнейший успех в решении более сложных уравнений и неравенств.

В дальнейшем упор делается не на рассмотрение всевозможных типов уравнений и неравенств, а на общий подход к их решению с использованием свойств функций.

Эксперимент показал, что решение неравенств, связанных с тригонометрическими функциями, лучше проводить с помощью общего способа решения, полнее использовав при этом свойства функций.

На конкретных примерах иллюстрируется эффективность комплексного применения свойств тригонометрических функций для быстрого и рационального получения решений уравнения и неравенств. Наибольшую рационализацию получаем при использовании свойств четных и нечетных функций, периода функции, понятия повторных корней, промежутков знакопостоянства.

Период функций используется для получения решений уравнений и неравенств, для объединения решений или удаления посторонних решений, для нахождения решений систем уравнений с одним неизвестным и т.д.

При изложении методики одновременного изучения уравнений и неравенств, связанных с показательной и логарифмической функциями особое внимание обращено на использование свойств монотонности показательной и логарифмической функций.

При решении уравнений и неравенств, связанных с логарифмической функцией, показано использование понятия квазитождественных и тождественных преобразований.

Примеры в этом разделе подбирались с таким расчетом, чтобы каждый из них был в какой-то мере связан с предыдущим и в тоже время содержал новое. Пристальное внимание уделяется уравнениям и неравенствам, для решения которых требуются глубокие знания свойств функций.

Кроме работы в экспериментальных классах, по теме исследования проводились факультативные занятия в школе (Боярская СШ № 3), на которые выносилось рассмотрение более сложных примеров одновременного решения уравнений и неравенств.

Экспериментальные данные показали целесообразность одновременного решения уравнений и неравенств, при этом удельный вес неравенств в школьном курсе математики значительно возрастает, что положительно влияет на общую математическую подготовку учащихся.

Предложенная система упражнений усиливает идею функциональной зависимости в школьном курсе математики, позволяет показать взаимосвязь между отдельными темами и разделами.

Результаты наших исследований широко обсуждались и получили положительную оценку:

а) на заседаниях кафедры элементарной математики и методики преподавания математики Киевского педагогического института им.А.М.Горького (1967-1969 гг.);

б) на отчетных научных конференциях преподавателей Киевского педагогического института (1966 - 1969 гг.);

в) на межвузовской научной конференции "XXП Герценовские педчтения" в г.Ленинграде (1969 г.);

г) на конференциях учителей математики: Радянского района г.Киева (август 1967, 1968 г.г.), заочных школ г.Киева(январь 1967 г.), Бородянского района Киевской области (январь 1968 г.), Макаровского района Киевской области (март 1969 г.);

д) на постоянно-действующем семинаре учителей математики Радянского района г.Киева (1967 г.).

В связи с переходом на новые программы по математике нами по предложению Киевского областного института усовершенствования квалификации учителей прочитано на курсах переподготовки учителей математики цикл установочных лекций по материалам диссертации. В частности с особым вниманием и интересом слушатели курсов восприняли рекомендованные материалы для проведения факультатива "Исследование функций и их графики".

По вопросам использования свойств функций и элементов теории множеств при одновременном решении уравнений и соответствующих неравенств нами по приглашению кафедры методики математики Винницкого педагогического института проведен на IУ курсе этого института спецсеминар по методике математики.

По заказу учебно-методического кабинета заочного педагогического образования при Министерстве просвещения УССР нами составлены для учителей-заочников пединститутов тексты контрольных работ по методике математики и образцы их выполнения, способствующие повышению идейно-теоретической подготовки учителей по вопросам, связанным с использованием понятия функции как идейно-теоретической основы современного школьного курса математики.

Кроме того, нами написан параграф "Решение уравнений и неравенств, связанных с тригонометрическими функциями" методического пособия для учителей-заочников пединститутов "Елементарна математика. Алгебра".

Обе эти работы положительно оценены рецензентами и находятся в производстве издательства "Радянська школа".

Основные положения диссертации опубликованы в статьях автора:

I. О применении метода сравнения и противопоставления при изучении уравнений и неравенств, Краткое содержание докладов научной межвузовской конференции "ХХП Герценовские чтения", Ленинград, 1969.

2. Про одночасне вивчення рівнянь і нерівностей на основі поняття про функцію. В соавторстве с учительницей экспериментальной школы Грибовской Л.Н. Журнал "Радянська школа", 1969, № 8.

3. Про побудову графіків функцій $y=f^n(x)$, $y=\sqrt[n]{f(x)}$, "Методика викладання математики, Республіканський науково-методичний збірник. Вип.5". "Радянська школа", К.,1969.

4. Урок з математики в середній школі, ж."Радянська школа", 1966, № 12.

5. Методи навчання - до вимог нової програми. Ж."Початкова школа",№ 2, 1969.

6. Побудова графіків функцій $y=f^n(x)$, $y=\sqrt[n]{f(x)}$, якщо відомий графік функції $y=f(x)$, тези звітно-наукової конфе-

ференції кафедр Київського педагогічного інституту ім.О.М.Горького, К., 1967.

7. Використання властивостей парних та непарних функцій при розв"язуванні деяких рівнянь і нерівностей; "Викладання математики в школі, збірник статей, випуск 6", "Радянська школа" К., 1970. (Принято к печати).

8. Побудова графіків функцій, аналітичні вирази яких містять знак абсолютної величини, "У світі математики", "Радянська школа", К., 1969, вип.2.

9. Використання властивостей функцій при розв"язуванні рівнянь та нерівностей, "Методика викладання математики, Республіканський збірник. Вип.6". "Радянська школа", К., 1970. (Принято к печати).

БФ 17282.21.УШ-69. Объем 1,75 п.л. Зак.1808 - 150.
Книжная типография № 5, Киев, Репина, 4.