МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А.М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Иван Ефимович ПОБЕРЕЖНИК

ФОРМИРОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБ ОСНОВНЫХ ИДЕЯХ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ /на арифметическом материале/

/по специальности № 130002 – методика преподавания математики/

Диссертация написана на украинском языке

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Киев – 1972

Работа выполнена на кафедре элементарной математики и методики преподавания математики Винницкого государственного педагогического института им. Н.Островского.

Научный руководитель – профессор И.Е.ШИМАНСКИЙ.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор В.С.ЧАРИН,
кандидат педагогических наук, доцент Е.А.ЧЕНАКАЛ.

Ведущий отзыв –

Ивано-Франковский государственный педагогический институт им. В.С.Стефаника, кафедра математики

Автореферат разослан "27" июня 1973 г.
Защита диссертации состоится "19" сентября 1973 г. 14 ч. ауд. 448
на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института им. А.М.Горького /Киев-30, Пирогова, 9/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь совета

Исторические решения XXIУ съезда КПСС ставят перед со-
ветской школой величественную задачу: завершить в девятой
пятилетке полный переход ко всеобщему среднему образованию
молодежи. Но решения партии предусматривают развитие школы
не только вширь. Партийные и правительственные документы о
школе последних лет, в частности, постановления ЦК КПСС и
Совета Министров СССР "О мерах дальнейшего улучшения работы
средней общеобразовательной школы" (ноябрь 1966 г.), призы-
вает работников просвещения совершенствовать всю систему об-
разования, привести ее содержание в соответствие с потреб-
ностями развития науки, техники и культуры.

В связи с огромной ролью математики в современном науч-
ном и техническом прогрессе, возрастает роль школьного мате-
матического образования.

За последнее время в нашей стране немало сделано для
совершенствования преподавания математики в школе. Последователь-
но внедряются новые учебные планы и программы, которые в
основном соответствуют возросшим требованиям жизни. Издан ряд
новых учебников и методических пособий. Но это еще не означа-
ет, что проблема модернизации преподавания математики уже
ле решено и что уже отсутствует необходимость дальнейших пе-
дагогических исследований в этом направлении.

Преподавание школьного курса математики, в частности
арифметического материала, страдает, как известно, существен-
ными недостатками.

В учении о числовых системах нечетко выделены об...
идеи расширения числовых систем, нарушено правильное соот...
...ение между идейными и вычислительными моментами. При изуче...

нии отдельных числовых областей основное внимание уделяется самим числам и очень мало – структурам соответствующих числовых множеств.

На протяжении ряда лет в преподавании арифметики и алгебры внимание к теории было ослаблено. Учащихся средней школы недостаточно приучают к посильным обобщениям, им не прививают осознанного умения абстрагировать, мало знакомят с аксиоматическим методом и не вооружают в достаточной степени навыками дедуктивных рассуждений. Более того, некоторое время в связи с извращением идеи политехнизации школы упомянутые выше требования почти не ставились. Считали, что связь науки с жизнью можно осуществить за счет обильного насыщения учебников и задачников техническими терминами.

Против таких ошибочных взглядов выступают некоторые наши видные математики и педагоги. Так, Б.В.Гнеденко в статье "О перспективах математического образования" /"Математика в школе", 1965, № 6/ пишет: "Со всей ответственностью можно заявить, что для будущего общественного прогресса несравненно важнее приучить учащихся к логически безупречному мышлению, чем подменять эту большую задачу рассмотрением частных и зачастую лишь по форме прикладных примеров... Тем более я являюсь решительным противником такого положения, когда под видом связи с практикой желают выхолостить суть математического образования и подменить его заучиванием рецептов, решением стандартных задач по готовым правилам, рассмотрением примеров, лишь одетых в прикладные одежды. Полноценное математическое образование с логически отточенными доказательствами сейчас необходимо несравненно больше, чем в какую бы то ни было пору в прежние времена".

В школьном курсе математики рассматриваются различные действия над числами, многочленами, векторами, функциями и другими объектами. Но традиционное изучение их не способствует формированию общего понятия алгебраической операции. Не фиксируется внимание учащихся на инвариантности ряда свойств действий над числами и нечисловыми объектами.

Не формируется также важнейшая идея современной математики – идея алгебраической системы /алгебраической структуры/. Правда, в известном пособии Кочетковых[I] вводится понятие числового поля, но содержащиеся о нем мизерные сведения не позволяют ученикам усматривать в нем обобщающее математическое понятие.

Учащиеся не имеют также представления об идее изоморфизма, хотя с ней часто встречаются при изучении математики. Более того, с этой идеей недостаточно ознакомлены сами учителя. Именно это приводит к тому, что в школьной практике, особенно при геометрической интерпретации различных классов чисел точками /или векторами/ прямой или плоскости, часто пользуются изоморфным соответствием двух множеств только на том основании, что между их элементами существует взаимно однозначное соответствие.

Общие алгебраические идеи не нашли также отражения в нововведенном /обязательном/ курсе математики и в новых учебниках /действующих и пробных/, написанных в соответствии с новой программой. Лишь в одной теме факультативов новая

I. Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, ч.I, ч.II, "Просвещение", М., 1968.

программа предусматривает ознакомление учащихся с группой геометрических преобразований.

На недостаточность внимания новой программы к идеям современной алгебраической науки указывалось в ряде статей при обсуждении проекта программы. Авторы одной из критических статей справедливо заметили, что алгебра, как таковая, куда-то исчезла из новой программы, что в ней по существу "нет ни числа, ни группы, ни уравнения, осталось лишь изучение функции. Такой ярко выраженный функциональный уклон едва ли может быть оправдан и в наше время тоже выглядит архаично"[1/]

Известно, что преподавание математики в школе продолжительное время подвергалось критике за то, что развитие логического мышления учеников, ознакомление их с начальными сведениями об аксиоматическом методе и с дедуктивными рассуждениями в основном возлагалось на геометрию. Тем не менее в новой программе предусмотрено ознакомление с аксиоматическим построением науки на геометрическом материале. К тому же трудно не согласиться с мнением многих математиков и методистов, что для этой цели алгебраический материал больше подходит, чем геометрический.

Числовые множества представляют собой богатый конкретный материал для формирования представлений о таких обобщающих идеях, как идея алгебраической операции, алгебраической структуры, изоморфизма.

В нашей методической литературе еще недостаточно разработан вопрос о возможности и формах внедрения идей алгебраи-

---

I. Г.В.Вендерский, А.Ф.Пичурин, Содержание проекта программы и кадры, "Математика в школе", 1967, № 6, стр.17.

ческой науки в школьный курс математики. Правда, за последнее время появилось несколько педагогических исследований в этом направлении. В некоторых из них /напр.,в работе А.А.Столяра, Методы обучения математике, "Высшая школа", Минск, 1968/ вопрос о внедрении современных математических идей /в том числе и алгебраических/ рассмотрен лишь в проблематичном плане.

Диссертационные работы Н.А.Балькина и К.П.Захаровой посвящены изучению простейших теоретико-групповых понятий в старших классах. В диссертациях Г.А.Гинзбург и И.А.Барыбина разработаны системы изучения некоторых понятий современной алгебры /группы, кольца, поля, изоморфизма/ в школьном курсе математики, причем в последней работе рассматривается также проблема разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Но в перечисленных исследованиях разработана методика введения в школьное обучение элементов общей алгебры только для учащихся старших классов, хотя приобщать учеников к современным математическим идеям, в чем убеждает и наш опыт, можно и нужно по возможности раньше. Кроме того, в указанных исследованиях экспериментальная проверка методических рекомендаций проводилась в основном на кружковых и факультативных занятиях, в ЮМШ и школах с математическим уклоном. Однако нам неизвестны работы по исследованию форм внедрения идей алгебраической науки не только в старших, но и в средних классах с использованием для этого всех видов занятий, включая прежде всего уроки.

Высказанные выше соображения обусловили выбор темы реферируемого исследования.

В настоящей диссертации исследуются возможности и пути формирования представлений об основных идеях современной алгебры в школьном курсе математики /на арифметическом материале/.

В исследовании выделяются такие важнейшие идеи алгебраической науки, как идеи алгебраической операции, алгебраической системы, изоморфизма. Заметим, что тема диссертации - широка. Поэтому пришлось ограничиться числовыми системами, входящими в обязательный курс новой программы.

Соответственно проблеме исследования диссертант поставил перед собой цель решить такие конкретные задачи.

1. Проанализировать идейную сторону изложения материала о числовых системах, чтобы выяснить причины некоторых типичных ошибок учащихся и выявить возможности внедрения в соответствующие школьные предметы объединяющих алгебраических идей.

2. Опираясь на данные психологии, педагогики и математики, установить наиболее целесообразное распределение нетрадиционного материала, используемого в исследовании, между разными формами и видами занятий /обычными уроками, уроками повторения и систематизации, беседами, кружковыми занятиями/.

3. Определить методические принципы формирования алгебраических идей при изучении числовых систем.

4. Исследовать и экспериментально проверить возможность ознакомления учащихся средних классов с примерами нечисловых алгебраических систем.

5. Экспериментально проверить возможность усиления теоретического уровня изучения числовых систем в обязательном курсе школьной математики.

6. Разработать на арифметическом материале школьного курса математики систему упражнений, которая способствовала бы формированию идей современной алгебры и вместе с тем более глубокому пониманию соответствующего программного материала.

Диссертация написана на основе:

а/ изучения отечественной и зарубежной литературы по психологии, педагогике, методике, математике;

б/ изучения и обобщения опыта учителей Винницкой области;

в/ многолетнего опыта работы автора в школе и вузе;

г/ констатирующего и обучающего экспериментов в школах №№ 6,8,4 г.Винницы, школе № 2 г.Тульчина, ряде сельских школ Винницкой области /Ново-Гребельской, Лука-Мелешковской, Ивановской, Мизяково-Хуторянской и других/, а также экспериментов в юношеских математических школах гг.Винницы и Хмельника.

Диссертация состоит из введения, двух глав, общих выводов и библиографии.

Во введении дано обоснование необходимости исследования по избранной теме, изложены задачи и методы исследования, система работы учителя по формированию у школьников представлений об идеях современной алгебры.

Рекомендованная в исследовании система работы учителя основывается на таких общенаучных, педагогических и психологических принципах.

01. Обновление содержания школьного математического образования должно происходить не столько за счет введения нового материала, сколько за счет идейного обогащения и способа изложения материала традиционного. Иными словами, внедрение в школьный курс современных математических идей должно опираться на использование минимального числа новых понятий.

02. Автор исследования руководствуется принципом необходимости идейного объединения арифметического и алгебраического материала школьного курса математики.

03. При определении теоретического уровня изложения материала, а также при установлении возрастных рубежей для введения новых абстрактных понятий использовались результаты психолого-педагогических исследований о познавательных возможностях детей.

04. В процессе работы диссертант руководствовался известными принципами дидактики.

<u>В первой главе</u> исследуется возможность использования традиционного материала о целых числах для формирования представлений об идеях современной алгебры. Учитывая возраст и математическое развитие учеников, мы не вводим абстрактных алгебраических понятий; представление о новых идеях даем исключительно на конкретном и доступном материале.

Первые два параграфа посвящены изучению алгебраических операций над натуральными числами. Понятно, что изучение этого вопроса зависит от способа построения данной числовой системы. В исследовании мы исходим из множественной трактовки натурального числа, хотя большинство наших рекомендаций пригодно для традиционного изложения. Определения основных положений арифметики натуральных чисел мы приняли примерно такие, как в пособии И.К.Андронова и В.М.Брадиса.[1/]

В этих параграфах делается попытка усовершенствовать систему изучения действий над натуральными числами таким образом, чтобы она готовила учащихся к соответствующим обобщениям и способствовала лучшему пониманию структуры арифметики натуральных чисел.

Предлагаемая система предусматривает в первую очередь углубленное изучение свойств арифметических действий. Особое внимание уделяется основным свойствам прямых действий. Под этим подразумевается следующее:

а/ разбиение свойств на основные /законы действий/ и неосновные /их следствия/;

б/ четкая формулировка свойств с использованием кванторов /без употребления самого термина "квантор" и соответствующих символов/;

в/ доступные учащимся обоснования;

г/ выяснение значения основных свойств в обосновании правил действий и упрощении вычислений.

Соответственно этому в диссертации дан ряд методических рекомендаций, в частности, приведено несколько адаптированных доказательств основных свойств прямых действий, которые, как

I. И.К.Андронов, В.М.Брадис, Арифметика, Учпедгиз, 1962.

показывает опыт, доступны учащимся и мало теряют в общности рассуждений.

В школьной практике при изучении арифметических действий не уделяется должного внимания свойствам существования и однозначности, хотя они имеют важное значение для формирования общего понятия алгебраической операции. В связи с этим выделяем их четкой формулировкой /также с использованием кванторов/, например, для сложения: сумма произвольных двух натуральных чисел всегда существует /существование/; для произвольных двух натуральных чисел существует не более одного натурального числа, являющегося их суммой /однозначность/.

Вводя нуль через понятие пустого множества, отмечаем такие его свойства, как существование, единственность, коммутативность и ассоциативность сложения. Отмечаем аналогичные свойства единицы для умножения. Выясняем целесообразность введения дополнительных определений умножения на нуль и единицу.

Приводим примеры действий, не имеющих нейтральных элементов.

В исследовании вопроса об обратных операциях прежде всего приводятся психологические и дидактические мотивы в пользу существующего в школе порядка изучения арифметических действий.

Как и для прямых действий, с должным вниманием рассматриваются вопросы, связанные со свойствами существования и однозначности, даются посильные обоснования соответствующих утверждений.

Вводятся известные понятия выполнимости действия в определенном множестве и замкнутости множества относительно данного действия.

Много внимания в исследовании уделяется урокам повторения. Опыт показывает, что в школьной практике такие уроки в основном сводятся к опросу основных положений темы и решению примеров на комбинированное применение действий или преобразований. Это, конечно, нужно. Но в обучении еще редко используется повторение изученного материала для соответствующих обобщений, выяснения связей между отдельными частями темы или раздела, осмысливания внутреннего логического единства материала, выявления новых аспектов приобретенных знаний.

Уроки повторения материала о системе N_0 I' используются для формирования представлений об идеях алгебраической операции и алгебраической структуры. С этой целью сравниваются свойства прямых и обратных им арифметических действий.

Для примера приведем таблицу сравнения определений и основных свойств сложения и умножения чисел множества N_0.

№№ пп		Название действия	
		Сложение	Умножение
I.	Определение	Действие нахождения суммы /числа/ по двум слагаемым /числам/.	Действие нахождения произведения /числа/ по двум сомножителям /числам/.

I. Пользуемся следующими обозначениями для числовых множеств: N - множество всех натуральных чисел, N_0 - множество всех целых неотрицательных чисел, Z - множество всех целых чисел, Q - множество всех рациональных чисел, R - множество всех действительных чисел.

1	2	3	4
2.	Существование	Сумма двух произвольных чисел множества N существует.	Произведение двух произвольных чисел множества N существует.
3.	Однозначность	Для произвольных двух чисел множества N существует не более одного числа этого множества, являющегося их суммой.	Для произвольных двух чисел множества N существует не более одного числа этого множества, являющегося их произведением.
4.	Переместительность	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
5.	Сочетательность	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
6.	Существование нейтрального элемента	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
7.	Монотонность	Если $a\geq b$, то $a+c\geq b+c$	Если $a\geq b$, то $ac\geq bc$

Аналогичные сравнения проводим для свойств, являющихся следствием основных. Такие сравнения дают возможность ученикам глубже усвоить материал об арифметических действиях, а учителям - подготовить их к пониманию в дальнейшем общего понятия алгебраической операции, обратить внимание на свойства действий, характеризующих множество натуральных чисел как алгебраическую систему, усматривать аналогию в строении множества N относительно операций сложения и умножения. Обобщение материала о действиях помогает ученикам выделить в них наиболее существенное и пренебречь второстепенными чертами. Именно при выявлении общих признаков и свойств действий вырисовываются контуры идеи алгебраической операции.

В третьем параграфе, посвященном изучению основных свойств алгебраических операций над целыми числами, сначала рассматриваются мотивы в пользу целесообразности расширения числового множества N_0 до системы целых чисел, а не положительных рациональных.

В этом же параграфе дан сжатый обзор и анализ возможных способов и приемов введения в школьное обучение отрицательных чисел. В диссертации исходим из тех приемов введения отрицательных чисел, в основу которых положены их конкретные представления. На уроках повторения указываем учащимся на возможность мотивировать потребность в новых числах необходимостью сделать операцию вычитания всегда выполнимой.

При изучении прямых действий над целыми числами выясняем, по мере возможности, целесообразность введенных правил /определений/. С этой целью на примерах показываем, что другие, отличные от принятых, определения сложения или умножения целых чисел приводят к противоречию с арифметикой натуральных чисел.

При рассмотрении действий вычитания и деления целых чисел обращаем внимание на общность схемы изучения обоих обратных действий в множествах Z и N_0. В этой схеме выделены такие пункты:

а/ определение действия /вычитание, деление/;

б/ существование;

в/ однозначность;

г/ название результата действия /разность, частное/;

д/ обозначение / $a-b$, $a:b$ /;

е/ установление правила нахождения результата действия.

Подчеркивание универсальности такой схемы /а она верна не только для чисел этих множеств/ учит школьников выявлять существенное сходство между различными понятиями, готовит к пониманию общего понятия обратной операции.

В четвертом и восьмом параграфах описан опыт организации повторения материала о целых числах. Это повторение можно использовать для формирования представлений об алгебраических идеях.

Прежде всего сопоставлены определения и свойства прямых действий над натуральными и целыми числами. При этом обращено внимание на то, что действия над целыми числами не имеют той непосредственности и конкретности, которую они имели в множестве N_0 . В самом деле, умножение не является частным случаем сложения, сумма двух целых чисел необязательно должна превышать каждое из слагаемых, умножение не всегда означает увеличение и т.п. Такое сопоставление позволяет ученикам увидеть, как при расширении числовой системы быстро формализуется и обобщается понятие действия.

Отмечая общие признаки определений действий над числами множеств N_0 и Z , выделяем идею закона композиции: соответствия произвольной пары чисел множества N_0 или Z единственному третьему числу этого же множества.

Сравнив множества N , N_0 , Z относительно основных свойств прямых действий, отмечаем появление в Z новых свойств: замкнутости множества относительно операции вычитания и существование для каждого числа, противоположного ему. Фиксируем внимание учащихся на том, что множество Z замкнуто относительно прямых действий сложения и умножения, которые удовлетворяют свойствам сочетательности, переместительности и распределительности, а также действия вычитания. Таким образом, этим выясняется, что множество целых чисел наделено структурой коммутативного кольца.

Технику действий над числами в школьной практике нередко вырабатывают с помощью решения однотипных примеров. Опыт подтверждает, что нужные тренировочные упражнения можно разнообразить, использовав их для внедрения новых математических идей.

На одном из уроков повторения действий над целыми числами была предложена вниманию класса такая заранее приготовленная таблица:

Z	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
S	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	...

Установив взаимно однозначное соответствие между элементами множеств целых и четных чисел, выполняем сложения соответствующих чисел верхнего и нижнего рядов таблицы. Большинство учащихся самостоятельно замечает, что при таких сложениях чисел множеств Z и S существует взаимно однозначное соответствие между слагаемыми и суммами. Для чисел, отмеченных в таблице стрелками, записываем:

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & + & 3 & = & 2 & - & \text{сложение в множестве } Z \\
\updownarrow & & \downarrow & & \updownarrow & & \\
-2 & + & 6 & = & 4 & - & \text{сложение в множестве } S
\end{array}
$$

Непосредственной проверкой учащиеся убеждаются, что замеченное сходство между множествами Z и S относительно сложения распространяется и на вычитание, но не на умножение и деление.

Далее учащимся предложили таблицу, в верхнем ряду которой помещены числа натурального ряда, а в нижнем - двенадцатикратные им. Как и в предыдущем случае, учащиеся убеждаются в существовании между выписанными множествами отмеченного выше сходства относительно действий сложения и вычитания. Сопоставление нескольких конкретных сложений и вычитаний соответствующих чисел обоих множеств показывает, что сложение и вычитание чисел нижнего ряда можно заменить сложением и вычитанием им соответствующих /меньших!/ чисел верхнего ряда.

Рассмотренные примеры показывают, что на традиционном материале в урочные часы можно дать представление об изоморфном соответствии двух конкретных алгебраических структур и возможности использования этой идеи в вычислительной практике.

Шестой и седьмой параграфы посвящены кружковой работе. В первом из них исследуется возможность ознакомления учащихся V-VI классов с примерами алгебраической операции в множестве произвольной природы.

Рассматриваем следующий пример. Пусть элементами множества M будут две буквы-$П$ и $Н$. Для введения действия над этими буквами руководствовались следующими соображениями. Допустим, что имеются пластины двух видов: одни из них под действием определенной силы практически не прогибаются, другие - прогибаются. Под результатом действия понимаем прогибание двух сложенных пластин. Свойства расcматриваемой операции сравниваем со свойствами арифметических действий.

Такие примеры, как свидетельствует опыт, доступны. Они расширяют представление учащихся об операциях, развивают у них обобщающее и абстрактное мышление, что в свою очередь ускоряет процесс их общего, в частности математического, развития.

На кружковых занятиях проводится дальнейшее формирование представлений об идее изоморфизма. С этой целью сопоставляются свойства множеств целых чисел и линейных векторов /свободных/ относительно действий. Заметим, что на данном этапе не дается определение изоморфизма и не употребляется соответствующий термин. Мы лишь добиваемся, чтобы учащиеся, увидев идентичность двух множеств относительно определенных действий, осознали возможность замены изучения действий в одном множестве изучением соответствующих действий в другом. Выясняется выгода указанной замены.

В седьмом параграфе подобраны примеры, решение которых должно способствовать формированию представлений о дедуктивном характере рассуждений.

Вторая глава посвящена формированию представлений об идеях современной алгебры при изучении рациональных и действительных чисел.

Как и в первой главе, по известным причинам, мы не даем строгих определений отдельных видов алгебраических структур. Из соответствующих названий вводим лишь термины "кольцо" и "поле".

Большинство наших рекомендаций касается традиционного материала, а их реализация расчитана в основном на урочные часы и почти не требует дополнительной затраты времени.

В первом параграфе дан краткий обзор и анализ способов построения теории рациональных чисел.

Второй параграф посвящен изучению алгебраических операций над рациональными числами. В стабильных учебниках арифметики правила прямых действий обычно не определяются, а описываются. Опыт подтверждает доступность тех определений указанных действий, которые приведены в отмеченном выше пособии И.К.Андронова и В.М.Брадиса.

В исследовании даны методические рекомендации, касающиеся введения прямых и обратных действий, изучения их свойств, особенно законов действий и свойств нуля, единицы, чисел, взаимных /противоположного, обратного/ данному. Цель этих рекомендаций - подготовить учащихся к восприятию обобщающих идей алгебраической науки.

Исходя из наметившейся в нашей методике тенденции к усилению роли теории в средних классах, а также опираясь на личный опыт и ряд педагогических исследований, мы пришли к выводу о возможности доступного обоснования многих свойств действий над дробными числами, для подтверждения которых при традиционном обучении прибегают только к примерам. Для иллюстрации приведем схему доказательства одного из свойств,например, распределительности умножения относительно сложения.

№№ шагов	Рассуждения на конкретном примере	Рассуждения в общем виде	Обоснования
I	$\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{3+7}{8}\cdot\frac{4}{5}=$	$\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{c}{m}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{c}{m}=$	правило /определение/ суммы двух дробных чисел;
2	$=\frac{(3+7)\cdot 4}{8\cdot 5}=$	$=\frac{(a+b)\cdot c}{n\cdot m}=$	правило /определение/ умножения дробных чисел;
3	$=\frac{3\cdot 4+7\cdot 4}{8\cdot 5}=$	$=\frac{a\cdot c+b\cdot c}{n\cdot m}=$	распределительный закон умножения относительно сложения для натуральных чисел;
4	$=\frac{3\cdot 4}{8\cdot 5}+\frac{7\cdot 4}{8\cdot 5}=$	$=\frac{a\cdot c}{n\cdot m}+\frac{b\cdot c}{n\cdot m}=$	правило суммы двух дробных чисел;[1]
5	$=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{5}+\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{5}$	$=\frac{a}{n}\cdot\frac{c}{m}+\frac{b}{n}\cdot\frac{c}{m}$	правило умножения дробных чисел.

Для лучшего выделения идеи закона композиции приводятся примеры операций, отличных от арифметических.

Вопрос об именованных числах рассматривается только в связи с формированием представлений о понятии алгебраической операции. Высказываются соображения о нецелесообразности введения самого термина "именованные числа" и традиционного

1. Кроме того, мы здесь молчаливо воспользовались симметричностью равенства.

выполнения действий над ними.

Повторение теоретических сведений о рациональных числах проводилось в форме заключительной беседы, в которой прослеживался процесс обобщения понятия действия и изменения структурных свойств изученных числовых множеств в связи с расширением понятия о числе. Выделяя основные свойства прямых действий над рациональными числами, даем представление о структуре числового поля. Запоминание термина "поле" на данном этапе не считается обязательным.

Опыт убеждает, что сделанный обзор теоретического материала и подобранная система упражнений дают возможность на конкретных примерах ознакомить учеников с алгебраическими структурами группы, кольца, поля, изучить некоторые их простейшие свойства, а также помогают в определенной мере понять тот факт, что в множестве рациональных чисел изучаются не столько сами числа, сколько отношения между ними.

Представление об идее изоморфизма дается /как и в первой главе/ с помощью сравнения относительно действий сложения и умножения множеств Q и рациональных линейных векторов.

Шестой параграф посвящен описанию кружковых занятий по ознакомлению учащихся VI-х классов с арифметикой остатков. Чтобы лучше использовать жизненный опыт учеников, мы сначала рассмотрели множество чисел $A=\{0,1,2,\ldots,11\}$, соответствующих отметкам циферблата часов, и привели несколько примеров "часового" сложения. После этого рассмотрели множество $B=\{0,1,2\}$ наименьших неотрицательных остатков по модулю $\mathcal{B}$, ввели в нем операции сложения, умножения и проверили для них выполнимость основных свойств. С целью выделения объединяющих идей, отмечаются общие черты в определениях операций сложения и умножения, а также нейтральных и взаимных элементов в множествах $\mathcal{N}, \mathcal{Z}, \mathcal{Q}$ и $\mathcal{B}$. Сравнение основных свойств прямых действий в множествах $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{B}$ дало возможность учащимся увидеть исключительное сходство относительно введенных операций между множествами $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{B}$, т.е., что множество $\mathcal{B}$ наделено структурой поля.

Как показал опыт, эти начальные сведения об арифметике остатков доступны ученикам-кружковцам и вызывают у них большой интерес; значение же этого материала для формирования общих понятий алгебраической операции и алгебраической структуры - общеизвестно.

В следующем параграфе описана экспериментальная проверка нашей работы на данном этапе исследования. Проводя опросы /устные, письменные/ и контрольные работы, мы преследовали цель проверить, как, с одной стороны, проходит процесс формирования представлений об основных идеях современной алгебры, и, с другой - как влияет проведенная нами работа на усвоение программного материала.

Проверка показала, что ученики экспериментального класса, по сравнению с учениками других классов, имеют лучшее представление о структуре числовых множеств, глубже усваивают традиционные вопросы, относящиеся к числовым системам.

Восьмой параграф посвящен формированию представлений о поле действительных чисел. Прежде всего мы выражаем согласие с мнением тех методистов, которые возражают против наметившейся в последнее время тенденции уменьшения объема и снижения теоретического уровня изучения в школе иррациональных чисел. Эта тенденция нашла определенное отражение и в новой программе по математике.

Принимая во внимание большое значение системы действительных чисел, считаем целесообразным соответствующий материал выделить в программе в отдельную тему: "Понятие о поле действительных чисел".

Изложение этой трудной темы не должно, по нашему мнению, сопровождаться формальными определениями и доказательствами всех утверждений, важно четко сформулировать задачу о построении множества действительных чисел и по возможности дать более полное представление о его структуре.

Чтобы помочь учащимся лучше постичь общую идею расширения понятия о числе, осмыслить роль операций и их свойств в этой идее, а также четче представить контуры новой структуры, мы провели целенаправленное повторение материала о предыдущих числовых расширениях.

Исходя из педагогического опыта и анализа учебно-методической литературы, считаем целесообразным задачу о построении системы действительных чисел сформулировать в виде таких требований.

1^0. Числа расширенного множества должны быть обобщением рациональных чисел.

2^0. Действия сложения и умножения над новыми числами должны быть обобщением соответствующих действий над рациональными числами и для них должны выполняться известные основные свойства прямых действий.

3^0. Числа нового множества можно сравнивать, т.е. для произвольных двух его чисел a и b имеет место одно из соотношений: $a=b$, $a<b$, $a>b$, причем для неравенств выполнимы такие основные свойства: а/ если $a<b$, то $b>a$, и если $a>b$, то $b<a$; б/ если $a<b$, а $b<c$, то $a<c$; в/ если $a<b$, то $a+c<b+c$; г/ если $a<b$, то $ac<bc$ при $c>0$, и $ac>bc$ при $c<0$.

4^0. Должно существовать взаимно однозначное соответствие между числами расширенного множества и точками прямой.

Такая постановка вопроса не предусматривает увеличения объема и уровня преподавания материала об иррациональных числах, содержащегося в упомянутом выше пособии Кочетковых.

Перед определением прямых действий над действительными числами объясняется учащимся, почему для названия разных объектов - натуральных, отрицательных, дробных, иррациональных чисел, отличающихся своей конкретной природой, происхождением, изображением, - употребляется один и тот же термин "число". Это объяснение приводит учащихся к пониманию общего понятия коммутативной числовой системы.

Выделяется важная роль в алгебре формы вычислений, что способствует пониманию руководящего принципа современной алгебры: "...из двух основных составляющих всякого "исчисления"[1/], т.е. из тех объектов, над которыми производят какие-то операции и, с другой стороны, правилами операций, только послед-

---

1. Термин "исчисление" автор цитируемой статьи употребляет как синоним термина "алгебраическая структура".

ние являются действительно существенными".[2]

В исследовании дается ряд методических рекомендаций по изучению алгебраических операций над действительными числами.

На уроках повторения мы провели сравнение поля действительных чисел с числовыми системами $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$. Обратив внимание учащихся на совпадение основных свойств прямых действий, объяснили право переноса на действительные числа различных свойств действий над рациональными числами, а также некоторых алгебраических тождеств, известных учащимся еще до изучения действительных чисел.

В конце главы останавливаемся также на вопросе существования и единственности поля R. Вопрос о существовании решается положительно тем, что при рассмотрении множества бесконечных десятичных дробей была построена числовая система, являющаяся полем и удовлетворяющая требованиям, сформулированным в постановке задачи. Вопрос о единственности мы выясняем позже, когда рассматриваем изоморфизм поля действительных чисел и множества векторов прямой.

В исследовании придается большое значение подбору упражнений. При этом исходили из того, что они должны способствовать не только формированию представлений о новых алгебраических идеях, но и более глубокому усвоению традиционного материала, повышению интереса в обучении.

Содержание предлагаемой нами системы характеризуется такими типами упражнений:

I. Дьедонне Ж., Абстракция в математике и эволюция алгебры, сб."Преподавание математики", Учпедгиз, М., 1960.

а/ на правильное понимание определений действий, понятий выполнимости действия в определенном множестве и замкнутости множества относительно некоторого действия;

б/ на раскрытие значения основных свойств прямых действий для преобразования выражений;

в/ на проверку выполнимости законов действий, наличия нейтральных и взаимных элементов для различных конкретных алгебраических операций;

г/ на сопоставление соответствующих свойств прямых и обратных действий в одном и том же и разных множествах, выявления сходства множеств относительно введенных в них действий;

д/ на исследование возможности распространения некоторых утверждений с одной конкретной алгебраической структуры на другую /тоже конкретную/;

е/ на соотношения между числовыми множествами;

ж/ на формирование навыков дедуктивного мышления.

В модернизации школьного математического образования выдвинута проблема ознакомления учащихся с основными идеями и методами современной алгебры. Проведенное нами исследование представляет собой возможный вариант решения одной из частей этой большой и трудной методической проблемы, а именно – формирование представлений об объединяющих идеях алгебраической науки.

Эксперимент подтвердил возможность внедрения таких идей при изучении в школе числовых систем без расширения программного материала и значительной затраты времени.

Опыт показывает, что в средних классах нет необходимости стремиться к высокой формализации и абстракции, представления об алгебраических идеях можно давать на конкретном материале, в частности числовом.

Предлагаемая нами система изучения традиционного арифметического материала позволяет учащимся лучше видеть структурные свойства различных множеств относительно определенных в них алгебраических операций, выявлять существенные связи и замечать общее между отдельными фактами, учит рассуждать по аналогии, прививает интерес к закономерностям. Все это, в свою очередь, способствует прочному усвоению программного материала и воспитывает ценные качества мышления.

Опытные данные подтверждают возможность увеличения удельного веса теории при изучении числовых систем. Причем это можно сделать не во вред вычислительным аспектам.

Проведенные нами эксперименты свидетельствуют о возможности и целесообразности ознакомления учащихся средних классов /хотя бы на кружке/ с примерами алгебраических систем, введенные операции в которых отличаются от обычных.

Результаты наших исследований широко обсуждались и получили положительную оценку:

а/ на отчетных научных сессиях математических кафедр Винницкого пединститута;

б/ на заседаниях кафедры элементарной математики и методики преподавания математики этого же института;

в/ на республиканском научно-методическом семинаре

/1966-1971 гг./;

г/ на августовских и январских конференциях учителей /1967-1969 гг./;

д/ на совещании учителей математики Винницкой области;

е/ на кустовых совещаниях учителей математики в гг.Виннице, Гайсине и Хмельнике /1967 г./;

ж/ на постояннодействующем семинаре учителей г.Винницы /1966, 1968 гг./;

з/ на областных курсах повышения квалификации учителей /г.Винница, 1967-1969 гг./.

Основные положения диссертации опубликованы в статьях автора:

I. Основные направления и особенности движения за реформу преподавания математики в средней школе за рубежом и в Советском Союзе, сб."Доклады и сообщения кафедр института на отчетной научной сессии" /Тезисы/, вып.I, Винница, 1965 /на укр.яз./.

2. Реалистический проект, ж."Математика в школе", М., 1968, № I /совм. с Б.Н.Белым, А.П.Войцеховским, П.К.Глуховым/, использован в обзоре.

3. Понятие изоморфизма в школьном курсе математики, сб."Викладання математики в школі", вып.У, "Радянська школа", К., 1969 /на укр.яз./.

4. К вопросу об обновлении содержания школьного математического образования, сб."Методика викладання математики", вып.УI, "Радянська школа", К., 1970 /на укр.яз./.

5. Опыт факультативного изучения темы "Комплексные числа" в школе , в сб."Математика", XXIУ Герценовские чтения, Л., 1971.

Находятся в печати:

1. Формирование идеи алгебраической структуры на материале рациональных чисел, сб."Методика викладання математики", вып.УШ, "Радянська школа", К., 1972 /на укр.яз./.

2. Простейшие представления об идее изоморфизма на материале натуральных чисел, сб."Педагогіка і методика початкової освіти", вып.УШ, "Радянська школа", К., 1972 /на укр. яз./.