МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

В.П.РУДАКОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Автореферат - 76
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук,
профессор С.Ф.Фещенко

Киев - 1965

Киевский государственный педагогический институт имени А.М.Горького направляет Вам для ознакомления автореферат диссертационной работы тов. РУДАКОВА В.П. на тему "Некоторые вопросы устойчивости движения на конечном интервале времени", представленной к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Просьба ознакомиться с авторефератом и Ваши замечания прислать по адресу: г. Киев, бульвар Шевченко, 22/24, Киевский государственный педагогический институт имени А.М.Горького, научная часть.

Автореферат разослан в апреле 1965 г.

Защита состоится в октябре

Основоположником современной теории устойчивости движения является выдающийся русский математик и механик А.М.Ляпунов [I]. Значение работы Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения" для решения проблем теоретической и прикладной механики, автоматического регулирования и других наук огромно.

Понятию устойчивости по Ляпунову свойственны три основные особенности: 1/ отклонения бесконечно малы; 2/ отсутствуют постоянно действующие возмущения; 3/ интервал времени бесконечен. В силу этих особенностей теория Ляпунова не может полностью удовлетворить запросов современной техники, ибо здесь в задачах об устойчивости движения, как правило: 1/ отклонения конечны; 2/ имеют место постоянно действующие возмущения; 3/ интервал времени конечен. Поэтому классические исследования Ляпунова получили дальнейшее развитие в трудах ряда советских ученых.

Так понятие устойчивости "в малом" пополняется условиями устойчивости "в большом" (Немыцкий, Четаев и другие) и "в целом" (Айзерман, Еругин, Красовский, Плисс и другие). Горшин, Дубошин, Малкин и другие дополнили теорию Ляпунова, рассмотрев устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Особое место в теории устойчивости движения занимает устойчивость на конечном интервале. Дело в том, что распространить определение Ляпунова на конечный интервал без существенных изменений не удается, так как его "$\varepsilon - \delta$" - условия всегда выполняются на любом конечном интервале уже в силу одной непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от начальных данных. Поэтому понятие устойчивости движения на конечном интервале требует специального определения.

Устойчивостью движения на конечном интервале занимались: Зубов, Каменков, Красовский, Лебедев, Моисеев, Четаев и другие.

В реферируемой диссертации решаются задачи, которые возникают при исследовании устойчивости движения на конечном интервале в смысле А.А.Лебедева и технической устойчивости.

Диссертация состоит из введения и четырех глав.

Во введении дается краткий обзор основных понятий теории устойчивости движения и тех вопросов, которые рассматриваются в работе.

Глава I. Существование интервала устойчивости движения.

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}(t)x + X(t,x) \quad (1)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}(t)x + X(t,x) + R(t,x), \quad (2)$$

где матрица $\mathcal{P}(t) = \left(p_{ik}(t)\right)_1^n$ - вещественная и непрерывная функция времени t на интервале $[T_1, T_2]$, а векторы $X(t,x) = \{X_i(t,x)\}_1^n$ и $R(t,x) = \{R_i(t,x)\}_1^n$ - обладающие такими же свойствами функции времени t и фазовых координат $x = \{x_i\}_1^n$ в области

$T_1 \leq t \leq T_2$, $\|x\| \leq a$[1] $(T_2 > T_1 \geq 0,\ a > 0,\ T_1, T_2, a - cst)$. Кроме того, $X(t,0) \equiv 0$ и $X(t,x) = o(\|x\|)$[2].

Даются следующие определения устойчивости движения на конечном интервале, принадлежащие Лебедеву [2-4] .

Определение 1. Невозмущенное движение $x \equiv 0$ системы (I) называется устойчивым на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$ $(T_1 \leq t_0 < t_1 \leq T_2)$, если найдется такой цикл[3]

$$V(t,x) = A, \qquad (3)$$

что при любом достаточно малом положительном числе A на данном интервале выполняются условия:

1/ диаметр $\mathcal{D}(t)$ области

$$V(t,x) \leq A \qquad (4)$$

не превышает своего начального значения[4] $\mathcal{D}(t_0)$;

---

[1] За норму вектора $f(t,x) = \{f_i(t,x)\}_1^n$ во всех случаях принимается $\|f(t,x)\| = \max\{|f_i(t,x)|\}_1^n$.

[2] Обозначение $f(t,x) = o(\|x\|^m)$ означает, что функция $f(t,x)$ имеет порядок малости выше m-го.

[3] Под циклом понимается семейство непрерывных замкнутых подвижных поверхностей без контакта в пространстве x , охватывающее начало координат и стягивающееся к нему.

[4] Диаметром области (4) названа функция $\mathcal{D}(t) = 2\sup\left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ на поверхности (3).

2/ при всех начальных возмущениях $x_0 = x(t_0)$, удовлетворяющих условию

$$V(t_0, x_0) \leq A, \qquad (5)$$

соответствующие последующие возмущения $x = x(t)$, определяемые системой (I), удовлетворяют неравенству (4).

В противном случае невозмущенное движение неустойчиво на интервале $[t_0, t_1]$.

Определение 2. Невозмущенное движение $x \equiv 0$ системы (I) называется устойчивым на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$ при постоянно действующих возмущениях, если найдется такой цикл (3), что при любых достаточно малых положительных числах A и $\eta(A)$ на данном интервале выполняются условия:

1/ диаметр области (4) не превышает своего начального значения;

2/ при всех начальных возмущениях, удовлетворяющих условию (5), и всевозможных постоянно действующих возмущениях $R(t, x)$, удовлетворяющих условию

$$\|R(t, x)\| \leq \eta(A), \qquad (6)$$

соответствующие последующие возмущения, определяемые системой (2), удовлетворяют неравенству (4).

В противном случае невозмущенное движение неустойчиво на интервале $[t_0, t_1]$ при постоянно действующих возмущениях.

Непосредственно из этих определений вытекает

Теорема 1. Если невозмущенное движение устойчиво на некотором интервале $[t_0, t_1]$ при постоянно действующих возмущениях, то оно устойчиво на том же интервале и когда такие возмущения отсутствуют.

А из теоремы I –

Следствие. Если невозмущенное движение неустойчиво на интервале $[t_0, t_1]$ в случае, когда постоянно действующие возмущения отсутствуют, то оно неустойчиво на том же интервале и при наличии таких возмущений.

Теорема I (следствие из теоремы I) позволяет при установлении достаточных условий устойчивости (неустойчивости) невозмущенного движения на конечном интервале по первому приближению

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}(t)x \qquad (7)$$

ограничиться рассмотрением случая наличия (соответственно отсутствия) постоянно действующих возмущений, считая полученный результат верным и тогда, когда такие возмущения отсутствуют (соответственно наличествуют).

В дальнейшем определенную роль играет

Лемма I (принцип неустойчивости). Если для любого положительного числа η, как бы мало оно ни было, найдется такой вектор $R(t, x) \not\equiv 0$, удовлетворяющий условию $\|R(t, x)\| \leq \eta$, что все траектории движений системы (2), начавшиеся в момент времени $t = t_0$ в достаточно малой окрестности начала координат, удаляются от него при последующих значениях t (хотя бы только для значений t, близких к t_0), то невозмущенное движение неустойчиво на любом сколь угодно малом интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ $(\tau > 0)$ при постоянно действующих возмущениях. Если же траектории возмущенных движений обладают указанным свойством в случае, когда $R(t, x) \equiv 0$, то невозмущенное движение неустойчиво на любом интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ и при отсутствии постоянно действующих возмущений.

С помощью леммы I на конкретном примере показано, что утверждение, обратное теореме I, не имеет места.

Система (I) всегда представима в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}_0 x + \Delta\mathcal{P}(t)x + X(t,x),$$

где $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(t_0)$, $\Delta\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t) - \mathcal{P}_0$.

При исследовании невозмущенного движения возникает вопрос о возможности по одной лишь матрице $\mathcal{P}_0$ судить о существовании или несуществовании интервала времени $[t_0, t_0+\tau]$, на котором это движение устойчиво.

А.А.Лебедев показал [4], что для существования интервала $[t_0, t_0+\tau]$ $(\tau>0)$, на котором невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях независимо от матрицы $\Delta\mathcal{P}$ и вектора X, достаточно, чтобы все корни уравнения $\det(\mathcal{P}_0 - \lambda E) = 0$ (E - единичная матрица порядка n) имели отрицательную вещественную часть.

Следующая теорема дает более широкое достаточное условие, чем сформулированное Лебедевым. В ней показано также в каком смысле новое условие необходимо.

Теорема 2. Для существования отличного от нулевого интервала $[t_0, t_0+\tau]$, на котором невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях независимо от элементов матрицы $\mathcal{P}_0$, непринадлежащих главной диагонали, от матрицы $\Delta\mathcal{P}$ и от вектора X, необходимо и достаточно, чтобы хоть один из элементов главной диагонали матрицы $\mathcal{P}_0$ был отрицателен.

Для доказательства достаточности (в предположении, что $p_{11}(t_0) < 0$) построена функция Ляпунова в виде $V(t,x) = \varphi^2(t)\Phi(t,x)$. Тут $\Phi(t,x)$ - квадратичная форма по x, коэффициенты которой удовлетворяют системе

$$\frac{db_{ik}}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ji}(t)b_{jk}+p_{jk}(t)b_{ij}\right)\ (i,k=1,\dots,n)\quad(8)$$

и начальным условиям $b_{11}(t_0)=1$, $b_{ii}(t_0)=l_i>1\ (i\neq 1)$, $b_{ik}(t_0)=0\ (i\neq k)$; $\varphi(t)=\exp\frac{\varepsilon}{2}(t_0-t)$ (ε - достаточно малое положительное число).

Заметим, что система (8) обладает свойством: решения не перестают быть коэффициентами знакоопределенной квадратичной формы. Это решение в классе линейных однородных систем задачи А.М.Летова, которая в общем случае нелинейных систем рассмотрена Н.П.Еругиным в работе (5).

Необходимость условия теоремы 2 показана на примере системы $\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)x_k+x_i\sum_{k=1}^{n}x_k^2\ (i=1,\dots,n)$, где $p_{ii}(t_0)\geqslant 0$, $p_{ik}(t_0)=0\ (i\neq k)$, при помощи леммы I.

Достаточное условие для несуществования интервала устойчивости вида $[t_0, t_0+\tau]$ по одной лишь матрице $\mathcal{P}_0$ дает

Теорема 3. Если все главные миноры матрицы $Q_0=\frac{1}{2}(\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_0^*)$, где $\mathcal{P}_0^*$ - транспонированная матрица $\mathcal{P}_0$, положительны, то невозмущенное движение неустойчиво на любом интервале $[t_0,t_0+\tau]$ независимо от матрицы $\Delta\mathcal{P}$ и от вектора X.

Доказательство этой теоремы основано на лемме I.

Глава II. Определение параметров устойчивости (τ, A, $\eta(A)$).

Вводится в рассмотрение положительно определенная квадратичная форма

$$\Phi(t,x)=\sum_{i,k=1}^{n}b_{ik}(t)x_ix_k\ \left(b_{ik}=b_{ki}\right)\quad(9)$$

с непрерывно дифференцируемыми на $[t_0, t_1]$ коэффициентами.

Полная производная $d\Phi/dt$,составленная в силу системы (7), есть квадратичная форма

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}(t) x_i x_k \quad (c_{ik} = c_{ki})$$

с непрерывными на $[t_0, t_1]$ коэффициентами.

Предполагается, что $\mu_k(t)$ – наибольший в каждый момент времени корень уравнения $\det(C - \mu B) = 0$, а $\gamma_m(t)$ – наименьший из таких корней уравнения $\det(B - \gamma E) = 0$. Здесь $C(t) = (c_{ik}(t))_1^n$, $B(t) = (b_{ik}(t))_1^n$.

Доказывается следующая теорема, в которой сформулированы достаточные условия устойчивости при постоянно действующих возмущениях на интервале $[t_0, t_1]$ (длина которого известна и равна τ , $\tau = t_1 - t_0$) по первому приближению.

Теорема 4. Невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях на интервале $[t_0, t_1]$ независимо от вектора X , если на этом интервале выполняется неравенство

$$\exp\int_{t_0}^{t} (\mu_k(t) + \varepsilon)\, dt \leq \frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t_0)} \qquad (10)$$

(ε – положительное число).

Во введении в работу показывается ошибочность одной теоремы А.А.Лебедева ([4] , теорема 2), которая сводится к утверждению, что для устойчивости при постоянно действующих возмущениях на интервале $[t_0, t_1]$ по первому приближению достаточно, чтобы на этом интервале выполнялось неравенство

$$\exp\int_{t_0}^{t} \mu_k(t)\, dt < \frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t_0)} . \qquad (11)$$

Прежде всего, при $t = t_0$ неравенство (11) обращается в равенство. Исправить этот недостаток формулировки Лебедева, оговорив, что неравенство (11) должно выполняться на открытом слева интервале $(t_0, t_1]$, не удается, так как и тогда мы не получим достаточных условий устойчивости по первому приближению. Последнее показано на примере скалярного уравнения $\frac{dx}{dt} = -tx + \frac{1}{2}x^3$. Если здесь взять $\Phi = x^2$, то условие (11) будет выполнено на интервале $(0, \tau]$ произвольной длины. Однако, в силу леммы I, невозмущенное движение $x \equiv 0$ данного уравнения неустойчиво на любом интервале $[t_0, t_1]$.

Заметим, что неверным является и вывод относительно решения задачи Г.В.Каменкова [6] о максимальном интервале, который делается в работе [4] из той же ошибочной теоремы.

Теорему 4 диссертации следует считать исправленным вариантом рассмотренной теоремы А.А.Лебедева.

При доказательстве теоремы 4 строится функция Ляпунова вида $V(t,x) = \varphi^2(t)\,\Phi(t,x)$, где $\Phi(t,x)$ – квадратичная форма (9), а $\varphi(t)$ – положительная, непрерывно дифференцируемая функция времени, удовлетворяющая на интервале $[t_0, t_1]$ неравенству

$$\exp \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\mu_k(t) + \varepsilon\right)dt \leq \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t)} \leq \sqrt{\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t_0)}}.$$

Заметим, что достаточные условия устойчивости движения на конечном интервале $[t_0, t_1]$ в смысле Каменкова, полученные в работах [6, 7], остаются в силе и для устойчивости в рассматриваемом здесь смысле Лебедева. Оказывается, что в частном случае, когда V – форма с постоянными коэффициентами, достаточное условие, данное теоремой 4, шире упомянутых условий Каменкова и Лебедева.

Задачу Каменкова [6] о максимальном интервале, после некоторого обобщения, можно сформулировать так: определить максимальный интервал времени $[t_0, t_1]$, на котором по уравнениям первого приближения гарантировано, что при всех начальных возмущениях $x_{k0} = x_k(t_0)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} h_{ik} x_{k0}\right)^2 \leqslant A \tag{12}$$

$(H = (h_{ik})_1^n$ – постоянная матрица, $\det H \neq 0)$, и всевозможных постоянно действующих возмущениях $R(t,x)$,удовлетворяющих условию (6) ,соответствующие последующие возмущения $x_k = x_k(t)$, определяемые системой (2) , удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} h_{ik} x_k\right)^2 \leqslant A; \tag{13}$$

$A, \eta(A)$ – достаточно малые положительные числа.

Применив к системе (7) и к квадратичной форме

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} h_{ik} x_k\right)^2 \tag{14}$$

преобразование $y = Hx$, получим систему

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y, \tag{15}$$

где $y = \{y_i\}_1^n$, $Q(t) = H\mathcal{P}(t)H^{-1}$ и квадратичную форму $V(y) = V(H^{-1}y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Полная производная последней по t ,составленная в силу системы (15) , имеет вид квадратичной формы

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \sum_{i,k=1}^{n} \bar{c}_{ik}(t)\, y_i\, y_k \quad (\bar{c}_{ik} = \bar{c}_{ki}).$$

Пусть $\mu_k(t)$ –наибольший в каждый момент времени корень уравнения $\det(\bar{C} - \mu E) = 0$, где $\bar{C}(t) = (\bar{c}_{ik}(t))_1^n$. Тогда справедлива следующая теорема, дающая решение задачи о максимальном интервале.

Теорема 5. Для того чтобы при всех начальных возмущениях x_{k0}, удовлетворяющих условию (12) (при достаточно малом A), и всевозможных постоянно действующих возмущениях R, удовлетворяющих условию (6) (при достаточно малом $\eta(A)$), соответствующие последующие возмущения x_k, определяемые системой (2), удовлетворяли неравенству (13) на интервале $[t_0, t_1]$ независимо от вектора X, достаточно, а в общем случае и необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\mu_k(t_0) < 0, \tag{16}$$

$$\int_{t_0}^{t} \mu_k(t)dt < 0 \quad \text{при } t_0 < t \leq t_1. \tag{17}$$

Достаточность, в конечном счете, следует из теоремы 4. Для доказательства необходимости рассмотрена система $\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2}\left(p(t)x_i + x_i\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) (i = 1, \ldots, n)$ и квадратичная форма $V = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, на примере которых показано существование такой системы вида (I) (т.е. системы вида (2), где $R(t,x) \equiv 0$) и такой квадратичной формы вида (14), что нарушение условий (16) и (17), хотя бы в одной точке интервала $[t_0, t_1]$, влечет нарушение неравенства (13) на этом интервале некоторыми возмущениями $x_k(t)$ начальные значения которых удовлетворяют условию (12) (как бы мало ни было положительное число A).

В работах [2, 4, 6, 7, 15] и др. опущен расчет величин A и $\eta(A)$. В то же время эти величины представляют определенный интерес для приложений, так как вместе с функцией $V(t,x)$ позволяют указать границы начальных и постоянно действующих возмущений, при которых невозмущенное движение устойчиво на данном интервале. В.И.Зубов [8] дал метод определения числа A в случае, когда постоянно действующие возмущения отсутствуют и V - квадратичная форма с постоянными коэффициентами. В диссертации доказана

Теорема 6. Если устойчивость невозмущенного движения при постоянно действующих возмущениях на интервале $[t_0, t_1]$ устанавливается при помощи цикла, построенного в ходе доказательства теоремы 4, то в качестве параметров A и $\eta(A)$ могут быть взяты любые положительные числа, удовлетворяющие соответственно неравенствам

$$A \leq \min\left\{\left(\frac{\varepsilon s}{4n^2 p^2 b k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, (as)^2\right\}$$

и

$$\eta(A) \leq \frac{\varepsilon s \sqrt{A}}{4n^2 p^2 b}.$$

Здесь: ε - положительное число, при котором выполняется неравенство (10) ; α - достаточно малое положительное число, при котором $\|X(t, x)\|$ и $[V(t, x)]^{\frac{1}{2}+\alpha}$ являются величинами одного порядка малости при $t \in [t_0, t_1]$ и $\|x\| \to 0$, либо $\|X\| = o\left(V^{\frac{1}{2}+\alpha}\right)$; $k = \sup\limits_{t_0 \leq t \leq t_1,\ \|x\| \leq a} \|X(t,x)\| \, [V(t,x)]^{-\frac{1}{2}-\alpha}$;

$s = \inf\limits_{t_0 \leq t \leq t_1} \varphi(t)\sqrt{\gamma_m(t)}$; $p = \sup\limits_{t_0 \leq t \leq t_1} \varphi(t)$; $b = \sup\limits_{t_0 \leq t \leq t_1} \|B(t)\|$[1].

В качестве примера, в области $0 \leq t \leq 1$, $|x_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|x_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ рассмотрена система

$$x_1' = (t-1)x_1 + e^{-t}x_1^2 + x_2^2,$$
$$x_2' = (t-2)x_2 + x_1 x_2.$$

С помощью вспомогательной функции $V = x_1^2 + x_2^2$ показано, что невозмущенное движение данной системы устойчиво на всем заданном интервале $[0, 1]$ и что в качестве параметров устойчивости можно взять $A \leq \frac{1}{256}$ и $\eta(A) \leq \frac{\sqrt{A}}{16}$.

---

[1] Под нормой матрицы $B(t)$ понимается наибольшее в каждый момент времени значение модулей ее элементов.

В предыдущих исследованиях существенным ограничением было то, что системы невозмущенного и возмущенных движений задавались на конечном интервале времени $[T_1, T_2]$. Ясно, что в этом случае имело смысл рассматривать устойчивость тоже только на конечном интервале $[t_0, t_1]$ $(T_1 \leq t_0 < t_1 \leq T_2')$. Пусть теперь невозмущенное движение определяется системой (I), а всевозможные возмущенные движения – системой (2), где матрица $\mathcal{P}(t)$ и векторы $X(t,x)$ и $R(t,x)$ – вещественные и непрерывные функции своих аргументов в области $t \geq T$, $\|x\| \leq a$ $(T \geq 0, a > 0, T, a - const)$. При этом $X(t,0) \equiv 0$, $X(t,x) = o(\|x\|)$ равномерно по t.

Дается определение устойчивости невозмущенного движения при постоянно действующих возмущениях в смысле Лебедева на бесконечном интервале (определение 3), в котором конечный интервал $[t_0, t_1]$ определения 2 заменяется интервалом $[t_0, \infty)$ $(t_0 \geq T)$.

Для установления достаточного условия устойчивости в смысле такого определения вводится в рассмотрение положительно определенная квадратичная форма (9) с непрерывно дифференцируемыми и ограниченными коэффициентами и такая, что $\gamma_m(t) > b_* > 0$ $(b_* - const, t \geq t_0)$. При таком выборе формы $\Phi(t,x)$ доказывается следующая теорема, которая является обобщением теоремы 4 на случай бесконечного интервала.

Теорема 7. Невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях на интервале $[t_0, \infty)$ независимо от вектора X, если на этом интервале выполняется неравенство (10).

Эта теорема иллюстрируется на примере системы

$$x_1' = \frac{9 + 2e^{-t}}{4(e^{-t} - 2)} x_1 + 2e^{-t} x_2 + X_1(t, x_1, x_2),$$

$$x_2' = (e^{-t} - 2)e^{-t} x_1 - x_2 + X_2(t, x_1, x_2)$$

$(X_1, X_2$ – члены выше первого порядка малости$)$, заданной в области $0 \leq t < \infty$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq a$. С помощью функции $\varphi(t,x) = (2 - e^{-t})x_1^2 + 2x_2^2$ показано, что невозмущенное движение данной системы устойчиво при постоянно действующих возмущениях на интервале $[0, \infty)$ независимо от выбора членов X_1 и X_2.

Связь между понятиями устойчивости по Ляпунову и по Лебедеву на бесконечном интервале устанавливает

Теорема 8. Если невозмущенное движение устойчиво по Лебедеву на бесконечном интервале, то оно устойчиво по Ляпунову.

Из этой теоремы вытекает

Следствие. Если невозмущенное движение неустойчиво по Ляпунову, то оно неустойчиво по Лебедеву на бесконечном интервале.

Приведен пример, показывающий, что утверждение, обратное теореме 8, не имеет места. Более того, существуют движения устойчивые по Ляпунову и неустойчивые по Лебедеву даже на сколь угодно малом конечном интервале, отличном от нулевого.

Глава III. К вопросу о преобразовании систем линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к каноническим переменным.

Нередко при рассмотрении устойчивости по Ляпунову, по Лебедеву или технической устойчивости используется неособенное преобразование

$$y = H(t)x \qquad (18)$$

с непрерывно дифференцируемой матрицей $H(t) = \left(h_{ik}(t)\right)_1^n$, приводящее систему (7) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \left(L(t) + Q(t)\right)y, \qquad (19)$$

где $L = H\mathcal{P}H^{-1}$ – каноническая матрица Жордана-Вайерштрасса, $Q = H'H^{-1}$ (см., например, [9-12]).

Следуя принятой в работе [12] терминологии, преобразование (18) называется каноническим, а переменные $y = \{y_i\}_1^n$ в системе (19) – каноническими переменными.

Алгоритм построения матрицы $H(t)$ по данной матрице $\mathcal{P}(t)$ методом, имеющим практическое значение, в случае простых корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0, \tag{20}$$

где

$$\Delta(\lambda) = det(\mathcal{P} - \lambda E), \tag{21}$$

дан в работах [11,12].

В диссертации ставится задача об обобщении этого алгоритма на случай кратных корней уравнения (20). При условии, что матрица $\mathcal{P}(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале $[t_0, t_1]$, эта задача решается при следующих предположениях относительно корней уравнения (20):

1/ все корни непрерывно дифференцируемы на интервале $[t_0, t_1]$;

2/ среди тождественно неравных корней нет совпадающих при некоторых значениях t из данного интервала;

3/ при подстановке в определитель (21) вместо λ любого корня уравнения (20) алгебраические дополнения некоторого столбца не обращаются одновременно в нуль на данном интервале.

Здесь используется принцип метода Н.Д.Моисеева [13] преобразования систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к каноническому виду.

Полученный алгоритм сводится к следующему.

Алгебраическое дополнение k -го элемента s -го столбца определителя (21) обозначается через $\Delta_k(\lambda)$ $(k=1,\dots,n)$, а его m -ая производная по λ -через $\Delta_k^m(\lambda)$. Для каждого корня $\lambda_q(t)$ в качестве s -го столбца принимется именно тот, для которого реализуется третье условие относительно корней уравнения (20).

Элементы матрицы $H(t)$, соответствующие различным комплексно сопряженным парам корней $\lambda_q(t)$ и $\bar{\lambda}_q(t)$ $(q=1,\dots,r)$ уравнения (20), каждая из которых имеет кратность K_q, определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} h_{2i-1,k} &= \frac{1}{(j-1)!}\operatorname{Re}\Delta_k^{j-1}(\lambda_q), \\ h_{2i,k} &= \frac{1}{(j-1)!}\operatorname{Im}\Delta_k^{j-1}(\lambda_q) \end{aligned}\right\} \begin{gathered}(i=l_q+j,\ j=1,\dots,k_q; \\ k=1,\dots,n);\end{gathered}$$

где $q=1,\dots,r;\ l_1=0,\ l_2=K_1,\dots,l_r=\sum_{s=1}^{r-1}K_s.$

Элементы матрицы $H(t)$, соответствующие различным вещественным корням $\lambda_q(t)$ $(q=2r+1,\dots,p)$ уравнения (20), каждый из которых имеет кратность K_q определяются формулами

$$h_{ik}=\frac{1}{(j-1)!}\Delta_k^{j-1}(\lambda_q)\ (i=l_q+j,\ j=1,\dots,K_q;\ k=1,\dots,n),$$

где $q=2r+1,\dots,p;\ l_{2r+1}=2\sum_{s=1}^{r}K_s,\ l_{2r+2}=2\sum_{s=1}^{r}K_s+K_{2r+1},\dots,\ l_p=2\sum_{s=1}^{r}K_s+\sum_{s=1}^{p-2r-1}K_{2r+s}.$

Замечание 1. Миноры $n+1$ порядка матрицы $\mathcal{P}-\lambda E$ представляют из себя многочлены относительно λ, коэффициенты которых получаются из элементов матрицы $\mathcal{P}$ посредством операций умножения и алгебраического сложения. Поэтому требование, чтобы матрица $\mathcal{P}$ и все корни уравнения (20) были непрерывно дифференцируемыми функциями, есть достаточное условие непрерывной дифференцируемости построенной матрицы H.

Замечание 2. Требование, чтобы алгебраические дополнения элементов некоторого столбца определителя $\Delta(\lambda_i)$ не обращались одновременно в нуль, есть необходимое и достаточное условие не только для невырождаемости линейной формы $u_1 = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\lambda_i) x_k$, но и для невырождаемости вместе с ней и форм

$$u_m = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k^{m-1}(\lambda_i) x_k \quad (m = 2, 3, \ldots, k_i),$$

где k_i – кратность корня λ_i. А именно, имеет место

Теорема 9. Если при подстановке корня λ_i кратность которого k_i, алгебраические дополнения какого-либо столбца определителя $\Delta(\lambda)$ не обращаются одновременно в нуль на интервале $[t_0, t_1]$, то этим свойством обладают и их производные по λ от первого порядка до порядка $k_i - 1$.

Замечание 3. Описанный выше алгоритм (равно как и аналогичные алгоритмы для случая простых корней уравнения (20) [11, 12]) не гарантирует необращаемость в нуль на интервале $[t_0, t_1]$ определителя $\det H(t)$. Если же построенная матрица $H(t)$ оказывается неособенной на интервале $[t_0, t_1]$, то преобразование $y = H(t)x$ приводит на данном интервале систему (7) к каноническим переменным.

Глава 1. Техническая устойчивость некоторых линейных систем.

Рассматриваются системы

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}(t)x \qquad (22)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}(t)x + q(t), \qquad (23)$$

где матрица $\mathcal{P}(t) = \left(p_{ik}(t)\right)_1^n$ и вектор $q(t) = \{q_i(t)\}_1^n$ (характеризующий известные постоянно действующие возмущения) – вещественные и непрерывно дифференцируемые функции времени t на интервале $[t_0, t_1]$, причем $q(t_0)=0$. Предполагается также,что все корни уравнения (20) непрерывно дифференцируемые и система (22) приводима к каноническим переменным. А именно, имеется неособенная непрерывно дифференцируемая на $[t_0, t_1]$ матрица $H(t)$ (построенная, например, способом, который описан в главе III диссертации) такая, что преобразование (18) приводит систему (22) к виду (19) .

В фазовом пространстве X рассматривается область

$$V(t, x) \leq f(t), \tag{24}$$

где $V(t, x)$ - положительно определенная квадратичная форма по x с зависящими от t и непрерывными на $[t_0, t_1]$ коэффициентами, $f(t)$ - непрерывная, неотрицательная функция t на том же интервале.

Развитая в главах I и II теория устойчивости движения на конечном интервале времени имеет тесную связь с технической устойчивостью в смысле следующего определения.

Определение 4. Невозмущенное движение $x \equiv 0$ системы (22) называется технически устойчивым при постоянно действующих возмущениях $q(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$ по отношению к области (24), если при всех начальных возмущениях $x_0 = x(t_0)$, удовлетворяющих условию $V(t_0, x_0) \leq f(t_0)$, соответствующие последующие возмущения $x = x(t)$, определяемые системой (23) , удовлетворяют на данном интервале неравенству (24) .

В противном случае невозмущенное движение технически неустойчиво при постоянно действующих возмущениях $q(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$ относительно области (24).

Аналогично определяется техническая устойчивость и в случае $q(t)\equiv 0$.

Область технической устойчивости ищется в виде такого эллипсоида (24), что

$$V(t,x)=\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n}h_{\ell s}(t)x_s\right)^2 \qquad (25)$$

– квадратичная форма, получаемая на базе канонического преобразования (18), которое приводит ее к виду $W=\sum_{\ell=1}^{n}y_\ell^2$.

Производная dW/dt ,составленная в силу системы (19), является квадратичной формой $\frac{dW}{dt}=\sum_{\ell,s=1}^{n}c_{\ell s}(t)x_\ell x_s \quad (c_{\ell s}=c_{s\ell})$.

Пусть $\mu_\kappa(t)$ – наибольший в каждый момент времени корень уравнения $\det(C-\mu E)=0$, где $C(t)=(c_{\ell s}(t))_1^n$. Тогда имеет место

Теорема 10. Невозмущенное движение технически устойчиво на интервале $[t_0,t_1]$ по отношению к области

$$\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n}h_{\ell s}(t)x_s\right)^2\leqslant f(t), \qquad (26)$$

где функция $f(t)$ удовлетворяет неравенству

$$f(t)\geqslant f(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\mu_\kappa(t)dt.$$

Ставится задача отыскать такую функцию $f(t)$, что невозмущенное движение будет технически устойчиво при постоянно действующих возмущениях $q(t)$ на том же интервале $[t_0,t_1]$ относительно области (24), где в качестве квадратичной формы $V(t,x)$ взята та же самая форма (25).

Для решения этой задачи произвольно выбирается непрерывно дифференцируемая на $[t_0,t_1]$ функция $\nu(t)$ такая, что $\Delta(\nu)\neq 0$, и вводится в рассмотрение система

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{\mathcal{P}}(t)\tilde{x}, \qquad (27)$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{P} & p \\ \hline 0\ldots 0 & \nu \end{array}\right), \quad p = q\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \nu(t)\,dt\right), \quad \tilde{x} = \{\tilde{x}_i\}_1^{n+1}.$$

Система (27) с фиксированным начальным значением $\tilde{x}_{n+1,0} = 1$ в определенном смысле равносильна системе (23).

Преобразование $\tilde{y} = \tilde{H}(t)\tilde{x}$, где $\tilde{y} = \{\tilde{y}_i\}_1^{n+1}$,

$$\tilde{H} = \left(\begin{array}{c|c} H & h \\ \hline 0\ldots 0 & 1 \end{array}\right), \quad h = \{h_{k,n+1}\}_1^n,$$

$$h_{k,n+1} = \frac{1}{\Delta(\nu)} \sum_{\ell,s=1}^{n} h_{\ell s} p_{s,n+1} \Delta_{\ell k}, \quad \{p_{s,n+1}\}_1^n = p,$$

$\Delta_{\ell k}$ – алгебраическое дополнение ℓ -го элемента k -го столбца определителя $\det(L - \nu E)$, приводит систему (27) к каноническим переменным, т.е. к виду

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \left(\tilde{L}(t) + \tilde{Q}(t)\right)\tilde{y}, \qquad (28)$$

где $\tilde{L} = \tilde{H}\tilde{\mathcal{P}}\tilde{H}^{-1}$ – каноническая матрица, $\tilde{Q} = \tilde{H}'\tilde{H}^{-1}$.

Полная производная по t вспомогательной функции $\tilde{W} = \sum\limits_{\ell=1}^{n+1} \tilde{y}_\ell^2$, вычисленная в силу системы (28), имеет вид квадратичной формы

$$\frac{d\tilde{W}}{dt} = \sum_{\ell,s=1}^{n+1} \tilde{c}_{\ell s}(t)\tilde{y}_\ell \tilde{y}_s \quad (\tilde{c}_{\ell s} = \tilde{c}_{s\ell}).$$

Пусть $\tilde{\mu}_k(t)$ – наибольший в каждый момент времени корень уравнения $\det(\tilde{C} - \mu\tilde{E}) = 0$, где $\tilde{C}(t) = (\tilde{c}_{\ell s}(t))_1^{n+1}$, E – единичная матрица $n+1$ -го порядка;

$$\eta(t) = \exp\int\limits_{t_0}^{t} \nu(t)\,dt; \quad \xi(t) = \eta(t)\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} h_{\ell,n+1}^2(t)}.$$

Тогда справедлива

Теорема 11. Невозмущенное движение технически устойчиво при постоянно действующих возмущениях $q(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$ по отношению к области (26), где функция $f(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$f(t) \geq \xi^2(t),$$

$$\left(\sqrt{f(t)} - \xi(t)\right)^2 + \eta^2(t) \geq \left(f(t_0) + 1\right) \exp \int_{t_0}^{t} \tilde{\mu}_k(t)dt$$

$$(t_0 \leq t \leq t_1).$$

В качестве примера применения последнего результата исследуется распространенное в механике уравнение $s'' + a^2(t)s = \varphi(t)$ ($a(t)$ -непрерывно дифференцируемая функция, $a(t) \neq 0$, $\varphi(t)$ - непрерывная функция, $t_0 \leq t \leq t_1$). Если ввести замену $x_1 = s$, $x_2 = b(t) - s'$, где $b(t)$ - первообразная функция для $\varphi(t)$ с начальным условием $b(t_0) = 0$, то данное уравнение приводится к системе

$$x_1' = -x_2 + b(t),$$

$$x_2' = a^2(t) x_1, \qquad (29)$$

которая удовлетворяет всем требованиям системы (23).

Пусть $f(t)$ - любая непрерывная функция, удовлетворяющая на интервале $[t_0, t_1]$ неравенствам

$$f(t) \geq b^2(t), \left(\sqrt{f(t)} - |b(t)|\right)^2 + 1 \geq \left(f(t_0) + 1\right) \exp \int_{t_0}^{t} \tilde{\mu}_k(t)dt,$$

где $\tilde{\mu}_k(t) = \max\left\{|b'(t)|, \frac{2a'(t)}{a(t)}\right\}$. Тогда траектория всякого движения, определяемого системой (29), не выйдет на интервале $[t_0, t_1]$ за пределы области $a^2(t)x_1^2 + x_2^2 \leq f(t)$, если только она принадлежит этой области в начальный момент $t = t_0$

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [14 - 20].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, (1892) 1950.
2. А.А. Лебедев, Труды МАИ, вып. 50, 1955.
3. А.А. Лебедев, ИВУЗ, "Авиационная техника", № 1, 1958.
4. А.А. Лебедев, Труды МАИ, вып. 112, 1959.
5. Н.П. Еругин, ДАН БССР, т. УII, № 9, 1963.
6. Г.В. Каменков, ПММ, т. ХУII, вып. 5, 1953.
7. А.А. Лебедев, ПММ, т. ХУIII, вып. 1. 1954.
8. В.И. Зубов, Математические методы исследования систем автоматического регулирования, 1959.
9. Н.И. Гаврилов, Мат. сб., т. 41, вып. 4, 1957.
10. А.А. Лебедев, ПММ, т. ХУIII, вып. 2,1954.
11. Н.Д. Моисеев, Труды Гос. Союзн, НИИ, № 1, 1953.
12. К.А. Карачаров, А.Г. Пилютик, Устойчивость неустановившегося движения на конечном отрезке времени, ч. II, 1959.
13. Н.Д. Моисеев, Записки семинара по теории устойчивости движения, вып. 2. 1946.
14. В.П. Рудаков, Отчетно-научная конференция Киевского пединститута, Тезисы докладов, 1962.
15. В.П. Рудаков ДАН БССР, т. УI, № 12, 1962.
16. В.П. Рудаков, ДАН УССР, № 1, 1963.
17. В.П. Рудаков, Отчетно-научная конференция Житомирского пединститута, Тезисы докладов, 1964.

18. В.П. Рудаков, Первая украинская республиканская конференция молодых исследователей, Труды, т. I, 1964. /В печати/.

19. В.П. Рудаков, Всесоюзный симпозиум по качественной теории дифференциальных уравнений и ее применениям, Тезисы докладов, 1964.

20. В.П. Рудаков, Журнал "Дифференциальные уравнения", I, № 3, 1965.