КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

К. Ф. РУБИН

ОБОСНОВАНИЕ УЧЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

(длин прямолинейных отрезков, площадей простых многоугольников, объёмов простых многогранников).

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук профессор А. С. Смогоржевский.

г. ПОЛТАВА
1953 год.

ОБОСНОВАНИЕ УЧЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

(ДЛИН ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОТРЕЗКОВ, ПЛОЩАДЕЙ ПРОСТЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ОБЪЁМОВ ПРОСТЫХ МНОГОГРАННИКОВ)

(Работа состоит из введения (11 стр.), и пяти глав (глава I—59 стр., глава II—61 стр., глава III—94 стр., глава IV—128 стр., глава V—177 стр.). Список использованной литературы содержит 152 названия (117 на языках народов СССР, 35 иностранных).

ВВЕДЕНИЕ

Теория геометрических величин, будучи важнейшим разделом геометрии, так как она, в основном, определяет практическую ценность этой науки, является вместе с тем наиболее сложным для логического обоснования ее разделом, особенно в части, относящейся к измерению площадей и объёмов.

Вопросы измерения площадей и объёмов послужили главной причиной возникновения геометрии: „как и все другие науки, математика возникла из практических нужд людей: **из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов** (курсив наш К. Р.), из счисления времени и из механики.“*)

Учение о геометрических величинах представляет собой также одну из наиболее трудных в методическом отношении составных частей школьного курса геометрии.

Как известно, Евклид, построивший первую теорию геометрических величин, не пытался выразить длины, площади и объёмы фигур числами, то есть осуществить измерение их в нашем понимании. Однако, он подробно исследовал взаимные преобразования фигур чисто геометрическими построениями, в частности превращение многоугольника в равновеликий квадрат и, с помощью изложенной им в книге V „Начал“ теории отношений и пропорций, доказал соответствующие теоремы о пропорциональности длин отрезков, площадей и объёмов фигур.

Этим Евклид полностью подготовил решение задачи об установлении соответствия между геометрическими величинами и числами, что позволило позднейшим исследователям (в первую

---

*) Энгельс, Анти-Дюринг, стр. 37 М. 1950.

очередь Архимеду) в известной степени завершить ее без особого труда.

При такой постановке задачи заранее предполагается, что длины, площади и объёмы образуют класс **величин** и что длине каждого отрезка, площади каждой фигуры и объёму каждого тела должны соответствовать определенные числа—их меры; вопрос об измерении сводится не к доказательству возможности установления соответствия между этими величинами и числами, а к отысканию для различных фигур уже существующих чисел.

В этом виде задача измерения геометрических величин не обоснована. Необходимо прежде всего доказать, что длины, площади и объёмы геометрических фигур образуют класс **величин**, необходимо доказать возможность установления системы измерения их (то есть доказать существование мер этих величин). Тогда уже отыскание самих чисел (мер) для различных фигур не вызывает принципиальных затруднений и сводится к преодолению, так сказать, чисто „технических трудностей".

Такая точка зрения на рассматриваемую теорию просуществовала свыше двух тысяч лет и лишь в прошлом веке, когда в результате открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии, по новому поставлена общая задача обоснованая гиометрии начинают появляться работы, в которых правильно определяется задача обоснования учения о геометрических величинах.

Что касается вопроса обоснования измерения длин прямолинейных отрезков, то его решение не представляло принципиальных трудностей. С достаточной полнотой решение этой задачи было выполнено В. Ф. Каганом*) и С. О. Шатуновским**) в начале текущего века.

В отношении площадей прямолинейных фигур дело обстояло значительно сложнее. Основная трудность заключалась в установлении критерия сравнения площадей. Для отрезков равенство длин определяется равенством самих отрезков. Так как фигуры, имеющие равные площади, вообще говоря, не равны, то для площадей это условие является непригодным. В начале прошлого века было доказано, что всякие две фигуры, имеющие одинаковые площади,—равносоставлены, то есть, могут быть разложены на одинаковое количество попарно равных частей (теорема Больаи-Гервина). Это давало возможность установить критерий равенства площадей, исходя из понятия равносоставленности. Но при

---

*) В. Ф. Каган, Измерение длины прямолинейных отрезков и площадей прямолинейных фигур, „Вестник опытной физики и элемент. математики", XXVI вып. 303, 311, 312, Одесса 1901.

**) С. О. Шатуновский, Об измерении прямолинейных отрезков и построения их с помощью циркуля и линейки, Изд. „Mathesis", Одесса 1925 г.

такой точке зрения необходимо было доказать, что площадь фигуры не изменится, как бы ни переставлять отдельные части этой фигуры. На это обстоятельство впервые обратил внимание Де-Цольт, который в 1881 году ввел в качестве новой аксиомы следующее предложение: „если многоугольник произвольным образом разложен на части, то невозможно, опустивши одну из его частей, расположить остальные так, чтобы они совершенно покрывали многоугольник“. Опираясь на эту аксиому, можно вполне строго построить теорию измерения площадей.

Однако, возник вопрос—действительно ли необходимо вводить новую аксиому (Де-Цольта) для обоснования теории площадей или эта теория может быть построена без введения новой аксиомы? В конце прошлого века было показано, что обосновать теорию площадей можно без введения аксиомы Де-Цольта. Эта задача была решена С. О. Шатуновским, В. Ф. Каганом, Шуром, Лаццери и рядом других исследователей. Д. Гильберт, кроме того, показал, что строгая теория площадей многоугольников может быть построена независимо от аксиомы непрерывности.

В теории объёмов вопрос обоснования учения оказался еще более сложным, чем в теории площадей, так как понятие равносоставленности не может быть использовано для определения равенства объёмов многогранников. Как известно, в начале текущего столетия Ден и Каган доказали, что два многогранника, имеющие равные объёмы, вообще говоря, не являются равносоставленными.

С. О. Шатуновский, опираясь на свой арифметический метод, решил задачу обоснования теории объёмов многогранников в 1902 году. Однако, теория Шатуновского не является полной, если не привлечь к ней результаты элементарного учения об объёмах (излагаемого в школьных курсах), что отмечает сам автор.

В 1921 году Зюс, с помощью некоторых новых понятий (равносоставленность и равнодополненность по Кавальери) и, опираясь в известной мере на результаты теории Шатуновского, путем аналогичным тому, по которому шел Гильберт в учении о площадях, показал, что теория объёмов многогранников может быть построена независимо от аксиомы непрерывности.

Задача обоснования учения о геометрических величинах представляется в настоящее время в следующем виде.

Теория геометрических величин включает в себя две основные задачи: во-первых, доказательство принадлежности рассматриваемых свойств (длин, площадей, объёмов) геометрических фигур к категории величин, и, во-вторых, установление системы измерения их.

Для решения первой задачи прежде всего необходимо установить общее понятие величины (дать математически точное определение этого понятия).

По нашему мнению, наиболее естественным и последовательным является такой путь построения теории, при котором указанные задачи решаются в следующем порядке:

1. Устанавливаются критерии сравнения (понятия „равно" „больше", „меньше") для рассматриваемых свойств (длин, площадей, объёмов) геометрических фигур определенных классов (отрезков, многоугольников, многогранников). Доказательство принадлежности каждого из этих свойств для соответствующего класса фигур производится с помощью непосредственной проверки для них аксиом сравнения.

2. Устанавливается возможность осуществления взаимно однозначного соответствия между данными геометрическими величинами (принадлежность данных свойств к величинам доказана согласно п. 1) и действительными положительными числами, удовлетворяющего условиям:

I. равным величинам соответствуют равные числа;

II. величине, состоящей из частей, соответствует число, равное сумме чисел, отвечающих каждой части;

III. некоторой вполне определенной величине рассматриваемого вида соответствует наперед заданное число (единица).

Такие числа называются при этом мерами данных величин.

Эта задача решается следующим образом: а) Указывается какое именно число следует относить каждой величине рассматриваемого вида в качестве ее меры. б) Доказывается, что определенные в п. а) числа удовлетворяют условиям I, II, III. в) Доказывается, что условия I, II, III, единственным образом устанавливают указанное соответствие. г) Доказывается, что такое соответствие является взаимно однозначным.

При обосновании учения о длинах отрезков такую последовательность рассуждений можно выдержать со всей строгостью, что и выполнено в нашей работе.

Если следовать такому же пути при обосновании учения о площадях многоугольников, то при непосредственной проверке выполнимости аксиом сравнения для критериев сравнения, основанных на понятии равносоставленности, приходится опираться на принцип Де-Цольта.

Поэтому первая задача при обосновании теории площадей решается таким образом. Устанавливается соответствие между площадями многоугольников и отрезками и доказывается, что это сопряжение является взаимно однозначным. Отсюда следует принадлежность площадей к категории величин, так как для отрезков она предполагается доказанной. После этого решение второй задачи (установление системы измерения) не представляет затруднений.

Такому пути можно следовать и при обосновании учения об объёмах многогранников, однако при этом приходится преодолевать значительно большие трудности, чем в теории площадей. Эти трудности связаны с тем, что, ввиду невозможности в общем случае разложить два равновеликих многогранника на одинаковое конечное число попарно равных частей (теорема Дена-Кагана), при установлении критериев равенства объёмов необходимо прибегать к бесконечному процессу.

В нашей работе при обосновании учения о площадях и объёмах мы следовали именно этому пути.

Существует еще такой путь обоснования учения о геометрических величинах, при котором две указанные выше основные задачи решаются совместно—сразу доказывается, что определенному геометрическому свойству рассматриваемого класса фигур может быть однозначно отнесено действительное положительное число — числовой инвариант, полностью характеризующее это свойство. Так как действительные числа являются величинами, то отсюда следует принадлежность к категории величин рассматриваемых свойств и одновременно устанавливается система измерения их.

Этот путь несколько более простой, чем предыдущие, и быстрее ведет к цели, однако, он не совсем последователен с геометрической точки зрения, и при доказательстве взаимной однозначности указанного соответствия приходится делать некоторое допущение или опираться на элементарную теорию.

В современной специальной литературе учение о площадях (в особенности обоснование теории геометрическим методом) не получило достаточного освещения, систематическое и полное изложение теории объёмов многогранников вообще отсутствует.

Вопросы теории геометрических величин имеют большое значение в школьном курсе геометрии и изложение их представляет значительные трудности в методическом отношении. Для того, чтобы вести преподавание разделов „измерение площадей“ и „объёмы многогранников“ в школе в соответствии с научной трактовкой этих вопросов в современной геометрии, учителю нужны не только подробные методические разработки отдельных частей упомянутых разделов, но и работы, дающие полное изложение теории (включая ее обоснование), излагающие общие, принципиальные положения, исходя из которых уже самостоятельно творчески могут решаться конкретные методические вопросы.

Изучение преподавания разделов „площади многоугольников" и „измерение объёмов многогранников", которое было предпринято нами на протяжении 1951—52 учебного года в ряде школ города Киева, показало, что передовые учителя стремятся излагать указанные разделы по возможности в соответствии с научной трактовкой этих вопросов в современной геометрии.

Однако, достижение этой цели сопряжено с значительными трудностями в связи с недостаточным освещением учения о геометрических величинах в имеющейся учебной и методической литературе.

Диссертационная работа преследует цель хотя бы в небольшой мере облегчить педагогам решение указанной выше задачи: полно, в соответствии с современной научной трактовкой излагать учение о геометрических величинах в школе.

Исходя из этого, в нашей работе излагается по возможности довольно полная и строгая геометрическая теория длин прямолинейных отрезков, площадей простых многоугольников и объёмов многогранников. В работе также даются методические указания относительно изложения в курсе средней школы разделов „площади многоугольников" и „измерение объёмов многогранников". Эти указания основываются, с одной стороны, на изучении опыта преподавания указанных разделов в ряде средних школ, с другой стороны,—на соображениях, подсказываемых самой теорией вопроса.

ГЛАВА I.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ УЧЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В § 1 дается достаточно подробный критический разбор учения о геометрических величинах у Евклида. Затем (§ 2) кратко излагается дальнейшее развитие этого учения в духе Евклида от Архимеда до начала XIX века (Архимед, Кавальери, Такэ, Лежандр). В § 3 изложены первые попытки строгого обоснования учения о геометрических величинах в XIX веке (Н. И. Лобачевский, В. Больаи, Гервин, Дюгамель, Де-Цольт и др.). Наконец, в § 4-м дается краткий обзор работ, посвященных строгому обоснованию учения об измерении геометрических величин. Главное внимание уделяется теории Шатуновского-Кагана, а также более поздним работам (Николетти, Турчанинов, Зюс).

ГЛАВА II.

УЧЕНИЕ О ВЕЛИЧИНЕ

В этой главе излагается теория величин Шатуновского-Кагана, в основу которой положены аксиомы сравнения.

Предположим, что нам дано некоторое множество, между элементами которого существуют три вида отношений; назовем их „равно" ($=$), „больше" ($>$), „меньше" ($<$), обладающие следующими свойствами:

I. Отношение „равно" является возвратным, т. е. для каждого элемента a этого множества имеет место $a=a$.

II. Отношение „равно" является обратимым в данном множестве, то есть если $a=в$, то $в=a$.

III. Отношение „равно" является переносимым в данном множестве, то есть, если $a=в$ и $в=c$, то $a=c$.

IV. Отношение „больше" является переносимым в данном множестве, то есть, если $a>в$ и $в>c$, то $a>c$.

V. Отношение „меньше" является переносимым в данном множестве, то есть, если $a<в$ и $в<c$, то $a<c$.

VI. Каждые два элемента данного множества находятся друг к другу, по крайней мере, в одном из отношений „равно", „больше", „меньше".

VII. Отношение „равно" исключает отношение „больше".

VIII. Отношение „равно" исключает отношение „меньше".

Эти восемь свойств называются **аксиомами сравнения.** Ими не исчерпываются **все** свойства отношений сравнения.

Ряд других свойств этих отношений можно доказать с помощью приведенных аксиом. В первую очередь сюда относятся теоремы о необратимости отношений „больше" (теорема 1) и „меньше" (теорема 1'); о том, что из $a>в$ следует $в<a$ (теорема 2); отношение „больше" исключает „меньше" и другие [теоремы 1, 1', 2, 2', 3, 4, 4', 4", 5 и 6 (6_1, 6_2, 6_3, 6_4, 6_5 6_6) и следствия а), б), в), г), д), е)]. Эти теоремы вместе с аксиомами I—VIII исчерпывают все необходимые нам для дальнейшего свойства отношений сравнения.

Далее достаточно обстоятельно проводятся доказательства непротиворечивости и независимости аксиом сравнения.

Те признаки, по которым для элементов данного (конкретного) множества устанавливаются отношения сравнения, называются **критериями сравнения.**

Системой величин называется всякое множество, для элементов которого могут быть установлены критерии сравнения, удовлетворяющие аксиомам сравнения (I-VIII).

В качестве первого примера величин приводятся целые положительные, а затем рациональные числа. Далее рассматривается некоторая совокупность предметов, и элементами множеств (производных множеств) берутся свойства этих предметов (вес, объём и др.). Указывается, что не всякое свойство может быть отнесено к категории величин. Например, для множества звуков можно рассматривать производные множества сил, высот и тембров. Для элементов первых двух множеств имеются естественные критерии сравнения — в первом случае по размерам амплитуд, во втором по числу колебаний в единицу времени; для третьего множества естественный критерий сравнения элементов отсутствует. Следовательно, первые два свойства звука— сила и высота,—могут быть отнесены к категории величин, третье же свойство—тембр—таковой не является. Это же можно сказать о множестве целых рациональных функций и о всех непрерывных фунциях. Первое множество представляет собой систему величин, второе же к категории величин отнесено быть не может.

В заключение определяется исчисление и измерение величин. Определение последнего приведено нами на стр. 6.

ГЛАВА III.

ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОТРЕЗКОВ

В первом параграфе этой главы (§ 8) приводится современная система аксиом евклидовой геометрии и некоторые, необходимые для дальнейшего изложения, теоремы. Затем дается такое определение длины отрезка: длина отрезка это определенное его геометрическое свойство, а именно, свойство выделять из всего множества точек прямой, на которой он расположен, определенное подмножество, или, выражаясь кратко, свойство занимать определенную часть прямой.

В § 9 доказывается, что длины отрезков представляют собой величины. В соответствии с определением величины для этого, во-первых, устанавливаются критерии сравнения для длин отрезков (равенство и неравенство длин определяется с помощью соответствующих отношений для самих отрезков), и, во-вторых, доказывается, что эти критерии удовлетворяют аксиомам сравнения. В нашей работе эта задача решается в такой полной мере, повидимому, впервые (приводятся тщательные доказательства выполнимости всех восьми аксиом сравнения для принятых критериев сравнения).

Решение второй основной задачи теории для отрезков—установление системы измерения, то есть осуществление сопряжения длин отрезков с действительными положительными числами, удовлетворяющее определенным условиям,—производится хотя и несколько громоздко, но за то в строго выдержанной естественной последовательности различных ступеней этого процесса.

В соответствии с общей задачей измерения величин (стр. 6) под измерением длин отрезков понимается установление такого взаимно однозначного соответствия между ними и действительными положительными числами, которое удовлетворяет следующим условиям:

I. Равным длинам соответствуют равные числа;

II. Если B внутренняя точка отрезка AC, то число, соответствующее длине отрезка AC, равно сумме чисел, соответствующих длинам отрезков AB и BC;

III. Длине некоторого отрезка OE соответствует определенное число (единица).

При осуществлении этого сопряжения в настоящей работе строго выдержан порядок, указанный пунктами а), б), в), г) для величин вообще, приведенный на стр. 6.

Заключительный параграф (§ 11) главы III посвящен геометрической теории пропорций, на которой в значительной мере основано дальнейшее развитие теории (учение о площадях и объёмах).

Пропорциональность отрезков определяется следующим образом: пусть даны четыре отрезка a, a', $в$, $в'$; возьмем две пересекающиеся под прямым углом прямые и от точки пересечения их O отложим отрезки на одной прямой $OA = a$, $OB = в$ и на другой $OA' = a'$, $OB' = в'$, при чем так, что точки A, B и A', B' одновременно лежат либо по одну, либо по разные стороны от точки O; если при этом окажется, что прямая AA' параллельна BB', то отрезки a, $в$, a', $в'$ **пропорциональны или составляют пропорцию,** что записываем:

$$a,\ в \backsim a',\ в'.$$

Затем доказываются все необходимые для дальнейшего свойства пропорции: ([1], [2],...., [13']).

Далее с помощью теоремы (2): **соответственные стороны двух подобных треугольников пропорциональны,** доказывается предложение, дающее возможность обобщить определение пропорции (снять ограничение, связанное с перпендикулярностью основных прямых), а именно, теорема (3): **если две параллельные прямые отсекают на сторонах некоторого угла отрезки** a, $в$ **и соответствено** a', $в'$, **то имеет место пропорция** $a, в, \backsim a', в'$, и обратная теорема (3'): **если четыре** отрезка a, $в$, a', $в'$ **образуют пропорцию** $a, в \backsim a', в'$ **и одна** пара **отрезков** a, a' **откладывается на одной стороне угла, а** другая пара — $в$, $в'$ — **на другой стороне, то прямые, соединяющие** концы отрезков a, $в$ **и концы отрезков** a', $в'$, **параллельны.**

В заключение доказывается предложение: **если четыре отрезка** a, $в$, a', $в'$ **пропорциональны, то есть имеет место соотношение** $a, в \backsim a', в'$, **то меры длин этих отрезков** $\mu(a)$, $\mu(в)$, $\mu(a')$, $\mu(в')$ **будут составлять** арифметическую **пропорцию:**

$$\mu(a) : \mu(в) = \mu(a') : \mu(в').$$

Свойства пропорций формулируются и доказываются в таком порядке, при котором теорема Паскаля (лежащая в основании теории) используется только один раз (при доказательстве свойства [5]).

ГЛАВА IV.

УЧЕНИЕ О ПЛОЩАДЯХ ПРОСТЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В первом параграфе этой главы (§ 12) дается определение простого многоугольника, приводятся основные его свойства и определяется площадь его (аналогично определению длины отрезка): площадь простого многоугольника—это определенное его геометрическое свойство, именно, свойство выделять из всего множества точек плоскости, в которой он расположен, некоторое подмножество, или кратко, свойство занимать определенную часть плоскости.

В § 13 проводится критический разбор изложения теории площадей многоугольников в современной литературе, а именно: у А. С. Смогоржевского, В. И. Костина, В. Депутатова, Д. И. Перепелкина, Б. Кутузова, С. А. Богомолова, Н. Глаголева, Н. Извольского и С. Филипповского*).

В § 14 излагается доказательство принадлежности площадей простых многоугольников к категории величин. Как уже отме-

*) О. С. Смогоржевський, Основи геометрії, Київ 1947.; В. И. Костин, Основания геометрии, УПГ М—Л 1946; В. Н. Депутатов, Основания геометрии, „Математика в школе“ 1939, № 1, 2, 3, 5—6; Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I Геометрия на плоскости, Гостехиздат М.—Л. 1948; Б. В. Кутузов, Геометрия. Учпедгиз М. 1950; С. А. Богомолов, Геометрия, УПГ М-Л. 1949; Н. А. Глаголев, Теорія площ в курсі геометрії, „Математика в школі“, Р. Ш, Київ, 1948; Н. Извольский, Геометрическое учение о площадях, „Математика в школе“ 1945, № 2; С. С. Филипповский, Измерение площадей. Учен. Зап. Удмурск. Гос. Пед. Ин-та, Ижевск 1946 г.

чалось на стр. 6, при непосредственной проверке выполнимости аксиом сравнения, основанных на понятии равносоставленности, приходится опираться на принцип Де-Цольта. При строгом обосновании теории площадей без помощи принципа Де-Цольта обычно пользуются понятием меры площади, то есть фактически осуществляют измерение площадей, не доказав предварительно, что последние являются величинами.

В нашей работе доказательство принадлежности площадей многоугольников к категории величин осуществляется с помощью установления взаимно однозначного соответствия между площадями многоугольников и прямолинейными отрезками. Эта задача решается независимо от измерения с помощью изложенной в § 11 геометрической теории пропорций.

В п. 1, § 14 вводится понятие равносоставленности и доказывается теорема о переносимости (транзитивности) этого соотношения. В п. 2 устанавливаются критерии сравнения с помощью этого понятия. [а) Два многоугольника имеют равные площади, если они равносоставлены. б) Площадь многоугольника P больше площади многоугольника Q, если Q равносоставлен с частью P, или P содержит часть равносоставленную с Q. в) Площадь P меньше площади Q, если P равносоставлен с частью Q]. В п. 3 доказывается несколько вспомогательных теорем. В п. 4 осуществляется само соответствие между площадями многоугольников и прямолинейными отрезками*).

Сначала доказывается основная теорема (6) для треугольника: каждому треугольнику соответствует один и только один отрезок, равный катету прямоугольного треугольника, равносоставленного с данным треугольником и имеющего вторым катетом единичный отрезок. Построение выполняется следующим образом. Пусть ABC—данный треугольник, отложим на перпендикуляре AF к стороне AB единичный отрезок AE; проводим $CC' \parallel AB$ (C'—точка пересечения CC' с AF), соединяем E с B и через C' проводим $C'S \parallel BE$ (S—точка пересечения $C'S$ с прямой AB); отрезок AS (или треугольник AES) и будет искомым. Единственность этого отрезка доказывается с помощью теории пропорций.

Затем доказывается теорема 7: если какой-либо треугольник произвольным образом разложить на составляющие треугольники, то отрезок, соответствующий данному треугольнику, будет равен „сумме" отрезков, соответствующих всем треугольникам

*) Для большей наглядности это соответствие можно трактовать так: каждому многоугольнику ставится в соответствие прямоугольный треугольник, равносоставленный с данным и имеющий одним из катетов соответствующий отрезок, а другим катетом единичный отрезок.

разложения. Доказательство геометрическое отличается от обычного вывода Кагана-Гильберта (1-е издание) лишь для первого случая а) (трансверсальное деление на два треугольника), в котором снова используется теория пропорций.

Из этого предложения следует теорема 8: равносоставленным треугольникам соответствуют равные отрезки.

Далее доказываются теоремы 9 и 10, аналогичные 7 и 8, но относящиеся к разложению многоугольника на треугольники.

После этого рассматривается построение треугольника (или многоугольника) по заданному отрезку и указывается, что эта задача не является однозначной, то есть существует множество треугольников, которым соответствует данный отрезок.

Следующая теорема 11 фактически представляет собой теорему Больаи—Гервина: два многоугольника, которым соответствуют равные отрезки, равносоставлены. Доказательство ее несколько отличается от обычного, так как здесь мы исходим не из равенства мер площадей, а из равенства соответствующих отрезков.

Из теорем 10 и 11 вытекает, что необходимым и достаточным условием равносоставленности двух многоугольников является равенство соотнесенных им отрезков, так как доказано, что не только равносоставленным многоугольникам соответствуют равные отрезки, но и равным отрезкам отвечают равносоставленные многоугольники.

После этого без труда доказывается принцип Де-Цольта (теорема 11°).

В п. 5 излагается доказательство принадлежности площадей многоугольников к категории величин. Фактически эта задача решена в п. 4, так как там установлено взаимно однозначное соответствие между площадями многоугольников и прямолинейными отрезками, а последние являются величинами, как доказано в главе III. Критерии сравнения для площадей принимают следующий вид:

а^1) Площади многоугольников P_1 и P_2 считаются равными, если равны соответствующие им отрезки, то есть пл. $P_1 =$ пл. P_2, если $s_1 = s_2$; б^1) Площадь P_1 больше площади P_2, если $s_1 > s_2$ и в^1) площадь P_1 меньше площади P_2, если $s_1 < s_2$, где s_1 и s_2 отрезки, соответствующие P_1 и P_2.

Теперь остается доказать, что эти критерии эквивалентны ранее установленным критериям а), б), в) п. 2 (стр. 13), что и выполняется без особого труда.

Таким образом, чисто геометрически и с достаточной наглядностью доказано, что множество площадей многоугольников представляет собой систему величин.

В § 15 решается вторая основная задача теории площадей— осуществляется измерение их. В соответствии с общей задачей измерения величин (стр. 6), под измерением площадей многоугольников понимается установление такого взаимно однозначного соответствия между площадями многоугольников и действительными положительными числами, которое удовлетворяет следующим условиям:

I[1], равным площадям соответствуют равные числа;

II[1], если данный многоугольник произвольно разложить на два или более многоугольников, то число, соответствующее площади данного многоугольника, равно сумме чисел, соответствующих площадям составляющих его многоугольников;

III[1], площади некоторого, вполне определенного многоугольника (единичный многоугольник) соответствует определенное число (единица).

Для осуществления измерения площади каждого многоугольника относим число, равное мере длины отрезка, соответствующего данному многоугольнику, то есть $\mu(P)=\mu(s)$, где $\mu(P)$ — мера площади многоугольника P, $\mu(s)$ — мера длины отрезка s. Однако, в этом случае, основной фигурой является прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен единичному отрезку. Единичной фигурой при таком соответствии является прямоугольный треугольник, оба катета которого представляют собой единичные отрезки. Квадрату же со стороной единица будет соответствовать число два. В обычной теории квадрату со стороной, равной единичному отрезку, соответствует число единица. Поэтому, чтобы изложенная теория, не отличалась бы в этом отношении от общепринятой, очевидно, необходимо площади каждого многоугольника относить число, равное **половине** меры длины соответственного отрезка, то есть $\mu(P)={}^1/_2\,\mu(s)$.

Далее (теорема 12), выводится выражение для меры площади треугольника. Доказательство этой теоремы основано на последнем предложении теории пропорций (если $a, в, c, d,$ связаны соотношением $a, в \backsim c, d,$ то $\mu(a):\mu(в)=\mu(c):\mu(d)$). Доказательства теорем о мерах площадей других прямолинейных фигур проводятся двумя способами—путем преобразования данной фигуры в равносоставленный треугольник (для всех фигур используется общий метод преобразования Евклида), и путем разложения фигуры на треугольники.

В п. 2, § 15 излагается арифметическая теория площадей Шатуновского—Кагана. Однако, здесь сохранено наше определение площади и весь ход рассуждений по возможности аналогичен тому, которому мы следовали в предыдущем параграфе.

В заключение (п. 3) приводится сравнительная характеристика двух методов—геометрического и арифметического. При этом в нашей работе отдается предпочтение геометрическому методу.

ГЛАВА V.

УЧЕНИЕ ОБ ОБЪЁМАХ.

В этой главе, кроме того, рассмотрены вопросы методики изложения разделов „площади многоугольников" и „объёмы многогранников" в средней школе.

В § 16 (первый параграф главы) дается определение простого многогранника и приводятся его основные свойства, в частности свойство, необходимое для введения понятия объёма [теорема (0)] (п. 1).

В п. 2 определяется объём многогранника аналогично определению длины отрезка и площади многоугольника, а именно: объём многогранника представляет собой ствойство многогранника выделять из всего множества точек пространства определенное подмножество, что вытекает из теоремы (0), или кратко, свойство занимать определенную часть пространства.

В п. 3 этого параграфа дается краткий критический разбор изложения теории объёмов в имеющейся литературе.

В § 17 изложены известные в настоящее время необходимые условия равносоставленности многогранников: условия Дена-Кагана, условия Николетти и условия Турчанинова.

Условия Дена-Кагана хорошо известны*) и поэтому в нашей работе только формулируется основная теорема и приводится пример (неравносоставленности куба с равновеликим правильным тетраэдром).

Затем подробно излагаются условия Николетти**), которые были опубликованы в 1913 и 1914 г. Однако, ни в нашей, ни в известной нам иностранной литературе (за исключением статьи Бортолотти***) о них не упоминается. Вследствие этого, условия

*) В. Ф. Каган. О преобразовании многогранников. Гостехиздат М-Л. 1933. M. Dehn, Über den Rauminhalt, Math. Annalen, 55, 1901.

**) O. Nicoletti, Sulla equivalenza dei poliedri, Atti della Reale dei Lincei, Rendiconti. XXII, 1913.

O. Nicoletti, Sulla equivalenza dei poliedri, Rendiconti dei circolo matematico di Palermo, XXXIII, 1914.

***) E. Bortolotti, Sulla equivalenza dei poliedri, Atti della societa Italiane Mathesis, XVIII, 1939.

Николетти не известны у нас не только широкому кругу специалистов-геометров и учителей, но даже и лицам, специально занимавшимся этими вопросами (Каган, Турчанинов). А между тем, эти условия представляют значительный интерес. Несмотря на громоздкость и сложность основной теоремы, они являются удобными для непосредственной проверки в конкретных случаях (особенно для проверки равносоставленности данного многогранника с призмой).

В нашей работе изложены: ряд вспомогательных теорем, основная теорема (все случаи основной теоремы иллюстрируются примерами) и в заключение рассматриваются еще четыре примера:

1, равносоставленность равновеликих призм;

2, неравносоставленность прямоугольного равнобедренного тетраэдра с равновеликим правильным тетраэдром;

3, равносоставленность пирамиды Жюэля с равновеликой призмой и

4, условия Николетти применяются к пирамиде, на которую в 1940 году указал Э. Гринберг (также пирамида, которая может быть пересоставлена в призму)*).

В п. 4 изложены необходимые условия равносоставленности многогранников, недавно (в 1951 г.) установленные Турчаниновым**), который решил эту задачу методом, совершенно отличающимся от способа Дена-Кагана и Николетти.

Параграфы 18 и 19 посвящены учению об объёмах многогранников. Теория строится по возможности аналогично учению о площадях.

В § 18 излагается теория объёмов многогранников по Шатуновскому, с тем отличием, что здесь устанавливается взаимно однозначное соответствие между объёмами многогранников и прямолинейными отрезками, а не числами (инварианты), как у Шатуновского.

Устанавливается это соответствие таким образом. В тетраэдре берется одна из граней и отыскивается соответственный ей отрезок (стр. 13). Затем строится прямоугольный треугольник, одним из катетов которого является этот отрезок, а вторым—та высота тетраэдра, по отношению к которой взятая грань является основанием. Отрезок, отвечающий этому треугольнику (построение

---

*) E. Grunbergs, Par poliedri tilpumu, Rakstu krajums, L, U. Matematikas zinâtnu studenti biedribas, I,Riga, 1940.

**) А. С. Турчанинов, О некоторых критериях равносоставленности многогранников. Уч. записки. Гос. Грозненск. Пединститута, № 6. Физ. мат. серия, Вып. 3, Грозный 1951.

стр. 13) и будет соответственным данному тетраэдру отрезком. Отрезок, соответствующий произвольному простому многограннику, получается в результате сложения отрезков, соответствующих тетраэдрам, на которые может быть разложен данный многогранник. Для большей наглядности, кроме отрезка, каждому многограннику будем также относить тетраэдр с основанием, представляющим собой прямоугольный равнобедренный треугольник, оба катета которого являются единичными отрезками, а высота, совпадающая с боковым ребром, проведенным к вершине прямого угла основания, равна сопоставляемому отрезку. Кратко его называем „соответственным прямоугольным тетраэдром".

С помощью теории пропорций доказывается теорема 1: при условии, что некоторый отрезок выбран в качестве единичного, каждому тетраэдру соответствует один и только один определенный прямолинейный отрезок. Затем следует основная теорема 2: если какой-нибудь тетраэдр произвольным образом разложить на составляющие тетраэдры, то отрезок, соответствующий данному тетраэдру, будет равен сумме отрезков, соответствующих всем частичным тетраэдрам разложения. Доказательство проводится по способу Шатуновского с теми изменениями, которые обусловлены принятым соответствием (отрезки, а не числа). Из этой теоремы уже без труда получается предложение 3: равносоставленным тетраэдрам соответствуют равные отрезки.

В теоремах 4, 5, 6 предыдущие предложения обобщаются на произвольные простые многогранники. С помощью этих же теорем устанавливается **однозначное** соответствие между многогранниками и отрезками, так как каждому многограннику соответствует один определенный отрезок. Однако, существуют и неравные многогранники, которым соответствуют равные отрезки. Согласно теореме 5, равные отрезки соответствуют всем равносоставленным между собой многогранникам. В теории площадей справедлива и обратная теорема: многоугольники, которым соответствуют равные отрезки — равносоставлены. Для многогранников это свойство, как следует из § 17, не имеет места. Таким образом, теоремой 6 аналогия между теорией площадей и объёмов заканчивается.

Равенство площадей было определено в главе IV с помощью понятия равносоставленности, вследствие чего из теорем 10 и 11 (гл. IV) вытекало, что установленное там соответствие между многоугольниками и отрезками является **взаимно однозначным** соответствием между этими отрезками и **площадями** многоугольников. Следовательно, взаимная однозначность этого соответствия в теории площадей была **доказана**.

В теории объёмов критерий равенства, основанный на понятии равносоставленности, как это следует из § 17, непригоден.

Существует мнение, что Шатуновский обосновал теорию объёмов без понятия предела. Это не совсем так, что отмечал и сам Шатуновский. Бесконечный процес не нужен в учении об объёмах, если **допустить**, что многогранники, имеющие равные инварианты, имеют равные объёмы. Допуская это, мы фактически вводим новую аксиому. Однако, что объём вполне определяется инвариантом следует из элементарной теории, которая бесконечным процессом пользуется.

Следовательно, что равенство объёмов определяется равенством соответствующих инвариантов (у нас отрезков) по Шатуновскому не доказывается, а принимается либо на основании элементарной теории, либо в силу нового допущения, поэтому учение об объёмах Шатуновского не является полным.

В § 18 теория объёмов строится на основании упомянутого допущения, которое в нашей работе принимает вид: (о) **для каждого многогранника „соответсвенный прямоугольный тетраэдр" имеет объём равный объёму этого многогранника.** Из этого и следует взаимная однозначность установленного соответствия между объёмами многогранников и прямолинейными отрезками.

Теперь критерии сравнения принимают вид:

А) Объёмы двух многогранников P_1 и P_2 равны, если равны соответствующие им отрезки s_1 и s_2, то есть объём (P_1)=объёму (P_2), если $s_1 \equiv s_2$.

Б) объём $(P_1) >$ объёма (P_2), если $s_1 > s_2$.

В) объём $(P_1) <$ объёма (P_2), если $s_1 < s_2$.

С помощью этих критериев сравнение объёмов многогранников сводится к сравнению соответствующих отрезков, а аксиомы сравнения I—VIII для отрезков, как доказано в гл. III, выполняются, вследствие этого объёмы многогранников являются величинами.

Теория **измерения** объёмов строится вполне аналогично теории измерения площадей многоугольников. Формулируется общая задача измерения (условия I^{11}, II^{11}, III^{11}). В качестве меры объёма многогранника можно взять меру длины соответствующего отрезка. Однако, для того, чтобы кубу с ребром, равным единичному отрезку соответствовало число единица необходимо для меры объёма многогранника брать $^1/_6$ меры длины соответствующего отрезка.

Затем достаточно просто получаются формулы для выражения мер объёмов: тетраэдра, пирамиды, призмы и указывается, как получить меру объёма любого многогранника.

В § 19 излагается полная теория объёмов без нового допущения, но с применением бесконченного процесса.

Наиболее естественным критерием равнопротяженности является возможность разложения на попарно равные части и, если при равенстве объёмов разложение соответствующих многогранников на конечное число попарно равных частей в общем случае невозможно (§ 17), то естественно принять следующее определение равенства объёмов (A^0): **два многогранника имеют равные объёмы, если они могут быть разложены на одинаковое конечное или бесконечное число попарно равных частей.** В таком виде это определение недостаточно точно, так как опирается на сравнение бесконечных множеств, а, как известно, могут существовать бесконечные множества, в которых имеется взаимно однозначное соответсвие между всеми элементами и частью их. Ниже это определение уточняется и доказывается, что последний случай здесь исключен.

Прежде всего в п. 2 доказывается ряд важных вспомогательных теорем (теоремы 10—20), среди которых отметим следующие: теорема 17: **Две призмы, которым соответствуют равные отрезки, равносоставлены** и теорема 20: **Два многогранника, которым соответствуют равные отрезки, всегда могут быть разложены на одинаковое конечное число тетраэдров, имеющих попарно равные соответствующие отрезки.** Эти теоремы представляют известный интерес для школьного преподавания, но доказательства их в имеющейся в настоящее время литературе отсутствуют.*)

Неопределенность в определении равенства объёмов устраняется следующим образом.

Вводим такое определение (по Зюсу): два тетраэдра, имеющие равные площади оснований и равные высоты, называются **„равными по Кавальери“.** Затем доказывается **теорема 21:** равные по Кавальери тетраэдры имеют равные объёмы [в смысле определения (A^0)]. Это предложение доказывается методом исчерпывания; мы убеждаемся, что оба тетраэдра могут быть разложены на одинаковое, хотя и бесконечное количество попарно равных частей.

После этого вводится понятие о **равносоставленности по Кавальери:** два многогранника называются равносоставленными

*) Согласно Амальди, теорема 17 в несколько иной формулировке доказана Лаццери. Теорема 20 в несколько иной формулировке имеется в работе Зюса (Sus W., Begrundung der Lehre vom Poliederinhalt, Math, Annal. 82, 1921), однако, доказательство ее автор не приводит, ссылаясь на свою диссертацию, которая не была опубликована.

по Кавальери, если они могут быть разложены на одинаковое конечное число попарно равных по Кавальери тетраэдров.

Однако, для дальнейшего развития теории приходится привлечь метод дополнения и ввести еще такое понятие: два многогранника называются **„равнодополненными по Кавальери“**, если к ним можно присоединить „равносоставленные по Кавальери“ многогранники так, что полученные в результате этого присоединения многогранники будут „равносоставлены по Кавальери“. Это понятие является более общим, чем понятие „равносоставленности по Кавальери“, включая в себя последнее.

Очевидно, справедлива **теорема 23:** „равнодополненным по Кавальери“ многогранникам соответствуют равные отрезки. С помощью 3-х вспомогательных теорем (24, 25, 26) доказывается и **обратная теорема** (27): два многогранника, которым соответствуют равные отрезки, равнодополнены по Кавальри. Отсюда следует, что равенство соотнесенных отрезков является не только необходимым, но и достаточным условием равнодополненности по Кавальери двух многогранников. Это дает возможность установить следующий критерий равенства многогранников:

Принимая во внимание определение (A^0) и теорему 21, будем считать, что два многогранника имеют равные объёмы, если они равнодополнены по Кавальери.

Критерии сравнения принимают вид:

$А^1$) Два многогранника имеют равные объёмы, если они равнодополнены по Кавальери.

$Б^1$) Объём многогранника P больше объёма многогранника P^1, если P^1 равнодополнен по Кавальери некоторой части P.

$В^1$) Объём многогранника P меньше обёма многогранника P^1, если P равнодополнен по Кавальери некоторой части P^1.

Затем доказывается аналогично тому, как это было выполнено в п. 5, § 14 для площадей многоугольников, что установленные в § 18 критерии сравнения А), Б), В) эквивалентны только что сформулированным критериям $А^1$), $Б^1$), $В^1$).

Из этого следует, что установленное в § 18 соответсвие между многогранниками и отрезками является **взаимно однозначным** соответствием между этими отрезками и **объёмами** многогранников, из чего, в свою очередь, вытекает принадлежность объёмов многогранников к категории величин.

Дальнейшее развитие теории аналогично изложенному в § 18, в частности, вопрос об **измерении** объёмов многогранников переносится сюда без изменения. Таким образом, с добавлением соответствующих теорем § 18, в § 19 развита полная теория объёмов многогранников, свободная от новых допущений.

Изложенный здесь способ имеет еще преимущество, что развитая этим методом теория не зависит от аксиомы непрерывности.

Итак, в построенной теории длин, площадей и объёмов проводится единная точка зрения: исходя из общего определения длины, площади и объёма, как геометрических свойств отрезков, многоугольников и многогранников (линейная, плоская и пространственная протяженность) в основу главного отношения сравнения—отношения „равенства"—для всех трех систем этих объектов положена концепция равносоставленности, т. е. возможности разложения на одинаковое количество попарно равных частей. При этом равенство длин отрезков определяется просто с помощью равенства самих отрезков (без разложения); равенство площадей многоугольников—с помощью разложения на одинаковое **конечное** число попарно равных частей и равенство объёмов многогранников—с помощью разложения на **бесконечное** число попарно равных частей (с последующим уточнением „равнодополненностью по Кавальери").

Как мы отмечали выше, теория геометрических величин включает в себя две основных задачи: во-первых, доказательство принадлежности рассматриваемых свойств (длин, площадей, объёмов) геометрических фигур к категории величин, и, во-вторых, установление системы измерения их. В существующей литературе по этому вопросу две указанные задачи обычно решаются совместно. В нашей работе (повидимому, впервые в такой мере) проводится решение этих двух задач раздельно. Теория строится так, что имеется возможность полностью разрешить первую задачу для всех рассматриваемых объектов (длин, площадей, объёмов), независимо от того, решена ли вторая задача для каких либо из них или нет.

Наконец, § 20 посвящен вопросам методики преподавания разделов „площади многоугольников" и „объёмы многогранников" в средней школе.

В п. 1 рассматриваются общие вопросы изложения геометрии в школе — роль наглядности и дедукции, интуиции и логики и т. д., а также дается анализ существующих программ и проекта новой программы по этим вопросам.

В п. 2 изложены результаты изучения опыта преподавания разделов „площади многоугольников", и „объёмы многогранников" в ряде школ г. Киева (средние школы № 7, № 13, № 20, № 84, № 131).

Наконец, в п. 3-м даются методические указания относительно изложения в курсе средней школы этих разделов, которые, как отмечалось выше, основаны, с одной стороны, на изучении опыта преподавания этих разделов в школах, с другой стороны, на соображениях, подсказываемых самой теорией.

Таким образом, в целом работа представляет собой попытку дать изложение достаточно полной и строгой геометрической теории длин прямолинейных отрезков, площадей многоугольников и объёмов многогранников и разработать методические указания относительно изложения этих вопросов в курсе средней школы.

Учение о геометрических величинах представляет значительные трудности в методическом отношении. При изложении этих вопросов прежде всего сам педагог должен иметь ясное представление о встречающихся здесь понятиях, о развитии теории, о тех трудностях, которые пришлось преодолевать, и, наконец, о том, как этот вопрос решен в современной геометрии.

Как показало изучение преподавания разделов „площади многоугольников" и „объёмы многогранников" в школах г. Киева, некоторые учителя стремятся излагать указанные разделы приближаясь к научной трактовке этих вопросов в современной геометрии, стремятся ввести учащихся в круг идей, методов и понятий, соответствующих современному состоянию науки. Учащиеся же проявляют интерес и достаточно хорошо усваивают это. Мы особенно подчеркиваем эту важнейшую положительную черту передовых тружеников советской школы, усилиями которых успешно решается задача улучшения народного образования в нашей стране.

Наша работа и преследует цель, как отмечено во введении, облегчить педагогам достаточно полно и в соотватствии с современной научной трактовкой излагать учение о геометрических величинах в школе.