МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

П. А. РОТАЕНКО

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА МЕТОДОМ СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
профессор Г. Н. Положий

КИЕВ — 1966

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького направляет Вам для ознакомления автореферат диссертационной работы тов. РОТАЕНКО П. А., представленной к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Ваши замечания по автореферату просьба направлять по адресу: **г. Киев, бульвар Шевченко, 22/24, Киевский государственный педагогический институт имени А. М. Горького, научная часть.**

Автореферат разослан . . . .

Защита состоится . . . .

Одним из важнейших численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных является метод конечных разностей. Отличающийся большой универсальностью, этот метод применяется как для качественных исследований разного рода задач, так и для приближенного фактического решения этих задач. За небольшим исключением решение конечноразностных уравнений, соответствующих уравнениям в частных производных, является столь громоздкой задачей, что оно выполняется только на быстродействующих электронных вычислительных машинах. Это объясняется тем, что в таких задачах приходится решать системы линейных (или нелинейных) алгебраических уравнений высокого порядка. Решение последних предъявляет большие требования к скорости выполнения операций, а также к объему запоминающих устройств.

Поэтому наряду с повышением быстродействия и увеличением памяти ЭЦВМ исключительно важной проблемой является изыскание новых, более экономичных методов решения конечноразностных краевых задач, соответствующих краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, которые наряду с малой погрешностью самого метода не приводили бы к большой вычислительной погрешности, могущей возникнуть при выполнении большого количества арифметических операций.

В этом отношении до некоторой степени выгодно отличается метод суммарных представлений Г. Н. Положего [1, 2], который можно рассматривать как дискретный аналог всевозможных классических методов интегральных представлений. Сущность этого метода заключается в нахождении решения конечноразностных краевых задач, соответствующих краевым задачам математической физики, в явном виде или в виде довольно простых формул, содержащих небольшое количество параметров, определяемых из небольшого числа линейных алгебраических уравнений.

Метод суммарных представлений применим для численного решения краевых задач, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных не только с постоянными, но и с переменными коэффициентами.

Настоящая работа представляет собой непосредственное развитие метода суммарных представлений применительно к краевым задачам, связанным с уравнением осесимметричного потенциала.

Работа состоит из введения, трех глав и приложения.

Первая глава носит реферативный характер. В ней, следуя [1, 2], приводятся основы метода суммарных представлений и отдельные простейшие формулы суммарных представлений для уравнения Гельмгольца. Затем излагаются некоторые общие положения метода суммарных представлений применительно к краевым задачам, связанным с дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами.

В § 1 второй главы выводится основная формула суммарных представлений для уравнения

$$L_h u - 2\lambda u = f(x,\ y) \quad (\lambda = \text{const}), \tag{1}$$

где $L_h u$ — конечноразностный оператор

$$L_h u = \frac{1}{h_1^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline \gamma^2\left(1 - \dfrac{h}{x_k}\right) & \gamma^2 \dfrac{h}{x_k} - 2(1+\gamma^2) & \gamma^2 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}\ u,$$

аппроксимирующий дифференциальный оператор в частных производных

$$Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

для сеточного прямоугольника $(x_k,\ y_i)$ $(k=0,\ 1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ n+1,$ $i=0,\ 1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ m+1;\ x_k = x_0 + kh,\ y_i = y_0 + ih_1)$. Эта формула имеет вид

$$\vec{u}(y_i) = P_4\Phi(i)\vec{A} + P_4\Psi(i)\vec{B} + P_4\sum_{p=1}^{i-1} G(i-p)P_4\overset{*}{\rho}\left[h^2_1\vec{f}(y_p) - \gamma^2_1\vec{\omega}(y_p)\right] \tag{2}$$

$$(\ =0,\ 1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ m+1).$$

Здесь $\vec{u}(y_i)$, $\vec{f}(y_i)\cdot\vec{\omega}(y_i)$, $\vec{A}$, $\vec{B}$ — n — мерные векторы

$$\vec{u}(y_i) = (u_1(y_i),\ u_2(y_i),\ .\ .\ .\ .\ ,\ u_n(y_i)),\ u_k(y_i) = u(x_k,\ y_i),$$

$$\vec{f}(y_i) = (f_1(y_i),\ f_2(y_i), \ldots,\ f_n(y_i)),\ f_k(y_i) = f(x_k,\ y_i),$$

$$\vec{\omega}(y_i) = \left(\frac{a}{a+1}\left[u_0(y_i) + \operatorname{tg}\alpha u_1(y_i)\right],\ 0, \ldots, 0,\ \left[u_{n+1}(y_i) + \operatorname{tg}\beta u_n(y_i)\right]\right),$$

$$\vec{A} = (A_1,\ A_2, \ldots, A_n),\ \vec{B} = (B_1,\ B_2, \ldots, B_n),$$

$$\gamma = \frac{h_1}{h}, \quad a = \frac{x_0}{h},$$

P_4 — матрица, фундаментальная для матрицы

$$T_4 = \rho^{-1} \left| \begin{array}{cccccc} 1 - a\operatorname{tg}\alpha & a+1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a+1 & 1 & a+2 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a+2 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & a+n-2 & 1 & a+n-1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a+n-1 & 1-(a+n)\operatorname{tg}\beta \end{array} \right|, \tag{3}$$

диагональные матрицы $\Phi(i) = [\varphi_k(y_i)]^n_1$, $\Psi(i) = [\psi_k(y_i)]^n_1$, $G(i) = [G_k(i)]^n_1$ в зависимости от величин

$$\gamma_{ik} = 1 + \gamma^2 + \lambda h^2{}_1 - \gamma^2 \frac{\lambda_k}{2}, \tag{4}$$

где λ_k — собственные числа матрицы (3), определяются при помощи формул, указанных в табл. 1 (см. [1]), ρ — диагональная матрица

$$\rho = [a+1,\ a+2, \ldots, a+n] \tag{5}$$

Входящие в формулу (2) векторы произвольных постоянных $\vec{A}$ и $\vec{B}$ определяются из краевых условий на вертикальных сторонах прямоугольника $y = y_0$ и $y = y_{m+1}$. Постоянные $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ определяются в зависимости от вида краевых условий на горизонтальных сторонах прямоугольника. В частности $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 0$, если на сторонах прямоугольника $x = x_0$ и $x = x_{n+1}$ краевые условия совпадают с краевыми условиями первой краевой задачи.

Формула суммарных представлений (2) позволяет при решении краевых задач резко сократить количество линейных алгебраических уравнений, подлежащих численному решению, если известны диагональная матрица собственных чисел и фундаментальная матрица, соответствующие матрице T_4. В связи с вопросом о численном построении таких матриц исследуются специальные функции дискретного аргумента первого и второго рода [1] и устанавливаются их некоторые свойства. Используя результаты работы [3], устанавливается промежуток, в котором расположены нули специальной функции дискретного аргумента первого рода $P_\lambda(x_k)$, а также даются нижние оценки для них в случае $a=0$. Здесь же выводится явная формула для специальной функции дискретного аргумента первого рода в виде

$$P_\lambda(x_{k+1}) = \frac{\partial^k f(z, \lambda)}{\partial z^k} \Big|\, z=0, \tag{6}$$

где $f(z, \lambda)$ — известная элементарная функция.

В § 2 этой главы рассматривается вопрос о численном построении диагональных матриц собственных чисел матрицы T_4. При этом предлагается итерационный способ нахождения всех собственных чисел трехдиагональных матриц

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} - \frac{\Phi_{n+1}(\lambda_i^{(k)})}{Q^1_k(\lambda_i^{(k)})} \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, n \\ k=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $Q_k(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^{(k)})$, значения $\Phi_{n+1}(\lambda_i^{(k)})$ легко вычисляются при помощи рекуррентных соотношений

$$\Phi_1(\lambda)=1,\ \Phi_2(\lambda)=\frac{[(a+1)\lambda-(1-a\operatorname{tg}\alpha)]\,\Phi_1(\lambda)}{a+1},$$

$$\Phi_{j+1}(\lambda)=\frac{[(a+j)\lambda-1]\,\Phi_j(\lambda)-(a+j-1)\,\Phi_{j-1}(\lambda)}{a+j}$$

$$(j=2, 3, \ldots, n-1),$$

$$\Phi_{n+1}(\lambda)=\frac{\{(a+n)\lambda-[1-(a+n)\operatorname{tg}\beta]\}\,\Phi_n(\lambda)-(a+n-1)\,\Phi_{n-1}(\lambda)}{a+n}.$$

Метод решения алгебраических уравнений по формуле (7) в некотором смысле близкий к известному методу Ньютона и был предложен также в работе [4], где доказывается квадратичная сходимость метода. Мы приводим доказательство сходимости итерационного процесса (7) при менее жестких чем в [4] ограничениях на начальные приближения корней и несколько другим способом получаем оценку сходимости.

В § 3 второй главы указывается способ численного построения фундаментальных матриц для матрицы T_4.

В этой же главе строятся таблицы указанных матриц (6-го, 10-го, 20-го и 30-го порядков), соответствующие различным типам краевых условий на горизонтальных сторонах прямоугольника. Эти таблицы могут быть использованы при численном решении ряда практически важных задач.

В третьей главе решаются конкретные краевые задачи теории осесимметричного потенциала в случае сплошного цилиндра.

В § 1 этой главы дается решение первой краевой конечноразностной задачи для уравнения (1) при $\lambda \geqslant 0$. Полученное решение при сколь угодно большом количестве внутренних узлов прямоугольника явно выражается через краевые условия и правую часть уравнения. Здесь же приводится решение конечноразностной задачи Неймана для уравнения (1) в случае $\lambda = 0$ и др. При этом устанавливается необходимое условие разрешимости задачи Неймана, представляющее конечноразностный аналог условия

$$\iint_D xLv\,dx\,dy = \int_S x \frac{\partial v}{\partial n} dS. \tag{8}$$

Приводятся числовые примеры на 100 и на 320 внутренних узлов.

В § 2 приводятся простейшие формулы суммарных представлений для неограниченных областей—сплошного бесконечного и сплошного полубесконечного цилиндров. Эти формулы получаются путем предельного перехода в соответствующих формулах для сплошного конечного цилиндра.

В § 3 третьей главы дается применение метода суммарных представлений к численному решению краевых задач теории осесимметричного потенциала в случае области, составленной из двух сплошных цилиндров различных радиусов, в случае цилиндра с разрезами и др. Приводится числовой пример на 320 внутренних узлов.

В приложении приводятся построенные во второй главе таблицы фундаментальных матриц и диагональных матриц собственных чисел, соответствующих матрице T_4.

Основные результаты работы изложены в [5—9] и были доложены на Второй (апрель 1965 г.) и Третьей (апрель 1966 г.) конференциях молодых математиков Украины, на Республиканском семинаре по вычислительной математике при Научном совете по кибернетике АН УССР (Киевский госуниверситет).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киевского ун-та, 1962.

2. G. N. Polozhii, The Method of Summary Representation for Numerical Solution of Problems of Mathematical Physics; Pergamon Press, Oxford, London, Edinburg, New Jork, Paris, Frankfurt, 1965.

3. F. Pollaczek. Sur une generalisation des polynomes de Legendre. Comptes Rendus de l'Acad des Sc., Paris, 228 (1949), 1363—1365.

4. К. Дочев. Видоизменен метод на Ньютон за едновременно приблизително пресмятане на всички корени на додено алгебрично уравнение. «Физ-матем. списание», 1962, 5, № 2, 136—139 (болг.).

5. П. А. Ротаенко. Об опыте применения метода суммарных представлений к численному решению краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Сборник трудов семинара «Вычислительная математика». Инст. кибернетики АН УССР, 1965.

6. П. А. Ротаєнко. До питання про знаходження власних значень і власних векторів деяких матриць типу П. Матеріали Другої наукової конференції молодих математиків України, Київ, 1965.

7. П. А. Ротаенко. К вопросу о решении задач осесимметричного потенциала методом суммарных представлений. Межвед. темат. сб. «Вычислительная математика», в. 2, 1965.

8. П. А. Ротаєнко. Про застосування методу сумарних представлень до розв'язання крайових задач осесиметричного потенціалу, матеріали звітно-наукової конференції кафедр інституту, КДПІ, 1964.

9. П. А. Ротаєнко. Про розв'язання задачі Неймана для рівняння осесиметричного потенціалу. Матеріали Третьої наукової конференції молодих математиків України, Київ, 1966.

БФ 21799. Подписано к печати 29.VI 1966 г. Формат бумаги $60 \times 84^{1}/_{16}$. Объем 0,5 печ. л. Зак. 2534. Тираж 200.

Киев, тип. № 3, цех 2