КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ПЕРЕСТЮК Марія Миколаївна

УДК 519.21

ОЦІНКИ РОЗПОДІЛІВ СУПРЕМУМІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ЇХ ВЕЙВЛЕТ РОЗКЛАДІВ

01.01.05 – Теорія ймовірностей та математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 2009

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
КОЗАЧЕНКО Юрій Васильович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
професор кафедри теорії ймовірностей, статистики
та актуарної математики

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
ІВАНОВ Олександр Володимирович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут",
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей

доктор фізико-математичних наук, доцент
КУРЧЕНКО Олександр Олексійович,
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри математичного аналізу

Захист відбудеться 21 грудня 2009 року о 14^{00} годині на засіданні спеціалі-зованої вченої ради Д 26.001.37 в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ - 22, проспект Академіка Глушкова, 2, корпус 7, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розіслано «____» __________ 2009 року

Вчений секретар спеціалізованої Вченої ради **Моклячук М. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Умови обмеженості з ймовірністю одиниця супремумів випадкових процесів на компактах та оцінки для їх розподілів цікавили багатьох видатних спеціалістів з теорії ймовірностей. Зокрема, цій тематиці присвячена робота А.В.Скорохода про експоненціальну інтегровність супремуму гауссового процесу. Подібним задачам для гауссових процесів присвячені роботи Р.Дадлі та К.Ферніка. Для більш широких класів процесів, зокрема процесів з просторів Орліча випадкових величин такі задачі вивчались в роботах Н.Коно, Ю.В.Козаченка та інших математиків.

Поведінка випадкових процесів на множинах, які не є компактними вивчалась мало. В 1958 році Ю. К. Беляєв довів, що гауссові стаціонарні процеси з неперервним спектром з ймовірністю одиниця необмежені на R.

Але до цього часу в деяких роботах зустрічаємо твердження, що траєкторії стаціонарних гауссових процесів обмежені з ймовірністю одиниця.
Умови обмеженості випадкових g – субгауссових процесів (зокрема гауссових) на R та оцінки для ймовірностей $P\left\{\sup\limits_{t\in R}\left(\left|x(t)\right|/c(t)\right)>x\right\}$, де $c(t)>0$ спеціально підібрана функція, що характеризує зростання $x(t)$ при $t\to\infty$, вивчались в роботах Ю.В.Козаченко та О.І.Василик. Для інших класів процесів, зокрема процесів з просторів Орліча випадкових величин, ці питання практично не вивчались.

Тому вивчення поведінки випадкових процесів $\left\{x(t),t\in R\right\}$ з просторів Орліча випадкових величин, що проводиться в роботі, є актуальним. Зауважимо також, що дослідження в цьому напрямку істотно використовуються при знаходженні умов рівномірної збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів з ймовірністю одиниця.

В останній час в різних областях науки та техніки широко використовуються вейвлет розклади функцій та випадкових процесів (зокрема при збереженні та відтворенні інформації, кодуванні повідомлень і т. ін.). Тому є актуальною задача вивчення умов збіжності цих розкладів в нормах різних просторів, зокрема, умови рівномірної збіжності. Це дає змогу оптимально вибрати вейвлет базис для кожної конкретної задачі.

Для випадкових процесів умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів на обмежених інтервалах отримані лише для тих процесів, траєкторії яких обмежені на R з ймовірністю одиниця. Але більшість важливих процесів такими не є. Тому задача знаходження умов рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця вейвлет розкладів широкого класу випадкових процесів, якій присвячена дисертація, є актуальною.

Основним завданням дисертаційної роботи є дослідження поведінки випадкових процесів $\left\{x(t),t\in R\right\}$ з просторів Орліча випадкових величин при $t\to\infty$ та застосування отриманих результатів для вивчення умов рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця вейвлет розкладів цих процесів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетної дослідницької теми №06БФ038-03 кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка «Аналітичні та стохастичні методи дослідження динамічних систем» (номер державної реєстрації 0106U005864), яка входить до комплексної наукової програми «Математичні проблеми природознавства та економіки».

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є подальший розвиток теорії випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, та застосування отриманих результатів до дослідження умов рівномірної збіжності з імовірністю одиниця вейвлет розкладів цих процесів. В роботі ставляться такі завдання.

- Дослідження швидкості зростання супремуму випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин $x = \{x(t),\, t \in R\}$ при прямуванні t до нескінченності.
- Отримання нових теорем про рівномірну збіжність на обмеженому інтервалі вейвлет розкладів необмежених на R функцій.
- Дослідження умов рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця на обмеженому інтервалі вейвлет розкладів випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин.
- Встановлення умов рівномірної збіжності на обмеженому інтервалі вейвлет розкладів g - субгауссових випадкових процесів.
- Знайдення умов рівномірної збіжності вейвлет розкладів стаціонарних гауссових процесів на будь-якому обмеженому інтервалі.

Об'єктом дослідження є випадкові процеси з різних просторів випадкових величин та їх вейвлет розклади.

Предметом дослідження є асимптотична поведінка випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, g – субгауссових випадкових процесів та їх вейвлет розклади.

Методика дослідження. В роботі використано методи теорії випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин та теорії g - субгауссових випадкових процесів, а також методи вейвлет аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів.

- Для випадкових процесів з простору Орліча випадкових величин $x = \{x(t),\, t \in R\}$ описано класи функцій $c(t) > 0$, що $\sup\limits_{t \in R}\left(|x(t)|/c(t)\right) < \infty$ з імовірністю одиниця, а також знайдено оцінки для ймовірностей $P\left\{\sup\limits_{t \in R}\left(|x(t)|/c(t)\right) > x\right\}$.
- Встановлено умови рівномірної збіжності на деякому обмеженому інтервалі вейвлет розкладів необмежених на R функцій.
- Встановлено умови рівномірної збіжності з імовірністю одиниця вейвлет розкладів випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин на деякому обмеженому інтервалі.
- Встановлено умови рівномірної збіжності з імовірністю одиниця вейвлет розкладів g - субгауссових випадкових процесів на деякому обмеженому інтервалі.
- Встановлено умови рівномірної збіжності з імовірністю одиниця на будь-якому обмеженому інтервалі стаціонарних гауссових процесів. Для широких класів систем вейвлетів ці умови є необхідними і достатніми.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в роботі результати мають теоретичне значення та практичне застосування в актуарній математиці, теорії кодування інформації, стохастичному моделюванні та інших галузях науки, де використовуються випадкові процеси та вейвлет аналіз.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані самостійно. За результатами дисертації здобувач опублікував п’ять робіт в фахових виданнях, дві з яких разом з науковим керівником професором Козаченком Ю. В., в яких Козаченку Ю. В. належить постановка задач та загальне керівництво роботою. Одна робота опублікована в співавторстві з Козаченком Ю. В. та Василик О. І. В дисертації з цієї роботи наводяться лише результати автора дисертації. Дві роботи опубліковані автором самостійно.

Результати доповідались на конференціях та наукових семінарах

1. International summer school "Insurance and finance: science, practic and education" Foros (Crimea, Ukraine). June 27 – July 1, 2006.
2. International conference Modern stochastics theory and applications. June 19 – 23, 2006, Kyiv.
3. Науковий семінар при кафедрі теорії ймовірностей та математичного аналізу Ужгородського національного університету, 2006.
4. Науковий семінар при департаменті математики університету міста Піза (Італія), 2007.
5. Науковий семінар при кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики Київського Національного університету ім. Тараса Шевченка, 2008.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано п’ять статей в фахових виданнях [1 – 5] та 2 тез доповідей на наукових конференціях [6 – 7].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Загальний зміст дисертації становить 133 сторінок, з них список використаних джерел займає 12 сторінок і включає в себе 104 найменування.

Основний зміст роботи. У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і завдання дослідження, виділено наукову новизну та можливі практичні застосування отриманих результатів.

Перший розділ містить огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та спорідненими питаннями.

В другому розділі наведено відомості з теорії випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин та теорії g - субгауссових випадкових процесів.

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $U=\{U(x),\ x\in R\}$ називається С – функцією Орліча (С – функцією), якщо $U(0)=0$ та $U(x)$ – монотонно зростає при $x>0$.

Приклад 2.1

Прикладами С – функцій Орліча є такі функції

a) $U(x)=a|x|^{\alpha},\ x\in R,\ a>0,\ \alpha\ge 1;$

b) $U(x)=c\left(\exp\left\{a|x|^{\alpha}\right\}-1\right),\ x\in R,\ c>0,\ a>0,\ \alpha\ge 1;$

c) $U(x)=c\left(\exp\{\varphi(x)\}-1\right),\ x\in R,\ c>0,\ \varphi(x)$ – довільна С – функція;

d) $U(x)=\begin{cases}\left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}}x^2, \text{при } |x|<\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\\ \exp\left\{|x|^{\alpha}\right\}, \text{при } |x|>\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, 0<\alpha<1.\end{cases}$

Нехай $U=\{U(x),\ x\in R\}$ – довільна С – функція Орліча.

Означення 2.2. C – функція Орліча $U=\{U(x),\ x\in R\}$ називається N – функцією Орліча (N – функція), якщо $(U(x)/x)\to 0,$ коли $x\to 0;$ $(U(x)/x)\to\infty,$ коли $x\to\infty.$

Означення 2.4. Для N – функції $U=\{U(x), x\in R\}$ виконується умова Q, якщо для U виконується умова $\lim\limits_{x\to 0}\left(U(x)/x^2\right)=C>0,$ де C може дорівнювати $+\infty$.

Означення 2.5. C – функції $U=\{U(x), x\in R\}$ задовольняє g – умову, якщо існують константи $z_0\ge 0, K>0$ та $A>0$ такі, що при $x\ge z_0, y\ge z_0$ має місце нерівність

$$U(x)U(y)\le AU(Kxy) \qquad (2.4)$$

Означення 2.7. Нехай $\{\Omega,\mathcal{L},P\}$ стандартний імовірнісний простір U – довільна C – функція. Простором Орліча випадкових величин називають таку сім'ю таких випадкових величин $L_U(\Omega)$, що для кожної $\xi\in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi>0,$ що $EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right)<\infty.$

Сім'я $L_U(\Omega)$ є простором Банаха відносно норми

$$\|\xi\|_U=\inf\left\{r>0: EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right)\le 1\right\} \qquad (2.5)$$

(Норма $\|\xi\|_U$ – називається нормою Люксембурга).

Зауваження 2.1. Простір $L_p(\Omega), p\ge 1$ є простором Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)=|x|^p$ та

$$\|\xi\|_U=\|\xi\|_p=\left(E|\xi|^p\right)^{1/p}.$$

Означення 2.8. Додатна монотонна неспадна послідовність $(\chi_U(n), n\ge 1)$ називається М – характеристикою(мажоруючою характеристикою) простору $L_U(\Omega)$, якщо для будь – яких n, та $\xi_k\in L_U(\Omega), k=\overline{1,n}$ має місце нерівність

$$\left\|\max_{1\le k\le n}|\xi_k|\right\|_U\le\chi_U(n)\max_{1\le k\le n}\|\xi_k\|_U \qquad (2.7)$$

Означення 2.9. Сім'я випадкових величин Ξ з простору $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевою, якщо для будь – яких констант $C_i, i=\overline{1,n}$ виконується нерівність:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}C_i\,\xi_i\right\|_U\le C\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}C_i\,\xi_i\right)^2\right)^{1/2} \qquad (2.8)$$

де C – константа, що залежить лише від Ξ.

Замикання сім'ї Ξ в $L_2(\Omega)$ співпадає з замиканням цієї сім'ї в $L_U(\Omega)$. Це замикання є також строго Орлічевою сім'єю з тою ж самою константою. Замкнені строго Орлічеві сім'ї з простору $L_U(\Omega)$ будемо позначати $SL_U(\Omega)$. Константу C з (2.8) називаємо визначальною константою сім'ї $SL_U(\Omega)$.

Означення 2.10. Випадковий процес $X=\{X(t), t\in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору $L_U(\Omega)$, якщо для будь – якого $t\in T$ – випадкова величина $X(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$.

Означення 2.11. Випадковий процес $X=\{X(t), t\in T\}$ належить $SL_U(\Omega)$ (є строго Орлічевим), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t\in T\}$ є строго Орлічевою сім'єю з простору $L_U(\Omega)$. Визначальну константу цієї сім'ї називатимемо визначальною константою процесу X.

Означення 2.13. Випадковий процес $Z_\alpha=\{Z_\alpha(t), t\in R\}$ називається WSSSI процесом (автомодельним процесом з стаціонарними приростами в слабкому розумінні), якщо

$$Z_\alpha(-t)=Z_\alpha(t),\ EZ_\alpha(t)=0,\ E\left(Z_\alpha(t)\right)^2=t^{2\alpha}, t>0,\quad E\left|Z_\alpha(t)-Z_\alpha(s)\right|^2=\left|t-s\right|^{2\alpha}, t>0, s>0.$$

Коли $Z_\alpha(t)$ гауссовий процес, то $Z_\alpha(t)$ – це звичайний процес дробового броунівського руху з параметром Хюрста α.

Означення 2.14. Випадковий процес $X=\{X(t), t\in T\}$ такий, що $X\in L_U(\Omega)$ називається квазістаціонарним (стаціонарним), якщо $\left\|X(t)\right\|_U\le E_X\left(\left\|X(t)\right\|_U=E_X\right)$

$$\text{та } \left\|X(t)-X(s)\right\|_U\le w\left|t-s\right|,\ \left(\left\|X(t)-X(s)\right\|_U=w\left|t-s\right|\right),$$

де $w(\cdot)$ деяка вимірна функція, а E_X – деяка константа.

Означення 2.15. Нехай $g=\{g(x), x\in R\}$ $-N-$ функція для якої виконується умова Q (означення 2.4). Випадкова величина належить простору $Sub_g(\Omega)$ (є g – суб-гауссовою), якщо $E\xi=0, E\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda\in R$ та існує константа $a>0$, що наступна нерівність має місце для всіх $\lambda\in R$: $E\exp\{\lambda\xi\}\le\exp\{g(a\lambda)\}$.

Простір $Sub_g(\Omega)$ є простором Банаха відносно норми $\tau_g(\xi)=\sup\limits_{\lambda\ne 0}\dfrac{g^{(-1)}\left(\ln E\exp\{\lambda\xi\}\right)}{|\lambda|}$.

Означення 2.16.1. Сім'я Δ випадкових величин ξ з простору $Sub_g(\Omega)$ називається строго $Sub_g(\Omega)$, якщо існує константа $C_\Delta>0$ така, що для будь – якої скінченної множини I випадкових величин $\xi_i, i\in I$ з простору $Sub_g(\Omega)$ має місце нерівність $\tau_g\left(\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)\le C_\Delta\left(E\left(\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}$.

Замикання сім'ї Δ в $L_2(\Omega)$ співпадає з замиканням цієї сім'ї в $Sub_g(\Omega)$. Це замикання є також строго $Sub_g(\Omega)$ сім'єю з тою ж константою C_Δ. Замкнені строго $Sub_g(\Omega)$ сім'ї будемо позначати $SSub_g(\Omega)$, константу C_Δ називаємо визначальною константою сім'ї $SSub_g(\Omega)$.

Означення 2.16.2. Випадковий процес $X=\{X(t),t\in T\}$, де T– деяка параметрична множина, належить простору $Sub_g(\Omega)$, якщо для будь – якого $t\in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $Sub_g(\Omega)$.

Означення 2.17. Випадковий процес $X=\{X(t),t\in T\}$ належить простору $SSub_g(\Omega)$, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t),t\in T\}$ належить $SSub_g(\Omega)$.

В третьому розділі вивчаються властивості випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, зокрема з просторів $L_p(R)$. Знайдено оцінки для розподілів супремумів цих процесів на скінченних інтервалах та досліджена поведінка цих процесів при $t\to\infty$.

Перша частина розділу містить теореми про оцінки розподілу супремуму процесів з просторів Орліча на скінченому інтервалі та умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця цих процесів.

Теорема 3.1 . Нехай (T,ρ) – метричний (псевдометричний) компактний простір. $N(u)$ – метрична масивність простору (T,ρ), тобто мінімальне число замкнених куль радіусу u, що покривають (T,ρ). $X=\{X(t),t\in T\}$ – сепарабельний випадковий процес з простору $L_U(\Omega)$. $\chi_U(n)$ – M– характеристика простору $L_u(\Omega)$. Нехай існує така функція $\sigma=\left\{\sigma(h),0\le h\le \sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)\right\}$, що $\sigma(h)$ – монотонно зростає, неперервна та $\sigma(0)=0$ і $\sup\limits_{\rho(t,s)\le h}\left\|X(t)-X(s)\right\|_U\le\sigma(h)$. Якщо для деякого $\varepsilon>0$ виконується умова

$$\int_0^{\varepsilon}\chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du<\infty, \qquad (3.1)$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ – функція обернена до $\sigma(h)$, то з ймовірністю одиниця випадкова величина $\sup\limits_{t\in T}|X(t)|$ належить простору $L_u(\Omega)$ та

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\|_U\le\left\|X(t_0)\right\|_U+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_0\cdot\theta}\chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du=B(t_0), \qquad (3.2)$$

де t_0 – довільна точка з T, $w_0=\sigma\left(\sup\limits_{t\in T}\rho(t_0,t)\right)$, $0<\theta<1$. Крім того, для будь – якого $\varepsilon>0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\}\le\left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0)}\right)\right)^{-1} \qquad (3.3).$$

Теорема 3.2. Нехай (T,ρ) – метричний (псевдометричний) компактний простір $X=\{X(t),t\in T\}$ – сепарабельний випадковий процес з простору $L_U(\Omega)$. Нехай виконуються умови теореми 3.1. Тоді $X(t)$ вибірково неперервний з ймовірністю одиниця на (T,ρ). Крім того, $\left\| \sup\limits_{\rho(t,s)\le h} \left| X(t) - X(s) \right| \right\|_U \to 0$, коли $h \to 0$.

В другій частині розділу міститься загальна теорема про поведінку випадкових процесів $X(t)$ з просторів Орліча випадкових величин при $|t| \to \infty$, а саме побудовано функції $c(t) > 0$, що з ймовірністю одиниця $\sup\limits_{t\in R}\left(|X(t)| / c(t) \right) < \infty$ та отримані оцінки ймовірностей $P\left\{ \sup\limits_{t\in R}\left(|X(t)| / c(t) \right) > \varepsilon \right\}, \varepsilon > 0$.

Теорема 3.3. Нехай $X = \{X(t), t \in R\}$ – сепарабельний випадковий процес з простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ задовольняє умову g. Припустимо, що виконуються наступні умови: існує сім'я замкнених інтервалів $[a_k, a_{k+1}] = B_k$ таких, що

$$-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty, \; k \in Z \qquad \bigcup_{k\in Z} B_k = R;$$

на для кожного замкненого інтервалу B_k існують такі функції $\sigma_k = \{\sigma_k(h), 0 \le h \le a_{k+1} - a_k\}$, що $\sigma_k(h)$ – неперервні монотонно зростаючі функції, $\sigma_k(0) = 0$, та

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h \\ t,s\in B_k}} \left\| X(t) - X(s) \right\|_U \le \sigma_k(h); \qquad (3.11)$$

для деякого $\varepsilon > 0$ виконується умова

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < \infty; \qquad (3.12)$$

$c = (c(t), t \in R)$ деяка неперервна функція, що $c(t) > 0, \; t \in R, \; r_k = \sup\limits_{t\in B_k} \frac{1}{c(t)} = \frac{1}{\inf\limits_{t\in B_k} c(t)}$;

t_{0k} деяка точка замкненого інтервалу B_k; z_0, K, A – константи з означення 2.5;

$$D(t_{0k}) = \left\| X(t_{0k}) \right\|_U + \frac{C_U}{\theta_k(1-\theta_k)} \cdot \int_0^{w_{0k}\theta_k} U^{(-1)}\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \text{ ,де } w_{0k} = \sigma_k\left(\sup_{t\in B_k} |t_{0k} - t| \right)$$

C_U – деяка відома константа, θ_k – довільне число таке, що $0 < \theta_k < \min\left(1, \sigma_k\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2U(z_0)} \right) \frac{1}{w_{0k}} \right)$;

для деякого $\delta > z_0 \max\limits_{k\in Z} r_k D(t_{0k})$ збігається ряд

$$\sum_{k\in Z} \left(U\left(\frac{\delta}{r_k D(t_{0k})} \right) \right)^{-1} < \infty, \quad (3.12')$$

тоді для всіх $\varepsilon \ge K\delta z_0$ має місце нерівність

$$P\left\{ \sup_{t\in R} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \le \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\delta K} \right) \right)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \sum_{k\in Z} \left(U\left(\frac{\delta}{r_k D(t_{0k})} \right) \right)^{-1} \qquad (3.13)$$

Крім того існує випадкова величина $\xi, P\{\xi < \infty\} = 1$, що з ймовірністю одиниця $|X(t)| < \xi c(t), t \in R$.

В третій частині розділу отримані в загальному випадку результати застосовуються до випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$.

Теорема 3.5

Нехай $X=\{X(t),t\in R\}$ – сепарабельний випадковий процес з простору $L_p(\Omega), p\ge 1$. Припустимо, що виконуються наступні умови:

B_k замкнені інтервали $[a_k,a_{k+1}]$ такі, що $-\infty<a_k<a_{k+1}<+\infty,\ k\in Z,\ \bigcup_{k\in Z}B_k=R$;

на кожному з замкнених інтервалів $[a_k,a_{k+1}]$ існують такі функції $\sigma_k=\{\sigma_k(h),\ 0\le h\le a_{k+1}-a_k\}$, що $\sigma_k(h)$ – неперервні монотонно зростаючі функції $\sigma_k(0)=0$ та $\sup\limits_{\substack{|t-s|\le h\\ t,s\in B_k}}\left(E|X(t)-X(s)|^p\right)^{1/p}\le\sigma_k(h)$; для деякого $\varepsilon>0,\ k\in Z$ виконується умова

$\int_0^{\varepsilon}\left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{1}{p}}du<\infty$; $c=\{c(t),t\in R\}$, деяка неперервна додатна функція, $r_k=\dfrac{1}{\inf\limits_{t\in B_k}c(t)}$,

t_{0k} – деяка точка з замкненого інтервалу B_k;

$$D_p(t_{0k})=\left(E|X(t_{0k})|^p\right)^{1/p}+\frac{\alpha_{k,p}}{\theta_k(1-\theta_k)}\int_0^{w_{0k}\cdot\theta_k}\left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{1}{p}}du,$$

де θ_k – будь – які числа $0<\theta_k<1$

$$\alpha_{k,p}=\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}+\sup_{t\in[a_k,b_k]}|t-t_{0k}|\right)^{1/p},\ w_{0k}=\sigma_k\left(\sup_{t\in[a_k,b_k]}|t_0-t|\right);$$

збігається ряд

$$\sum_{k\in Z}\left(r_kD(t_{0k})\right)^p<\infty,\qquad(3.20)$$

тоді для всіх $\varepsilon>0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in R}\frac{|X(t)|}{c(t)}>\varepsilon\right\}\le\frac{\sum_{k\in Z}\left(r_kD(t_{0k})\right)^p}{\varepsilon^p}\quad(3.21).$$

Крім того, існує випадкова величина ξ $P\{\xi<\infty\}=1$, що з ймовірністю одиниця $|X(t)|<\xi c(t),t\in R$.

Далі отримані результати застосовуються до випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин експоненціального типу. Простір Орліча $L_U(\Omega)$ називається простором Орліча експоненціального типу, коли $U(x)=exp\{\psi(x)\}-1$, де $\psi(x)$ - також C – функція. В цьому випадку замість $L_U(\Omega)$ вживають позначення $Exp_\psi(\Omega)$.

Теорема 3.11. Нехай $X=\{X(t),t\in R\}$ – сепарабельний випадковий процес з простору $Exp_\psi(\Omega)$. Припустимо, що виконуються наступні умови:

B_k – замкнені інтервали $[a_k,a_{k+1}]$ такі, що $-\infty<a_k<a_{k+1}<\infty,\quad a_{k+1}-a_k>2,\ k\in Z,\ \bigcup_{k\in Z}B_k=R$;

на кожному з замкнених інтервалів B_k існують такі функції $\sigma_k=\{\sigma_k(h),0\le h\le a_{k+1}-a_k\}$, що $\sigma_k(h)$ – неперервні, монотонно зростаючі функції $\sigma_k(0)=0$ та $\sup\limits_{\substack{|t-s|\le h \\ t,s\in B_k}} \|X(t)-X(s)\|_{E_\psi} \le \sigma_k(h)$;

для деякого $\varepsilon>0$ виконується умова

$$\int_0^{\varepsilon} \psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty; \qquad (3.48)$$

$c=\{c(t),t\in R\}$ деяка неперервна функція, така що $c(t)>0,\ r_k=\left(\inf\limits_{t\in B_k} c(t)\right)^{-1}$,

t_{0k} – деяка точка з інтервалу B_k, θ_k – довільні числа такі, що

$0<\theta_k<\min\left(1,\sigma\left(\frac{(a_{k+1}-a_k)}{2(\exp\{\psi(2)\}-1)}\right).\frac{1}{w_{0k}}\right)$, де $w_{0k}=\sigma_k\left(\sup\limits_{t\in[a_k,a_{k+1}]}|t_{0k}-t|\right)$;

$D_\psi(t_{0k})=\|X(t_{0k})\|_{E_\psi}+\exp\{\psi(2)\}\cdot\frac{1}{\theta_k(1-\theta_k)}\cdot\int\limits_0^{w_{0k}\theta_k}\psi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du,$

$w_{0k}=\sigma_k\left(\sup\limits_{t\in[a_k,a_{k+1}]}|t_0-t|\right)$; для деякого $s>2\max\limits_{k\in Z} r_k D_\psi(t_{0k})$ збігається ряд

$$\sum_{k\in Z}\exp\left\{-\psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})}\right)\right\}; \qquad (3.49)$$

тоді при всіх $\varepsilon>2s$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in R}\frac{X(t)}{c(t)}>\varepsilon\right\}\le 2\exp\left\{-\psi\left(\frac{\varepsilon}{s}\right)\right\}\cdot\sum_{k\in Z}\exp\left\{-\psi\left(\frac{s}{r_k D_\psi(t_{0k})}\right)\right\} \qquad (3.50)$$

та існує така випадкова величина $\xi>0,$ що $P\{\xi<\infty\}=1,$ що з ймовірністю одиниця при всіх $t\in R,\ |X(t)|<\xi\cdot c(t)$.

В четвертому розділі встановлено умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів невипадкової функції на скінченному інтервалі.

Функція $\varphi=\{\varphi(x),x\in R\}$ така, що $\varphi\in L_2(R)$ називається f – вейвлетом, якщо виконуються наступні умови:

a1) $\sum\limits_{k\in Z}|\hat\varphi(x+2\pi k)|^2=1$ майже скрізь, де $\hat\varphi(y)$ - перетворення Фур'є функції φ;

a2) існує періодична з періодом 2π функція $m_0(y),\left(\int\limits_0^{2\pi}(m_0(y))^2dy<\infty\right)$, така, що $\hat\varphi(y)=m_0\left(\frac{y}{2}\right)\hat\varphi\left(\frac{y}{2}\right)$;

a3) $\hat\varphi(0)\ne 0$ та $\hat\varphi(y)$ неперервна в нулі;

Функція $\psi(x)$, що є оберненим перетворенням Фур'є до функції $\hat\psi(y)$ називається m – вейвлетом.

Позначимо $\varphi_{0k}(x)=\varphi(x-k),k\in Z$, $\psi_{ik}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j-k),k\in Z$

Означення 4.1. Нехай φ – f – вейвлет. Говоритимемо, що для φ виконується умова S, якщо існує парна функція $\Phi = \{\Phi(x), x \in R\}$ така, що $\Phi(0) < \infty$, $\Phi(x)$ – монотонно спадає при $x \geq 0$, $\int_R \Phi(|x|)dx < \infty$ та $|\varphi(x)| \leq \Phi(|x|)$ для $x \in R$.

Теорема 4.1. Нехай для *f* – вейвлету φ виконується умова S з функцією Φ, $c = \{c(x), x \in R\}$ – така парна функція, що $c(x) > 1,\ x \in R,\ c(x)$ – монотонно зростає при $x > 0$ та $\int_R c(x) \cdot \Phi(|x|)dx < \infty.$ Крім того, існує така функція $0 < A(u) < \infty,\ u > 0$, що для досить великих x

$$c(ax) \leq c(x) \cdot A(a),\ a > 0 \qquad (4.17)$$

Нехай $f = \{f(x),\ x \in R\}$ – така вимірна на R функція, що $|f(x)| \leq c(x), x \in R;$
$f(x)$ – неперервна на інтервалі $(a,b), -\infty < a < b < +\infty$.

Тоді $f_m(x) = \sum_{k \in Z} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k \in Z} \beta_{jk}\delta_{jk}(x) \to f(x)$, при $m \to \infty$ рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$. Тут $\alpha_{0k} = \int_R f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}dx,\ \beta_{jk} = \int_R f(x)\overline{\delta_{jk}(x)}dx$.

В п'ятому розділі знайдено умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин на деякому скінченному інтервалі. Розглянуто процеси з просторів $L_p(\Omega)$ та просторів Орліча експоненціального типу.

Теорема 5.1. Нехай $X = \{X(t),\ t \in R\}$ сепарабельний випадковий процес з простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ задовольняє умову g.

Якщо B_k – інтервали $[a_k, a_{k+1}]$ такі, що $-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty,\ k \in Z \quad \bigcup_{k \in Z} B_k = R;$

на кожному з інтервалів B_k існують такі функції $\sigma_k = \{\sigma_k(h), 0 \leq h \leq a_{k+1} - a_k\}$, що $\sigma_k(h)$ – неперервні монотонно зростаючі функції, $\sigma_k(0) = 0$, та $\sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t,s \in B_k}} \|X(t) - X(s)\|_U \leq \sigma_k(h);$

для деякого $\varepsilon > 0$ виконується умова $\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)du < \infty;$

$c = (c(t), t \in R)$ деяка неперервна функція, така що $c(t) > 0,\ t \in R,\ r_k = \sup_{t \in B_k} \frac{1}{c(t)} = \frac{1}{\inf_{t \in B_k} c(t)};$

t_{0k} – деяка точка з інтервалу B_k; z_0, K, A константи з означення 2.5

$$D(t_{0k}) = \|X(t_{0k})\|_U + \frac{C_U}{\Theta_k(1 - \Theta_k)} \int_0^{\theta w_{0k}} U^{(-1)}\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)du,$$

де $w_0 = \sigma(\sup|t_0 - t|)$, Θ_k будь – які числа $0 < \Theta_k < 1$ (C_U – відома константа)

Для деякого $\delta > Z_0 \max_{k \in Z} r_k D(t_{0k})$ збігається ряд $\sum_{k \in Z}\left(U\left(\frac{\delta}{r_k D(t_{0k})}\right)\right)^{-1} < \infty$.

Нехай для процесу X для деякого інтервалу $[a,b]$ виконується умова:

$\sup\limits_{|t-s|\le h}\left\|X(t)-X(s)\right\|_U \le \sigma(h)$, де $\sigma(h),(0\le h\le b-a)$– така неперервна, монотонно зростаюча функція, що $\sigma(0)=0$ та $\int\limits_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\frac{(b-a)}{2b^{(-1)}(u)}+1\right)du<\infty$;

φ – деякий f – вейвлет, а δ – відповідний йому m – вейвлет;

для φ – виконується умова S з функцією Φ. Нехай для функції $c(x)$ існує функція $0<A(u)<\infty,\ u>0$, що для досить великих $x,\ a>0,\ c(ax)\le c(x)A(a)$ та $\int\limits_R c(x)\Phi(|x|)dx<\infty$.

Тоді для будь – якого інтервалу $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ $X_n(t)\to X(t)$ при $n\to\infty$ рівномірно по $t\in[\alpha,\beta]$ з ймовірністю одиниця, де

$$X_n(t)=\sum_{k\in Z}\xi_{0k}\varphi_{0k}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in Z}\eta_{ik}\delta_{ik}(x), \qquad (5.1)$$

$$\xi_{0k}=\int\limits_R X(t)\overline{\varphi_{0k}(t)}dt;\ \eta_{ik}=\int\limits_R X(t)\overline{\delta_{ik}(t)}dt. \qquad (5.2)$$

Теорема 5.2. Нехай $X=\{X(t),\ t\in R\}$ сепарабельний випадковий процес з простору $L_p(\Omega),p\ge1$; B_k інтервали $[a_k,a_{k+1}]$ такі, що $-\infty<a_k<a_{k+1}<+\infty,\ k\in Z,\ \bigcup\limits_{k\in Z}B_k=R$;

на кожному з інтервалів $[a_k,a_{k+1}]$ існують такі функції

$\sigma_k=\{\sigma_k(h),\ 0\le h\le a_{k+1}-a_k\}$, що $\sigma_k(h)$ – неперервні монотонно зростаючі функції $\sigma_k(0)=0$ та $\sup\limits_{\substack{|t-s|\le h\\ t,s\in B_k}}\left(E\left|X(t)-X(s)\right|^p\right)^{1/p}\le\sigma_k(h)$; для деякого $\varepsilon>0,\ k\in Z$ виконується умова

$\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{1}{p}}du<\infty$; $c=\{c(t),t\in R\}$, деяка неперервна функція, що $c(t)>0,\ \ r_k=\dfrac{1}{\inf\limits_{t\in B_k}c(t)},\ t_{0k}$

– деяка точка з інтервалу B_k;

$D_p(t_{0k})=\left(E\left|X(t_{0k})\right|^p\right)^{1/p}+\dfrac{\alpha_{k,p}}{\theta_k(1-\theta_k)}\int\limits_0^{w_{0k}\cdot\theta_k}\left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{1}{p}}du$, де θ_k– будь – які числа $0<\theta_k<1$

$\alpha_{k,p}=\left(\dfrac{b_k-a_k}{2}+\sup\limits_{t\in[a_k,b_k]}|t-t_{0k}|\right)^{1/p}$, $w_{0k}=\sigma_k\left(\sup\limits_{t\in[a_k,b_k]}|t_0-t|\right)$;

збігається ряд $\sum\limits_{k\in Z}\left(r_kD(t_{0k})\right)^p<\infty$.

Нехай для деякого інтервалу $[a,b]$ виконуються умови теореми 3.2;

φ – деякий f – вейвлет, а δ – відповідний йому m – вейвлет, для φ – виконується умова S з функцією Φ. Для функції $c(t)$ виконується умова: $c(ax)\le c(x)\cdot A(a),\ a>0$ та $\int\limits_R c(x)\Phi(|x|)dx<\infty$. Тоді для будь – якого інтервалу $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ $X_n(t)\to X(t)$ при $n\to\infty$ рівномірно по $t\in[\alpha,\beta]$ з ймовірністю одиниця ($X_n(t)$ – задано в (5.1), (5.2)).

Аналогічно отримаємо умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів для більш вузьких класів процесів.

Теорема 5.3. Нехай $X=\{X(t),\, t\in R\}$ це сепарабельний WSSSI процес з простору $SL_p(\Omega), p>\dfrac{1}{\alpha}$. $\varphi(x)$ – f – вейвлет для якого виконується умова S, коли функція $\Phi(|t|)$ при досить великих t дорівнює $\Phi(|t|)=\dfrac{1}{|t|^{\delta+\alpha}(\ln|t|)^{\gamma}}, \gamma>\dfrac{1}{p}, \delta>1$, то для будь – якого інтервалу $[a,b]$ $X_n(t)\to X(t)$ при $n\to\infty$ рівномірно по $t\in[a,b]$ з ймовірністю одиниця, ($X_n(t)$ – задано в (5.1), (5.2)).

Теорема 5.4. Нехай $X=\{X(t),\, t\in R\}$ квазістаціонарний сепарабельний випадковий процес з простору $L_p(\Omega)$ для якого виконується умова

$$\sup_{|t-s|\le h}\left(E\left|X(t)-X(s)\right|^{p}\right)^{1/p}\le Ch^{\delta},\ \delta>\frac{1}{p},\ C>0.$$

Тоді, якщо для f – вейвлету φ виконується умова S з функцією

$$\Phi(|t|)=\frac{1}{|t|^{\nu}(\ln|t|)^{\gamma}},\ \nu>1+\frac{1}{p},\ \gamma>1+\frac{1}{p},$$

то для будь – якого інтервалу $[a,b]$ $X_n(t)\to X(t)$ при $n\to\infty$ з ймовірністю одиниця рівномірно на $[a,b]$ ($X_n(t)$ – задано в (5.1),(5.2)).

Аналогічно, можна отримати умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів для випадкових процесів з просторів Орліча експоненціального типу. Наприклад, справедлива така теорема.

Теорема 6.3. Нехай $X=\{X(t), t\in R\}$ сепарабельний g - субгауссовий випадковий процес, $B_l=[a_l,a_{l+1}],\ a_{l+1}-a_l>e,\ l\in Z$. Припустимо, що існує неспадна функція $\sigma_l=\{\sigma_l(h), h>0\}$ така, що $\sigma_l(h)>0, \sigma_l(h)\to 0,$ при $h\to 0$ і

$$\sup_{\rho(t,s)\le h,\, t,s\in B_l}\tau_g\left(X(t)-X(s)\right)\le\sigma_l(h)\quad(6.16).$$

Нехай $c=\{c(t), t\in R\}$ парна неперервна функція, така, що для достатньо великих x

$$c(ax)\le c(x)\cdot A(a),\ A(a)\in(0;+\infty), a>0.$$

Позначимо $\delta_l=\sup\limits_{t\in B_l}\left(c(t)\right)^{-1}, l\in Z,$ і для деякої довільної точки W_l множини B_l позначимо

$$\chi_l=\sup_{t\in B_l}\tau_\varphi\left(X(t)-X(w_l)\right),\ Z_l=\tau_\varphi\left(X(w_l)\right).$$

Припустимо, що $$\int_0^{\chi_l}\alpha_g\left(\ln\left(\frac{a_{l+1}-a_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty\qquad(6.17),$$

де $\alpha_g(v)=\dfrac{v}{g^{(-1)}(v)}$.

Нехай

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta_l Z_l<\infty\qquad(6.18)$$

$$\sup_{l\in Z}\frac{\chi_l}{Z_l}\le\beta<\infty\qquad(6.19)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l \int_0^{\chi_l} \alpha_g \left(\ln\left(\frac{a_{l+1}-a_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)} \right) + 1 \right) du < \infty \qquad (6.20)$$

Припустимо, що для проміжку $(a;b) = I$ існують зростаючі функції $\sigma_I = \{\sigma_I(h), h > 0\}$, такі, що $\sigma_I(h) \to 0$ при $h \to 0$

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\le h \\ t,s\in I}} \tau_g\left(X(t) - X(s)\right) \le \sigma_I(h)$$

$$\int_0^{\chi_I} \alpha_g \left(\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma_I^{(-1)}(u)} \right) + 1 \right) du < \infty, \qquad (6.21)$$

де $\quad \chi_I = \sup_{a\le t,s\le b} \tau_g\left(X(t) - X(s)\right).$

Нехай φ є f – вейвлет і ψ є m – вейвлет, породжений φ. Припустимо, що умова S справджується для φ

$$\int_R c(x)\Phi(|x|)\,dx < \infty \qquad (6.22)$$

Тоді з ймовірністю одиниця існують

$$a_{0k} = \int_R X(t)\overline{\varphi_{0k}(t)}\,dt, \quad b_{jk} = \int_R X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}\,dt,\ k \in Z,\ j = \overline{0,+\infty}$$

і $\quad X_m(x) = \sum_{k\in Z} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in Z} b_{jk}\psi_{jk}(x) \to X(x)$ при $m \to \infty$ з ймовірністю одиниця рівномірно на всіх проміжках $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$.

Лема 6.1. Нехай $\xi = \{\xi(t), t \in R\}$ стаціонарний неперервний в середньому квадратичному центрований гауссовий випадковий процес. Вибіркові функції цього процесу неперервні на обмеженому інтервалі $[a,b]$ з ймовірністю одиниця;

$a_l < a_{l+1,}\ l = 1,2,\ldots\ \left(\left|a_{l+1,} - a_l\right| > e\right), a_l \to \infty$ коли $l \to \infty$ $\ a_{-l} = a_l, l > 0$ і $B_l = [a_l, a_{l+1}]$;

$c(t) > 0$ парна неспадна при t > 0 функція, така що

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l \cdot \left(\ln\left[|a_{l+1} - a_l| + 1 \right] \right)^{1/2} < \infty \ \text{ де } \ \delta_l = \frac{1}{c(a_l)} \qquad (6.34)$$

Тоді існує така випадкова величина $\xi_0 > 0$ що $P\{\xi_0 < \infty\} = 1$ і для всіх $t \in R$ з ймовірністю одиниця $|\xi(t)| < \xi_0 \cdot c(t)$.

Теорема 6.8. Нехай для випадкового процесу $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ і функції $c = \{c(t), t \in T\}$ виконуються умови леми 6.1. Нехай $\varphi(x)$ f – вейвлет і $\psi(x)$ m – вейвлет породжений φ. Нехай умова S виконується для φ і та

$$\int_R c(x)\Phi(x)\,dx < \infty \qquad (6.37)$$

Тоді з ймовірністю одиниця $\xi_m(t) \to \xi(t)$ коли $m \to \infty$ рівномірна на кожному обмеженому інтервалі, де $\xi_m(t) = \sum_{k\in Z} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in Z} b_{jk}\psi_{jk}(t),$

$\alpha_{0k} = \int_R \xi_m(t)\overline{\varphi_{0k}(t)}\,dt,\ b_{jk} = \int_R X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}\,dt.$

Наступна теорема, яка є простим наслідком теореми 6.8 дає необхідні і достатні умови рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця вейвлет розкладів стаціонарних гауссових процесів на будь – якому обмеженому інтервалі.

Теорема 6.9. Нехай функція $c(t)$ задовольняє умовам леми 6.1. f – вейвлет φ задовольняє умову S з функцією Φ такою, що $\int_R c(x)\Phi(x)dx < \infty$ крім того $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ неперервні функції. $\xi(t)$ – стаціонарний гауссовий процес. Тоді для того, щоб на будь – якому обмеженому інтервалі $\xi_n(t) \to \xi(t)$ рівномірно з ймовірністю одиниця необхідно і достатньо, щоб $\xi(t)$ був неперервний з ймовірністю одиниця.

ВИСНОВКИ

В роботі встановлено оцінки розподілу супремуму на компакті випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин та розподіл супремуму нормованих процесів з цих просторів на R. Більш детально ці оцінки вивчені для просторів $L_p(\Omega)$ та $Exp_g(\Omega)$.

Доведена теорема, яка дає умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів необмежених функцій на скінченному інтервалі.

Знайдені загальні умови рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця розкладів випадкових процесів по базисам вейвлетів на скінченному інтервалі. Як наслідок, отримано умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів $L_p(\Omega)$ – процесів та процесів Орліча експоненціального типу.

Встановлено умови рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця на обмеженому проміжку вейвлет розкладів g – суб – гауссових процесів.

Зокрема, наведені необхідні та достатні умови такої збіжності для стаціонарних гауссових процесів.

Роботи автора за темою дисертації

1. Козаченко Ю. В. Про рівномірну збіжність вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин I. / Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк // Український математичний журнал, том 59, №12, с.1647 – 1660, 2007.
2. Козаченко Ю. В. Про рівномірну збіжність вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин II. / Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк // Український математичний журнал, 60, №6, с.759 – 775, 2008.
3. Перестюк М. М. Умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів g – субгауссових процесів з монотонною нормою. / М. М. Перестюк // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ./ Ужгород: УжНУ, 2007. – Вип. 14, с. 90 – 94.
4. Kozachenko Yu. V. On uniform convergence of wavelet expansion of φ - sub -Gaussian random processes / Yu. V. Kozachenko, M.M. Perestyuk, O. I. Vasylyk. //Random oper. and stochastics equ. (ROSE), vol. 14, No.3, pp. 209 – 232, 2006.
5. Perestyuk M. M. On uniform convergence of wavelet expansion of some random processes / M. M. Perestyuk// Theory of stochastic processes. vol. 12 (28), no.3-4, pp. 137 – 141, 2006.
6. Kozachenko Yu. V. On wavelet expansions of the processes of fractional Brownian motion / Yu. V. Kozachenko, M.M. Perestyuk, O. I. Vasylyk. // International summer school "Insurance

and finance: science, practic and education" Foros (Crimea, Ukraine). National Taras Shevchenko University, p. 7, 2006.

7. Kozachenko Yu. V. On wavelet expansions of some random processes / Yu. V. Kozachenko, M.M. Perestyuk, O. I. Vasylyk// International conference Modern stochastics theory and applications. Conference Materials. Kiev. National Taras Shevchenko University, 2006.

АНОТАЦІЯ

Перестюк М. М. Оцінка розподілів супремумів випадкових процесів та рівномірна збіжність їх вейвлет розкладів.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико – математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ 2009.

У дисертації досліджуються оцінки для розподілів супремумів випадкових процесів $X(t),\ t\in R$ з просторів Орліча випадкових величин заданих на R. Побудовано такі функції $c=\{c(t),\ t\in R\}$, що з ймовірністю одиниця $\sup\limits_{t\in R}\left(\left|X(t)\right|/c(t)\right)<\infty$ та знайдено оцінки ймовірностей $P\left\{\sup\limits_{t\in R}\left(\left|X(t)\right|/c(t)\right)>x\right\}$. Отримані результати використовуються для знаходження умов рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця вейвлет розкладів цих процесів.

Знайдено умови за яких вейвлет розклади випадкових процесів з просторів Орліча збігаються рівномірно на обмеженому інтервалі з ймовірністю одиниця. Загальні теореми застосовуються до випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$ та експоненціальних просторів Орліча. Досліджено також умову рівномірної збіжності, з ймовірністю одиниця, на обмеженому інтервалі вейвлет розкладів g - субгауссових випадкових процесів. Як наслідок отримано необхідні та достатні умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів гауссових стаціонарних процесів.

Ключові слова: простір Орліча, g - субгауссові випадкові процеси, вейвлет розклади, гауссові випадкові процеси, рівномірна збіжність.

АННОТАЦИЯ

Перестюк М. Н. Оценка распределений супремумов случайных процессов и равномерная сходимость их вейвлет разложений

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико – математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко. Киев 2009.

Условия ограниченности с вероятностью единица супремумов случайных процессов и оценки их распределений интересовали многих выдающихся специалистов в области теории вероятностей. В частности этой тематике посвящена работа А. В. Скорохода об экспоненциальной интегрируемости супремума гауссового процесса. Подобными задачами для гауссовских процессов посвящены работы Р. Дадли и К. Ферника. Для более широких классов процессов, в частности для процессов из пространств Орлича случайных величин, такие задачи изучались в работах Н. Коно, Ю. В. Козаченко и др.

В основном, подобные задачи изучались для случайных процессов заданных на компакте. Условия ограниченности нормированных процессов заданных на R и оценка распределения их супремумов изучались лишь для узких классов случайных процессов.

В диссертации исследуются оценки для распределения супремумов случайных процессов $X(t),\ t \in R$ из пространств Орлича случайных величин заданных на R. Построены такие функции $c = \{c(t),\ t \in R\}$, что с вероятностью единица $\sup\limits_{t\in R}\left(|X(t)|/c(t)\right) < \infty$ и найдены оценки вероятностей $P\left\{\sup\limits_{t\in R}\left(|X(t)|/c(t)\right) > x\right\}$.

Найдены условия при которых вейвлет разложения случайных процессов из пространств Орлича случайных величин сходятся равномерно на ограниченном отрезке с вероятностью единица. Общие теоремы применяются к случайным процессам из пространств $L_p(\Omega)$ и экспоненциальным пространствам Орлича. Исследовано также условие равномерной сходимости, с вероятностью единица, на ограниченном отрезке вейвлет разложений g - субгауссовых случайных процессов. Как следствие получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости вейвлет разложений гауссовых стационарных процессов.

Ключевые слова: пространство Орлича, g - субгауссовые случайные процессы, вейвлет разложения, гауссовые случайные процессы, равномерная сходимость.

ABSTRACT

Perestyuk M. M. Estimates for the distribution of the supremum of random processes and uniform convergence of their wavelet expansions

Dissertation for scientific degree of a candidate of physical and mathematical sciences on speciality 01.01.05 – theory of probability and mathematical statistics – Kyiv National Taras Shevshenko University, Kyiv 2009.

In this dissertation estimates for the distribution of the supremum of stochastic process $X(t),\ t \in R$ from Orlicz space are investigated. We constructe the functions $c = \{c(t),\ t \in R\}$, such that $\sup\limits_{t\in R}\left(|X(t)|/c(t)\right) < \infty$ with probability 1 and find the probability $P\left\{\sup\limits_{t\in R}\left(|X(t)|/c(t)\right) > x\right\}$. Obtained results were applied to find conditions of uniform convergence with probability one of the wavelet expansions of random processes.

Conditions under which wavelet expansions of random processes from the Orlicz space converge uniformly on the finite intervals are found. General theorems are applied to stochastic processes from the spaces $L_p(\Omega)$ and exponential Orlicz spaces. Condition for uniform convergence of wavelet expansions of g - sub – Gaussian random processes with probability one on the finite intervals is investigated. As a corollary, the necessary and sufficient conditions for uniform convergence of wavelet expansions of stationary Gaussian processes are obtained.

Key words: Orlicz space, g - sub – Gaussian random processes, wavelet expansions, Gaussian random processes, uniform convergence.