

730

4451—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

В. М. ПЕТРОВ

**ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ
ФУНКЦИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ**

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
(специальность № 732—методика
преподавания математики)



76

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова

КИЕВ — 1969



100313657

Работа выполнена на кафедре элементарной математики и методики преподавания математики Черниговского государственного педагогического института имени Т. Г. Шевченко.

Официальные оппоненты:

Член-корр. АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор В. С. МИХАЛЕВИЧ (г. Киев).

Кандидат педагогических наук, доцент Г. П. БЕВЗ (г. Киев).

Высшее учебное заведение, дающее внешний отзыв о диссертации — Кировоградский государственный педагогический институт имени А. С. Пушкина, кафедра элементарной математики и методики преподавания математики.

Автореферат разослан « » августа 1969 г.

Защита диссертации состоится 1969 г.

на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института имени А. М. Горького (Киев-30, Бульвар Шевченко, 22/24).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета

Исторические решения XXIII съезда КПСС ставят перед советской средней школой новые ответственные задачи в деле подготовки всесторонне развитых молодых строителей коммунизма. В наше время осуществляются мероприятия по переходу к общему среднему образованию. Особого внимания заслуживает сейчас повышение уровня преподавания математики, одного из важнейших школьных предметов.

Широко известна оценка роли и значения качественного овладения учащимися идеей функциональной зависимости, которая дается нашими учеными и методистами П. С. Александровым, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гончаровым, А. Н. Колмогоровым, А. П. Маркушевичем, А. Я. Хинчиным и др. Учебные программы и пособия, начиная с 1956—57 уч. года, заметно больше стали уделять внимания изучению вопросов элементарного исследования функций.

В период работы советской средней школы, особенно в послевоенное время, учеными, методистами выполнена значительная работа по усовершенствованию методики изучения различных вопросов функциональной зависимости в средней школе. Так, следует отметить исследования в направлении изучения истории введения понятия функции в курсе математики дореволюционной русской средней школы (Б. П. Бычков), общей постановки вопроса об изучении функций в средней школе (Ф. Ф. Нагибин, С. М. Головина, В. И. Севбо, М. Сахаев), функциональной пропедевтики (В. Добровольский, Р. Горбач), методики изучения отдельных классов функций (Е. И. Вандышева, А. И. Жаворонков, М. В. Жвирблис, В. Котек, Д. М. Маергойз, Ю. Н. Макарычев, Н. Н. Шоластер).

Вопросам графического изображения функций посвящено исследование С. И. Збарского, разработке упражнений тригонометрического содержания—А. Г. Грекуловой. Есть исследования, которые рассматривают методику изучения функций

в отдельных классах (В. Г. Ашкинзуе). В последнее время обращено внимание на роль упражнений в преподавании математики (В. А. Грибуллин, Е. П. Лященко, П. М. Эрдинев), установление связей между курсом алгебры и геометрии (З. Г. Муртазин, В. М. Чернов), выявление причин недостатков в усвоении функциональных понятий учащимися (И. А. Марьянский), использование средств экранизации в преподавании математики (А. В. Михалевский).

Отдельным вопросам изучения функциональной зависимости посвящен ряд печатных работ:

функциональная пропедевтика — В. Л. Гончаров, Р. А. Майер;

показательная и логарифмическая функции — И. В. Арнольд, Н. М. Пospelов, М. Л. Пospelов, Е. Я. Ремез и Д. М. Маергойз;

тригонометрические функции — Я. И. Айзенштат и Б. Г. Белоцерковская, И. К. Андронов и А. К. Окунев, В. И. Зарецкий, Г. П. Михальков, И. Б. Погребыцкий и П. Ф. Фильчаков, С. В. Синакевич;

построение графиков функций — П. М. Гельфанд и др., И. П. Гурский, В. К. Егерев и др., И. Я. Танатар, И. Х. Сивашинский.

Значительный функциональный материал содержится в пособиях В. Г. Ашкинзуе и Н. Н. Шоластер, В. А. Вышенского и др., С. А. Гастевой и др., М. Б. Гельфанда, И. А. Гибша, С. Е. Ляпина, С. И. Новоселова.

Функциональный материал послужил основой для создания программированных пособий:

Б. Н. Белого, Н. М. Пospelова; М. Б. Гельфанда; коллектива авторов, членов кафедры элементарной математики и методики преподавания математики Киевского пединститута им. А. М. Горького (О. С. Боришполен, В. М. Кухарь, Д. М. Маергойз, Е. А. Ченакал, И. Е. Шиманский).

И все же, несмотря на внимание, уделяемое этим вопросам, в знаниях учащихся имеются еще значительные пробелы. Об этом, в частности, говорится в обращении Ученого Совета физико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова к преподавателям математики средних школ и руководителям органов народного образования (см. журн. «Математика в школе», 1962, № 1) и в выводах учебного-методического совета МВССО РСФСР (см. журн. «Математика в школе», 1969, № 1).

Такое положение можно объяснить, наряду с другими возможными причинами, недостаточной разработкой методики элементарного исследования функций с более широким использованием графического метода. Возможными путями повышения уровня знаний учащихся по элементарному исследованию функций может быть выполнение ими соответствующих систем упражнений. Однако, учителя математики таких систем упражнений, разработанных применительно к действующим программам, не имели.

Исходя из анализа состояния методики изучения вопросов элементарного исследования функций и практики работы школы, диссертант определил своей главной проблемой:

Установить возможные пути повышения уровня преподавания и качества знаний учащихся по вопросам элементарного исследования функций посредством разработки системы соответствующих упражнений и методики их выполнения, более широкого внедрения графического метода исследования функций в сочетании с использованием функциональной символики. Исследование по этой проблеме осуществляется нами путем решения таких частных задач: 1) раскрытие роли и значения элементарного исследования функций; 2) разработка системы упражнений и методики их выполнения на применение геометрических преобразований к построению графиков функций в связи с элементарным исследованием функций; 3) разработка упражнений на применение функциональной символики при элементарном исследовании функций; 4) подготовка отдельных новых учебно-наглядных пособий, которые могут способствовать поднятию эффективности обучения элементарному исследованию функций; 5) подготовка методических материалов для непосредственного использования учителями математики графического метода исследования функций применительно к курсу алгебры восьмилетней школы и алгебры и элементарных функций в IX—X классах средней школы.

В ходе работы над диссертацией мы пользовались такими методами исследования:

- 1) научно-методический анализ литературных источников;
- 2) анализ состояния знаний учащихся: а) из бесед с учащимися; б) из бесед с учителями; в) по материалам школьной документации; г) по отчетам работы проверочных комиссий Черниговского ОблОНО, программно-методического управления Министерства просвещения УССР; д) по результатам

специально проведенных контрольных работ; е) по материалам работы различных семинаров, конференций учителей; ж) из анализа результатов выпускных экзаменов в восьмилетних и средних школах и вступительных экзаменов в техникумы и институты; з) из личного 20-летнего опыта педагогической работы в средней школе и педагогическом институте;

3) изучение и обобщение опыта работы передовых учителей математики школ УССР;

4) экспериментальная проверка предложенных нами систем упражнений и методики их выполнения в условиях работы со всеми учениками в классе и при проведении факультативных занятий по математике в 8 классе при изучении темы «Функции и их графики»;

5) экспериментальная проверка использования специально изготовленных учебных диафильмов и раздаточных печатных учебно-наглядных пособий.

При проведении исследования автор диссертации использовал также результаты проведенной экспериментальной проверки наших материалов [2] (см. список литературы в конце автореферата) в 19 опорных школах НИИ педагогики УССР в 1958—59 гг.:

Костопольская СШ № 3 Ровенской области — учит. А. И. Белецкий; Харьковская СШ № 94 — учит. Р. И. Либерман; О. Д. Нелегач; Луганская СШ № 2 — учит. Н. А. Морозова, Г. В. Бабенко, С. А. Зодова, В. Т. Шиманская; Николаевская СШ № 15 — учит. Рябова, Москалец; Житомирская СШ № 23 — учит. Р. Ю. Любинская; Донецкая СШ № 1 — учит. Курило и др.

С участием диссертанта была проведена экспериментальная работа в Черниговских школах — № 8 (учит. Л. Г. Кишнис; Е. А. Неговская — 1958—1964 гг.); № 2 (учит. Е. В. Коптюг — 1958—1962 гг.); № 9 (Р. И. Фридман — 1958—59 гг.); № 10 (учит. А. В. Рудник — 1958—59 гг.); № 1 (учит. А. П. Калий, А. И. Симентова, А. Ф. Яковинчик — 1959—1968 гг.).

Материалы по разработке системы графических упражнений в 7—8 классах и изготовлению ученических «Альбомов графических работ», содержание которых отражено в [7], [8], проверялись в 1961—67 гг. в Черниговской СШ № 1 (учит. А. И. Симентова, А. Ф. Яковинчик); в Прилукской СШ-интернате (учит. А. П. Вареник) — в 1964—66 гг.; в Березнянской СШ Черниговской области в 1965—66 гг.

Дидактический материал по созданию диссертантом экспериментальных учебных диафильмов, которые изготовлялись в лаборатории технических средств обучения Черниговского пединститута им. Т. Г. Шевченко (ЧГПИ), проверялись автором совместно со студентами физико-математического факультета ЧГПИ в Черниговских СШ №№ 1, 4, 9, 16. Наши учебные диафильмы III — IV], изданные по заказу МП УССР в 1967 году Укркинохроникой, прошли массовую проверку в школах Украины.

Около 60 студентов-заочников и около 30 студентов стационарного отделения физико-математического факультета ЧГПИ писали под нашим руководством в течение 1964—68 гг. курсовые работы на темы, связанные с диссертационной темой. Они были взяты из наших «Курсовых работ по методике преподавания математики», изд. 2-е [9] — номера тем 51—69, 62, 123, 125; изд. 3 [10] — 105, 120, 141—143, 145, 167.

В течение 1964—68 гг. кружок студенческого научного общества ЧГПИ включал в тематику своей работы, которая велась под руководством диссертанта, вопросы элементарного исследования функций. 12 членов кружка СНО за этот период делали соответствующие доклады на студенческих научных конференциях. В течение 1965—68 гг. диссертант вел спецсеминар на тему: «Элементарное исследование функций в средней школе». Ежегодно, начиная с 1959 года, автор читал лекции соответствующей тематики для учителей города Чернигова, а в течение 1964—69 гг. для учителей г. Киева, Киевской, Полтавской, Сумской, Черкасской, Черниговской областей на постоянно действующих курсах переподготовки учителей математики 9—10 классов при ЧГПИ, где их прослушали около 900 человек.

В 1967 году автор провел выездные 2-х дневные семинары со всеми учителями математики старших классов в 11 районах Черниговской области, на которых рассматривались вопросы элементарного исследования функций в 10 классе при изучении темы «Функции и пределы».

В 1967—68, 1968—69 уч. гг. автором проводились занятия с группами учащихся Черниговской СШ № 1, которые изучали тему «Функции и графики» по программе факультативных занятий.

О планах, ходе и результатах работы автор докладывал:

1. На отчетной научной конференции кафедр ЧГПИ за 1955 год.

2. На заседании сектора математики НИИ педагогики УССР, руководителей районных секций учителей математики г. Киева — 1956—59 гг.

3. На заседании Ученого Совета НИИ педагогики УССР—1959 г.

4. На ежегодных отчетно-научных конференциях преподавателей ЧГПИ (1960—69 гг.).

5. На научных конференциях и педагогических чтениях:

а) Республиканская научно-практическая конференция учителей математики и черчения (г. Чернигов — 8—11.X—1958 г.);

б) Областная научно-практическая конференция по вопросам повышения эффективности урока и связи в преподавании математики, физики, биологии и химии с жизнью (г. Чернигов — 28—29.III—1963 г.);

в) XIV Центральные педагогические чтения (г. Москва — 5—7.I—1965 г.);

г) XV Центральные юбилейные педагогические чтения (г. Москва — 5—8.I—1968 г.);

д) I научная конференция преподавателей математических кафедр педагогических институтов Центральной Зоны РСФСР (г. Тула 15—18.V—1968 г.);

е) В сентябре 1968 г. о результатах наших исследований был сделан доклад на Республиканском научно-методическом семинаре преподавателей математики, который работает при Киевском пединституте им. А. М. Горького под руководством проф. И. Е. Шиманского.

В практику работы школ Украины внедрены результаты наших исследований путем издания 7 методических писем Программно-Методического Управления Министерства Просвещения УССР (общий объем их — около 30 п. л.), статей в республиканских методических сборниках «Преподавание математики в школе», а также выпуском 4 учебных диафильмов Укркинохроникой в 1967 году. Положительные отзывы на наши работы имеются в центральной республиканской печати:

М. Б. Гельфанд, Основные вопросы преподавания алгебры в IX—XI классах, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1963;

М. П. Маланюк, О подборе и системе упражнений для контроля математических знаний учащихся, В кн. «Методика викладання математики», Республиканский научно-методический сборник, вып. III, отв. редактор проф. И. Е. Шиманский, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1967;

В. Ф. Шморгун, Технические средства обучения на вузовской лекции, научно-педагогический журн. «Радянська школа», 1968, № 2;

Б. Н. Белый — «Школьный курс — первооснова», газ. «Радянська освіта», 24.VIII—1968 г.

Положительная оценка нашим учебным диафильмам дается в кандидатской диссертации А. В. Михалевского «Элементы экранизации в преподавании математики в средней школе», Киев, 1968.

Доклад «Графические работы как средство повышения уровня знаний учащихся по математике» на XIV Центральных педагогических чтениях шел по секции «Новое в методике математики» и отмечен Поощрительной Грамотой АПН РСФСР.

Наши материалы «Опыт разработки содержания и методики изучения темы «Функции и их графики» по программе факультативных занятий в 8 классе» (объем 1 п. л.) включены в сборник статей «Новые идеи в преподавании математики», который готовится к изданию АПН СССР.

Рецензент издательства «Радянська школа» А. И. Червацияк и рецензент издательства «Просвещение» Л. М. Волов рекомендовали к печати наши рукописи «Альбомы графических работ по алгебре».

* * *

Диссертация состоит из введения, трех глав, раздела об учебно-наглядных пособиях, разработанных автором, списка использованной литературы (свыше 350 названий), перечня 9-ти диафильмов диссертанта.

Во введении дается обоснование актуальности темы исследования, указывается основная проблема, поставленная диссертантом, и частные задачи для ее решения, указываются методы исследования, перечисляются школы и учителя, которые оказывали содействие автору в проведении экспериментальной работы, перечисляются основные места выступлений диссертанта с сообщениями о подготовке, ходе и результатах исследования, приводятся некоторые отзывы о наших работах.

В первой главе диссертации дается обзор учебной и методической литературы. Как известно, литература, относящаяся к различным аспектам изучения функциональной

зависимости в курсе математики средней школы, достаточно обширна. Об этом можно судить хотя бы по тем аннотациям к книгам, которые даются в наших работах [20], [21]. Мы сосредоточили внимание на анализе литературы по вопросам методики обучения построения графиков функций, использованию графического метода для иллюстрации и исследования свойств функций. Еще в выступлениях участников Всероссийских съездов преподавателей математики (1911—12 гг., 1913—14 гг.) подчеркивалось большое значение изложения основных понятий о переменной величине и функциональной зависимости в наглядной форме (А. Г. Пичугин). М. Л. Франк отмечал, что графическое изображение функций может быть введено с самого начала алгебры и тогда основные положения дифференциального исчисления будут естественным следствием уже известного материала. Н. А. Томилин подчеркивал роль графического метода в осуществлении двух педагогических принципов — разделение трудностей и интереса. Д. Е. Теннер указывал, что если одной из задач преподавания математики есть воспитание понятия функциональной зависимости, выраженной аналитически, то одним из средств для такого понимания является графическое изображение этой зависимости. Высокая оценка роли и значения графического метода давалась и в выступлениях других участников съездов (Б. А. Марковича, С. Н. Бернштейна, Б. Б. Пиотровского). При этом нужно иметь в виду, что в то время школа не могла быть обеспеченной техническими средствами экранизации учебного процесса. В данный период роль и значение, возможности графического метода значительно возросли.

В диссертации анализируются высказывания проф. А. Я. Хинчина, проф. Б. В. Гнеденко о роли и значении графического метода в школьном преподавании математики. Приводятся высказывания проф. В. Л. Гончарова, проф. Ф. Ф. Нагибина, Д. М. Маергойза, В. А. Семенова о значении графического метода в психологическом аспекте. Роль графического метода при элементарном исследовании функций как средства установления взаимной связи между отдельными разделами школьного курса математики подчеркивается в работах И. П. Гурского, Ю. Н. Макарычева, С. И. Новоселова и др.

В работах Г. П. Бевза, Б. П. Бычкова, М. И. Ромакина отражены общие тенденции относительно роли и основного содержания вопросов использования графического метода при

изучении функциональной зависимости в программах различных периодов работы школы до 1956 года. Мы даем анализ программ периода работы школы в 1956—1968 гг. Этот анализ показывает, что в эти годы в программах стало уделяться больше времени на изучение вопросов элементарного исследования функций. Были введены темы для повторения, систематизации и обобщения ранее изученного материала о функциях и их графиках, что следует признать определенным достижением. В программы факультативных занятий в 8 классе введена тема «Функции и их графики». По нашему мнению, материал этой темы при переходе на новые программы должен войти в программу основного курса алгебры восьмилетней школы.

Перспективы перехода на новые программы требуют еще более пристального внимания к вопросам методики изучения функций и использования при этом графических методов. Мы согласны с проф. А. И. Маркушевичем, что «...изучение... координат и графиков, векторов, симметрии, движений и гомотетии, элементарных функций... должно составлять основное содержание полного школьного курса».

В диссертации дан анализ стабильных учебников и задачник по курсу алгебры и алгебры и элементарных функций, которыми пользовались учащиеся школ Украины в 1956—68 гг., в свете нашей темы исследования. Проанализированы эти пособия по украинским изданиям «Радянської школи» 1967 года: 1. А. Н. Барсуков, Алгебра (учебник для 6—8 классов); 2. А. П. Киселев, Алгебра, ч. II; 3. С. П. Новоселов, Тригонометрия (учебник для IX—X классов средней школы); 4. П. А. Ларичев, Сборник задач по алгебре, ч. I; 5. П. А. Ларичев, Сборник задач по алгебре, ч. II; 6. П. В. Стратилатов, Сборник задач по тригонометрии; 7. Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, ч. I; 8. Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, ч. II.

В анализе этих пособий указываются положительные моменты и отмечаются упущенные возможности успешного обучения учащихся проведению элементарного исследования функций при использовании графического метода, которые характерны для каждого в отдельности рассматриваемого пособия. Учебник А. Н. Барсукова имеет значительно больше функционального материала, чем это имело место в свое время в учебнике «Алгебра», ч. I А. П. Киселева. Вторая часть этого учебника, которым пользовались учащиеся школ Укра-

ины до 1967 года, не была совершенно согласована по изложению материала с учебником А. П. Барсукова, что и не удивительно, если принять во внимание хотя бы хронологию их выхода. Это служило также одной из причин затруднений в работе учителей и учебе учащихся. В эти годы учебник С. И. Новоселова «Тригонометрия» являлся «более функциональным», чем учебник «Алгебры», ч. II А. П. Киселева.

Изучение курса алгебры и элементарных функций в последние годы ведется по пособиям Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой, общий анализ которых дан акад. А. Н. Колмогоровым в журн. «Математика в школе», 1966, № 1; 1967, № 2.

Значительный материал на элементарное исследование функций с использованием графического метода содержится в задачниках П. А. Ларичева и П. В. Стратилатова. Однако, для анализируемых нами пособий характерны и определенные недостатки. К ним можно отнести в учебнике А. Н. Барсукова, например, определенную рецептурность в объяснениях построения точек на координатной плоскости и нахождения координат точек. Нет в учебнике и объяснения построений графиков функций, когда необходимо было бы выполнять сжатия или растяжения относительно оси ординат, что свидетельствует о неполноте изложения материала. Этот пробел не восполняется и упражнениями задачника П. А. Ларичева.

В учебнике С. И. Новоселова примеры алгебраических функций и их графиков не используются при введении функциональных понятий возрастающих, убывающих, монотонных функций. Не делаются автором учебника «Тригонометрии» сравнения построенных графиков алгебраических и тригонометрических функций. Это же замечание относится и к пособию Кочетковых. Для задачников П. А. Ларичева и П. В. Стратилатова, а также пособий Кочетковых характерным является недостаточно разнообразная постановка вопросов, связанных с элементарным исследованием функций. Графики в задачах и учебниках часто выполнены в техническом отношении несовершенно. Нет в задачниках графически заданных условий на исследование функций и ни к одному из упражнений графического характера не даны ответы, что следует отнести к методическим недостаткам задачников. Большинство построенных графиков функций, содержащихся в заданиях задачников П. А. Ларичева и П. В. Стратилатова и в пособиях Кочетковых, может быть выполнено с помощью простейших геометрических преобразований. Термин «геометрические преобразования графиков функций» в пособиях и задачниках не

используется. Графический метод в анализируемых пособиях используется больше как средство иллюстрации свойств функций и почти нигде не используется как средство исследования функций. В анализе работ С. И. Новоселова и Кочетковых мы рассматриваем некоторые вопросы методики введения функционального символа „ $f(x)$ “ и его использования для проведения элементарного исследования функций.

В диссертации дается анализ и проводится сравнительная методическая характеристика определений содержания элементарного исследования функций, которые дают проф. В. Л. Гончаров («Энциклопедия элементарной математики», т. III), С. И. Новоселов (Алгебра и элементарные функции (Пособие для учителей), М., Учпедгиз, 1956); А. Н. Барсуков (Алгебра, ч. II, М., Учпедгиз, 1957), И. А. Гибш (Алгебра (Пособие для учителей IX—XI классов), М., Учпедгиз, 1960). Отмечается, что ряд авторов (И. П. Гурский, И. А. Гибш, Ю. Н. Макарычева) частично рассматривают задачу элементарного исследования функций, как подчиненную задаче построения графиков функций. Обращает на себя внимание предостережение (Г. Г. Левитас, С. И. Новоселов, Ю. Н. Макарычев) на опасность, которую представляет собой противопоставление элементарных средств и применения производной к исследованию функций, недооценка роли и значения элементарного исследования функций. Вместе с тем С. И. Новоселов справедливо отмечает, что не стоит вдаваться в «кустарщину» и чрезмерное увлечение искусственными приемами там, где непосредственное исследование элементарными средствами уместно. Р. А. Майер в результатах своих исследований отмечает, что чисто аналитическое исследование, оторванное от графика, усваивается учащимися с большими трудностями и может быть проведено лишь наиболее успевающими учащимися.

При рассмотрении аналитического метода исследования функций авторы анализируемой литературы в большинстве случаев средствами его осуществления видят лишь решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств, доказательство неравенств. Не рассматривается методика возможного использования функциональной символики „ $f(x)$ “ при графическом методе исследования функций, хотя Ю. Н. Макарычев и обращает внимание на то, что она может значительно расширить возможности использования понятия функции в действии.

В диссертации дан анализ построенных графиков функций: 1) по точкам, 2) на основании аналитически выполненного элементарного исследования функций, 3) с помощью геометрических преобразований, 4) с помощью параллельного перенесения координатных осей, 5) с помощью изменения масштаба на осях координат, 6) с помощью выполнения действий над графиками. Каждый из этих способов имеет право на свое применение на различных этапах обучения. Особого внимания сейчас заслуживают вопросы методики изучения способа геометрических преобразований для построения графиков функций. Как отмечал акад. А. Н. Колмогоров (см. журн. «Математика в школе», 1964, № 6), усиление внимания к геометрическим преобразованиям и функциональной зависимости в восьмилетней и средней школе является одним из основных путей усовершенствования преподавания математики, приближения его к достижениям науки, к нуждам практики. Проф. А. И. Маркушевич в своем выступлении 25 мая 1969 г. на Республиканском научно-методическом семинаре в г. Киеве вопросы методики изучения геометрических преобразований отнес к числу наиболее актуальных методических проблем в настоящее время работы нашей школы. Понятие геометрического преобразования является частным случаем понятия функции. Поэтому и становится понятным большое образовательное значение изучения геометрических преобразований в средней школе, на что указывает А. И. Фетисов. С начала 60-х годов начало выходить больше литературы, в которой рассматриваются применения геометрических преобразований графиков функций. Специально этому вопросу была посвящена работа И. Я. Танатара «Геометрические преобразования графиков функций», М., Учпедгиз, 1960. Однако эта книга не преследовала цели осветить методику обучения учащихся этому способу построений, о чем автор ее и заявляет в предисловии. А решение вопросов этой методики, как отмечает В. И. Мишин, является нелегким делом для учителя.

О необходимости уделять должное внимание вопросам методики обучения построению графиков функций способом геометрических преобразований можно сделать вывод и из того, что в пособиях для поступающих в вузы (Вышенский В. А., Дороговцев А. Я., Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.; Гурский И. П., Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х., Сивашинский И. Х.), для студентов физико-математических факультетов (Ривкинд Я. И., Скобелев Г. Н.),

для студентов технических вузов (Егерев В. К., Радунский Б. А., Тальский Д. А.; Запорожец Г. И.; Крейн С. Г., Ушакова В. Н.), в сборниках задач и упражнений (Смирнов П. И.; Худобин А. И., Худобин Н. И., Шуршалов М. Ф.) приводятся сведения и примеры на построения графиков функций с помощью геометрических преобразований. Однако, этими способами сознательно могут пользоваться только лишь те учащиеся, которые изучали эти способы построения. Но они то ведь не рассматриваются в нынешних пособиях для школ как самостоятельный объект изучения, не предусмотрено их такое изучение и по школьным программам основного курса математики, а есть только изучение этих вопросов по программе факультативных занятий в 8 классе. В анализируемой литературе нет и постановки вопросов «Что такое геометрические преобразования графиков функций?», «В чем состоит суть способа геометрических преобразований графиков функций?», «Как согласуется использование способа геометрических преобразований графиков функций с функциональной символикой?», «Какая система упражнений позволяет научить учащихся применять определенный вид геометрического преобразования?» и т. д. Однако, характер содержания упражнений и объяснений к построению графиков в работах упомянутых авторов четко указывает на тенденцию усиления внимания к геометрическим преобразованиям графиков функций.

В диссертации приводится перечень основных наглядных пособий: таблиц, диафильмов, кинофильмов, приборов, изготовленных и выпущенных в Москве, Ленинграде, Киеве. Указывается литература, где дается описание этих пособий. Анализу должно выполняться в «чертежной» и в «лаборатории» показал, что была необходимость создания специальных диафильмов для изучения вопросов графического метода исследования функций.

Б. Б. Пиотровский отмечал, что построение графика функции должно выполняться в «чертежной» и в «лаборатории исследования». Говоря о «чертежной», он имел в виду вопросы техники выполнения и культуры оформления построений графиков функций. Однако, в анализируемой нами литературе, в большинстве случаев, оформление графиков выполнено с недостатками. Часто не указываются направления осей координат, нет масштабных делений на осях, графики непрерывных функций изображаются штриховыми линиями, надписи возле графиков идут «по ходу» кривой и т. п. Мы никак не

можем согласиться с тем, чтобы в типографском способе издаваемой литературе очень грубо — эскизно выполнялись графики, как это имеет место в работе И. М. Гельфанда и др. «Функции и их графики», М., «Наука», 1965. Мы в этом вопросе согласны с Е. С. Дубинчук, которая отмечает, что «неправильно вычерченный график не только теряет свое педагогическое значение, но и становится причиной закрепления в памяти учащихся неправильных ассоциаций, дезориентирует при решении задач и обесценивает в их глазах графический метод в целом». В методической литературе, кроме работы Е. С. Дубинчук «О культуре математических записей в старших классах средней школы», Киев, Изд-во «Радянська школа», 1965 (на укр. языке), мы нигде не встречали попыток формулировать требования к оформлению графических работ.

В методической литературе определенное внимание уделяется вопросам оценки роли систем упражнений. Как отмечает П. М. Эрдниев «...всякое исследование по методике математики в конце-концов сводится к упражнениям: к выяснению принципов их классификации, разнообразия их форм и содержания, к вопросам о последовательности их выполнения, о приемах работы над ними и т. п.». Е. И. Лященко справедливо отмечает, что подбор систем упражнений является одним из важных путей решения проблемы доступности в раскрытии идеи функции в средней школе. Исследования П. М. Эрдниева, Е. И. Лященко, М. П. Маланюка, И. А. Марнянского отмечают роль упражнений так называемого синтетического характера, которые требуют обратных логических операций. Однако систем таких упражнений и вопросов применительно к использованию графического метода исследования функций в анализируемой нами литературе нет, что служит одной из причин недостатков в знаниях учащихся (М. П. Маланюк, И. А. Марнянский). Мы хотим отметить, что в методической литературе, задачниках, пособиях для поступающих в вузы периода последнего десятилетия наметились тенденции к переусложнению упражнений. Часто не выдерживается принцип «от простого к сложному». Недооценка роли и значения графического метода часто ведет к чрезмерному увлечению применением аналитических методов элементарного исследования функций. При этом решение примеров на исследование функций больше служит обучению учащихся решать уравнения и неравенства, доказывать тож-

дства, нежели способствует глубокому раскрытию содержания основных функциональных понятий. И если современная методика признает необходимость функциональной трактовки уравнений, неравенств, то, при указанном выше положении, в практике работы школы есть опасность сбиться на формально-оперативный подход к изучению функционального материала. Особого внимания заслуживает теперь пункт объяснительной записки к новой программе по математике:

«6. Прочность формирования навыков достигается на большом числе достаточно простых упражнений и задач. Необходимо отказаться от трудоемких задач и упражнений, решение которых представляет лишь специальный интерес для ограниченного числа учащихся». (журн. «Математика в школе», 1968, № 2, стр. 6).

Этот пункт можно выполнить при проведении элементарного исследования функций путем уделения должного внимания графическому методу.

Первая глава завершается выводами, подтверждающими актуальность нашей темы исследования.

Во второй главе освещены вопросы методики использования графического метода исследования функций в курсе алгебры восьмилетней школы. Изложение содержания этой главы начинается с рассмотрения современного научного понятия функции, которое может быть отнесено к числу таких основных, первичных понятий, как соответствие, отображение (см. Ю. А. Шиханович, Введение в современную математику, М., «Наука», 1965; Р. Р. Столл, Множества. Логика. Аксиоматические теории, М., «Просвещение», 1968; А. А. Столяр, Педагогика математики, Минск, Изд-во «Высшая школа», 1969; Феликс Люсьен, Элементарная математика в современном изложении, М., «Просвещение», 1967). В классической математике происходит осмысление понятия функции по двум направлениям (см. предисловие В. А. Успенского к книге А. Ю. Шихановича). Эти два направления находят свое определенное отражение и в школьном преподавании. Так, в восьмилетней школе функция имеет истолкование как переменная величина и как закон (правило), связанный также с понятием переменной величины (см. ответы в статье акад. А. Н. Колмогорова в журн. «Математика в школе», 1967, № 6 на вопрос «Что такое функция?»).

Из второго направления, связанного с отказом от переменных величин, в практику школьного преподавания математики проникают подходы, трактующие функцию как пра-

вило, или закон и как соответствие (см. автореферат канд. диссертации Е. И. Лященко «Содержание и система упражнений, раскрывающих идею функции в курсе алгебры восьмилетней школы», Л., 1967; Е. А. Краснянская, Ю. Н. Макарычев, Изучение раздела «Функции и тождественные преобразования» в 6 классе, журн. «Радянська школа», 1968, № 11 (на укр. языке).

Мы подчеркиваем, что в практике школьного преподавания существенную роль играет не то, какое словесное «определение функции» учащиеся выучат наизусть, а как формируется и используется понятие функции. При этом существенную роль играет графический метод и в научном отношении, а не только в методическом. Если рассматривать график функции как множества упорядоченных пар, то «...любая информация о функции может быть извлечена из ее графика» (Р. Столл). Далее мы показываем, что точечные геометрические преобразования, изучаемые в курсе геометрии, должны найти соответствующее применение и в курсе алгебры. Ведь определение: «Геометрическим преобразованием называется всякая функция Π сопоставляющая любой точке A плоскости некоторую точку $A' = \Pi(A)$ » является замечательным примером функциональной трактовки понятий курса геометрии, а конкретные геометрические преобразования являются одним из способов задания функций.

Мы отвечаем на вопрос «Что такое геометрические преобразования графиков функций?» так:

«Под геометрическими преобразованиями графиков функций мы понимаем любую операцию, которая дает возможность способом точечных геометрических преобразований по данному графику функции (I) строить график функции (II)».

Далее мы показываем, что для успешного применения геометрических преобразований как способа построения графиков функций нужно, чтобы учащиеся и построение точек на координатной плоскости и построение графиков рассматривали как задачу нахождение определенных множеств точек. Геометрические преобразования точек координатной плоскости дают хорошие возможности «арифметизации» и «алгебраизации» геометрии. Для каждого из отдельных видов основных геометрических преобразований (симметрия относительно осей координат, прямой $y = -x$, начала координат, параллельные переносы в направлении осей координат, сжатия и растяжения относительно осей координат) мы вво-

дим специальные графические обозначения. Ими мы пользовались в наших опубликованных работах [11], [12], [16], [17], [23] и в диафильмах III — XVI. Мы указываем, какие динамические стереотипы должны вырабатываться при обучении учащихся строить графики функций с помощью геометрических преобразований в связи с графическим методом исследования функций. Эти стереотипы должны обеспечивать условия для выработки устойчивых ассоциаций между графическими образами, аналитическими выражениями функций, и определенными видами геометрических преобразований графиков функций. Мы формулируем требования и условия, которых целесообразно придерживаться при выполнении построений графиков функций (см. III, стр. 13—15).

После рассмотрения возможных оснований классификации упражнений на применение графического метода исследования функций мы даем обоснованную систему упражнений применительно к условиям изучения курса алгебры восьмилетней школы по действующим программам. Все наши предложения нашли отражение в опубликованных методических письмах, направленных во все школы УССР. Они уже вошли в последние годы в практику работы школ республики. В частности, при прохождении темы «Числовая ось» мы предлагаем использовать специальные графические обозначения числовых промежутков, которые связаны с символическими записями сегментов, интервалов, полусегментов, полуинтервалов и ставить разнообразные вопросы о записях с помощью неравенств и в форме $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$, графически изображенные числовые промежутки на числовой оси (см. [11], [17], III, III). В диссертации дается система упражнений на построение точки по ее координатам как нахождение определенного геометрического места точек. В диссертации приводится система упражнений на построение точек на координатной плоскости, положение которых указывается с помощью координат или геометрического положения данных точек, на примерах симметрии относительно оси абсцисс, начала координат, параллельного переноса в направлении оси ординат, сжатия к оси абсцисс. Относительно остальных видов геометрических преобразований делается ссылка на аналогию изложения и на то, что эти вопросы более полно изложены в наших работах [11], [15], [23]. Нами дается обоснование необходимости выполнения систем упражнений на построение графиков зависимостей $y=kx$, $y=kx+b$, $y=\frac{k}{x}$, которые

подготавливают учащихся к сознательному выполнению всех основных видов геометрических преобразований графиков разнообразных функций. Такая система упражнений дается в связи с элементарным исследованием функций (III). Методика обучения учащихся построению графиков алгебраических функций сжатием и растяжением относительно оси ординат рассмотрена более подробно по сравнению с другими видами преобразований.

В диссертации приводится описание методики введения функциональной символики. Приводятся примеры использования ее для математической символической записи постановок вопросов и ответов на них в связи с графическим методом исследования функций. В числе их есть такие, где требуется дать примеры функций, для которых $f(3)=0$, $f(-5)=f(5)$, $f_1(3)=f_2(5)$ и т. п.

Учащиеся с интересом относились к решению таких упражнений, ответы к которым были многозначны и иллюстрировались графически. С целью обеспечения более сознательного понимания смысла символа „ $f(x)$ “ учащимся предлагались объяснения и упражнения на записи с использованием символа „ f “ различных простейших алгебраических функций. Подбирались эти упражнения так, чтобы они могли способствовать также более глубокому пониманию смысла геометрических преобразований графиков функций и их символической записи. Примером такой постановки вопроса может служить упражнение:

Дана функция $y=3x+1$ (I) и она обозначена $f(x)=3x+1$ (I). Записать с помощью символа „ f “ функции: а) $y=3x+5$ (II); б) $y=-3x+1$ (II); в) $y=6x+2$ (II); г) $y=6x+1$ (II); д) $y=-3x-1$ (II) и т. д. ([15], [16], [17], [23]).

Нами также описана в диссертации экспериментальная работа с группами учащихся, изучавших тему «Функции и их графики» по программе факультативных занятий в 8 классе. Эта программа позволяет рассматривать геометрические преобразования графиков функций как самостоятельный объект изучения. В связи с этим мы и разработали системы упражнений, классифицированных по видам геометрических преобразований. О возможностях и целесообразности такой классификации мы говорили в наших работах еще в 1965—1966 гг. (II, [12], [13]). Наши диафильмы III, IV также содержат дидактический материал, классифицированный по видам основных геометрических преобразований. Знания о функциях,

наличие определенного запаса графиков простейших алгебраических функций, введенная функциональная символика, понимание графика функции как определенного множества точек — все это позволяет ко времени завершения изучения курса алгебры восьмилетней школы провести с учащимися обобщения, которые весьма эффективно могут быть использованы ими при изучении курса алгебры и элементарных функций в IX—X классах.

В диссертации мы рассматриваем изложение этих вопросов на примерах симметрии относительно оси абсцисс, начала координат, параллельного переноса в направлении оси ординат, сжатия и растяжения относительно оси абсцисс. При проведении эксперимента мы давали определения геометрических преобразований точек координатной плоскости, графиков по аналогии с определениями, которые давались в курсе геометрии (см. В. Г. Болтянский, И. М. Яглом, Преобразования. Векторы, М., «Просвещение», 1964). Примеры таких определений, не подлежащих обязательному заучиванию, которыми мы пользовались при изложении материала по изучению симметрии относительно оси абсцисс:

1. Точки A и A^1 называются симметричными относительно оси абсцисс, если отрезок AA^1 перпендикулярен оси абсцисс и делится ею пополам.

2. Если точка A лежит на оси абсцисс, то мы условимся считать, что точка, симметричная точке A относительно оси абсцисс, совпадает с точкой A .

3. График функции (II), образованный всеми точками, симметричными точкам графика функции (I) относительно оси абсцисс, называется симметричным графику функции (I) относительно оси абсцисс.

4. Переход от графика функции (I) к симметричному ему относительно оси абсцисс графику функции (II) называется симметрией относительно оси абсцисс.

Рассматриваются упражнения на: 1) построение точек, симметричных относительно оси абсцисс, 2) запись координат точки A^1 , симметричной относительно оси абсцисс данной точке A с указанными ее координатами, 3) построение пар взаимно-симметричных относительно оси абсцисс графиков простейших алгебраических функций, 4) запись аналитического выражения функции (II), график которой симметричен графику функции (I) относительно оси абсцисс, если известно анали-

тическое выражение функции (I), 5) записи аналитических выражений функций (I) и (II), графики которых будут взаимно симметричны относительно оси абсцисс. После этого формулируется условие применения симметрии относительно оси абсцисс для построения графиков функций: Симметрией относительно оси абсцисс можно построить график функции (I), если есть график функции (I) и известно, что при одних и тех же значениях аргумента все значения функции (II) противоположны соответственным значениям функции (I).

Графики функций $y=f(x)$ (I) и $y=-f(x)$ (II) взаимно симметричны относительно оси абсцисс. После этого рассматриваются инвариантные свойства функций (I) и (II). В аналогичном плане изучались и остальные преобразования (см. [16], [17], [18], [23]). На последовательное применение геометрических преобразований графиков функций предлагались упражнения как на выполнение собственно построений, так и на одну лишь запись последовательности выполнения построений. Это давало значительную экономию учебного времени. Особый интерес учащихся вызывало решение упражнений на запись аналитических выражений функций (II), (III), (IV), графики которых были изображены на рисунках с принятыми нами условными графическими обозначениями геометрических преобразований графика основной элементарной функции (I) (См. также задания в [11], [12], [15], [17], [23], [I], [III]).

Опыт проведения факультативных занятий по изучению темы «Функции и их графики» показал, что этот материал следует включить в содержание основного курса алгебры восьмилетней школы в новых программах, а наша методика применима к его преподаванию.

В третьей главе рассматриваются вопросы методики обучения графическому методу исследования функций в курсе алгебры и элементарных функций IX—X классов средней школы.

Вопросы этой методики освещаются применительно к изучению курса по действующим в течение последних 5 лет программам средней школы. Классификации упражнений даются по темам программы, по видам геометрических преобразований графиков функций. Значительная часть упражнений ставится в форме заданий на построение графиков с необходимыми исследованиями свойств функций. Построение графиков функций увязывается с графическими иллюстрациями изученных свойств и с использованием графиков для установления свойств функций по данным графикам или по графикам,

построенным с помощью данных графиков, т. е. с использованием графического метода исследования. Ко всем темам программы приводятся системы дополнительных вопросов, позволяющих учащимся глубже изучить свойства функций на графическом материале, а учителям проконтролировать сознательность и глубину знаний по изучаемым темам. Знания учащихся из курса алгебры восьмилетней школы о геометрических преобразованиях графиков функций, полученные по разработанной нами методике (III, IIII) позволяют видеть много аналогий в построении графиков функций алгебраических и тех новых, трансцендентных, функций, которые изучаются в IX—X классах. Материал темы «Функции и их графики» по программе факультативных занятий позволяет смотреть на многие построения графиков показательных, логарифмических, тригонометрических функций как на частные иллюстрации изученных общих положений. Если, например, учащимся известно построение графика функции $y=f(-x)$ (II), по данному графику функции $y=f(x)$ (I), то построение $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ (II) может быть выполнено симметрией данного графика $y=2^x$ (I) без особых дополнительных объяснений. По построенному таким способом графику функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ можно устанавливать ее свойства.

Нами дается в диссертации система вопросов, позволяющая предупреждать типичные ошибки учащихся при построении графиков функций с использованием их геометрических преобразований. Построение графиков увязывается с исследованием свойств функций постановкой вопросов такого, например, характера:

1. При каком геометрическом преобразовании графика функции $y=\sin x$ (I) можно построить график функции (II), у которой периодом будет: а) 6π ; б) $\frac{\pi}{2}$?

2. Определить a в формуле $y=\operatorname{tg} ax$, если известно, что для графика этой функции асимптотами будут: $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3}{4}\pi$ и т. д.

3. Что можно сказать об экстремальных значениях функций, графики которых построены сжатием графика $y=\sin x$ к оси ординат?

4. Каким геометрическим преобразованием графика функции $y = \sin x$ (I) можно построить график функции (II), нулями которой будут $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$ и т. д.?

Мы рассматривали построения графиков функций способами параллельного перенесения осей, изменения масштабов на осях координат, выполнения арифметических действий над графиками, даем сравнительную характеристику этим способам и рекомендации относительно их применения. Основной материал по этим вопросам освещен в нашей работе [12].

В диссертации изложена методика заключительного повторения вопросов элементарного исследования функций при изучении темы «Функции и пределы». Эти вопросы входили в тему под названием «Обобщение понятия функции» в программах по математике для школ УССР в 1966—67 уч. году, а в ныне действующей программе их углубленное изучение предусмотрено третьим вариантом, о котором говорится в программах по математике для IX—X классов. Мы подчеркиваем, что обзор ранее изученного материала не должен сводиться только лишь к повторению известных сведений, а должен носить именно характер обобщений и применений полученных ранее знаний к решению вопросов о свойствах функций и их графических изображениях. Раньше объектом изучения были свойства и графики конкретных элементарных функций. В теме «Функции и пределы» объектом изучения становятся свойства функций вообще, а ранее изученные конкретные функции служат средством иллюстрации изучаемых свойств. Особенно важно при этом достаточно всесторонне раскрыть сущность основных функциональных понятий путем постановки разнообразных вопросов, ответы на которые даются с использованием функциональной символики и разнообразных графических иллюстраций, без решения затруднительных в техническом отношении упражнений. Особая роль при этом принадлежит упражнениям синтетического, конструктивного характера. Подбор таких упражнений был дан нами еще в 1963 году [6], а дальнейшая их разработка нашла свое отражение в нашем методическом письме [15]. Мы в диссертации приводим системы таких упражнений и раскрываем методику их решения. Такие системы упражнений дают к изучению понятий: область определения функции, область изменения функции, убывающая и возрастающая функция, промежутки монотонности, промежутки знакопостоянства, нули

функции, максимум и минимум, четность и нечетность, периодичность функций.

В эти системы упражнений входят также вопросы такого типа:

1. Дать пример функции, областью определения которой является данный числовой промежуток, указанный с помощью неравенств, словесным описанием, в символической записи или графически изображенный на числовой оси.

2. Дать примеры двух функций, области изменения которых одинаковы.

3. При каких геометрических преобразованиях графика функции (I) получаем график функции (II), у которой область изменения такая же, как и у данной функции (I)? (Здесь делаем оговорку о том, что области определения — вся числовая ось).

4. Область изменения функции $y=f(x)$ (I) определяется неравенством $-2 < y \leq 5$. Найти область изменения функции (II):

а) $y=f(x+3)$ (II); б) $y=-f(x)$ (II);

в) $y=2f(x)$ (II).

5. Записать функцию, у которой промежутки возрастания (убывания) совпадают с промежутками убывания (возрастания) данной функции.

6. Дать примеры двух функций, значения одной из которых положительны (отрицательны) при тех значениях аргумента, при которых вторая функция возрастает (убывает).

7. Функция $y=f(x)$ (I) имеет нули $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=6$. Найти нули функций: а) $y=f(x+2)$ (II);

б) $y=2f(x)$ (II); в) $y=f(2x)$ (II).

8. Что можно сказать о свойстве четности функции $y=f(x)+a$ (II), если функция $y=f(x)$ (I) четна?

9. При каких геометрических преобразованиях графика периодической функции $y=f(x)$ (I) строим график функции (II), которая также будет периодической и будет иметь тот же период, что и функция (I)?

Ответы на вопросы такого характера иллюстрируются графиками, а иногда ответы даются по предварительно построенным графикам. При этом используются принятые нами условные графические обозначения положения точек на координатной плоскости (II, стр. 26—28). Учащиеся, усвоившие инвариантность свойств функций (I) и (II), графики которых могут переходить один в другой при определенных геометрических преобразованиях, дают объяснения свойств исследуе-

мых функций, сравнивая их со свойствами функций, уже изученных, что очень важно в образовательном отношении.

В диссертации мы приводим примеры элементарного исследования ряда функций (I—IV). На описание свойств функций по данным графикам задания ставятся с использованием кадров диафильмов III—IV.

В диссертации дается описание **учебно-наглядных пособий**, подготовленных нами. В отзывах на наши первоначальные материалы для педагогического исследования [2] учителя отмечали, что построения графиков функций не были полностью выполнены ввиду недостатка времени. Нам стала очевидной потребность создания учебно-наглядных пособий применительно к методике графического метода исследования функций. В 1964 году нами были разработаны, а кафедрой элементарной математики и методики преподавания математики ЧГПИ и кабинетом математики Черниговского ОИУКУ типографским способом в форме альбомов изданы наши работы «Методические указания о выполнении графических работ по алгебре» [7] и [8]. Этими работами (мы их дальше сокращенно называем «Альбомами») были обеспечены все учителя математики Черниговской области и учащиеся VII и VIII классов ряда школ Черниговской области.

В содержание этих «Альбомов», кроме адресованных учителям предисловия и методических указаний, вошли образцы решения всех основных типов упражнений графического характера в соответствии с программой VII и VIII классов. В «Альбоме» [7] содержалось 94 рисунка, в «Альбоме» [8] — 102 рисунка. Приведенные образцы построений графиков и объяснений к ним чередуются с постановкой перед учащимися заданий, которые должны быть ими выполнены на подготовленных в «Альбомах» системах координат с построенными уже вспомогательными графиками. Большинство условий дается графически, и учащимся остается лишь записать ответ в «Альбоме» и выполнить одно—два построения, составляющих сущность задания. Таким образом, вся чисто техническая работа по вычерчиванию систем координат и вспомогательных графиков отпадает. Например: «На рис. 40 построен график $y = -x^2 + 1$. Построить график, симметричный данному графику относительно оси абсцисс, и записать функцию, которую он изображает. Ответ: . . .» ([8]). При этом в «Альбоме» есть построенный график $y = -x^2 + 1$, и на этой же

системе координат учащемуся остается лишь выполнить построение параболы $y = x^2 - 1$ с помощью шаблона $y = x^2$. Все упражнения — образцы и упражнения — задания имеют в «Альбомах» сплошную нумерацию, что способствует облегчению контроля работы учащихся и проведению необходимого обзора, обобщения материала. В «Альбомах» заготовлено место и для индивидуальных заданий учащимся. По отзывам учителей Ярославской школы Бобровицкого района Черниговской области Шелест М. Н. и Мовчан Г. П., «каждое предыдущее упражнение увязано с выполнением последующего. Это учащимся понравилось, и они с охотой работали самостоятельно в классе и выполняли домашние задания. Много было сэкономлено времени. Необходимо, чтобы учащиеся VII и VIII классов систематически использовали «Альбомы». По отзыву учителя Прилукской СШ А. П. Вареника, «...использование «Альбомов» повышает эффективность усвоения программного материала... экономится время... повышается культура оформления учащимися графических работ».

В экспериментальных классах все учащиеся успевали выполнить все упражнения, содержащиеся в «Альбомах». Учащиеся IX и X классов самостоятельно выполняли все упражнения в «Альбоме» [7] за 3—4 часа, в «Альбоме» [8] — за 4—5 часов.

При проведении экспериментальной работы мы видели необходимость использования диафильмов. В распоряжении школ были диафильмы, которые могли быть использованы при изучении некоторых вопросов о функциях (См. кандидатскую диссертацию А. В. Михалевского и методическое письмо МП УССР, «Использование диафильмов по математике в средней школе», Киев, Изд-во «Радянська школа», 1968 (на укр. языке). Однако, диафильмов, дидактический материал которых создавал бы условия для успешного обучения графическому методу исследования функций, не было. Мы разработали и в лаборатории технических средств обучения ЧГПИ выпустили соответствующие диафильмы для экспериментальной работы. (См. о них в нашей работе «Учебные диафильмы к изучению вопросов элементарного исследования функций в курсе математики средней школы», Тезисы докладов и сообщений юбилейной научной конференции, посвященной 50-летию ЧГПИ, Чернигов, 1966 (на укр. языке). Принципы их создания легли в основу наших диафильмов III—IV, которые были выпущены Укркинохроникой в 1967 году.

В диссертации дается описание принципов создания каждого из 4 диафильмов. Диафильмы построены в виде фрагментов.

Диафильм III, ч. I.

1. Симметрия относительно оси абсцисс. 2. Симметрия относительно оси ординат. 3. Симметрия относительно начала координат. 4. Симметрия относительно прямой $y=x$. 5. Параллельный перенос в направлении оси ординат. 6. Параллельный перенос в направлении оси абсцисс.

Диафильм III, ч. II.

1. Растяжение от оси абсцисс. 2. Сжатие к оси абсцисс. 3. Растяжение от оси ординат. 4. Сжатие к оси ординат. 5. Примеры и задания на построение графиков.

К каждому из фрагментов 1—6 в III, ч. I и 1—4 в III, ч. II упражнения подобраны по одному и тому же принципу. Этот принцип подбора дидактического материала проиллюстрирован в диссертации на примере фрагмента I из ч. II. Названия фрагментов 1—6 диафильма IV, ч. I и 1—4 ч. II одинаковы с соответствующими фрагментами диафильма III. Принцип подбора дидактического материала к фрагментам диафильма IV в диссертации раскрывается на примере фрагмента I из ч. II.

Диафильм III имеет фрагменты: 1. Числовая ось. 2. Система координат. 3. Простейшие графики. 4. Функции и их графики.

Диафильм III, ч. I: Уравнения и неравенства. 2. Степенная функция. 3. Графики тригонометрических функций.

Диафильм III, ч. II: 1. Показательная и логарифмическая функции. 2. Обобщение понятия функции.

Фрагменты диафильмов II и III имеют наименование тем курса алгебры и алгебры и элементарных функций по программам для школ УССР 1967 года. Дидактический материал диафильмов согласуется с содержанием методических писем: II, [III]—[11]; III, [IV]—[12], [15]. О методике использования диафильмов III—IV говорится в нашей работе [19]. Диафильмы III, IV могут быть частично использованы и при проведении факультативных занятий по теме «Функции и их графики» в VIII классе.

Нами был изготовлен в лаборатории технических средств обучения ЧГПИ в январе 1968 года и специальный диафильм «Функции и их графики. Факультативные занятия в VIII классе» (в 2-х частях). В настоящее время принят к печати Укркинохроникой по заказу МП УССР наш диафильм такого же названия. Дидактический материал его полностью согласуется с содержанием раздела «Функции и их графики» книги «Математика. Пособие для факультативных занятий в VIII классе», под ред. доц. В. Н. Костарчука, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1969 (на укр. языке), автором которого является диссертант (123).

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. На современном этапе работы советской общеобразовательной школы признается идея функциональной зависимости, как ведущая в преподавании математики. Это находит свое отражение в программах, учебной и методической литературе, где изучению различных вопросов функциональной зависимости уделяется определенное внимание. Однако, в знаниях учеников имеются еще значительные недостатки по вопросам изучения функций и использования графических методов их элементарного исследования.

2. Анализ стабильных учебников и задачников по алгебре и алгебре и элементарным функциям, которыми пользуются в период 1956—1969 гг. ученики восьмилетних и средних школ, показывает, что они содержат значительный материал по вопросам элементарного исследования функций, однако он в них подан недостаточно последовательно и без разнообразной постановки вопросов, которые всесторонне раскрывали бы содержание основных функциональных понятий. В задачниках нет полной системы упражнений на применение графических методов к иллюстрации свойств функций. Почти совсем не отражен графический метод исследования свойств функций. Все это служит значительным препятствием в поднятии уровня знаний учащихся по вопросам элементарного исследования функций.

3. Одним из важных путей осуществления формирования современного понятия функции в условиях школьного преподавания математики есть более широкое использование геометрических преобразований графиков функций, как способа их построения. Оно должно проводиться во взаимной связи с использованием общей функциональной символики, которая должна быть введена в курс алгебры восьмилетней школы.

4. Действующие программы по математике для восьмилетней и средней школы позволяют значительно шире использовать графический метод при элементарном исследовании функций. Для этого нужно включать разнообразно постав-

ленные вопросы и упражнения в процессе изучения программного материала. Именно таких вопросов и упражнений недостает в учебной и методической литературе. Мы их даем в наших работах и в диссертации.

5. Отдельные виды геометрических преобразований графиков функций должны быть и объектом самостоятельного изучения. Среди них достаточно рассмотреть только основные:

а) симметрии относительно осей координат, прямой $y=x$ начала координат и сжатия и растяжения относительно осей координат. Последовательное применение этих видов геометрических преобразований дает возможность выполнять построения графиков достаточно разнообразных функций и использовать эти графики для элементарного исследования функций.

6. При переходе на новые программы преобразование графиков функций можно рассматривать как частный случай геометрических преобразований, которые будут изучаться в курсе геометрии. Это будет устанавливать более тесные связи в преподавании алгебры и геометрии.

7. Геометрические преобразования графиков функций дают возможность лучше использовать общую функциональную символику при элементарном исследовании функций, использовать шаблоны для упрощения техники выполнения построения графиков функций, создания необходимых ассоциаций графических образов и аналитических выражений функций.

8. Как вспомогательные способы построения графиков при элементарном исследовании функций могут быть использованы в практике работы школы и способы параллельного перенесения осей, изменения масштаба на осях координат, выполнения действий над графиками.

9. Графический метод служит важным средством раскрытия содержания функциональных понятий, средством исследования функций. Он позволяет сделать наглядным изучение большинства свойств функций, учит учащихся графически мыслить. Ученики должны иметь много зрительного материала, связанного с графическим методом исследования функций. Именно такого материала в учебных пособиях и задачах для учащихся недостаточно. Данные в пособиях для учащихся восьмилетней и средней школы графики недостаточно разнообразны, малочисленны и не всегда удачно выполнены.

Мы формулируем требования относительно техники выполнения построения графиков функций. Вводим условные графические обозначения геометрических преобразований,

что дает возможность использовать их при графическом задании условий разнообразных упражнений.

10. Важными путями более широкого внедрения графического метода исследования функций есть использование средств экранизации в преподавании алгебры и алгебры и элементарных функций и, в частности, учебных диафильмов. Этому служит использование специально изготовленных нами 4 учебных диафильмов, изданных Укркинохроникой по заказу МП УССР в 1967 г. (III—IV). На кадрах этих диафильмов в определенной системе дан основной дидактический материал, связанный с применением графического метода исследования функций. Все эти диафильмы рекомендованы Программно-методическим Управлением Министерства просвещения УССР для использования в школе.

11. Выполнение построений графиков требует от учащихся большой затраты времени. С целью экономии времени и повышения эффективности учебного процесса мы считаем необходимым обеспечить учащихся учебно-раздаточным материалом. Этот материал должен экономить время учащихся на уроках и при выполнении домашних заданий. Таким материалом могут быть «Альбомы», принцип построения которых нами описан в диссертации, а содержание и методика их использования даны в работах «Методические указания о выполнении графических работ по алгебре» [17], [18]. Экспериментальная проверка использования «Альбомов» показала, что они служат эффективным средством поднятия графической культуры учеников и уровня знаний по вопросам применения графического метода исследования функций.

12. Глубокому раскрытию содержания основных функциональных понятий благоприятствует решение конструктивных упражнений. При этом учащиеся приводят примеры функций, которые имеют или не имеют соответственных свойств, и дают графические иллюстрации к многозначным в таких случаях ответам. Эти упражнения не сложны по технике их выполнения, требуют от учащихся сознательных знаний об основных свойствах функций и умения графически выражать свои мысли. Система таких упражнений приведена нами в работах [6], [15], [17], [22], [23] и в диссертации.

13. Графический метод исследования функций заслуживает внимания не только как самостоятельный объект изучения, но и как вспомогательное, необходимое звено в подготовке учеников к введению понятия производной и ее применения к исследованию свойств функций.

14. Разработанные нами упражнения и вопросы по применению графического метода исследования функций могут быть более успешно выполнены при обеспечении школ соответственными диафильмами (II—IV) и вышеупомянутыми раздаточными материалами.

Учителя математики школ УССР имеют теперь в своем распоряжении соответствующие учебные диафильмы и материалы [11], [12], [15], [17]. Мы рекомендуем издать для учащихся раздаточные материалы «Тетради для графических работ по алгебре», построенные по принципу наших «Альбомов» [7], [8].

15. Разработанные нами рекомендации дают сейчас один из конкретных путей поднятия уровня знаний учащихся по вопросам применения графического метода исследования функций в курсе математики средней школы.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ ИЗЛОЖЕНЫ В СЛЕДУЮЩИХ ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТАХ АВТОРА:

1. Задачи на максимум и минимум на уроках математики в средней школе, в книге «Методичні матеріали на допомогу вчителів», Чернигов, 1958, стр. 25—33 (на укр. языке).
2. Исследование функций на уроках математики в старших классах средней школы (материалы для пед. исследования), Киев, издание НИИП УССР, 1958, 86 стр., на ротаторе (на укр. языке).
3. Исследование функций на уроках математики в старших классах средней школы, Научные записки НИИП УССР, т. 12, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1959, стр. 111—136 (на укр. языке).
4. К вопросу о содержании элементарного исследования функций в курсе математики старших классов средней школы. В книге «Питання викладання математики в школі», Киев, издание НИИП УССР, 1959, ротатор, стр. 94—103 (на укр. языке).
5. Система упражнений на исследование функций элементарными средствами на уроках математики в старших классах средней школы. Научные записки НИИП УССР, т. XXII, вып. IV, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1962, стр. 112—146 (на укр. языке).
6. Упражнения на исследование функций, в сб. статей «Викладання математики в школі», вып. III, под ред. проф. И. Е. Шиманского, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1963, стр. 34—45 (на укр. языке).
7. Методические указания о выполнении графических работ по алгебре VII класс, Чернигов, 1964, 40 стр. (на укр. языке).
8. Методические указания о выполнении графических работ по алгебре. 8 класс, Чернигов, 1964, 48 стр. (на укр. языке).
9. Курсовые работы по методике преподавания математики (Тематика и методические указания к написанию курсовых работ студентами-заочниками физико-математических факультетов педагог. институтов), изд. 2-е, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1964, 112 стр. (на укр. языке).
10. Курсовые работы по методике преподавания математики, изд. 3-е, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1967, 76 стр. (на укр. языке).
11. Построение графиков функций в курсе алгебры восьмилетней школы. Методическое письмо, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1965, 88 стр. (на укр. языке).
12. Построение графиков функций в курсе алгебры и элементарных функций средней школы. Методическое письмо, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1965, 92 стр. (на укр. языке).

13. Методика обучения построению графиков функций с помощью геометрических преобразований, в сб. статей «Викладання математики в школі», вып. IV, под редакцией доц. Ф. П. Яремчука, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1966, стр. 5—22 (на укр. языке).

14. Каталог рекомендованной литературы по методике преподавания математики, Чернигов, 1966, 69 стр. (на укр. языке).

15. Обобщение понятия функции в курсе математики X класса. Методическое письмо, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1967, 70 стр. (на укр. языке).

16. Изучение темы «Функции и их графики» в 8 классе (факультативные занятия), журн. «Радянська школа», 1968, № 1, стр. 69—83 (на укр. языке).

17. Функции и их графики (факультативные занятия по математике, 8 класс). Методическое письмо, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1968, 76 стр. (на укр. языке).

18. Опыт организации факультативных занятий по математике, журн. «Радянська школа», 1968, № 11, стр. 65—69 (на укр. языке).

19. Геометрические преобразования графиков функций (для восьмилетней школы).

Геометрические преобразования графиков функций (Для IX—X классов средней школы).

Построение графиков функций (Для восьмилетней школы).

Построение графиков функций (Для IX—X классов средней школы), в Методическом письме Программно-методического Управления МП УССР «Використання діафільмів з математики в середній школі», Киев, Изд-во «Радянська школа», 1968, стр. 41—52 (на укр. языке).

20. Учебная, методическая и научно-популярная литература для учителей математики средней школы, ч. I, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1968, 63 стр. (на укр. языке).

21. Учебная, методическая и научно-популярная литература для учителей математики средней школы, ч. II, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1969, 95 стр. (на укр. языке).

22. Элементарное исследование функций при изучении темы «Функции и пределы» в X классе, в сб. статей «Викладання математики в школі», вып. V, под ред. доц. Л. М. Лоповка, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1969, стр. 5—24 (на укр. языке).

23. Функции и их графики, в книге «Математика. Посібник для факультативних занять у 8 класі», под ред. доц. В. Н. Костарчука, Киев, Изд-во «Радянська школа», 1969, стр. 199—276 (на укр. языке).

Кроме того, отдельные вопросы диссертационной работы освещены в трех публикациях тезисов докладов на отчетно-научных конференциях преподавателей ЧГПИ. Общий объем их составляет 1 печатный лист.

Работы [11], [12], [15], [17], [19], [20] рекомендованы Программно-Методическим Управлением Министерства Просвещения Украинской ССР учителям восьмилетних и средних школ (Программы восьмилетней школы. Математика, V—VIII классы. Киев, Изд-во «Радянська школа», 1968; Программы средней школы. Математика, IX—X классы. Киев, Изд-во «Радянська школа», 1968).

**УЧЕБНЫЕ ДИАФИЛЬМЫ, АВТОРОМ КОТОРЫХ ЯВЛЯЕТСЯ
ДИССЕРТАНТ:**

I. Построение графиков функций (Для восьмилетней школы). Украинская студия хроникально-документальных фильмов, Киев, 1967 (на укр. языке).

II. Построение графиков функций (Для IX—X классов средней школы. В 2-х частях). Украинская студия хроникально-документальных фильмов, Киев, 1967 (на укр. языке).

III. Геометрические преобразования графиков функций (Для восьмилетней школы. В 2-х частях). Украинская студия хроникально-документальных фильмов, Киев, 1967 (на укр. языке).

IV. Геометрические преобразования графиков функций (Для IX—X классов средней школы. В 2-х частях). Украинская студия хроникально-документальных фильмов, Киев, 1967 (на укр. языке).

Диафильмы [I] — [IV] выпущены по заказу Программно-Методического Управления Министерства Просвещения Украинской ССР и рекомендованы учителям восьмилетних и средних школ (Программы восьмилетней школы. Математика, V—VIII классы. Киев, Изд-во «Радянська школа», 1968; Программы средней школы. Математика, IX—X классы. Киев, Изд-во «Радянська школа», 1968).

Кроме того, в лаборатории технических средств обучения ЧГПИ в 1966 году были изготовлены 3 учебных диафильма (7 лент) и в 1968 году 1 учебный диафильм (2 ленты) по теме диссертации.

Диафильм «Функции и их графики. Факультативные занятия по математике в VIII классе». (В 2-х частях) (на укр. языке) принят к печати по заказу Программно-Методического Управления Министерства Просвещения УССР Украинской студией хроникально-документальных фильмов.