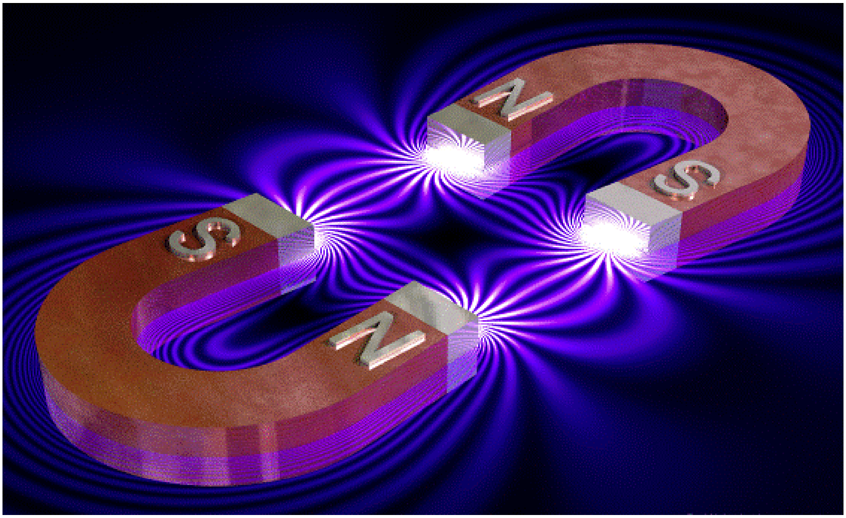
Т.Г. СІЧКАР, М.О. РОКИЦЬКИЙ,
А.В. КАСПЕРСЬКИЙ



ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

Т.Г. СІЧКАР, М.О. РОКИЦЬКИЙ,
А.В. КАСПЕРСЬКИЙ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА
ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ
ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова
як навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів.

КИЇВ - 2017

УДК 537(075.8)
ББК 22.33я73
С 41

Рекомендовано Вченою радою НПУ імені М.П.Драгоманова
(протокол № 14 від 13 òðàâíÿ *2016 р.)*

Рецензенти:

доктор педагогічних наук, професор **В.Д.Сиротюк** (Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,

доктор педагогічних наук, професор **Б.А.Сусь** (Військовий інститут телекомунікацій і інформатизації НТУ “Київський політехнічний інститут”).

С 41 **СІЧКАР Т.Г., РОКИЦЬКИЙ М.О., КАСПЕРСЬКИЙ А.В.** ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА. ПРАКТИКУМ З РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ. ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ**.** Навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей. Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2017. – 154 с.

Навчальний посібник призначений для самостійної роботи студентів в умовах модульно-рейтингової системи навчання та оцінювання знань студентів. Практикум є путівником по практичним заняттям, які розділені на три модулі: «Електростатика», «Постійний струм», «Електромагнетизм» і містять 129 прикладів розв’язків задач. Навчальний посібник складено на основі галузевого стандарту вищої освіти затвердженого МОН України та відповідно до діючої програми загального курсу фізики для фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Для викладачів та студентів фізичних, інженерно-технічних і педагогічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 537(075.8)
ББК 22.33я73

ISBN 978-966-931-131-3

ЗМІСТ

МОДУЛЬ 1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА.

Тема 1. *ВЗАЄМОДІЯ ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ. ЗАКОН КУЛОНА.*

Задача 1.1. За теорією Бора електрон рухається в атомі водню навколо ядра по коловій орбіті радіусом $R = 0{,}53\,\overset{0}{A}$. Визначити швидкість обертання електрона.

Дано:

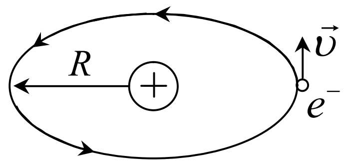
$\upsilon_e - ?$

$R = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,м$

$q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Кл$

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,кг$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{Ф}{м}$



При русі електрона по стійкій орбіті сила електричної взаємодії має бути рівна відцентровій силі: $F_e = F$;

$$F_e = me\frac{\upsilon_e^2}{R}; \quad F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_e q_я}{R^2}; \quad |q_e| = |q_я|. \quad F_e = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

$$\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{m_e\upsilon_e^2}{R}.$$

Звідси випливає: $\dfrac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = m_e\upsilon_e^2$.

Звідси отримуємо:

$$\upsilon_e = \frac{q_e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R m_e}};$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\upsilon_e] = \frac{Кл}{\sqrt{\frac{Ф}{м}\cdot м \cdot кг}} = \frac{Кл}{\sqrt{\frac{Кл}{В\cdot м}\cdot м \cdot кг}} = \frac{Кл}{\sqrt{\frac{Кл}{В}\cdot кг}} = \frac{А\cdot с}{\sqrt{\frac{А\cdot с}{В}\cdot кг}} = \frac{\frac{Дж}{В}}{\sqrt{\frac{Дж}{В^2}\cdot кг}} = \frac{Дж}{\sqrt{Дж\cdot кг}} =$$

$$= \frac{\sqrt{Дж}}{\sqrt{кг}} = \sqrt{\frac{Дж}{кг}} = \sqrt{\frac{Н\cdot м}{кг}} = \sqrt{\frac{кг\cdot м^2}{с^2\cdot кг}} = \frac{м}{с}.$$

Підставимо числові значення:

$$\upsilon_e = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{\sqrt{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}53\cdot 10^{-10}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{7{,}324\cdot 10^{-26}} = 2{,}2\cdot 10^{6}\left(\frac{м}{с}\right).$$

Задача 1.2. Дві мідні кульки діаметром $d = 10\,мм$ на тонких нерозтяжних нитках підвішені так, що вони торкаються одна до одної. Після того, як кульки зарядили до величини q, відстань між ними стала $r = 4\,см$. Визначити величину заряду q, якщо довжина кожної нитки $l = 26\,см$.

Дано:

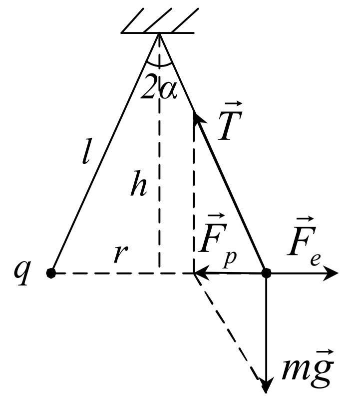
$q - ?$

$d = 10^{-2}\, м$

$r = 4 \cdot 10^{-2}\, м$

$l = 0{,}26 м$

$\rho = 8{,}76 \cdot 10^{3}\, \frac{кг}{м^3}$



Після надання кулькам електричних зарядів вони взаємодіють, і система переходить у новий стан рівноваги. За першим законом Ньютона стан рівноваги задовольняється умовою рівності нулю рівнодійної сили, тобто сума всіх сил, що діють на систему, дорівнює нулю: $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_e = 0$.

З малюнку видно, що рівнодійна сил $m\vec{g}$ і $\vec{T}$.

$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$ зрівноважена силою електричної взаємодії $\vec{F}_e$, тобто $\vec{F}_e = -\vec{F}$; $F_e = F$.

З геометричних міркувань:

$mgtg\alpha = k\dfrac{q^2}{r^2}$. Звідси слідує: $q = \sqrt{\dfrac{mgr^2}{k} tg\alpha}$,

$$m = \frac{\rho\pi d^3}{6};\ tg\alpha = \frac{r}{2h};\ h = \sqrt{l^2 - \frac{r^2}{4}};\ tg\alpha = \frac{r}{2\sqrt{l^2 - \frac{r^2}{4}}};$$

$$q = 2r^3 \sqrt{\frac{2\pi\rho g}{3k\sqrt{l^2 - \frac{r^2}{4}}}}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[q] = м^3 \sqrt{\frac{\frac{кг}{м^3} \cdot \frac{м}{с^2}}{\frac{Н \cdot м^2}{Кл^2} \cdot \sqrt{м^2 - м^2}}} = м^3 \sqrt{\frac{\frac{кг}{м^2 \cdot с^2}}{\frac{Н \cdot м^2}{Кл^2} \cdot м}} = м^3 \sqrt{\frac{\frac{кг}{м^2 \cdot с^2}}{\frac{Н \cdot м^3}{Кл^2}}} = м^3 \sqrt{\frac{кг \cdot Кл^2}{м^2 \cdot с^2 \cdot Н \cdot м^3}} =$$

$$= м^3 \sqrt{\frac{кг \cdot Кл^2}{м^5 \cdot с^2 \cdot Н}} = м^3 \sqrt{\frac{кг \cdot Кл^2 \cdot с^2}{м^5 \cdot с^2 \cdot кг \cdot м}} = м^3 \sqrt{\frac{Кл^2}{м^6}} = Кл.$$

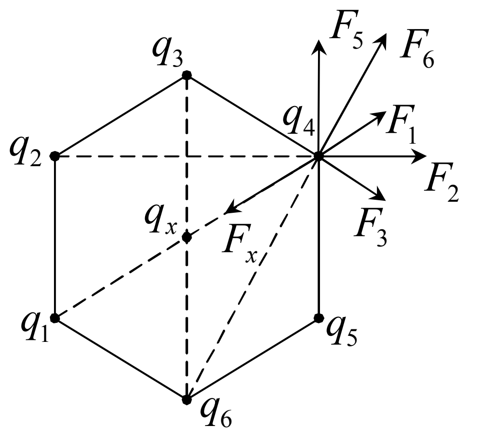
Підставимо числові значення:

$$q = 2{,}64 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}76 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{676 \cdot 10^{-4} - \frac{16 \cdot 10^{-4}}{4}}}} = 1{,}21 \cdot 10^7 (Кл).$$

Задача 1.3. У вершинах правильного шестикутника знаходяться позитивні заряди $+q$. Сторона шестикутника a. Визначити величину заряду q_x, який необхідно вмістити у центр фігури для зрівноваження дії всіх шістьох зарядів $+q$.

Дано:

$q_x - ?$
$+q$, a



У результаті взаємодії всіх зарядів даної системи вона знаходиться у стані рівноваги, що означає, що сума всіх сил, дорівнює нулю. Оберемо довільний заряд, наприклад q_4, і визначимо сили, що діють на нього. На основі принципу суперпозиції полів будемо мати:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6 + \vec{F}_x = 0.$$

Виходячи з симетрії розташування зарядів можна зробити висновок, що $F_3 = F_5$; $F_2 = F_6$.

Знайдемо послідовно їх суми:

$\vec{F}' = \vec{F}_3 + \vec{F}_5$; $F' = \sqrt{F_3^2 + F_5^2 + 2F_3F_5\cos 120^\circ} = F_3$.

$\vec{F}'' = \vec{F}_6 + \vec{F}_2$; $F'' = \sqrt{F_6^2 + F_2^2 + 2F_6F_2\cos 60^\circ} = F_2\sqrt{3}$.

$F''' = F_3 + \sqrt{3}F_2 + F_1$; але $F_3 = k\dfrac{q^2}{a^2}$; $F_2 = k\dfrac{q^2}{3a^2}$; $F_1 = k\dfrac{q^2}{4a^2}$.

Тому $F''' = k\dfrac{q^2}{a^2} + k\dfrac{q^2}{a^2}\dfrac{\sqrt{3}}{3} + k\dfrac{q^2}{4a^2}$.

Тоді $F''' = k\dfrac{q^2}{a^2}\left(\dfrac{15 + 4\sqrt{3}}{12}\right)$.

За умовою рівноваги $F_x = F'''$.

Тобто $k\dfrac{q_x q}{a^2} = k\dfrac{q^2}{a^2}\left(\dfrac{15 + 4\sqrt{3}}{12}\right)$; або $q_x = q\left(\dfrac{15 + 4\sqrt{3}}{12}\right)$;

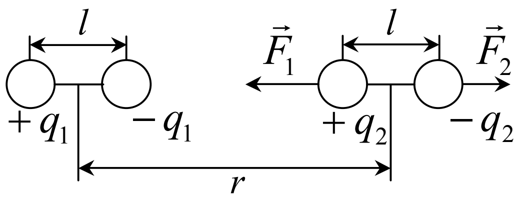
$q_x = 1{,}82q$.

Задача 1.4. Визначити силу взаємодії молекул води, електричні моменти яких рівні p і розташовані вздовж однієї прямої. Відстані між молекулами r.

Дано:

$F - ?$

p, r



Вважатимемо молекули води диполями з плечем l, що зорієнтовані один відносно одного різнойменними зарядами.

Напруженість електричного поля створеного диполем у довільній точці на відстані x: $\vec{E} = \dfrac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$.

У нашому випадку $\alpha = 0$.

Тоді $\vec{E} = \dfrac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3} = \dfrac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}$.

Напруженість створена першим диполем в точці $+q_2$: $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 (r - \frac{l}{3})^3}$,

а в точці $-q_2$: $\vec{E}_2 = \dfrac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 (r + \frac{l}{2})^3}$.

Сила, що діє на диполь вміщений у електричне поле: $\vec{F} = \vec{E} \cdot q$.

Тоді сила, що діє на заряд $+q_2$: $F_1 = -\dfrac{pq_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 (r - \frac{l}{2})^3}$;

а на заряд $-q_2$: $F_2 = \dfrac{pq_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 (r + \frac{l}{2})^3}$.

Знак „-” вказує на те, що діє сила притягання.

Оскільки сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ антипаралельні, то їх рівнодійна дорівнює $F = F_1 - F_2$.

Отже: $$F = -\frac{pq_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r - \frac{l}{2}\right)^3} - \frac{pq_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r + \frac{l}{2}\right)^3} = -\frac{pq_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^3}\right).$$

$$\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^3}+\frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^3}=\frac{\left(r+\frac{l}{2}\right)^3-\left(r-\frac{l}{2}\right)^3}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^3\cdot\left(r+\frac{l}{2}\right)^3}=\frac{r^3+3r^2\frac{l}{2}+3r\frac{l^2}{4}+\frac{l^3}{8}-\left(r^3-3r^2\frac{l}{2}+3r\frac{l^2}{4}-\frac{l^3}{8}\right)}{\left(r-\frac{l}{2}\right)\cdot\left(r+\frac{l}{2}\right)\cdot\left(r-\frac{l}{2}\right)\cdot\left(r+\frac{l}{2}\right)\cdot\left(r-\frac{l}{2}\right)\cdot\left(r+\frac{l}{2}\right)}=$$

$$=\frac{r^3+3r^2\frac{l}{2}+3r\frac{l^2}{4}+\frac{l^3}{8}-r^3+3r^2\frac{l}{2}-3r\frac{l^2}{4}+\frac{l^3}{8}}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)\cdot\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)\cdot\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)}=\frac{\frac{6r^2l}{2}+\frac{l^3}{4}}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^3}=\frac{3r^2l+\frac{l^3}{4}}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^3}.$$

Приймаючи до уваги, що $r >> l$ і нехтуючи величинами вищих порядків малості можемо записати, що: $\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^3}+\frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^3}\approx\frac{3r^2l}{r^6}=\frac{3l}{r^4}$.

Тоді $F=-\frac{pq_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{3l}{r^4}=-\frac{3pq_2l}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^4}=-\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^4}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[F]=\frac{Кл^2\cdot м^2\cdot м}{Ф\cdot м^4}=\frac{Кл^2}{Ф\cdot м}=\frac{Кл^2\cdot В}{Кл\cdot м}=\frac{Кл\cdot В}{м}=\frac{А\cdot В\cdot с}{м}=\frac{Дж}{м}=Н.$$

Задача 1.5. По тонкій нитці довжиною $l=8см$ рівномірно розподілено заряд $q_1=350мкКл$, що діє з силою $F=120мкН$ на точковий заряд q_2, що знаходиться на продовженні тієї ж нитки на відстані $r=6см$ від її середини. Визначити величину заряду q_2, якщо система знаходиться в повітрі.

Дано:

$q_2-?$

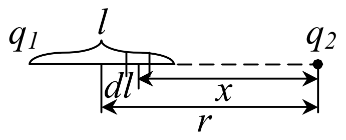
$l=8\cdot10^{-2}м$

$q_1=3{,}5\cdot10^{-4}Кл$

$F=1{,}2\cdot10^{-4}Н$

$r=6\cdot10^{-2}м$

$\varepsilon=1$



Виберемо довільну дуже малу ділянку нитки dl, яка знаходиться на відстані x від заряду q_2. В межах цієї ділянки заряд будемо вважати точковим. Його величина

$$dq=\tau dl=\frac{q_1}{l}dl.$$

Цей заряд діятиме на заряд q_2 з силою $dF=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2dq}{x^2}$.

Сумарну силу, з якою заряджена нитка діє на заряд q_2 визначимо як:

$$F=\int_{r-\frac{l}{2}}^{r+\frac{l}{2}}\frac{q_2\tau dx}{4\pi\varepsilon_0x^2}=\frac{q_2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r-\frac{l}{2}}^{r+\frac{l}{2}}\frac{dx}{x^2}=\frac{q_2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{r-\frac{l}{2}}^{r+\frac{l}{2}}=\frac{q_2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r+\frac{l}{2}}+\frac{1}{r-\frac{l}{2}}\right)=$$

$$= \frac{q_2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)}; \Rightarrow q_2 = \frac{\pi\varepsilon_0 F\left(4r^2-l^2\right)}{q_1}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[q_2] = \frac{Ф\cdot\left(м^2-м^2\right)\cdot Н}{м\cdot Кл} = \frac{Ф\cdot м^2\cdot Н}{м\cdot Кл} = \frac{Ф\cdot м\cdot Н}{Кл} = \frac{Кл\cdot м\cdot Н}{В\cdot Кл} = \frac{м\cdot Н}{В} = \frac{м\cdot Дж}{м\cdot В} =$$

$$= \frac{В\cdot А\cdot с}{В} = Кл.$$

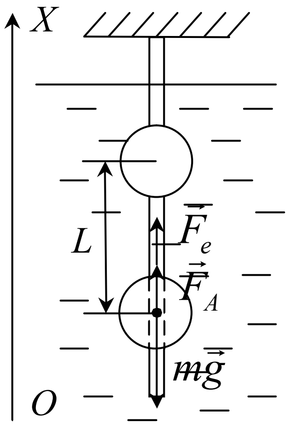
Підставимо числові значення:

$$q_2 = \frac{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot\left(4\cdot 36\cdot 10^{-4}-64\cdot 10^{-4}\right)\cdot 1{,}2\cdot 10^{-4}}{3{,}5\cdot 10^{-4}} = 7{,}62\cdot 10^{-14}(Кл).$$

Задача 1.6. Дві однакові металеві кульки радіусом r та густиною ρ надіті на тонкий непровідний стержень. Верхня кулька закріплена, а нижня може вільно переміщуватись вздовж стержня. Кульки поміщені в рідину, діелектрична проникність якої ε, густина ρ_1. У кожного мільярдного атому верхньої кульки забрали по одному електрону і перенесли на рухому кульку. На якій відстані L буде знаходитись нижня кулька від верхньої у стані рівноваги, якщо стержень розташовано вертикально?

Дано:

$L-?$
r, ρ, ρ_1
ε, Z



Якщо електрони з однієї кульки перенесені на іншу, то заряди цих кульок рівні за величиною і протилежні за знаком. Відповідно, між кульками буде діяти кулонівська сила притягання.

На нижню кульку діють такі сили:

$$m\vec g + \vec F_A + \vec F_e = 0;$$

$$Ox: -mg + F_A + F_e = 0;\ mg = F_A + F_e.$$

Масу кульки можна знайти через її геометричні розміри та густину:

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3\rho.$$

Тоді: $mg = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$.

Архімедова сила: $F_A = \rho_1 gV = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g$.

Кулонівська сила: $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{L}$; $|q_1| = |q_2| = ne$, де n – кількість перенесених електронів.

Тоді: $F_e = \dfrac{n^2 e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L^2}$, $n = \dfrac{N}{Z}$, де N – кількість атомів, що містяться у кульці масою m і молекулярною масою M; Z – відношення повної кількості атомів до кількості атомів, позбавлених одного електрона.

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho N_A}{MZ}; \; F_e = \frac{16\pi^2 r^6 \rho^2 N_A^2 e^2}{9M^2 Z^2 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L^2} = \frac{4\pi r^6 \rho^2 N_A^2 e^2}{9M^2 Z^2 \varepsilon\varepsilon_0 L^2}.$$

Тоді: $\dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g + \dfrac{4\pi r^6 \rho^2 N_A^2 e^2}{9M^2 Z^2 \varepsilon\varepsilon_0 L^2}$;

$$\frac{4\pi r^6 \rho^2 N_A^2 e^2}{9M^2 Z^2 \varepsilon\varepsilon_0 L^2} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_1);$$

$$9M^2 Z^2 \varepsilon\varepsilon_0 L^2 = \frac{12\pi r^6 \rho^2 N_A^2 e^2}{4\pi r^3 g(\rho - \rho_1)} = \frac{3r^3 \rho^2 N_A^2 e^2}{g(\rho - \rho_1)};$$

$$L^2 = \frac{3r^3 \rho^2 N_A^2 e^2}{9M^2 Z^2 \varepsilon\varepsilon_0 g(\rho - \rho_1)} = \frac{r^3 \rho^2 N_A^2 e^2}{3M^2 Z^2 \varepsilon\varepsilon_0 g(\rho - \rho_1)};$$

$$L = \frac{\rho N_A e}{MZ}\sqrt{\frac{r^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 g(\rho - \rho_1)}}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[L] = \frac{\frac{кг}{м^3} \cdot \frac{1}{моль} \cdot Кл}{\frac{кг}{моль}} \sqrt{\frac{м^3 \cdot с^2 \cdot м^3 \cdot Н \cdot м^2}{м \cdot кг \cdot Кл^2}} = \frac{Кл}{м^3}\sqrt{\frac{м^6 \cdot с^2 \cdot Н \cdot м^2}{м \cdot кг \cdot Кл^2}} = \frac{Кл}{м^3}\sqrt{\frac{м^6 \cdot Н \cdot м^2}{Н \cdot Кл^2}} = \frac{Кл}{м^3}\sqrt{\frac{м^8}{Кл^2}} =$$

$$= \frac{Кл}{м^3} \cdot \frac{м^4}{Кл} = м.$$

<u>Тема 2.</u> НАПРУЖЕНІСТЬ ПОЛЯ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ.

Задача 2.1. Два точкових заряда $q_1 = 2 \cdot 10^{-7}\,Кл$ та $q_2 = -4 \cdot 10^{-7}\,Кл$ знаходиться в діелектрику з $\varepsilon = 2$ на відстані $d = 10\,см$ один від одного. Визначити напруженість електричного поля в точці A, що знаходиться на відстані $r_1 = 20\,см$ від першого та $r_2 = 15\,см$ від другого зарядів.

Дано:

$E - ?$

$q_1 = 2 \cdot 10^{-7}\,Кл$

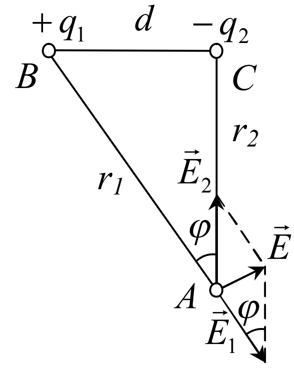
$q_2 = -4 \cdot 10^{-7}\,Кл$

$r_1 = 0{,}2\,м$

$r_2 = 0{,}15\,м$

$\varepsilon = 2$

$d = 10^{-1}\,м$



Принцип суперпозиції: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$;

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\varepsilon r_1^2}\,;\; E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\varepsilon r_2^2}\,.$$

Скористаємось теоремою косинусів:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\varphi\,.$$

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}\,;$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - \frac{q_1q_2\left(r_1^2 + r_2^2 - d^2\right)}{r_1^3r_2^3}}\,.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[E] = \frac{м}{Ф}\sqrt{\frac{Кл^2}{м^4} + \frac{Кл^2}{м^4} - \frac{Кл^2 \cdot м^2}{м^6}} = \frac{м}{Ф}\sqrt{\frac{Кл^2}{м^4}} = \frac{м}{Ф}\frac{Кл}{м^2} = \frac{Кл}{Ф \cdot м} = \frac{Кл \cdot В}{Кл \cdot м} = \frac{В}{м}\,.$$

Підставимо числові значення:

$$E = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-14}}{0{,}0016} + \frac{16 \cdot 10^{-14}}{0{,}00051} + \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot \left(0{,}04 + 0{,}0225 - 0{,}01\right)}{0{,}008 \cdot 0{,}003375}} =$$

$$= 0{,}95 \cdot 10^5\left(\frac{В}{м}\right).$$

Задача 2.2. Тонке кільце радіусом $R = 8\,см$ несе заряд, рівномірно розподілений з лінійною густиною $\tau = 10^{-8}\,\frac{Кл}{м}$. Знайти напруженість електричного поля в точці рівновіддаленій від всіх точок кільця на відстань $r = 10\,см$.

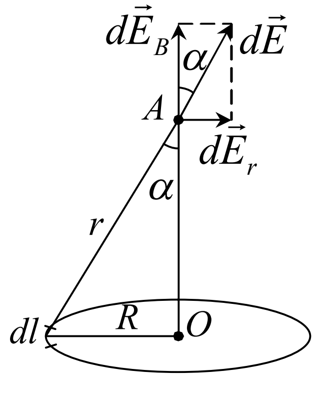
Дано:

$E - ?$

$R = 0{,}08\,м$

$\tau = 10^{-8}\,\frac{Кл}{м}$

$r = 0{,}1\,м$



Виберемо на кільці довільну ділянку dl, таку малу, що в межах її заряд можемо розглядати як точковий.

$$dq = \tau dl\,;$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

Розкладемо dE на горизонтальну $dE_г$ та вертикальну dE_B складові.

Оскільки ділянка dl вибрана довільно і малюнок симетричний відносно осі OA, для будь-якого dl завжди знайдеться така ж ділянка на іншому кінці діагоналі, тоді сума $d\vec{E}_г$ буде рівною 0. $\int_0^l dE_г = 0$.

Отже, результуюча напруженість поля, буде дорівнювати сумі вертикальних складових:

$$E = \int_0^l dE_B = \int_0^l dE\cos\alpha = \int_0^l \frac{\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dl.$$

$$E = \frac{\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^l dl;\ l = 2\pi R;\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}.$$

$$E = \frac{\tau\cdot 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r} = \frac{\tau R\sqrt{r^2 - R^2}}{2\varepsilon_0 r^3}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[E] = \frac{\frac{Кл}{м}\cdot м\cdot м}{\frac{Ф}{м}\cdot м^3} = \frac{Кл}{Ф\cdot м} = \frac{Кл\cdot В}{Кл\cdot м} = \frac{В}{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$E = \frac{10^{-8}\cdot 0{,}08\sqrt{0{,}01 - 0{,}0064}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}001} = 2{,}7\cdot 10^3\left(\frac{В}{м}\right).$$

Задача 2.3. Тонка нитка рівномірно заряджена зарядом $q = 6\cdot 10^{-8}\,Кл$. Визначити напруженість поля в точці, яка міститься на відстані $d = 5\cdot 10^{-2}\,м$ від центра нитки на $l = 0{,}6\,м$ від її кінців.

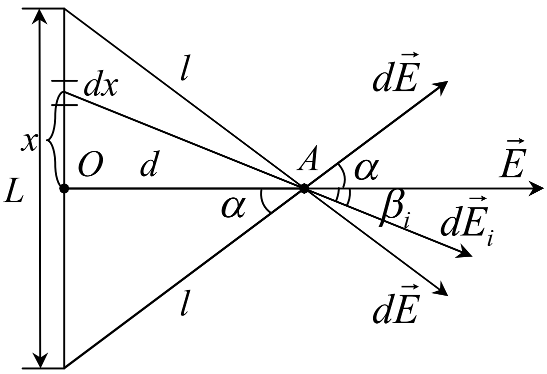
Дано:

$E - ?$

$q = 6\cdot 10^{-8}\,Кл$

$d = 5\cdot 10^{-2}\,м$

$l = 0{,}6\,м$



Зробивши малюнок, виділимо на відстані x від точки O по довжині нитки елемент dx.

Заряд цього елемента: $dq = \frac{q}{L}dx$.

Напруженість поля в точці A створена елементарним зарядом dq визначається, як напруженість точкового заряду:

$$dE_i = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_0^2} = \frac{qdx}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_0^2 L}.$$

Результуюча напруженість всіх елементарних зарядів dq_i дорівнює алгебраїчній сумі складових dE_i на напрямку OA.

$$E = \sum_{i=1}^{n} dE_i \cos\beta_i .$$

Тобто $E = \int \frac{qdx}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_0^2 L}\cos\beta$.

Оскільки під інтегралом знаходиться декілька змінних, не залежних з першого погляду величин x, β, l_0, потрібно виразити їх через одну з них. Найкраще використати для цього кут β.

$\cos\beta = \frac{d}{l_0}$; $l_0 = \frac{d}{\cos\beta}$; $x = dtg\beta$; $dx = \frac{dd\beta}{\cos^2\beta}$.

Підставивши ці величини в попередній вираз, запишемо:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}\int \frac{d\cos\beta\cos^2\beta d\beta}{d^2\cos^2\beta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ld}\int \cos\beta d\beta .$$

Межі такого інтегралу визначаються кутами, між якими змінюється кут β, тобто між кутами $-\alpha$ і $+\alpha$, це кути між крайніми значеннями елементарних напруженостей dE і їх проекцією на напрям рівнодійної OA.

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ld}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\beta d\beta = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ld}\left(\sin\alpha - \sin(-\alpha)\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ld}\left(\sin\alpha + \sin\alpha\right) = \frac{q\sin\alpha}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ld};$$

$$\sin\alpha = \frac{L}{2l}.$$

Таким чином $E = \frac{2qL}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ld2l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 ld}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[E] = \frac{Кл\cdot м}{Ф\cdot м^2} = \frac{Кл}{Ф\cdot м} = \frac{Кл\cdot В}{Кл\cdot м} = \frac{В}{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$E = \frac{6\cdot 10^{-8}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}6\cdot 5\cdot 10^{-2}} = 0{,}018\cdot 10^6 = 1{,}8\cdot 10^4\left(\frac{В}{м}\right).$$

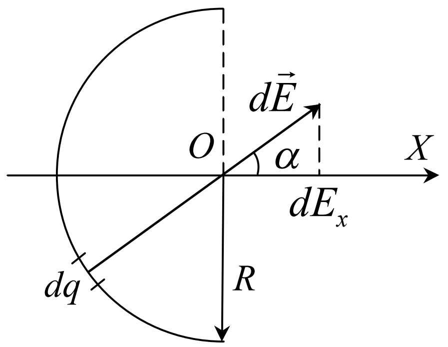
Задача 2.4. Провідник у вигляді півкола радіусом $R = 0{,}9\,м$ рівномірно заряджений зарядом $q = 5\,нКл$. Визначити напруженість поля у центрі цієї фігури.

Дано:

$E - ?$

$R = 0{,}9\ м$

$q = 5 \cdot 10^{-19}\ Кл$



Поділимо заряджений провідник на елементарні заряди dq. В точці O напруженість поля буде визначатись сумою горизонтальних складових dE_x.

Вертикальні складові взаємно компенсуються.

$$\frac{dE_x}{dE} = \cos\alpha\ ;\ dE_x = dE\cos\alpha\ ;$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\ ;\ dE_x = \frac{dq\cos\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\ .$$

$$dq = \tau dl\ ;\ r = \frac{q}{L};\ dq = \frac{q}{L}dl\ ;\ L = \pi R\ ;\ dq = \frac{q}{\pi R}dl\ ;$$

$$dE_x = \frac{q}{\pi R}dl \cdot \frac{\cos\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \frac{q\cos\alpha}{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^3}dl\ .$$

$$l = \frac{2\pi R\alpha}{360^\circ} = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R}\ ;$$

$$d\alpha = \frac{dl}{R}\ ;\ dl = Rd\alpha\ .$$

$$dE_x = \frac{q\cos\alpha}{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^3}Rd\alpha\ ;$$

$$dE_x = \frac{q\cos\alpha}{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^2}d\alpha\ .$$

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{q\cos\alpha}{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^2}d\alpha = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\alpha d\alpha = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\ .$$

$\varepsilon = 1$, тоді

$$E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\ .$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[E_x\right] = \frac{Кл}{\frac{Ф}{м}\cdot м^2} = \frac{Кл}{Ф \cdot м} = \frac{Кл}{\frac{Кл}{В}\cdot м} = \frac{В}{м}\ .$$

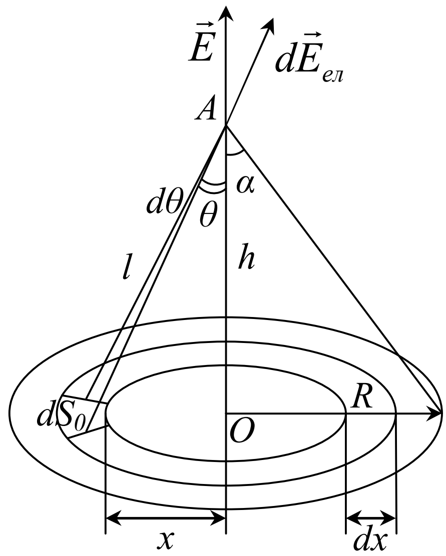
Підставимо числові значення:

$$E_x = \frac{5\cdot 10^{-9}}{2\cdot 9{,}86\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}84} = 35{,}4\left(\frac{В}{м}\right).$$

Задача 2.5. Диск радіусом $R = 0{,}2\,м$ заряджено рівномірно з поверхневою густиною $\sigma = 8{,}85 \cdot 10^{-7} \frac{Кл}{м^2}$. Визначити напруженість поля в точці на перпендикулярі, що проходить через центр диска, і розміщена на відстані $h = 0{,}2\,м$ від нього.

Дано:

$E - ?$
$R = 0{,}2\,м$
$\sigma = 8{,}85 \cdot 10^{-7} \frac{Кл}{м^2}$
$h = 0{,}2\,м$



Розіб'ємо диск на сукупність нескінченно тонких кілець. Заряджене кільце логічно представити як сукупність точкових зарядів. Знайдемо напруженість від кожного такого заряду.

Результуючий вектор напруженості електричного поля буде напрямлений вздовж перпендикуляра OA.

Виберемо елемент поверхні dS_0 на кільці, яке впишемо внутрішнім радіусом x з центром диска. Товщина кільця dx.

Тоді елементарна напруженість поля в точці A створена елементом зарядженої площини dS_0 буде мати вигляд:

$$dE_{ел} = \frac{\sigma dS_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2}; \ \cos\Theta = \frac{h}{l} \Rightarrow l = \frac{h}{\cos\Theta};$$

Тоді,

$$dE_{ел} = \frac{\sigma dS_0 \cos^2\Theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 h^2}.$$

Напруженість поля створена кільцем товщиною dx з внутрішнім радіусом x є геометричною сумую всіх елементарних напруженостей, які створені зарядами σdS_0, або елементарним зарядом всього кільця σdS. Представимо dS, як суму $\sum dS_0$.

Площа елементарного кільця

$$dS_0 = \pi(2x + dx)dx = (2\pi x + \pi dx)dx = 2\pi x dx + \pi dx dx.$$

Оскільки dx нескінченно мала, то $dxdx \to 0$, і, отже, $dS_0 = 2\pi x dx$.

$$dE_{кільця} = \frac{\sigma \cos^2 \Theta \cdot dx \cdot 2\pi x}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 h^2} \cos\Theta = \frac{2\pi \sigma d \cos^3 \Theta}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 h^2} x dx = \frac{\sigma \cos^3 \Theta}{2\varepsilon \varepsilon_0 h^2} x dx .$$

Інтегруючи цей вираз в межах зміни x, дістанемо:

$$E = \int_0^R \frac{\sigma \cos^3 \Theta}{2\varepsilon \varepsilon_0 h^2} x dx .$$

Проте, таке інтегрування має незручність, яка полягає у неявній залежності змінних параметрів від R. Перейдемо до однієї змінної Θ, яка замінюється в межах від *0* до α.

$$x = h tg\Theta ;\ dx = \frac{h d\Theta}{\cos^2 \Theta} .$$

Тоді,

$$E = \int_0^\alpha \frac{\sigma \cos^3 \Theta}{2\varepsilon \varepsilon_0 h^2} h tg\Theta \frac{h}{\cos^2 \Theta} d\Theta = \int_0^\alpha \frac{\sigma \cos^3 \Theta h^2 \sin\Theta}{2\varepsilon \varepsilon_0 h^2 \cos\Theta \cos^2 \Theta} d\Theta = \int_0^\alpha \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0} \sin\Theta d\Theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0} \int_0^\alpha \sin\Theta d\Theta =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0} \left(-\cos\alpha + \cos 0^\circ\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0} \left(1 - \cos\alpha\right).$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} .$$

Отже:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}}\right) .$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[E] = \frac{Кл \cdot м}{м^2 \cdot Ф} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{м^2}{м^2}}}\right) = \frac{Кл}{м \cdot Ф} = \frac{Кл \cdot В}{Кл \cdot м} = \frac{В}{м} .$$

Підставимо числові значення:

$$E = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}293 \approx 1{,}5 \cdot 10^4 \left(\frac{В}{м}\right) .$$

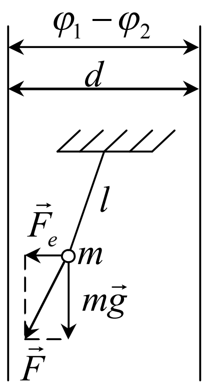
Задача 2.6. Кулька з діелектрика масою *m* та зарядом *q*, підвішена на нерозтяжній нитці довжиною *l* між двома вертикальними нескінченними різнойменно зарядженими пластинами. Різниця потенціалів на пластинах $\varphi_2 - \varphi_1$, відстань між ними – *d*, причому $l >> d$. Кулька здійснює коливання у площині, перпендикулярній до пластин. Обчислити період коливань кульки.

Дано:

$T - ?$

m, q,

$\varphi_2 - \varphi_1$, d



На кульку діють сила тяжіння $F_T = mg$ та сила електричного поля $F_e = qE$. Рівнодійна цих сил

$$F = \sqrt{F_e^2 + F_T^2} = \sqrt{m^2 g^2 + (qE)^2} .$$

Згідно до другого закону Ньютона прискорення, з яким рухається кулька

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{m^2 g^2 + (qE)^2}}{m} = \sqrt{\frac{m^2 g^2 + (qE)^2}{m^2}} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2} .$$

Напруженість електричного поля та різниця потенціалів пов'язані між собою залежністю $E = \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}$.

Таким чином можна записати: $a = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{q(\varphi_2 - \varphi_1)}{md}\right)^2}$.

Вважатимемо систему кулька – нитка математичним маятником.

Період коливань математичного маятника: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{a}}$.

Підставимо знайдений нами вираз для прискорення у вираз для періоду коливань:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{q(\varphi_2 - \varphi_1)}{md}\right)^2}}} .$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[T] = \sqrt{\frac{м}{\sqrt{\frac{м^2}{с^4} + \frac{Кл^2 В^2}{кг^2 м^2}}}} = \sqrt{\frac{м}{\sqrt{\frac{м^2}{с^4} + \frac{А^2 с^2 В^2}{кг^2 м^2}}}} = \sqrt{\frac{м}{\sqrt{\frac{м^2}{с^4} + \frac{Дж^2}{кг^2 м^2}}}} = \sqrt{\frac{м}{\sqrt{\frac{м^2}{с^4} + \frac{кг^2 м^4}{с^4 кг^2 м^2}}}} = \sqrt{\frac{м}{\sqrt{\frac{м^2}{с^4} + \frac{м^2}{с^4}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{м}{\sqrt{\frac{м^2}{с^4}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{м^2}{1}}}{\sqrt{\frac{м^2}{с^4}}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{м^2 с^4}{м^2}}} = \sqrt{\sqrt{с^4}} = с .$$

Тема 3. ***НАПРУЖЕНІСТЬ ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДЬКОГО-ГАУССА.***

Задача 3.1. З якою силою F_S на одиницю площі відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченні пластини розташовані паралельно у вакуумі. Поверхнева густина заряду на пластинах $\sigma = 0{,}3\,\frac{мКл}{м^2}$.

Дано:

$F_S - ?$	
$\sigma = 0{,}3\cdot 10^{-3}\,\frac{Кл}{м^2}$	

Заряд одиниці поверхні першої пластини розглянемо в полі створеному другою пластиною $F = qE$; $F_S = \frac{qE}{S}$.

Напруженість поля поблизу нескінченої рівномірно зарядженої пластини згідно до теореми Гаусса:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0};\ \frac{q}{S} = \sigma;\ \varepsilon = 1.$$

Отже:

$$F_S = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0};$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[F_S] = \frac{Кл^2\cdot м}{м^4\cdot Ф} = \frac{Кл^2\cdot м\cdot В}{м^4\cdot Кл} = \frac{Кл\cdot В}{м^3} = \frac{А\cdot с\cdot В}{м^3} = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н\cdot м}{м^3} = \frac{Н}{м^2}.$$

Підставимо числові значення:

$$F_S = \frac{0{,}09\cdot 10^{-6}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 0{,}0051\cdot 10^6 = 5{,}1\cdot 10^3\left(\frac{Н}{м^2}\right).$$

Задача 3.2. Дві довгі тонкостінні коаксіальні трубки радіусами $R_1 = 2\,см$ та $R_2 = 4\,см$ несуть заряди, рівномірно розподілені по довжині з лінійними густинами $\tau_1 = 10^{-3}\,\frac{мкКл}{м}$ та $\tau_2 = -5\cdot 10^{-4}\,\frac{мкКл}{м}$. Простір між трубками заповнено ізолятором з діелектричною проникністю $\varepsilon = 3$. Визначити напруженість поля в точках *A, B* і *C*, які знаходяться на відстані 1, 3 та 5 *см* від спільної осі трубок відповідно. Намалювати схематично графік залежності напруженості поля від відстані до осі трубок.

Дано:

$E_{1,2,3} - ?$

$E = f(r)$

$R_1 = 2 \cdot 10^{-2}\ м$

$R_2 = 4 \cdot 10^{-2}\ м$

$\tau_1 = 10^{-9}\ \dfrac{Кл}{м}$

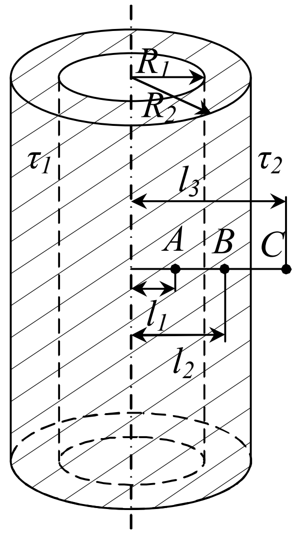
$\tau_2 = -5 \cdot 10^{-10}\ \dfrac{Кл}{м}$

$\varepsilon = 3$

$l_1 = 10^{-2}\ м$

$l_2 = 3 \cdot 10^{-2}\ м$

$l_3 = 5 \cdot 10^{-2}\ м$



Точка A знаходиться всередині обох трубок, отже за теоремою Гаусса напруженість електричного поля у цій точці:

$$E_A = 0.$$

Згідно до теореми Гаусса електричне поле у точці B, що знаходиться між трубками створюватиметься лише внутрішньою трубкою.

$$E_B S_б = \frac{q_1}{\varepsilon\varepsilon_0};$$

$$S_б = 2\pi l_2 h;\ q_1 = \tau_1 h.$$

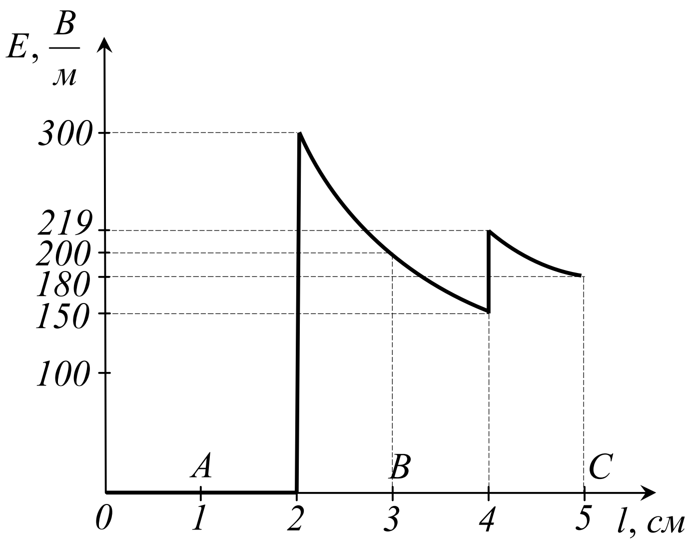
$$E_B 2\pi l_2 h = \frac{\tau_1 h}{\varepsilon\varepsilon_0};\ E_B = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_2}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[E_B] = \frac{Кл \cdot м}{м \cdot Ф \cdot м} = \frac{Кл}{Ф \cdot м} = \frac{Кл \cdot В}{Кл \cdot м} = \frac{В}{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$E_B = \frac{10^{-9}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^2 \left(\frac{В}{м}\right).$$



Напруженість електричного поля в точці C буде дорівнювати сумі напруженостей полів обох циліндрів $\vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$,

де $\vec{E}_1$ – напруженість електричного поля внутрішньої трубки; $\vec{E}_2$ – напруженість електричного поля зовнішньої трубки.

$$E_1 S_{б1} = \frac{q_1}{\varepsilon\varepsilon_0};\ E_1 = \frac{q_1}{S_{б1}\varepsilon\varepsilon_0};\ q_1 = \tau_1 h;$$

$$S_{б1} = 2\pi l_3 h;\ E_1 = \frac{\tau_1 h}{2\pi l_3 h \varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_3};$$

$$E_2 S_{б2} = -\frac{q_2}{\varepsilon\varepsilon_0};\ E_2 = -\frac{q_2}{S_{б2}\varepsilon\varepsilon_0};\ q_2 = \tau_2 h;\ S_{б2} = S_{б1} = 2\pi l_3 h;$$

$$E_2 = -\frac{\tau_2 h}{2\pi l_3 h\varepsilon\varepsilon_0} = -\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_3};$$

$$E_C = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_3} - \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_3} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l_3}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$E_c = \frac{Кл\cdot м - Кл\cdot м}{м\cdot Ф\cdot м} = \frac{Кл}{Ф\cdot м} = \frac{Кл\cdot В}{Кл\cdot м} = \frac{В}{м}.$$

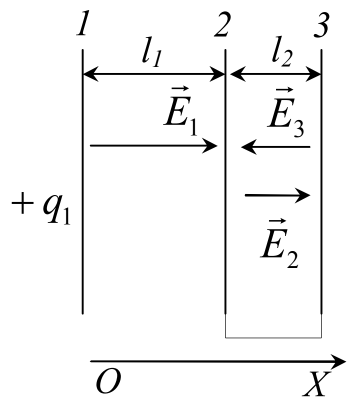
Підставимо числові значення:

$$E_C = \frac{10^{-9} + 5\cdot 10^{-10}}{2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 5\cdot 10^{-10}} = 180\left(\frac{В}{м}\right).$$

Задача 3.3. Три металеві пластини розташовані на відстані l_1 та l_2 одна від одної. На першій пластині знаходиться заряд $+q_1$. Дві незаряджені пластини закорочені між собою. Визначити силу, яка діє на другу пластину, якщо площі всіх пластин однакові та рівні S.

Дано:

$F_2 - ?$
l_1, l_2 $+q_1$, S



Розглянемо, які поля будуть існувати між пластинами. Очевидно, на пластинах 2 і 3 завдяки електростатичній індукції виникнуть заряди різних знаків, оскільки вони повинні утворити електронейтральну систему.

Тепер кожна пластина утворює власне електричне поле у всіх точках простору.

Зрозуміло, що на пластину 2 будуть діяти поля $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_3$.

Тоді

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3, \text{ або } \vec{F}_2 = q_2\vec{E}_1 + q_2\vec{E}_3;$$

тут q_2 – заряд пластини 2, його потрібно визначити. Очевидно для цього треба пов'язати q_1 та q_2. Заряд на пластині 2 буде негативний і рівний за абсолютним значенням позитивному заряду на пластинці 3.

Скористаємось умовою відсутності поля між пластинами 2 і 3.

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0;$$

$$OX: E_1 + E_2 - E_3 = 0;$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0};\ \sigma_1 = \frac{q_1}{S};$$

$$E_1 = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S};$$

$$E_2 = -\frac{q_2}{2\varepsilon_0 S};$$

$$E_3 = \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S}.$$

$$\frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} = 0; \ \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{\varepsilon_0 S} = 0; \ \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0 S}; \ q_2 = \frac{1}{2} q_1.$$

$$F_2 = \frac{q_2 q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2 q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1^2}{4\varepsilon_0 S} - \frac{q_1^2}{8\varepsilon_0 S} = \frac{2q_1^2 - q_1^2}{8\varepsilon_0 S} = \frac{q_1^2}{8\varepsilon_0 S}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[F_2] = \frac{Кл^2 \cdot м}{Ф \cdot м^2} = \frac{Кл^2}{Ф \cdot м} = \frac{Кл^2 \cdot В}{Кл \cdot м} = \frac{Кл \cdot В}{м} = \frac{А \cdot с \cdot В}{м} = \frac{Дж}{м} = Н.$$

Задача 3.4. Визначити напруженість поля від двох нескінченних коаксіальних циліндрів в точках, що віддалені від осі на 10 і 20 *мм*, якщо радіус внутрішнього циліндра 9 *мм*, а зовнішнього 12 *мм*. Густина зарядів на поверхні внутрішнього циліндру $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{Кл}{м^2}$, зовнішнього $\sigma_2 = 4 \cdot 10^{-3} \frac{Кл}{м^2}$.

Дано:

$E_1 - ?$

$E_2 - ?$

$l_1 = 10^{-2}\, м$

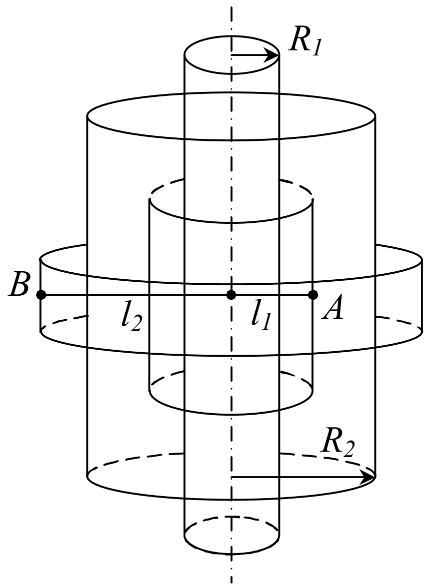
$l_2 = 2 \cdot 10^{-2}\, м$

$R_1 = 9 \cdot 10^{-3}\, м$

$R_2 = 12 \cdot 10^{-3}\, м$

$\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{Кл}{м^2}$

$\sigma_2 = 4 \cdot 10^{-3} \frac{Кл}{м^2}$



Визначимо напруженість поля в точці, що лежить між поверхнями циліндрів на відстані l_1 (точка *A*). Застосуємо теорему Остроградського-Гаусса до проведеної через цю точку допоміжної циліндричної поверхні. Потік вектора індукції через основи обраної поверхні висотою h дорівнює нулю, оскільки при умові $l_1 << h$ лінії індукції поля будуть паралельні до них.

Потік вектора індукції:

$$\varPhi_D = \oint D_n dS = \oint \varepsilon\varepsilon_0 E_n dS = \varepsilon\varepsilon_0 \oint E_n dS.$$

Запишемо потік вектора індукції електростатичного поля через бічну поверхню обраної циліндричної поверхні:

$$\varPhi_{D_1} = \varepsilon\varepsilon_0 E_1 S_1; \ S_1 = lh; \ l = 2\pi l_1; \ S_1 = 2\pi l_1 h; \ \varPhi_{D_1} = \varepsilon\varepsilon_0 E_1 2\pi l_1 h.$$

За теоремою Остроградського-Гаусса потік $\varPhi_D$ дорівнює сумі зарядів, що охоплює дана поверхня, таким чином, це заряд, який припадає на поверхню довжиною h внутрішнього коаксіального циліндра: $q_1 = \sigma_1 S_1'$, тут S_1' – площа бічної поверхні внутрішнього циліндра.

$$S_1' = l_1'h;\ l_1' = 2\pi R_1;\ S_1' = 2\pi R_1 h;\ q_1 = \sigma_1 2\pi R_1 h.$$

Отже: $E_1 \varepsilon\varepsilon_0 2\pi l_1 h = \sigma_1 2\pi l R_1 h \Rightarrow E_1 = \dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon\varepsilon_0 l_1}$;

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[E_1] = \frac{Кл \cdot м^2}{м^2 \cdot Ф \cdot м} = \frac{Кл}{Ф \cdot м} = \frac{Кл \cdot В}{Кл \cdot м} = \frac{В}{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$E_1 = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = \frac{18 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-14}} \approx 2{,}03 \cdot 10^8 \left(\frac{В}{м}\right).$$

Аналогічно визначимо напруженість поля в точці B за межами циліндрів. Повний потік через поверхню циліндра радіусом l_2 і висотою h дорівнює:

$$Ф_{D_2} = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 2\pi l_2 h;\ Ф_{D_2} = q_2;$$

Поле в цій точці створене сумарним зарядом двох поверхонь.

Тому:

$$q_2 = \sigma_1 2\pi R_1 h + \sigma_2 2\pi R_2 h = 2\pi h(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2);$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_2 2\pi l_2 h = 2\pi h(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2);\ \varepsilon\varepsilon_0 E_2 l_2 = \sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2;$$

$$E_2 = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon\varepsilon_0 l_2}.$$

Виконаємо первірку розмірності: $[E_2] = \dfrac{Кл \cdot м^2 + Кл \cdot м^2}{м^2 \cdot Ф \cdot м} = \dfrac{Кл}{Ф \cdot м} = \dfrac{Кл \cdot В}{Кл \cdot м} = \dfrac{В}{м}$.

Підставимо числові значення:

$$E_2 = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = \frac{66 \cdot 10^{-6}}{17{,}7 \cdot 10^{-14}} \approx 3{,}73 \cdot 10^8 \left(\frac{В}{м}\right).$$

Задача 3.5. Точковий заряд $q = 50\ нКл$ знаходиться на осі прямого колового циліндру на відстані 5 *см* від основи. Знайти число силових ліній, які проходять через його бічну поверхню, якщо висота циліндру $h = 10\ см$, а радіус основи $r = 5\ см$.

Дано:

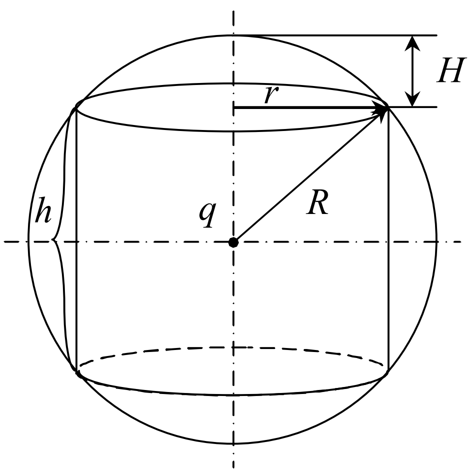
$N - ?$

$q = 50 \cdot 10^{-8}\ Кл$

$l = 5 \cdot 10^{-2}\ м$

$h = 10^{-1}\ м$

$r = 5 \cdot 10^{-2}\ м$



Кількість силових ліній дорівнює потоку вектора напруженості. Для розв'язку задачі побудуємо навколо циліндру сферу радіусом R.

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2;\; R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Потік вектора напруженості через цю сферу:

$$\Phi_{E_{сф}} = ES_{сф};\; S_{сф} = 4\pi R^2;$$

$$\Phi_{E_{сф}} = 4\pi E R^2.$$

Він дорівнює потокові через весь циліндр, тобто через бокову поверхню та дві основи. Через одну з основ буде проходити такий же потік як і через об'ємний сегмент вирізаний циліндром в сфері радіусом R:

$$\Phi_{E_{осн}} = ES_{осн};\; S_{осн} = 2\pi RH;\; H = R - \frac{h}{2};\; S_{осн} = 2\pi R\left(R - \frac{h}{2}\right);$$

$$\Phi_{E_{осн}} = 2\pi RE\left(R - \frac{h}{2}\right).$$

Напруженість E знайдемо, як напруженість поля точкового заряду:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2};$$

$$\Phi_{E_{сф}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0};$$

$$\Phi_{E_{осн}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} 2\pi R\left(R - \frac{h}{2}\right) = \frac{q}{2\varepsilon_0 R^2}\left(R^2 - \frac{Rh}{2}\right) = \frac{qR^2}{2\varepsilon_0 R^2} - \frac{qRh}{4\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{2R}\right).$$

$$\Phi_{E_б} = \Phi_{E_{сф}} - 2\Phi_{E_{осн}};$$

$$\Phi_{E_б} = \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{2q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{2R}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{2R}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 - 1 + \frac{h}{2R}\right) = \frac{qh}{2\varepsilon_0 R} =$$

$$= \frac{qh}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}} = \frac{q\frac{h}{2}}{\varepsilon_0\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}} = \frac{q}{\dfrac{\varepsilon_0\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}{\frac{h}{2}}} = \frac{q}{\varepsilon_0\sqrt{\dfrac{r^2}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2}} + 1}} = \frac{q}{\varepsilon_0\sqrt{\dfrac{4r^2}{h^2} + 1}} = N.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[\Phi_{E_б}\right] = \frac{Кл \cdot м}{Ф \cdot \sqrt{\dfrac{м^2}{м^2} + 1}} = \frac{Кл \cdot м}{Ф} = \frac{Кл \cdot В \cdot м}{Кл} = В \cdot м.$$

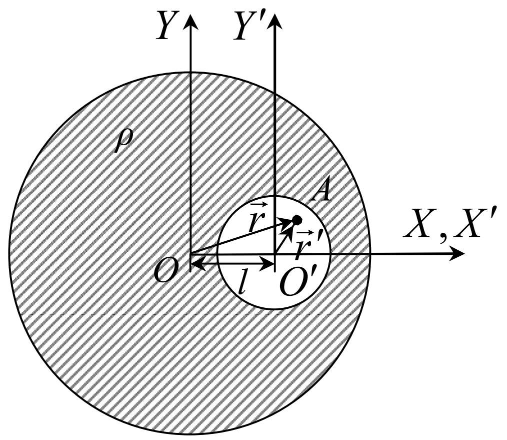
Підставимо числові значення:

$$N = \frac{5 \cdot 10^{-8}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \sqrt{\frac{4 \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{100 \cdot 10^{-4}} + 1}} = \frac{5 \cdot 10^{-8}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot 10^{-8}}{12{,}52 \cdot 10^{-12}} \approx 0{,}4 \cdot 10^{4} = 4 \cdot 10^{3}\, B \cdot м .$$

Задача 3.6. Всередині нескінченного рівномірно зарядженого по об'єму циліндра з об'ємною густиною заряду ρ і радіусом a є нескінченна циліндрична порожнина з радіусом b, причому її вісь знаходиться на відстані l від осі циліндра. Визначити напруженість поля всередині порожнини.

Дано:

$E - ?$
ρ, a, b, l



Для розв'язку задачі скористаємось принципом суперпозиції полів. Будемо вважати, що порожнина всередині циліндру одночасно заряджена і додатньо з об'ємною густиною $+\rho$ і від'ємно – з об'ємною густиною $-\rho$, так, що в цілому порожнина є електронейтральною. Це дає можливість розглядати поле всередині порожнини як суму двох полів: поля, що збуджується додатньо зарядженим суцільним циліндром радіусом *a*, і поля, що збуджується від'ємно зарядженим циліндром радіусом b.

Обчислимо напруженість поля, що створюється у точці *A* порожнини додатньо зарядженим циліндром. Діелектричну проникність порожнини вважатимемо рівною 1. Тоді потік вектора напруженості поля циліндра в точці *A*: $\Phi_E = ES_б$, де $S_б = 2\pi rh$ – площа бічної поверхні допоміжної циліндричної поверхні радіусом r, h – висота.

Тоді

$$\Phi_E = 2E\pi rh . \tag{1}$$

З іншого боку за теоремо Гаусса: $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$; $q = \rho V$; $V = \pi r^2 h$.

Тоді:

$$\Phi_E = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0} . \tag{2}$$

Ліві частини рівняння (1) та (2) рівні, отже рівні і праві:

$$2E\pi rh = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0} .$$

Звідси

$$E = \frac{\rho \pi r^2 h}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \tag{3}$$

Отже напруженість поля, що створюється у точці A порожнини додатньо зарядженим циліндром:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}\ .$$

Або у проекціях:

$$E_{1x} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}x\ ; \tag{4}$$

$$E_{1y} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}y\ . \tag{5}$$

Напруженість поля, що створюється у точці A порожнини від'ємно зарядженим циліндром радіусом b:

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}\,'\ .$$

Або у проекціях:

$$E_{2x} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x'\ ; \tag{6}$$

$$E_{2y} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}y'\ . \tag{7}$$

Проекції результуючої напруженості поля у точці A:

$$E_x = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(x - x'\right); \tag{8}$$

$$E_y = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(y - y'\right). \tag{9}$$

З малюнку видно, що

$$x = x' + l\ ; \tag{10}$$

та

$$y = y'\ . \tag{11}$$

Підставляючи рівняння (10) та (11) у (8) та (9), відповідно, отримуємо значення напруженості поля у точці A:

$$E_x = \frac{\rho\left(x' + l - x'\right)}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho l}{2\varepsilon_0};\ E_y = \frac{\rho\left(y' - y'\right)}{2\varepsilon_0} = 0\ .$$

Таким чином, поле всередині порожнини є однорідним і паралельним до прямої, що з'єднує вісь циліндра з віссю порожнини.

Тема 4. ПОТЕНЦІАЛ ПОЛЯ.

Задача 4.1. До якої відстані можуть наблизитись два електрони, які рухаються назустріч один одному з відносною швидкістю $\upsilon_0 = 10^6 \frac{м}{с}$?

Дано:

$r - ?$
$\upsilon_0 = 10^6 \frac{м}{с}$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\,Кл$
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,кг$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}$

Зв'яжемо систему відліку з одним з електронів. Тоді інший буде наближатись до нього зі швидкістю $\upsilon_0 = 10^6 \frac{м}{с}$. Коли другий електрон увійде в поле першого, його енергія буде рівною $E_0 = \frac{m_e \upsilon_0^2}{2}$. Рухаючись в полі першого електрону другий буде витрачати свою енергію на подолання сил поля і зупиниться коли її повністю втратить: $E_1 = 0$; $\upsilon_1 = 0$.

Енергія E_0 буде витрачена на роботу проти сил поля $A = e(\varphi_0 - \varphi_1)$,
де φ_1 – потенціал поля створеного першим електроном в точці, де швидкість другого стане рівною нулеві; φ_0 – потенціал поля в нескінченності $\varphi_0 = 0$.

$$A = \Delta E;\ \Delta E = E_1 - E_0;\ \Delta E = \frac{m_e \upsilon_1^2}{2} - \frac{m_e \upsilon_0^2}{2};\ \upsilon_1 = 0.$$

Отже $E_1 = 0$ і $\varphi_0 = 0$.

$$-e\varphi_1 = -\frac{m_e \upsilon_0^2}{2};\ e\varphi_1 = \frac{m_e \upsilon_0^2}{2};\ \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r};$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = \frac{m_e \upsilon_0^2}{2};\ \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = m_e \upsilon_0^2;\ 2\pi\varepsilon_0 r = \frac{e^2}{m_e \upsilon_0^2}.$$

Виразимо звідси r:

$$r = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_e \upsilon_0^2}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[r] = \frac{Кл^2}{\frac{Ф}{м} \cdot кг \cdot \frac{м^2}{с^2}} = \frac{Кл^2}{Ф \cdot \frac{кг \cdot м}{с^2}} = \frac{Кл^2}{Ф \cdot Н} = \frac{Кл^2}{\frac{Кл}{В} \cdot Н} = \frac{Кл \cdot В}{Н} = \frac{Кл \cdot В \cdot м}{Дж} = \frac{Кл \cdot В \cdot м}{В \cdot А \cdot с} =$$

$$= \frac{Кл \cdot м}{Кл} = м.$$

Підставимо числові значення:

$$r = \frac{2{,}56 \cdot 10^{-38}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}} = 5{,}1 \cdot 10^{-10}\,(м).$$

Задача 4.2. Поле створено електричним зарядом, рівномірно розподіленим по довгому циліндру радіусом $R = 1\ см$ з лінійною густиною заряду $\tau = 20\dfrac{нКл}{м}$. Визначити різницю потенціалів двох точок цього поля, що знаходяться на відстанях $a_1 = 0{,}5\ см$ та $a_2 = 2\ см$ від поверхні циліндру в середній його частині.

Дано:

$\Delta\varphi - ?$

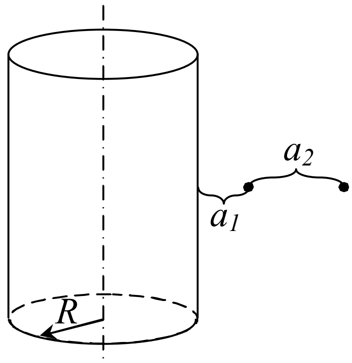
$R = 10^{-2}\ м$

$\tau = 2\cdot 10^{-8}\ \dfrac{Кл}{м}$

$a_1 = 0{,}5\cdot 10^{-2}\ м$

$a_2 = 2\cdot 10^{-2}\ м$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \dfrac{Ф}{м}$



Для знаходження напруженості поля, що створюється довгим циліндром, скористаємось теоремою Остроградського-Гаусса:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r};\ E = -grad\varphi;\ E = -\frac{d\varphi}{dr};$$

$$d\varphi = -Edr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}dr;$$

$$\Delta\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_{a_1+R}^{a_2+R} -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}dr.$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{a_1+R}^{a_2+R}\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a_2+R}{a_1+R};$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\Delta\varphi] = \frac{Кл\cdot м}{м\cdot Ф}\cdot\frac{м+м}{м+м} = \frac{Кл\cdot В}{Кл}\cdot\frac{м}{м} = В.$$

Підставимо числові значення:

$$\Delta\varphi = -\frac{2\cdot 10^{-8}}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{2\cdot 10^{-2}+10^{-2}}{0{,}5\cdot 10^{-2}+10^{-2}} = -0{,}25\cdot 10^{3}(В).$$

Задача 4.3. Кільце з тонкого дроту рівномірно заряджене зарядом $q = 2\cdot 10^{-8}\,Кл$. Радіус кільця $R = 3\,см$. Визначити потенціал поля на перпендикулярі до площини кільця на відстані $h = 4\,см$ від неї та в центрі кільця.

Дано:

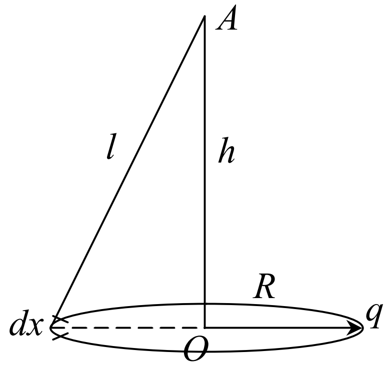
$\varphi_A, \varphi_0 - ?$

$q = 2\cdot 10^{-8}\,Кл$

$R = 3\cdot 10^{-2}\,м$

$h = 4\cdot 10^{-2}\,м$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \dfrac{Ф}{м}$



Навколо зарядженого кільця існує електричне поле і, оскільки потенціал поля в кожній точці є функцією координат цієї точки, то кожна точка має свій потенціал.

Обчислимо потенціал поля в точці *A*.

Поле, що утворене зарядженим кільцем, можна розглядати як наслідок накладання полів окремих елементарних зарядів.

При цій умові кільце можна розбити на малі відрізки dx, в межах яких заряд вважаємо точковим.

Кільце виготовлене з провідника і заряджене рівномірно з лінійною густиною заряду $\tau = \dfrac{q}{L}$; $L = 2\pi R$; $\tau = \dfrac{q}{2\pi R}$.

Елемент dx має елементарний заряд $dq = \tau dx$. Потенціал поля в точці *A*, який створений цим зарядом, дорівнює:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} = \frac{q dx}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R l}.$$

Враховуючи принцип незалежності полів, для потенціалу в точці *A* дістанемо:

$$\varphi = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 l R}\int_0^{2\pi R} dx = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R l}\left(2\pi R - 0\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}.$$

З малюнку $l = \sqrt{R^2 + h^2}$;

Тоді

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\varphi] = \frac{Кл}{\frac{Ф}{м}\cdot\sqrt{м^2 + м^2}} = \frac{Кл \cdot м}{Ф \cdot \sqrt{м^2}} = \frac{Кл \cdot м}{Ф \cdot м} = \frac{Кл \cdot В}{Кл} = В.$$

Підставимо числові значення:

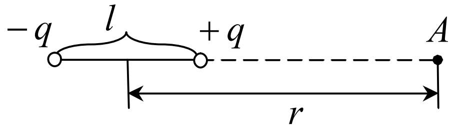
$$\varphi_0 = \frac{2\cdot 10^{-8}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^{-2}} \approx 6\cdot 10^3 (В);$$

$$\varphi_A = \frac{2\cdot 10^{-8}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot\sqrt{9\cdot 10^{-4} + 16\cdot 10^{-4}}} \approx 3{,}6\cdot 10^3 (В).$$

Задача 4.4. Визначити потенціал поля в точці осі диполя на відстані r від центра диполя, якщо електричний момент його дорівнює p, а плече – l.

Дано:

$\varphi - ?$
r, p, l



Потенціал поля в точці *A* дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів точкових зарядів $-q$ і $+q$.

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r-\frac{l}{2}\right)}-\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r+\frac{l}{2}\right)}=\frac{q\left(r+\frac{l}{2}\right)-q\left(r-\frac{l}{2}\right)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r-\frac{l}{2}\right)\left(r+\frac{l}{2}\right)}=\frac{q\left(r+\frac{l}{2}-r+\frac{l}{2}\right)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{ql}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2\left(1-\frac{l^2}{4r^2}\right)}==\frac{ql}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2\frac{1}{4}\left(4-\frac{l^2}{r^2}\right)}=\frac{p}{\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(4-\frac{l^2}{r^2}\right)r^2}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\varphi]=\frac{Кл\cdot м}{\frac{Ф}{м}\cdot\left(1-\frac{м^2}{м^2}\right)м^2}=\frac{Кл\cdot м^2}{Ф\cdot(1-1)\cdot м^2}=\frac{Кл}{Ф}=\frac{Кл\cdot В}{Кл}=В\,.$$

Задачу можна розв’язати, користуючись поняттям градієнта потенціалу:

$d\varphi=-E_l dl$; $\varphi=-\int E_l dl$; $l\to r$.

Напруженість електричного поля диполя можна обчислити за формулою:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{2rl}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}\,.$$

Тоді потенціал в точці, що розміщена на осі диполя на відстані r від його центра:

$$\varphi=-\int_r^\infty\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{2rldr}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}=-\int_r^\infty\frac{prdr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}=-\frac{p}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_r^\infty\frac{rdr}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}=$$

$$=-\frac{p}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)}\right)=\frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)}=\frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(1-\frac{l^2}{4r^2}\right)r^2}=\frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{1}{4}\left(4-\frac{l^2}{r^2}\right)r^2}=$$

$$=\frac{p}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2\left(4-\frac{l^2}{r^2}\right)}.$$

Задача 4.5. Дві металеві кульки радіусами $R_1=8\ см$ та $R_2=18\ см$ зарядили однойменними зарядами $q_1=13\ нКл$ та $q_2=18\ нКл$ відповідно. Знайти величину зарядів кульок після їх з’єднання.

Дано:

$q_1' - ?$ $q_2' - ?$	
$R_1 = 8 \cdot 10^{-2}\, м$ $R_2 = 18 \cdot 10^{-2}\, м$ $q_1 = 13 \cdot 10^{-9}\, Кл$ $q_2 = 18 \cdot 10^{-9}\, Кл$	

За законом збереження електричного заряду сумарний заряд кульок після з'єднання дорівнює їх сумарному заряду до з'єднання: $q_1' + q_2' = q_1 + q_2$.

Після з'єднання стануть рівними потенціали кульок: $\varphi_1 = \varphi_2$;

$$\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2};$$

$$\begin{cases} q_1' + q_2' = q_1 + q_2, \\ q_1' R_2 = q_2' R_1. \end{cases};$$

Звідси випливає $\dfrac{q_2' R_1}{R_2} + q_2' = q_1 + q_2$; $q_2' = \dfrac{(q_1 + q_2)R_2}{R_1 + R_2}$

$$q_1' = q_1 + q_2 - \frac{(q_1 + q_2)R_2}{R_1 + R_2} = (q_1 + q_2)\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{(q_1 + q_2)R_1}{R_1 + R_2}.$$

Підставимо числові значення:

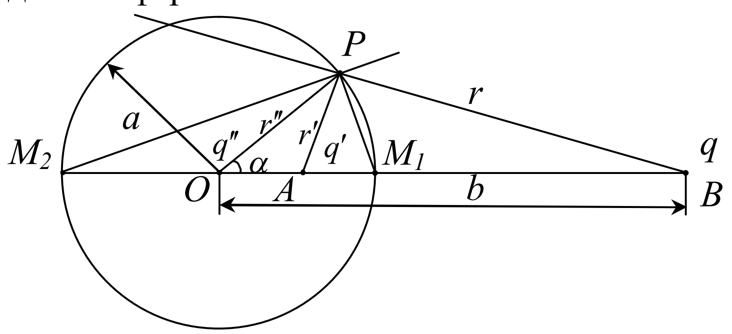
$$q_1' = \frac{31 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}08}{0{,}26} = 9{,}5 \cdot 10^{-9}(Кл);\ q_2' = \frac{31 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}18}{0{,}26} = 21{,}5 \cdot 10^{-9}(Кл).$$

Задача 4.6. Визначити чому дорівнює густина поверхневих зарядів індукованих на поверхні незарядженої ізольованої провідної сфери радіусом *a*, розміщеної на відстані *b* від точкового заряду *q* у вакуумі.

Дано:

$\sigma - ?$	
$a,\ b,\ q,\ \varepsilon = 1$	

Відомо, що для поля двох нерівних точкових зарядів однією з еквіпотенціальних поверхонь є сфера. Шляхом підбору положення та величини зображувального заряду q' підберемо еквіпотенціальну поверхню так, щоб геометрично сумістити її із заданою сферою.



Нехай потенціал сфери дорівнює нулю. Потенціал в точці *P*, що створюється зарядом q та зображувальним зарядом q' дорівнює:

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}\right). \qquad (1)$$

Для того, щоб поверхня сфери сумістилась з еквіпотенціальною поверхнею φ_P має дорівнювати нулю.

Тоді $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)=0$.

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\neq 0$, тоді $\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}=0$, $\frac{q}{r}=-\frac{q'}{r'}$ або

$$\frac{r'}{r}=-\frac{q'}{q}. \tag{2}$$

Виразимо відрізки r та r' через величини, дані в умові задачі та визначимо положення зображувального заряду q'.

Відомо, що сфера є геометричним місцем точок, однією з яких є точка *P*, відношення відстаней яких від двох даних точок є сталим, тобто можна записати, що

$$\frac{AP}{PB}=\frac{r'}{r}=k=Const. \tag{3}$$

Згідно із теоремою про бісектрису, відношення відрізків, на які бісектриса ділить протилежну сторону, дорівнює відношенню протилежних сторін трикутника. Тоді для внутрішньої бісектриси PM_1 з трикутника *APB* можна записати, що

$$\frac{AM_1}{M_1B}=\frac{AP}{PB}=k; \tag{4}$$

для зовнішньої бісектриси PM_2 можна записати, що

$$\frac{AM_2}{M_2B}=\frac{AP}{PB}=k. \tag{5}$$

З рівнянь (4) та (5) видно, що

$$\frac{AM_1}{M_1B}=\frac{AM_2}{M_2B}=\frac{AP}{PB}=k. \tag{6}$$

З малюнку видно, що $AM_1=OM_1-OA$; $OM_1=a$, отже

$$AM_1=a-OA. \tag{7}$$

$$BM_1=b-a. \tag{8}$$

В свою чергу $AM_2=OM_2+OA$; $OM_2=OM_1=a$, отже

$$AM_2=a+OA. \tag{9}$$

$$BM_2=b+a. \tag{10}$$

Підставимо вирази (7) – (10) у (6):

$$\frac{a-OA}{b-a}=\frac{a+OA}{b+a}. \tag{11}$$

Виразимо звідси *OA*:

$(a-OA)(b+a)=(a+OA)(b-a)$; $ab-bOA+a^2-aOA=ab+bOA-a^2-aOA$;

$ab-bOA+a^2-aOA-ab-bOA+a^2+aOA=0$; $-2bOA+2a^2=0$; $2bOA=2a^2$.

Отже,

$$OA = \frac{a^2}{b}. \qquad (12)$$

Таким чином, зображувальний заряд q' має знаходитись на відстані $\frac{a^2}{b}$ від центра сфери і лежати на прямій, що з'єднує центр сфери та заряд q.

Згідно з рівнянням (4) $\frac{AP}{PB} = \frac{AM_1}{BM_1}$. Враховуючи рівняння (7), (8) та (12) можна записати:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{a - \frac{a^2}{b}}{b-a} = \frac{\frac{ab-a^2}{b}}{b-a} = \frac{ab-a^2}{b^2-ab} = \frac{a(b-a)}{b(b-a)} = \frac{a}{b}. \qquad (13)$$

Таким чином, враховуючи рівняння (2), (3) та (13), запишемо: $\frac{r'}{r} = \frac{a}{b} = -\frac{q'}{q}$ або

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b}. \qquad (14)$$

Отже, якщо сфера заземлена і виконуються рівності (12) та (14), то вона є еквіпотенціальною поверхнею.

Враховуючи, що сфера розряджена та ізольована, внесемо поправку помістивши додатково в її центр заряд q'' такий, що

$$q'' = -q' = \frac{a}{b}q. \qquad (15)$$

Тоді поля всюди зовні сфери будуть результатом накладання полів від q, q' та q'' і потенціал в точці *P* буде дорівнювати:

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''}\right). \qquad (16)$$

З трикутника *OPB* за теоремою косинусів можемо записати, що

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (17)$$

Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}. \qquad (18)$$

Аналогічно з трикутника *OPA* за теоремою косинусів

$$r'^2 = a^2 + \frac{a^4}{b^2} - \frac{2a^3}{b}\cos\alpha. \qquad (19)$$

Тоді

$$r' = \sqrt{a^2 + \frac{a^4}{b^2} - \frac{2a^3}{b}\cos\alpha}. \qquad (20)$$

Враховуючи рівняння (18) та (20) перепишемо вираз (16) наступним чином:

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2+\frac{a^4}{b^2}-\frac{2a^3}{b}\cos\alpha}} + \frac{q''}{a}\right). \quad (21)$$

Значення зарядів від q' та q'' знаходимо з рівнянь (14) та (15) відповідно:

$$q' = -\frac{aq}{b}; \quad (22)$$

$$q'' = \frac{aq}{b}. \quad (23)$$

Підставляючи вирази (22) та (23) у (21) отримаємо рівняння для визначення потенціалу поля в точці *P*:

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}} - \frac{a}{b\sqrt{a^2+\frac{a^4}{b^2}-\frac{2a^3}{b}\cos\alpha}} + \frac{a}{ab}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}} - \frac{a}{ab\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}\cos\alpha\right)}} + \frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\left(b^2+\frac{b^2a^2}{b^2}-\frac{2ab^2}{b}\cos\alpha\right)}} + \frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}} + \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}.$$

Отже

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}. \quad (24)$$

Густина індукованих поверхневих зарядів може бути обчислена за формулою:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0\varphi}{a}. \quad (25)$$

Враховуючи вираз (24) знаходимо густину поверхневих зарядів:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 q}{4\pi\varepsilon_0 ab} = \frac{q}{4\pi ab}. \quad (26)$$

Тема 5. ЕЛЕКТРОЄМНІСТЬ. КОНДЕНСАТОРИ.

Задача 5.1. Плоский конденсатор заповнений трьома шарами діелектриків: склом товщиною $d_1 = 0{,}35\ см$ $(\varepsilon_1 = 7)$; парафіном – з $d_2 = 0{,}21\ см$ $(\varepsilon_2 = 2{,}1)$; фарфором – $d_3 = 0{,}9\ см$ $(\varepsilon_3 = 4{,}5)$. Визначити напруженість поля в кожному діелектрику при напрузі $10\ кВ$.

Дано:

$E_1 - ?$

$E_2 - ?$

$E_3 - ?$

$d_1 = 0{,}35 \cdot 10^{-2}\ м$

$\varepsilon_1 = 7$

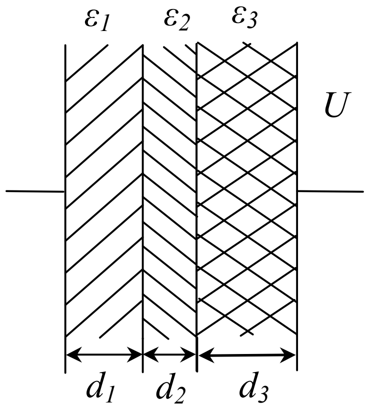
$d_2 = 0{,}21 \cdot 10^{-2}\ м$

$\varepsilon_2 = 2{,}1$

$d_3 = 0{,}9 \cdot 10^{-2}\ м$

$\varepsilon_3 = 4{,}5$

$U = 10^4\ В$



Оскільки з'єднання діелектриків послідовне, то різниця потенціалів $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = U$ прикладена до конденсатора дорівнює сумі різниць потенціалів або напруг на кожному з діелектриків:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 .$$

$$U_1 = E_1 d_1;\ U_2 = E_2 d_2;$$

$$U_3 = E_3 d_3;\ U = E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3 .$$

Індукція поля в будь-якому шарі діелектрика однакова:

$$D = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2 = \varepsilon_3 \varepsilon_0 E_3 .$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1;\ E_3 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} E_1;$$

$$U = E_1 d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 d_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} E_1 d_3;\ U = E_1\left(d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} d_3\right).$$

Звідси:

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} d_3};$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_2\left(d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} d_3\right)};$$

$$E_3 = \frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_3\left(d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} d_3\right)}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[E] = \frac{В}{м + м + м} = \frac{В}{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$E_1 = \frac{10^4}{0{,}35\cdot10^{-2} + \frac{7}{2{,}1}\cdot0{,}21\cdot10^{-2} + \frac{7}{4{,}5}\cdot0{,}9\cdot10^{-2}} = 4{,}1\cdot10^5 \left(\frac{B}{м}\right);$$

$$E_2 = \frac{7\cdot10^4}{2{,}1\left(0{,}35\cdot10^{-2} + \frac{7}{2{,}1}\cdot0{,}21\cdot10^{-2} + \frac{7}{4{,}5}\cdot0{,}9\cdot10^{-2}\right)} = 13{,}7\cdot10^5 \left(\frac{B}{м}\right);$$

$$E_3 = \frac{7\cdot10^4}{4{,}5\cdot\left(0{,}35\cdot10^{-2} + \frac{7}{2{,}1}\cdot0{,}21\cdot10^{-2} + \frac{7}{4{,}5}\cdot0{,}9\cdot10^{-2}\right)} = 6{,}4\cdot10^5 \left(\frac{B}{м}\right).$$

Задача 5.2. Визначити електричну ємність конденсатора з двома шарами діелектриків: фарфору $(d_1 = 2\ мм,\ \varepsilon_1 = 6)$ та ебоніту $(d_2 = 1{,}5\ мм,\ \varepsilon_2 = 2{,}6)$. Площа пластин конденсатора $S = 100\ см^2$.

Дано:

$C - ?$

$d_1 = 2\cdot10^{-3}\ м$

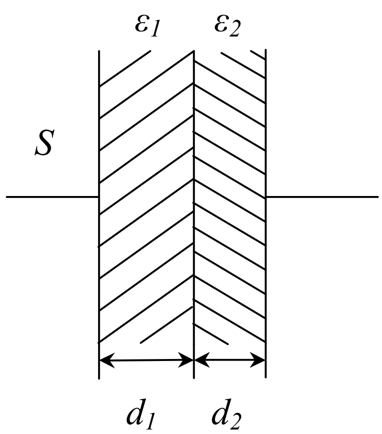
$d_2 = 1{,}5\cdot10^{-3}\ м$

$\varepsilon_1 = 6$

$\varepsilon_2 = 2{,}6$

$S = 10^{-2}\ м^2$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$



$C = \frac{q}{U}$; $\quad U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$.

Напруженість електричного поля між пластинами плоского конденсатора: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$; $q = \sigma S$.

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_1\varepsilon_0}d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2\varepsilon_0}d_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}};$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[C] = \frac{\frac{Ф}{м}\cdot м^2}{\frac{м}{1}} = \frac{Ф\cdot м^2}{м^2} = [Ф].$$

Підставимо числові значення:

$$C = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot10^{-12}}{\frac{2\cdot10^{-3}}{6} + \frac{1{,}5\cdot10^{-3}}{2{,}6}} = 97{,}3\ (пФ).$$

Задача 5.3. Три конденсатори однакової ємності з'єднали, як показано на схемі. Чому дорівнює різниця потенціалів U_{AD} між точками A та D, якщо $U_1 = 10\,B$, $U_2 = 20\,B$.

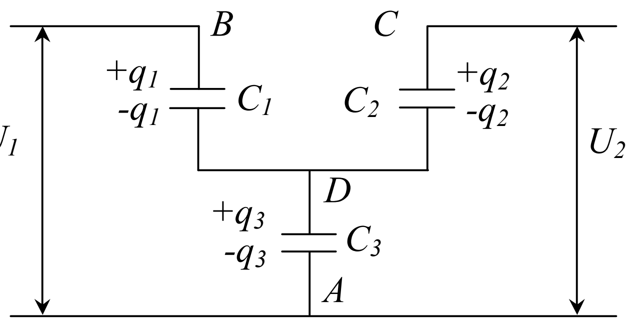
Дано:

$U_{AD} - ?$

$C_1 = C_2 = C_3 = C$

$U_1 = 10\,B$

$U_2 = 20\,B$



Різниці потенціалів між точками *D* і *B*, *D* і *C*, *A* і *D* можуть бути розраховані виходячи з означення ємності:

$U_{DB} = \dfrac{q_1}{C_1}$; $U_{DC} = \dfrac{q_2}{C_2}$; $U_{AD} = \dfrac{q_3}{C_3}$.

При паралельному з'єднанні:

$U_1 = U_{AB} = U_{AD} = U_{DB}$; $U_2 = U_{AC} = U_{AD} + U_{DC}$.

Сума зарядів, що підходять до точки *D* дорівнює 0:

$$-q_1 - q_2 + q_3 = 0. \qquad (1)$$

Враховуючи, що ємності всіх конденсаторів однакові:

$U_1 = \dfrac{q_3}{C} + \dfrac{q_1}{C}$; $U_2 = \dfrac{q_3}{C} + \dfrac{q_2}{C}$;

Звідки $q_1 + q_3 = U_1 C$; $q_1 = U_1 C - q_3$;

$$q_2 + q_3 = U_2 C \qquad (2)$$

$$q_2 = U_2 C - q_3. \qquad (3)$$

Підставимо рівняння (2) та (3) у (1).

$-U_1 C + q_3 - U_2 C + q_3 + q_3 = 0$; $3q_3 = (U_1 + U_2)C$.

Звідси випливає $q_3 = \dfrac{(U_1 + U_2)}{3} C$.

Тоді:

$$U_{AD} = \frac{q_3}{C} = \frac{(U_1 + U_2)C}{3C} = \frac{U_1 + U_2}{3}.$$

Підставимо числові значення:

$U_{AD} = \dfrac{10 + 20}{3} = 10(B)$.

Задача 5.4. Між пластинами плоского конденсатора паралельно до них введена металева пластинка товщиною $a = 8\ мм$. Визначити ємність конденсатора, якщо площа кожної з пластини $S = 100\ см^2$, а відстань між ними $l = 10\ мм$.

Дано:

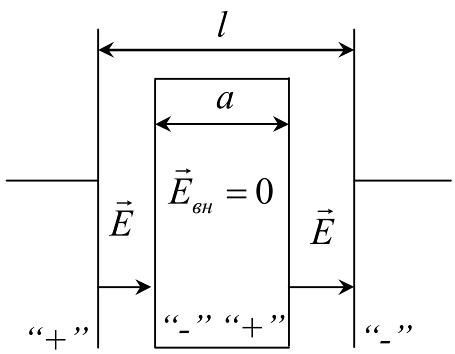
$C-?$

$a=8\cdot10^{-3}\,м$

$S=10^{-2}\,м^2$

$l=10^{-2}\,м$

$\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}\,\dfrac{Ф}{м}$



Внаслідок явища електростатичної індукції вільні заряди в металевій пластинці перерозподіляться так, що напруженість поля всередині пластинки буде рівною $\vec{E}_{вн}=0$.

Напруженість поля поза пластинкою $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$, оскільки $q=\sigma S$.

$$C=\frac{q}{U};\ U=E(l-a)=\frac{q(l-a)}{\varepsilon_0 S};$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{l-a}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[C]=\frac{Ф\cdot м^2}{м\cdot(м-м)}=\frac{Ф\cdot м^2}{м^2}=Ф.$$

Підставимо числові значення:

$$C=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot10^{-2}}{2\cdot10^{-3}}=44{,}3\cdot10^{-12}(Ф)=44{,}3\pi Ф.$$

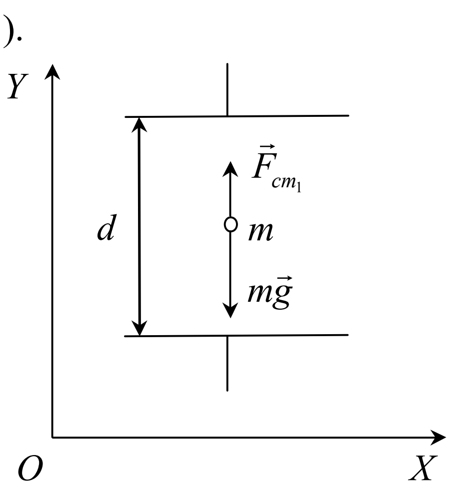
Задача 5.5. У плоскому горизонтально розміщеному конденсаторі, відстань між пластинами якого – d, знаходиться заряджена крапля з масою m. При відсутності електричного поля крапля внаслідок опору повітря падає з деякою сталою швидкістю. Якщо до пластин конденсатора прикладена напруга U, то крапля падає вдвічі повільніше. Знайти заряд краплі.

Дано:

$q-?$

$d, m, U, \upsilon_1=2\upsilon_2$

1).



$OY:\vec{F}_{ст_1}+m\vec{g}=0$;

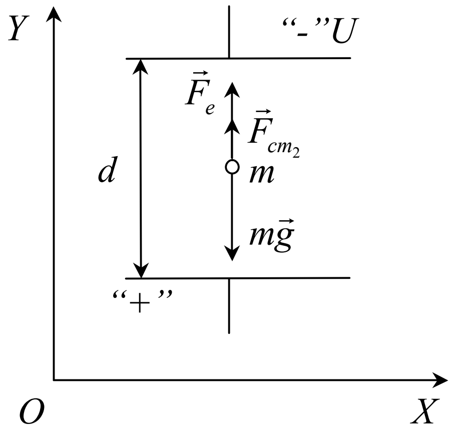
$F_{ст_1}-mg=0$;

$mg=F_{ст_1}$.

$F_{ст_1}=G\pi r\eta\upsilon_1$;

$mg=G\pi r\eta\upsilon_1$. (1)

2).



$$OY:\vec{F}_{cm_2}+\vec{F}_e+m\vec{g}=0;$$

$$F_{cm_2}+F_e-mg=0; \qquad -F_e+mg=F_{cm_2};$$

$$F_e=qE;\ E=\frac{U}{d};\ F_e=q\frac{U}{d};$$

$$-q\frac{U}{d}+mg=G\pi r\eta\upsilon_2. \ (2)$$

Перепишемо рівняння (1) та (2) наступним чином:

$$G\pi r\eta=\frac{mg}{\upsilon_1};\ (3)\quad G\pi r\eta=\frac{mg-q\frac{U}{d}}{\upsilon_2};\ (4)$$

Ліві частини рівнянь (3) та (4) рівні, отже рівні і праві:

$$mg\upsilon_2=\left(mg-q\frac{U}{d}\right)\upsilon_1;\ q\frac{U}{d}\upsilon_1=mg(\upsilon_1-\upsilon_2).$$

$$q=\frac{mgd(\upsilon_1-\upsilon_2)}{U\upsilon_1}=\frac{mgd}{2U}.$$

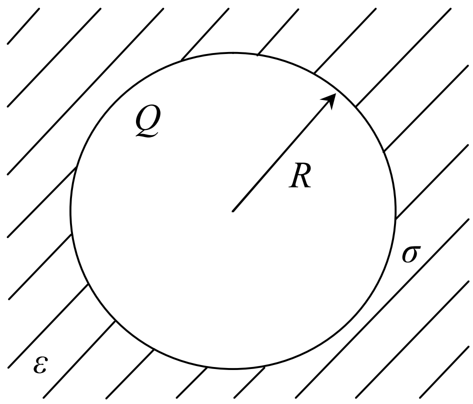
Виконаємо перевірку розмірності:

$$[q]=\frac{кг\cdot\frac{м}{с^2}\cdot м}{В}=\frac{Н\cdot м}{В}=\frac{Дж}{В}=\frac{А\cdot В\cdot с}{В}=А\cdot с=Кл.$$

Задача 5.6. n маленьких крапель ртуті радіусом r і зарядом q кожна зливаються в одну велику краплю. Знайти потенціал та густину заряду на її поверхні, якщо краплі знаходяться у воді.

Дано:

$\varphi-?$
$\sigma-?$
$n, r, q,\ \varepsilon$



Згідно із законом збереження заряду, заряд великої краплі $Q=nq$.

Радіус великої краплі знайдемо з рівності об’єму великої краплі та добутку кількості маленьких крапель на їх об’єм:

$$n\upsilon=V.$$

Об’єм маленької краплі:

$$\upsilon=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Об’єм великої краплі:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 n = \frac{4}{3}\pi R^3 ;\ r^3 n = R^3 .$$

Отже, радіус великої краплі

$$R = r\sqrt[3]{n} .$$

Оскільки в умові задачі сказано, що крапля ртутна, то маємо заряджену по об'єму кулю.

Ємність кулі у воді $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, де ε – діелектрична проникність води.

Використовуючи, отримане вище співвідношення радіусів крапель можна записати

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\sqrt[3]{n} .$$

Знаючи заряд та ємність великої краплі, знаходимо її потенціал:

$$\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{nq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\sqrt[3]{n}} .$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\varphi] = \frac{Кл \cdot м}{Ф \cdot м} = \frac{Кл}{Ф} = \frac{Кл \cdot В}{Кл} = В .$$

Поверхневу густину заряду визначимо зі співвідношення $\sigma = \frac{Q}{S}$, де $S = 4\pi R^2$ – площа поверхні великої краплі.

$$\sigma = \frac{nq}{4\pi R^2} = \frac{nq}{4\pi r^2 \sqrt[3]{n^2}} .$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\sigma] = \frac{Кл}{м^2} .$$

<u>Тема 6.</u> З'ЄДНАННЯ КОНДЕНСАТОРІВ.

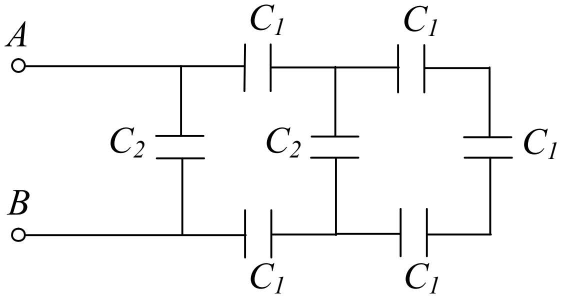
Задача 6.1. Обчислити загальну ємність системи конденсаторів ємністю C_1 та C_2.

Дано:

$C_x - ?$
C_1, C_2

Для знаходження загальної ємності системи конденсаторів будемо поступово знаходити ємності частин схеми рухаючись справа наліво.

а).

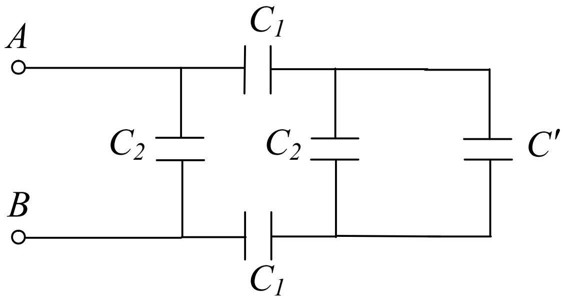


На малюнку а) три конденсатори ємністю C_1 з'єднані між собою послідовно. Знайдемо їх сумарну ємність:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{3}{C_1};$$

$$C' = \frac{C_1}{3}.$$

б).

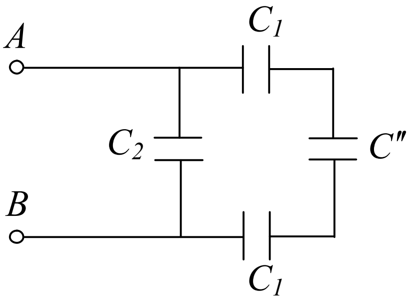


На малюнку б) конденсатори C_2 та C' з'єднані між собою паралельно, тому їх сумарна ємність

$$C'' = C_2 + C';$$

або $$C'' = C_2 + \frac{C_1}{3} = \frac{1}{3}(3C_2 + C_1).$$

в).



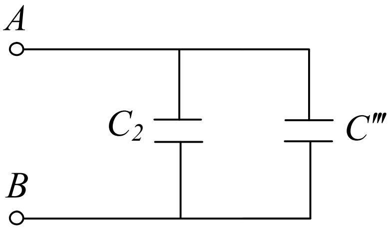
На малюнку в) конденсатори C_1, C'' та C_1 з'єднані між собою послідовно. Знайдемо їх сумарну ємність:

$$\frac{1}{C'''} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C''} + \frac{1}{C_1} = \frac{2}{C_1} + \frac{1}{C''} = \frac{2C'' + C_1}{C_1 C''};$$

$$C''' = \frac{C_1 C''}{2C'' + C_1} = \frac{\left(\frac{C_1}{3} + C_2\right)C_1}{2C_2 + \frac{2}{3}C_1 + C_1} =$$

$$\frac{\frac{(C_1 + 3C_2)}{3}C_1}{\frac{6C_2 + 2C_1 + 3C_1}{3}} = \frac{C_1(C_1 + 3C_2)}{5C_1 + 6C_2}.$$

г).



Враховуючи, що, як видно з малюнку г), конденсатори C_2 та C''' з'єднані між собою паралельно, можна обчислити загальну ємність системи C_x: $C_x = C_2 + C'''$;

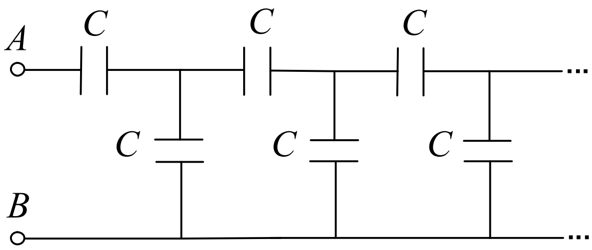
$$C_x = C_2 + \frac{C_1(C_1 + 3C_2)}{5C_1 + 6C_2} = \frac{5C_1C_2 + 6C_2^2 + C_1^2 + 3C_1C_2}{5C_1 + 6C_2} = \frac{C_1^2 + 6C_2^2 + 8C_1C_2}{5C_1 + 6C_2}.$$

Задача 6.2. Обчислити ємність нескінченного ланцюга, що складається з однакових конденсаторів ємністю C.

Дано:

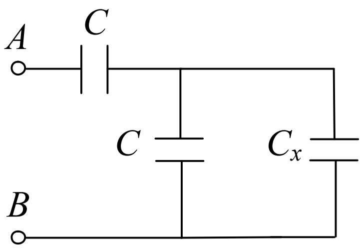
$C_x - ?$
$n \to \infty, C$

а).



Оскільки ланцюг з шуканою ємністю C_x нескінченний, то додавання до нього ще однієї ланки не змінить загальної ємності C_x. Тому схема нескінченного ланцюга (малюнок а).) може бути замінена еквівалентною схемою (малюнок б).).

б).



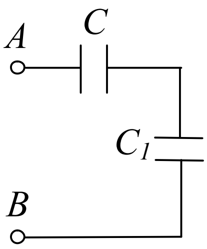
На малюнку б). ємності C_x та C з’єднані між собою паралельно, тоді їх загальна ємність:

$$C_1 = C_x + C.$$

Звідси

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_x + C}. \qquad (1)$$

в).



Тоді з малюнку в). видно, що шукана ємність ланцюга C_x може бути знайдена як сума послідовно під’єднаних ємностей C та C_1:

$$\frac{1}{C_x} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1}. \qquad (2)$$

З врахуванням виразу (1) вираз (2) можна знайти як:

$$\frac{1}{C_x} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_x + C} = \frac{C_x + 2C}{C(C_x + C)}.$$

Знайдемо звідси C_x:

$$C_x = \frac{C\left(C_x + C\right)}{C_x + 2C} = \frac{C^2 + CC_x}{C_x + 2C};$$

$C^2 + CC_x = C_x^2 + 2CC_x$;

$C_x^2 + CC_x - C^2 = 0$; $Д = C^2 + 4C^2 = 5C^2$.

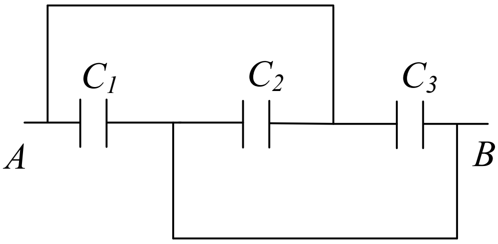
$$C_x = \frac{-C + \sqrt{C^2 + 4C^2}}{2} = \frac{-C + \sqrt{5}C}{2} = \frac{C\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}.$$

Задача 6.3. Обчислити ємність системи однакових конденсаторів ємністю C між точками *A* та *B*, зображених на схемі 1 та схемі 2.

Дано:

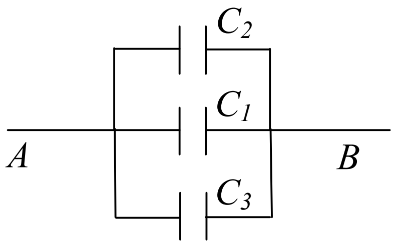
$C_{екв} - ?$ | 1).

C

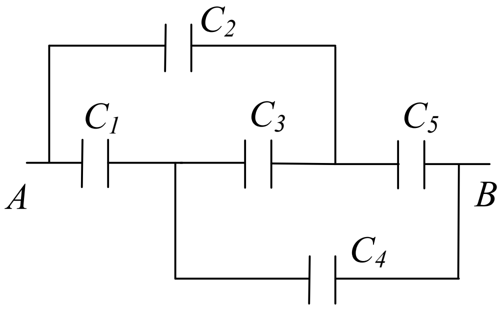


Схему 1 можна перебудувати наступним чином.

Це паралельне з'єднання 3-х конденсаторів: $C_{екв} = C + C + C = 3C$.

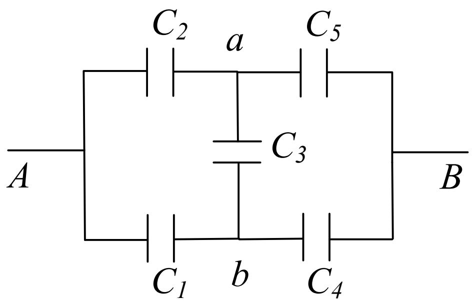


2).



Схему 2 можна перебудувати наступним чином.

Оскільки всі конденсатори однакової ємності $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C$, то потенціали точок a та b будуть однаковими, і конденсатор C_3 можна не враховувати.



Таким чином будемо мати схему, в якій конденсатори C_2 та C_5 з'єднані послідовно, C_1 та C_4 також послідовно. Тоді ці дві групи конденсаторів будуть паралельно один відносно одного. Верхня та нижня групи будуть мати однакову ємність:

$$\frac{1}{C_B} = \frac{1}{C_H} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C}.$$

Звідси

$$C_B = C_H = \frac{C}{2}.$$

Еквівалентна ємність такої системи:

$$C_{екв} = C_H + C_B = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C.$$

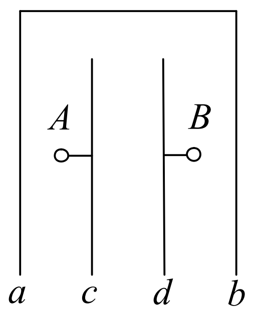
Отже $C_{екв} = C$.

Задача 6.4. Як зміниться ємність плоского конденсатора, якщо його вмістити в металеву коробку, стінки якої віддалені від пластин на відстань рівну відстані між ними. Краєвим ефектом нехтуємо.

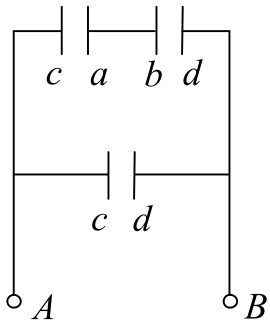
Дано:

$C_x - ?$

C



При вміщенні конденсатора у коробку утворюється система з трьох конденсаторів, причому два зовнішніх конденсатори, утворених пластинами конденсатора *c* і *d*, та стінками коробки *a* і *b* з'єднані послідовно між собою. Тоді схема може бути представлена у вигляді:



Сумарна ємність конденсаторів C_{ca} та C_{bd} може бути знайдена як $\dfrac{1}{C_{cabd}} = \dfrac{1}{C_{ca}} + \dfrac{1}{C_{bd}}$;або $\dfrac{1}{C_1} = \dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C} = \dfrac{2}{C}$; $C_1 = \dfrac{C}{2}$.

Тоді ємність системи може бути знайдена як сума двох паралельно з'єднаних між собою конденсаторів ємностями C_1 та C:

$$C_x = \frac{C}{2} + C = \frac{3C}{2}$$

Задача 6.5. Конденсатор $C_1 = 20\,мкФ$ зарядили до різниці потенціалів $U_1 = 40\,В$, а конденсатор $C_2 = 12\,мкФ$ зарядили до різниці потенціалів $U_2 = 12\,В$. Після відключення їх з'єднали різнойменними обкладками. Чому стала рівною різниця потенціалів, яка установилась на конденсаторах після з'єднання?

Дано:

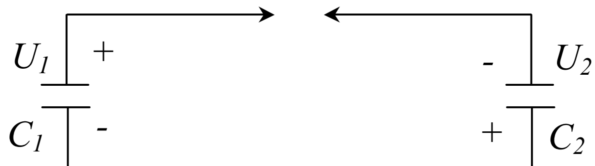
$U - ?$

$C_1 = 2 \cdot 10^{-5} Ф$

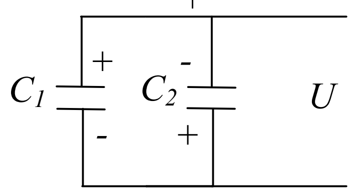
$U_1 = 40\,В$

$C_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-5} Ф$

$U_2 = 12\,В$



до з'єднання



після з'єднання

Заряди на першому і другому конденсаторах $q_1 = U_1 C_1$ та $q_2 = U_2 C_2$ відповідно.

Після з'єднання заряди обох конденсаторів: $q = q_1 - q_2$.

$C = C_1 + C_2$;

$$U = \frac{q}{C} = \frac{U_1C_1 - U_2C_2}{C_1 + C_2}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[U] = \frac{Ф \cdot В - Ф \cdot В}{Ф + Ф} = \frac{Ф \cdot В}{Ф} = В.$$

Підставимо числові значення:

$$U = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 40 - 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 12}{2 \cdot 10^{-5} + 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 20{,}5В.$$

Задача 6.6. Три конденсатори, електроємності яких становлять 2, 3 та 5 *мкФ* відповідно, з'єднані з двома джерелами струму з електрорушійними силами 400 *В* та 200 *В*. Визначити напругу на кожному конденсаторі.

Дано:

$U_1 - ?$

$U_2 - ?$

$U_3 - ?$

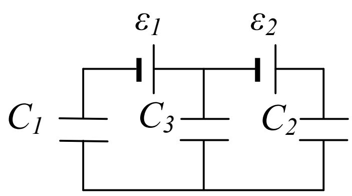
$C_1 = 2 \cdot 10^{-6} Ф$

$C_2 = 3 \cdot 10^{-6} Ф$

$C_3 = 5 \cdot 10^{-6} Ф$

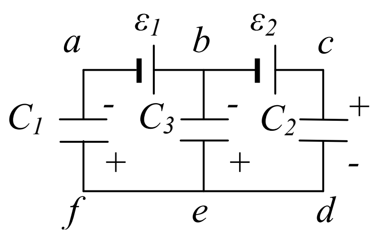
$\varepsilon_1 = 400\,В$

$\varepsilon_2 = 200\,В$



Як відомо, при підключенні джерела струму до конденсатора, його обкладки одержують заряди, однойменні зі знаком полярності відповідного полюса джерела.

Таким чином пластини конденсаторів C_1 та C_2 заряджаються відповідно до полярностей полюсів джерел ε_1 та ε_2. Пластини конденсатора C_3 одержать заряди відповідно до співвідношення величин електроємностей усіх конденсаторів та електрорушійних сил, що діють у колі. Припустимо, що конденсатор C_3 зарядиться як показано на схемі.



Складемо два рівняння, що пов'язують величини електрорушійних сил та напруг на конденсаторах для двох замкнутих контурів *abef* та *bcde* користуючись наступним правилом: якщо при обході контура трапляється спочатку негативно заряджений полюс джерела (або пластина конденсатора), а потім позитивно заряджений, то перед відповідною величиною ставиться знак "+", якщо навпаки спочатку трапляється позитивно заряджений полюс джерела або позитивна пластина конденсатора, а потім негативно заряджений, то перед величиною *ЕРС* або напруги на конденсаторі ставиться знак "–".

Для контура *abef*: $\varepsilon_1 + U_3 - U_1 = 0$;

для контура *bcde*: $\varepsilon_2 - U_2 - U_3 = 0$.

Третє рівняння отримуємо з умови, що алгебраїчна сума зарядів на обкладках, з'єднаних в точці *e*, дорівнює нулю, причому, якщо при обході контуру технічний напрям струму співпадає з напрямом вектора напруженості електричного поля між обкладками конденсатора, то заряд конденсатора вважається позитивним “+”, якщо не співпадає – то заряд конденсатора вважається негативним “–”.

$$q_1 + q_3 - q_2 = 0 .$$

Величини цих зарядів становлять $q_1 = U_1 C_1$, $q_2 = U_2 C_2$ та $q_3 = U_3 C_3$.

З урахуванням цього запишемо систему трьох рівнянь для знаходження U_1, U_2 та U_3:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + U_3 - U_1 = 0; & (1) \\ \varepsilon_2 - U_2 - U_3 = 0; & (2) \\ C_1 U_1 + C_3 U_3 - C_2 U_2 = 0. & (3) \end{cases}$$

Виразимо з рівняння (1) U_1 через U_3:

$$U_1 = \varepsilon_1 + U_3 , \tag{4}$$

та з рівняння (2) U_2 через U_3:

$$U_2 = \varepsilon_2 - U_3 . \tag{5}$$

Підставимо рівняння (4) та (5) у рівняння (3):

$C_1(\varepsilon_1 + U_3) + C_3 U_3 - C_2(\varepsilon_2 - U_3) = 0$; $C_1\varepsilon_1 + C_1 U_3 + C_3 U_3 - C_2\varepsilon_2 + C_2 U_3 = 0$;

$C_1 U_3 + C_3 U_3 + C_2 U_3 = C_2 \varepsilon_2 - C_1 \varepsilon_1$.

Звідси

$$U_3 = \frac{C_2\varepsilon_2 - C_1\varepsilon_1}{C_1 + C_2 + C_3} .$$

Підставимо числові значення:

$$U_3 = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 200 - 2 \cdot 10^{-6} \cdot 400}{10 \cdot 10^{-6}} = \frac{600 - 800}{10} = -20 \ (B).$$

Знак “–” свідчить про те, що полярність напруги на конденсаторі C_3 відмінна від зазначеної на схемі.

Користуючись рівнянням (4) та (5), знайдемо U_1 та U_2:

$U_1 = 400 - 20 = 380 \ (B)$, $U_2 = 200 + 20 = 220 \ (B)$.

Тема 7. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ.

Задача 7.1. Між пластинами плоского конденсатора знаходиться склянна пластинка $(\varepsilon = 7)$, що торкається його пластин. Конденсатор зарядили до різниці потенціалів $U_1 = 100B$. Якою буде різниця потенціалів, якщо витягти пластинку з конденсатора?

Дано:

$U_2 - ?$
$\varepsilon = 7$
$U_1 = 100B$

Якщо витягнути скляну пластинку з відімкнутого від джерела конденсатора, ємність і різниця потенціалів зміниться, а величина зарядів на пластинах залишиться сталою:

$q_1 = q_2 = q$; $q_1 = C_1U_1$; $q_2 = C_2U_2$; $C_1U_1 = C_2U_2$.

Електроємності конденсатора з пластинкою та без можна знайти як $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d_1}$ та $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d_2}$ відповідно.

$S_1 = S_2 = S$; $d_1 = d_2 = d$.

Тоді

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d};$$

та

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}.$$

Прирівняємо праві частини останніх двох рівнянь

$\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d}U_1 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}U_2$; $\varepsilon_1 U_1 = \varepsilon_2 U_2$.

Звідси $U_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}U_1$.

Оскільки після того як з конденсатора витягли пластинку з діелектрика між його пластинами залишиться повітря з $\varepsilon_2 = 1$, то $U_2 = \varepsilon_1 U_1$.

Підставивши числові значення отримаємо:

$U_2 = 7 \cdot 100 = 700\,(B)$.

Задача 7.2. До повітряного конденсатора, зарядженого до різниці потенціалів $U = 600\,B$ і відключеного від джерела, приєднали другий незаряджений конденсатор таких же розмірів та форми але з діелектриком. Визначити діелектричну проникність цього діелектрика, якщо після приєднання другого конденсатора різниця потенціалів на першому зменшилась до $U_1 = 100B$.

Дано:

$\varepsilon_2 - ?$
$U = 600\,B$
$U_1 = 100B$

При під'єднанні другого конденсатора до першого заряд розподілиться між цими двома конденсаторами

$q = q_1 + q_2$; $q = C_1U$; $q_1 = C_1U_1$; $q_2 = C_2U_1$;

оскільки на обох конденсаторах встановиться однакова різниця потенціалів.

$$C_1U = C_1U_1 + C_2U_1\,;\; C_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S_1}{d_1}\,;\; C_2 = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 S_2}{d_2}\,;\; \varepsilon_1 = 1\,;\; S_1 = S_2 = S\,;\; d_1 = d_2 = d\,.$$

Тоді

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\,;\; C_2 = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 S}{d}\,.$$

Звідси

$$\frac{S}{d} = \frac{C_1}{\varepsilon_0}\,;\; \frac{S}{d} = \frac{C_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0}\,;\; \frac{C_1}{\varepsilon_0} = \frac{C_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0}\,;\; C_2 = \varepsilon_2 C_1\,.$$

Тоді

$$C_1U = C_1U_1 + \varepsilon_2 C_1U_1\,;\; U = U_1 + \varepsilon_2 U_1\,;\; \varepsilon_2 U_1 = U - U_1\,;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{U - U_1}{U_1} = \frac{U}{U_1} - 1\,;$$

Підставимо числові значення:

$$\varepsilon_2 = \frac{600}{100} - 1 = 5\,.$$

Задача 7.3. Простір між пластинами конденсатора, відстань між якими 4 *мм*, заповнений слюдою $(\varepsilon = 6)$. До пластин прикладена різниця потенціалів 1200 *В*. Визначити:

1). напруженість поля в діелектрику E;

2). поверхневу густину вільних зарядів (зарядів на пластинках конденсатора) σ_0;

3). поверхневу густину зв'язаних зарядів (зарядів на поверхні діелектрика) σ';

4). діелектричну сприйнятливість слюди χ.

Дано:

$E - ?$

$\sigma_0 - ?$

$\sigma' - ?$

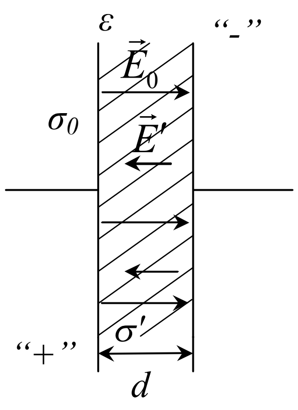
$\chi - ?$

$d = 4\cdot 10^{-3}\ м$

$\varepsilon = 6$

$U = 1{,}2\cdot 10^{3}\ В$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$



Напруженість поля в діелектрику

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}\,.\; E = \frac{1200}{4\cdot 10^{-3}} = 3\cdot 10^{5}\left(\frac{В}{м}\right).$$

Напруженість поля у вакуумі, що створюється вільними зарядами $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$.

Відомо, що

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F} = \frac{E_0}{E}\,.$$

Звідси $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

Звідси

$$\sigma_0 = \varepsilon\varepsilon_0 E\,.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\sigma_0 = \frac{Ф}{м} \cdot \frac{В}{м} = \frac{Ф \cdot В}{м^2} = \frac{Кл \cdot В}{В \cdot м^2} = \frac{Кл}{м^2}.$$

Підставимо числові значення:

$$\sigma_0 = 6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^5 = 1{,}6 \cdot 10^{-5} \left(\frac{Кл}{м^2}\right).$$

Напруженість електричного поля, що створюється зв'язаними зарядами

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}.$$

Результуюче поле в діелектрику $E = E_0 - E'$.

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0}; \; \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0};$$

$$\sigma_0 - \sigma' = \frac{\sigma_0 \varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}; \; -\sigma' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} - \sigma_0; \; \sigma' = \sigma_0 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon};$$

$$\sigma' = \sigma_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\sigma_0.$$

Підставимо числові значення:

$$\sigma' = \frac{5}{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-5} \approx 1{,}33(3) \cdot 10^{-5} \left(\frac{Кл}{м^2}\right).$$

Діелектрична проникність та діелектрична сприйнятливість зв'язані між собою:

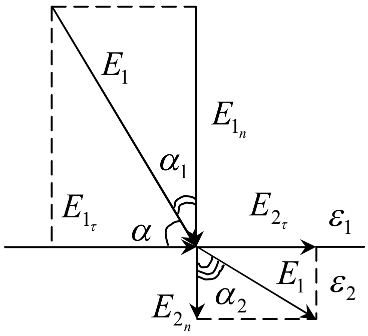
$\varepsilon = 1 + \chi$. Звідси $\chi = \varepsilon - 1$.

Отже $\chi = 6 - 1 = 5$.

Задача 7.4. Вектор напруженості електричного поля в повітрі утворює з поверхнею діелектрика ($\varepsilon = 7$) кут $\alpha = 60°$. Визначити: 1). кут між напрямком напруженості поля і нормаллю до поверхні в діелектрику; 2). напруженість поля в діелектрику; 3). густину зв'язаних зарядів на межі повітря-діелектрик, якщо напруженість поля становить $E_1 = 23 \cdot 10^4 \frac{В}{м}$.

Дано:

$\alpha_2 - ?$
$E_2 - ?$
$\sigma' - ?$
$\varepsilon = 7$
$\alpha = 60°$
$E_1 = 23 \cdot 10^4 \frac{В}{м}$



При переході з одного діелектрика в інший силові лінії напруженості заломлюються за законом:

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \; tg\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2 tg\alpha_1}{\varepsilon_1};$$

$$\alpha_1 = 90° - \alpha = 90° - 60° = 30°; \; \varepsilon_1 = 1;$$

$\varepsilon_2 = \varepsilon$. $tg\alpha_2 = \varepsilon tg\alpha_1$; (1) $\alpha_2 = \varepsilon arctg\alpha_1$;

$\alpha_2 \approx 76°$.

Нормальні складові E_{1n} та E_{2n} векторів напруженості E_1 та E_2 пов'язані співвідношенням:

$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}}$; Тангенціальні – $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

Оскільки $E_{1n} = \frac{E_{1\tau}}{tg\alpha_1}$ та $E_{2n} = \frac{E_{2\tau}}{tg\alpha_2}$, то $E_{1\tau} = E_{1n} tg\alpha_1$ і $E_{2\tau} = E_{2n} tg\alpha_2$.

Оскільки ліві частини останніх двох рівнянь рівні між собою, то рівні і праві: $E_{1n} tg\alpha_1 = E_{2n} tg\alpha_2$.

В свою чергу $\cos\alpha_1 = \frac{E_{1n}}{E_1}$ та $\cos\alpha_2 = \frac{E_{2n}}{E_2}$. Звідси $E_{1n} = \cos\alpha_1 E_1$ та $E_{2n} = \cos\alpha_2 E_2$;

$\cos\alpha_1 E_1 tg\alpha_1 = \cos\alpha_2 E_2 tg\alpha_2$; $\cos\alpha_1 E_1 \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \cos\alpha_2 E_2 \frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}$; $E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$;

$E_2 = E_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$.

Підставимо числові значення: $E_2 = 23 \cdot 10^4 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}971} \approx 1{,}2 \cdot 10^5 \left(\frac{В}{м}\right)$.

Поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' чисельно дорівнює нормальній складовій вектора поляризації діелектрика: $\sigma' = P_{2n}$.

$P_{2n} = P_2 \cos\alpha_2$; $P_2 = \varepsilon_0 \chi E_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_2$;

$$\sigma' = P_{2n} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_2 \cos\alpha_2 = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}.$$

Враховуючи рівняння (1), можна записати, що $\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} = \frac{1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon tg\alpha_1}$.

Тоді $\sigma' = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_1 \varepsilon_1 \sin\alpha_1}{\varepsilon tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_1 \cos\alpha_1}{\varepsilon}$.

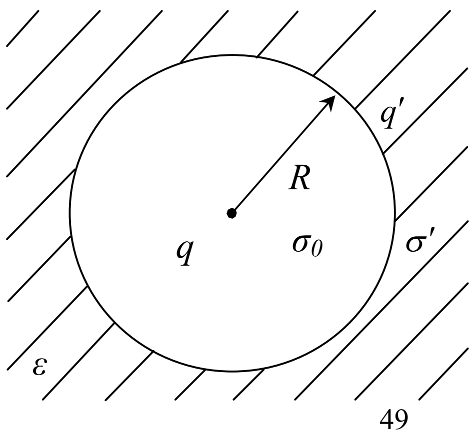
Підставимо числові значення: $\sigma' = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 23 \cdot 10^4 \cdot 0{,}87}{7} = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \left(\frac{Кл}{м^2}\right)$.

Задача 7.5. Провідна куля радіусом $R = 5\,мм$, яка міститься в олії, має заряд $q = 10\,нКл$. Знайти густину зв'язаних поляризаційних зарядів в олії біля поверхні кульки та повний діючий заряд. Діелектрична проникність олії $\varepsilon = 5$.

Дано:

$\sigma' - ?$
$q' - ?$

$R = 5 \cdot 10^{-3}\,м$
$q = 10^{-8}\,Кл$
$\varepsilon = 5$



Знайдемо напруженість електричного поля на поверхні провідної кулі: $E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}$, де $\sigma_0 = \frac{q}{S}$ – поверхнева густина вільних зарядів.

Тоді $E = \dfrac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$, де $S = 4\pi R^2$ – площа бічної поверхні кулі.

Тоді $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$. Отже $\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$. Звідси $\sigma_0 = \dfrac{q}{4\pi R^2}$;

Результуюче поле в діелектрику: $E = E_0 - E'$, де E' – напруженість електричного поля, що створюється зв'язаними зарядами; E_0 – напруженість електричного поля у вакуумі.

$E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$; $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

Тоді $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$;

$\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$; $\sigma' = \dfrac{q}{4\pi R^2}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right) = \dfrac{q}{4\pi R^2}\left(\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)$.

Підставимо числові значення:

$\sigma' = \dfrac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}8}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 2{,}6 \cdot 10^{-5}\left(\dfrac{Кл}{м^2}\right)$.

Повний діючий заряд $q' = \sigma' S$; $q' = q\left(\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)$; $q' = 10^{-8} \cdot \left(\dfrac{5-1}{5}\right) = 8 \cdot 10^{-9}(Кл)$.

Тема 8. *ЕНЕРГІЯ ТА ГУСТИНА ЕНЕРГІЇ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ*.

Задача 8.1. Відстань між пластинами плоского конденсатора $d = 2\,см$, різниця потенціалів $U = 6000B$. Заряд кожної пластини $q = 10^{-8}\,Кл$. Обчисліть енергію W поля конденсатора та силу F взаємного притягання пластин.

Дано:

$W - ?$	
$F - ?$	
$d = 2 \cdot 10^{-2}\,м$	
$U = 6000B$	
$q = 10^{-8}\,Кл$	

Енергія взаємодії системи n зарядів $W_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i$ звідки електрична енергія поля конденсатора: $W = \frac{1}{2} qU$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$[W] = Кл \cdot B = Дж$.

Підставимо числові значення:

$W = 0{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-5}\,(Дж)$.

Сила з якою одна пластина притягує другу пластину дорівнює добуткові заряду на одній з пластин q на напруженість поля E_1, створеного іншою пластиною.

Ця напруженість E_1 буде дорівнювати половині напруженості поля конденсатора (поля, створеного обома пластинами):

$$F = qE_1;\; E_1 = \frac{E}{2};\; E = \frac{U}{d};\; E_1 = \frac{U}{2d};\; F = \frac{qU}{2d} = \frac{W}{d}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[F] = \frac{Дж}{м} = \frac{H \cdot м}{м} = H.$$

Підставимо числові значення:

$$F = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-2}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,(H).$$

Задача 8.2. Сила взаємного притягання між пластинами плоского конденсатора $F = 5 \cdot 10^{-2} H$. Діелектрик–повітря. Площа кожної пластини $S = 200\,см^2$. Визначити густину енергії ω поля конденсатора.

Дано:

$\omega - ?$	
$F = 5 \cdot 10^{-2} H$	
$\varepsilon = 1$	
$S = 2 \cdot 10^{-2}\,м^2$	

Густина енергії електричного поля конденсатора: $\omega = \frac{W}{V}$; $V = Sd$.

Сила притягання пластин: $F = qE_1$; $E_1 = \frac{E}{2}$; $E = \frac{U}{d}$; $E_1 = \frac{U}{2d}$;

$$F = \frac{qU}{2d} = \frac{W}{d}.$$

Таким чином $W = Fd$

Тоді $\omega = \frac{Fd}{Sd} = \frac{F}{S}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\omega] = \frac{H}{м^2} = \frac{Дж}{м \cdot м^2} = \frac{Дж}{м^3}.$$

Підставимо числові значення:

$$\omega = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2{,}5\left(\frac{Дж}{м^3}\right).$$

Задача 8.3. Плоский повітряний конденсатор складається з двох круглих пластин радіусом $r = 1см$ кожна. Відстань між пластинами $d_1 = 1см$. Конденсатор зарядили до різниці потенціалів $U_1 = 1200B$ і відімкнули від джерела напруги. Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити відстань між пластинами до $d_1 = 3{,}5см$?

Дано:

$A-?$
$r = 10^{-2}м$
$d_1 = 10^{-2}м$
$d_2 = 3{,}5 \cdot 10^{-2}м$
$\varepsilon = 1$
$U_1 = 1{,}2 \cdot 10^3 B$

Робота, яка виконується при розведенні пластин, йде на збільшення енергії електричного поля конденсатора: $A = W_2 - W_1$.

Почаскова енергія $W_1 = \frac{q_1 U_1}{2}$.

Електроємність конденсатора $C_1 = \frac{q_1}{U_1}$. Звідси заряд $q_1 = C_1 U_1$.

Тоді $W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2}$ та $W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2}$ аналогічно.

Отже робота $A = \frac{C_2 U_2^2}{2} - \frac{C_1 U_1^2}{2}$.

Якщо конденсатор був відключений від джерела, то заряд на пластинах залишався сталим: $q_1 = q_2$; $U_1 C_1 = U_2 C_2$. Звідси $U_2 = \frac{U_1 C_1}{C_2}$.

Підставляючи вираз для U_2 у вираз для знахлдження A, матимемо

$$A = \frac{C_2 U_1^2 C_1^2}{2C_2^2} - \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C_1^2 U_1^2}{2C_2} - \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C_1 U_1^2}{2}\left(\frac{C_1}{C_2} - 1\right) = \frac{C_1 U_1^2}{2}\frac{C_1 - C_2}{C_2} = \frac{C_1 U_1^2}{2C_2}\left(C_1 - C_2\right).$$

Електроємності конденсатора до і після розведення пластин

$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}$ та $C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2}$ відповідно.

Тоді робота

$$A = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}\frac{U_1^2 d_2}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1} - \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2}\right) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U_1^2 d_2}{2d_1}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U_1^2 d_2\left(d_2 - d_1\right)}{2d_1^2 d_2}.$$

Площа пластин конденсатора $S = 4\pi r^2$.

$$A = \frac{\pi r^2 \varepsilon\varepsilon_0 U_1^2}{2d_1^2}(d_2 - d_1);\ \varepsilon = 1 \text{ тоді } A = \frac{\pi r^2 \varepsilon_0 U_1^2}{2d_1^2}(d_2 - d_1).$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[A] = \frac{м^2 \cdot Ф \cdot В^2 \cdot м}{м \cdot м^2} = \frac{Кл \cdot В^2}{В} = Кл \cdot В = А \cdot с \cdot В = Дж.$$

Підставимо числові значення:

$$A = \frac{3{,}14 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 1 \cdot (1{,}2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (10^{-2})^2}(3{,}5 \cdot 10^{-2} - 10^{-2}) = 5 \cdot 10^{-5}(Дж).$$

Задача 8.4. Конденсатор ємністю $C_1 = 700\,пФ$ зарядили до різниці потенціалів $U_1 = 1500В$ і відімкнули від джерела напруги. Після цього до нього паралельно приєднали другий незаряджений конденсатор ємністю $C_2 = 400\,пФ$. Яка кількість енергії, запасеної в першому конденсаторі, була використана на утворення іскри, що виникла при з'єднанні конденсаторів?

Дано:

$\Delta W - ?$
$C_1 = 7 \cdot 10^{-10} Ф$
$C_2 = 4 \cdot 10^{-10} Ф$
$U_1 = 1{,}5 \cdot 10^3 В$

На утворення іскри була витрачена енергія рівна різниці між енергією першого конденсатора та енергією систем із двох конденсаторів після їх з'єднання: $\Delta W = W_1 - W_2$.

$W_1 = \frac{1}{2}C_1 U_1^2$; $W_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)_1 U_2^2$, де U_2 – різниця потенціалів, що встановиться на конденсаторах після з'єднання.

Цю різницю потенціалів U_2 визначимо виходячи з того, що при відключенні першого конденсатора від джерела заряд на його обкладках залишається сталим і розподіляється між першим і другим конденсаторами після їх з'єднання:

$C_1 U_1 = (C_1 - C_2) U_2$. Звідси $U_2 = \dfrac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}$.

Тоді $W_2 = \dfrac{1}{2}(C_1 + C_2) U_2^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{(C_1 + C_2)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_1^2 U_1^2}{C_1 + C_2}$.

Отже енергія, яка витрачена на утворення іскри:

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{1}{2}C_1 U_1^2 \left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right).$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[W] = Ф \cdot В^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{Ф}\right) = \frac{Кл \cdot В^2}{В} = Кл \cdot В = А \cdot с \cdot В = Дж.$$

Підставимо числові значення:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot \left(1 - \frac{7 \cdot 10^{-10}}{7 \cdot 10^{-10} + 4 \cdot 10^{-10}}\right) = 2{,}8 \cdot 10^{-4}\ (Дж).$$

Задача 8.5. Визначити енергію диполя, який міститься в однорідному електростатичному полі напруженістю $E = 3 \cdot 10^2 \frac{В}{м}$, якщо плече диполя утворює кут $\varphi = 30°$ з напрямом напруженості зовнішнього поля. Електричний момент диполя $p = 4 \cdot 10^{-9}\ Кл \cdot м$.

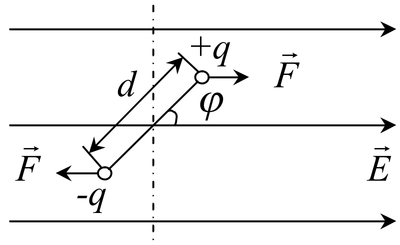
Дано:

$W - ?$

$E = 3 \cdot 10^2 \frac{В}{м}$

$\varphi = 30°$

$p = 4 \cdot 10^{-9}\ Кл \cdot м$



Сили, що діють на заряди диполя відповідно дорівнюють $+qE$ та $-qE$ і утворюють пару сил з моментом $M = qEd\sin\varphi = pE\sin\varphi$.

При повороті диполя на елементарний кут $d\varphi$ електричні сили виконують елементарну роботу $dA = Md\varphi = pE\sin\varphi d\varphi$. На цю величину змінюється енергія диполя при його обертанні на кут $d\varphi$.

Максимальний запас енергії диполь матиме при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і мінімальний при $\varphi = 0$. Запас енергії диполя, вісь якого з вектором напруженості поля утворює кут $30°$, визначається роботою, яка виконується зовнішніми силами при повороті осі диполя від положення з $\varphi = \frac{\pi}{6}$ до $\varphi = 0$.

Таким чином, енергія диполя

$$W = A = \int_{\varphi}^{0} pd\varphi = A = \int_{\varphi}^{0} pE\sin\varphi d\varphi = -pE\cos\varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{0} = -pE\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -pE\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = -0{,}15pE\ ;$$

Виокнаємо перевірку розмірності:

$[W] = Кл \cdot м \cdot \frac{В}{м} = Кл \cdot В = Дж$.

Підставимо числові значення:

$W = -0{,}15 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^2 = -1{,}8 \cdot 10^{-7}\,(Дж)$.

Задача 8.6. Простір між пластинами плоского конденсатора площею пластин *200 см*^{2} і відстанню між ними *0,1 см* повністю заповнений склом ($\varepsilon_1 = 5$). Як зміниться енергія конденсатора, якщо вийняти з нього діелектрик? Задачу розв'язати при таких умовах: 1). конденсатор весь час приєднано до батареї $\mathcal{E} = 300В$; 2). конденсатор був спочатку приєднаний до батареї і після зарядки від'єднаний від неї. Знайти механічну роботу, яка виконується в обох випадках.

Дано:

$\Delta W' - ?$ $\Delta W'' - ?$ $A' - ?$ $A'' - ?$	
$S = 2 \cdot 10^{-2}\, м^2$ $d = 10^{-3}\, м$ $\varepsilon_1 = 5$ $\varepsilon_2 = 1$ $\mathcal{E} = 300B$ $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\, \dfrac{Ф}{м}$	

1). В першому випадку, як це випливає з умови задачі, різниця потенціалів між пластинами конденсатора при наявності діелектрика і без нього залишається сталою. Змін зазнає величина заряду, що накопичується на пластинах при напрузі $\mathcal{E} = 300B$. Виразимо енергію конденсатора через напругу.

Напруга між пластинками конденсатора $U_1 = U_2 = U$.

Енергія поля конденсатора з діелектриком $W_1 = \dfrac{C_1 U^2}{2}$ і без діелектрика $W_2 = \dfrac{C_2 U^2}{2}$.

Електроємності C_1 та C_2 можна знайти користуючись формулою плоского конденсатора $C_1 = \dfrac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{d}$ та $C_2 = \dfrac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{d}$.

Якщо вийняти діелектрик, то енергія конденсатора зміниться на величину $\Delta W' = W_2 - W_1$.

$$\Delta W' = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S U^2}{2d} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S U^2}{2d} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_0 S U^2}{2d}.$$

$U = \mathcal{E}$, тоді $\Delta W' = \dfrac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[W] = \frac{\frac{Ф}{м} \cdot м^2 \cdot B^2}{м} = \frac{Ф \cdot м^2 \cdot B^2}{м^2} = Ф \cdot B^2 = \frac{Кл \cdot B^2}{B} = Кл \cdot B = A \cdot c \cdot B = Дж.$$

Підставимо числові значення:

$$\Delta W' = \frac{(1-5) \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}} \approx -3{,}19 \cdot 10^{-5}(Дж).$$

2). В другому випадку заряд на обкладках конденсатора залишається сталим $q_1 = q_2 = q$ і енергію конденсатора доцільно виразити через величину заряду: $W_1 = \dfrac{qU_1}{2}$; $C_1 = \dfrac{q}{U_1}$; $U_1 = \dfrac{q}{C_1}$; $W_1 = \dfrac{q^2}{2C_1}$.

Аналогічно запишеться вираз для енергії конденсатора без діелектрика між обкладками: $W_2 = \dfrac{q^2}{2C_2}$.

Розписуючи електроємності C_1 та C_2 з використанням формул плоского конденсатора, отримуємо $W_1 = \dfrac{q^2 d}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}$ та $W_2 = \dfrac{q^2 d}{2\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}$.

Заряд конденсатора з діелектриком між обкладками та без може бути обчислений за формулами $q = C_1U_1$ та $q = C_2U_2$ відповідно.

Або $q = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_0 SU_1}{d}$ та $q = \dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_0 SU_2}{d}$.

Оскільки заряд конденсатора залишається сталим, то прирівняємо праві частини останніх двох рівнянь: $\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_0 SU_1}{d} = \dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_0 SU_2}{d}$. Звідси $\varepsilon_1 U_1 = \varepsilon_2 U_2$.

Отже, після від'єднання конденсатора від джерела струму, напругу на його обкладках можна знайти як: $U_2 = \dfrac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2}$.

Тоді $q = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_0 SU_1}{d}$ та $q = \dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_0 S\varepsilon_1 U_1}{d\varepsilon_2} = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_0 SU_1}{d}$.

$U = \mathcal{E}$.

Таким чином: $W_1 = \dfrac{\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 S^2 d}{2d^2\varepsilon_1\varepsilon_0 S}\mathcal{E}^2 = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2$ та $W_2 = \dfrac{\varepsilon_1^2\varepsilon_0^2 S^2 d}{2d^2\varepsilon_2\varepsilon_0 S}\mathcal{E}^2 = \dfrac{\varepsilon_1^2\varepsilon_0 S}{2\varepsilon_2 d}\mathcal{E}^2$.

Тоді зміну енергії конденсатора знайдемо як різницю W_1 та W_2:

$$\Delta W'' = W_2 - W_1.$$

$$\Delta W'' = \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_0 S}{2\varepsilon_2 d}\mathcal{E}^2 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right) = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{2d\varepsilon_2}\mathcal{E}^2.$$

Підставимо числові значення:

$$\Delta W'' = \frac{5\cdot(5-1)\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 9\cdot 10^4}{2\cdot 10^{-3}\cdot 1} \approx 1{,}6\cdot 10^{-4}\,(Дж).$$

Як видно з розв'язку задачі, робота в другому випадку більша, і вона йде на збільшення енергії конденсатора. Це відбувається тому, що при виведенні скляної пластини в першому випадку залишається сталою напруженість поля конденсатора. В другому випадку напруженість поля збільшується. Тобто у першому випадку при виведенні пластинки, виконується механічна робота, яка йде на зменшення енергії конденсатора та збільшення енергії джерела електрорушійної сили. Робота виконується проти джерела.

$A' = \Delta W' + \Delta A$.

Збільшення енергії джерела електрорушійної сили відбувається за рахунок виконання роботи при зміні заряду на обкладках конденсатора $\Delta A = \Delta q\,\mathcal{E}$;

$\Delta q = q_1 - q_2$; $q_1 = C_1\mathcal{E}$; $q_2 = C_2\mathcal{E}$; $q_1 = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}$; $q_2 = \dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}$.

Таким чином $\Delta A = (\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E} - \dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_0 S\varepsilon}{d}\mathcal{E})\mathcal{E} = \dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}^2$.

Тоді робота, що витрачається при вийманні діелектрика0

$$A' = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}^2 = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}^2 =$$

$$= \frac{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2 + \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2 .$$

Пыдставимо числовы значення:

$$A' = \frac{(5-1)\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 9\cdot 10^4}{2\cdot 10^{-3}} \approx 3{,}19\cdot 10^{-5}\,(Дж).$$

У другому випадку виконується механічна робота, що дорівнює збільшенню енергії конденсатора:

$$A'' = \Delta W'';\ A'' = 1{,}6\cdot 10^{-4}\,(Дж).$$

Задача 8.7. Два однакових повітряних конденсатора, електроємності яких становлять 1000 *пФ*, заряджені до напруги 600 *В*. Один з конденсаторів занурюється у зарядженому стані у керосин ($\varepsilon_2 = 2{,}1$), після чого конденсатори з'єднують паралельно однойменно зарядженими обкладками. Визначити роботу електричних сил, що виконуэться при перезарядці конденсаторів.

Дано:

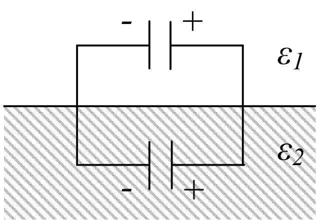
$A - ?$

$C = 10^{-9}\,Ф$

$U_1 = U_2 = U = 600\,В$

$\varepsilon_1 = 1$

$\varepsilon_2 = 2{,}1$



До занурення у керосин енергія кожного зарядженого конденсатора становить: $W_1 = \frac{q^2}{2C}$.

Після занурення одного конденсатора повністю у керосин його енергія W_2 зменшиться у ε_2 разів, так що його електроємність стане рівною $C_2 = \varepsilon_2 C_1$, а заряд залишиться незмінним: $W_2 = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{q^2}{2\varepsilon_2 C}$.

Загальна енергія двох конденсаторів (один з керосином між обкладками) до їх з'єднання становить: $W = \frac{q^2}{2C} + \frac{q^2}{2\varepsilon_2 C} = \frac{q^2(1+\varepsilon_2)}{2\varepsilon_2 C}$.

Після паралельного з'єднання заряд батареї подвоїться, загальний заряд $q_б$ стане рівним $2q$, а електроємність батареї становитиме:

$$C_б = C_1 + C_2 = C_1 + \varepsilon_2 C_1 = C_1(1+\varepsilon_2).$$

Енергія батареї конденсаторів при цьому буде визначатись формулою:

$$W_б = \frac{q_б^2}{2C_б} = \frac{4q^2}{2C_1(1+\varepsilon_2)} = \frac{2q^2}{C(1+\varepsilon_2)}.$$

Робота зовнішніх сил A' при перезарядці конденсаторів дорівнюватиме приросту їх енергії:

$$A' = W_б - W = \frac{2q^2}{C(1+\varepsilon_2)} - \frac{q^2(1+\varepsilon_2)}{2\varepsilon_2 C} = \frac{4q^2\varepsilon_2 - q^2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_2)}{2C\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)} = \frac{4q^2\varepsilon_2 - q^2(1+\varepsilon_2)^2}{2C\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)} =$$

$$=\frac{q^2\left(4\varepsilon_2-(1+\varepsilon_2)^2\right)}{2C\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)}=\frac{q^2\left(4\varepsilon_2-\left(1+2\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\right)\right)}{2C\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)}=\frac{q^2\left(-1+2\varepsilon_2-\varepsilon_2^2\right)}{2C\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)}=-\frac{q^2(1-\varepsilon_2)^2}{2C\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)}.$$

Оскільки заряд $q=CU$, то $A'=-\dfrac{CU^2(1-\varepsilon_2)^2}{2\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)}$.

Робота електричних сил $A=-A'$, отже $A=\dfrac{CU^2(1-\varepsilon_2)^2}{2\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)}$.

Виконаємо перевірку розмірності: $[A]=\dfrac{Кл\cdot B^2}{B}=A\cdot c\cdot B=Дж$.

Підставимо числові значення:

$$A=\frac{10^{-9}\cdot 36\cdot 10^4\cdot(1-2{,}1)^2}{2\cdot 2{,}1\cdot(1+2{,}1)}\approx 3{,}3\cdot 10^{-5}(Дж).$$

МОДУЛЬ 2. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ

<u>Тема 9.</u> ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ. ЗАКОНИ ОМА.

Задача 9.1. Сила струму в провіднику рівномірно наростає від $I_0 = 0\,A$ до $I = 3\,A$ за час $t = 10\,c$. Визначити заряд q, що пройшов по провіднику за цей час.

Дано:

$q - ?$
$I = 0\,A$
$I = 3\,A$
$t = 10\,c$

Сила струму в провіднику рівномірно наростає від $I_0 = 0\,A$ до $I = 3A$ і визначається як похідна заряду по часу $I = \frac{dq}{dt}$.

Слід врахувати, що сила струму за умовою змінюється за лінійним законом $I = I_0 + kt$, звідси $k = \frac{I - I_0}{t}$.

$$dq = Idt;\ dq = (I_0 + kt)dt;\ q = \int_0^t (I_0 + kt)dt = I_0\int_0^t dt + k\int_0^t tdt = I_0 t + \frac{kt^2}{2}.$$

$$q = I_0 t + \frac{(I - I_0)t^2}{2t} = I_0 t + \frac{(I - I_0)t}{2} = I_0 t + \frac{1}{2}It - \frac{1}{2}I_0 t = \frac{1}{2}I_0 t + \frac{1}{2}It = \frac{1}{2}t(I_0 + I);$$

Виконаємо перевірку розмірності: $[q] = c(A + A) = c \cdot A = \frac{c \cdot Кл}{c} = Кл$.

Підставимо числові значення: $q = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15(Кл)$.

Задача 9.2. Визначити величину заряду, який пройшов по мідному провіднику довжиною $l = 20\,м$ і площею поперечного перерізу $S = 0{,}17\,мм^2$ при температурі $20°C$, якщо напруга на його кінцях змінилася протягом 20 секунд від $U_0 = 2\,B$ до $U = 4\,B$.

Дано:

$q - ?$
$l = 20\,м$
$S = 0{,}17 \cdot 10^{-6}\,м^2$
$T = 293K$, $t = 20\,c$
$U_0 = 2\,B$, $U = 4\,B$
$\rho = 17{,}2 \cdot 10^{-9}\,Ом \cdot м$

Так, як сила струму в провіднику змінюється, то:

$I = \frac{dq}{dt}$; $dq = Idt$. Звідси $q = \int_0^t Idt$.

Виходячи з закону Ома: $q = \int_0^t \frac{U}{R}dt$, де спад напруги рівномірно зростає за законом $U = U_0 + ct$.

Звідси знайдемо сталу c: $c = \frac{U - U_0}{t}$.

Підставимо значення U у вираз для q

$$q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{ct}{R}\right)dt = \frac{U_0}{R}\int_0^t dt + \frac{c}{R}\int_0^t tdt = \frac{U_0 t}{R} + \frac{ct^2}{2R} = \frac{t}{2R}(2U_0 + ct).$$

Підставимо значення для c: $q = \frac{t}{2R}(2U_0 + U - U_0) = \frac{t}{2R}(U_0 + U)$.

Враховуючи, що $R=\rho\dfrac{l}{S}$, запишемо:

$$q=\frac{tS}{2\rho l}\left(U_0+U\right).$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[q\right]=\frac{с\cdot м^2\cdot В}{Ом\cdot м\cdot м}=\frac{с\cdot В}{Ом}=\frac{с\cdot В\cdot А}{Ом}=\frac{с\cdot Кл}{с}=Кл.$$

Підставимо числові значення:

$$q=\frac{20\cdot 0{,}17\cdot 10^{-6}\cdot 6}{2\cdot 17{,}2\cdot 10^{-9}\cdot 20}\approx 30\ \left(Кл\right).$$

Задача 9.3. Як потрібно з'єднати $k=40$ елементів ЕРС, що мають $\mathcal{E}=2В$ і $r=0{,}1\ Ом$, щоб в колі із зовнішнім опором $R=1\ Ом$ пройшов максимальний струм?

Дано:

$n-?$

$m-?$

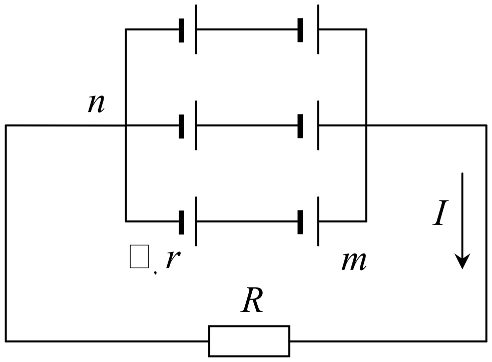
$I_{\max}-?$

$k=40$

$\mathcal{E}=2\ В$

$r=0{,}1\ Ом$

$R=1\ Ом$



Запишемо закон Ома для повного кола: $I=\dfrac{\varepsilon'}{R+r'}$;

Загальна кількість елементів $k=40$, $k=nm$, де n – кількість паралельних рядів, m – кількість послідовних рядів.

При послідовному з'єднанні джерел струму $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n$, тому $\varepsilon_1=m\varepsilon$, а при паралельному: $\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\ldots=\varepsilon_n$, тому $\varepsilon'=m\varepsilon$.

При послідовному з'єднанні опорів: $r=r_1+r_2+r_3+\ldots+r_m$, тому $r_1=mr$, а при паралельному з'єднанні: $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}+\ldots+\dfrac{1}{r_n}$, тому $r'=\dfrac{mr}{n}$.

Підставимо отримані значення ε' та r' у закон Ома для повного кола:

$$I=\frac{m\varepsilon}{R+\dfrac{mr}{n}}=\frac{m\varepsilon}{\dfrac{nR+mr}{n}}=\frac{nm\varepsilon}{nR+mr}=\frac{k\varepsilon}{nR+mr}.$$

Отримали формулу закону Ома для повного кола з комбінованим з'єднанням елементів.

В колі значення сили струму буде максимальним тоді, коли зовнішній опір кола дорівнюватиме внутрішньому опору всіх джерел ЕРС. З цих міркувань $I_{\max}$ буде тоді, коли у знаменнику комбінованого закону Ома $nR=mr$.

Визначимо звідси n та m.

$\dfrac{m}{n}=\dfrac{R}{r}=\dfrac{m^2}{nm}=\dfrac{m^2}{k}$; $\dfrac{R}{r}=\dfrac{m^2}{k}$. Звідси $m^2=\dfrac{kR}{r}$; $m=\sqrt{\dfrac{kR}{r}}$.

Підставимо числові значення: $m=\sqrt{\dfrac{40\cdot 1}{0{,}1}}=20$.

$n=\dfrac{k}{m}$; $n=\dfrac{40}{20}=2$.

Тоді обчислимо значення $I_{\max}$:

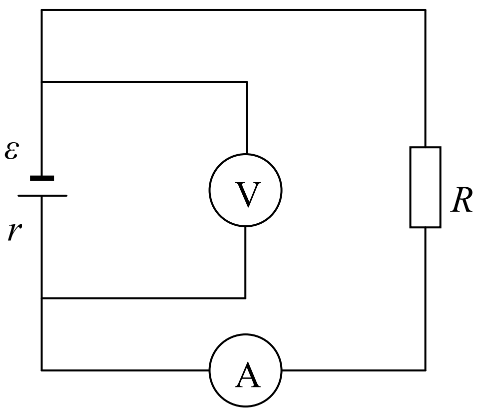
$$I_{\max}=\frac{40\cdot 2}{2\cdot 1+20\cdot 0{,}1}=\frac{80}{4}=20\ (A).$$

Задача 9.4. Енергетичне коло складається з джерела струму з внутрішнім опором $r=0{,}2\ Ом$ і зовнішнього опору $R=12\ Ом$. Знайти силу струму I в зовнішньому колі, ЕРС джерела, якщо вольтметр показує $U=120\,B$. Який опір R_1 потрібно включити в зовнішнє коло, щоб по ньому проходив струм $I_1=1\,A$? Розрахувати також силу струму $I_{кз}$ при короткому замиканні. Внутрішнім опором вольтметра знехтувати.

Дано:

$I-?$
$\varepsilon-?$
$R_1-?$
$I_{кз}-?$

$r=0{,}2\ Ом$
$R=12\ Ом$
$I_1=1\,A$
$U=120\,B$



Силу струму у зовнішньому колі обчислимо користуючись законом Ома для ділянки кола:

$I=\dfrac{U}{R}$; $I=\dfrac{120}{12}=10(A)$.

Для обчислення ЕРС скористаємось законом Ома для повного кола:

$I=\dfrac{\varepsilon}{R+r}$. Звідси $\varepsilon=I(R+r)$; $\varepsilon=10(12+0{,}2)=122(B)$.

Для обчислення опору R_1 знову скористаємось законом Ома для повного кола: $I_1=\dfrac{\varepsilon}{R_1+r}$;

$$R_1=\frac{\varepsilon}{I_1}-r.$$

Підставимо числові значення: $R_1=\dfrac{122}{1}-0{,}2=121{,}8(B)$.

Коротке замикання відбувається при різкому зменшенні зовнішнього опору $(R\to 0)$. З урахуванням останнього – формула закону Ома для повного кола набуде вигляду: $I_{кз}=\dfrac{\varepsilon}{r}$.

Підставивши числові значення отримаємо: $I_{кз}=\dfrac{122}{0{,}2}=610\ (A)$.

Задача 9.5. Опір вольфрамової нитки електричної лампочки при $t = 20°C$ дорівнює $R_{20} = 35{,}9\,Ом$. Визначити температуру нитки, якщо лампочку увімкнули у мережу з напругою $U = 220\,B$, і по нитці протікає струм силою $I = 0{,}6\,A$. Температурний коефіцієнт опору вольфраму дорівнює $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$.

Дано:

$t - ?$

$t_{20} = 20°C$

$R_{20} = 35{,}9\,Ом$

$U = 220\,B$

$I = 0{,}6\,A$

$\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$

Температуру нитки розжарення лампочки можна визначити виходячи з таких міркувань: $R_t = \rho_t \dfrac{l}{S}$; $R_0 = \rho_0 \dfrac{l}{S}$; а тому враховуючи, що $\rho_t = \dfrac{R_t S}{l}$; $\rho_0 = \dfrac{R_0 S}{l}$; можна записати:

$$\frac{R_t S}{l} = \frac{R_0 S}{l}(1 + \alpha t);\ R_t = R_0(1 + \alpha t).$$

Звідси $\dfrac{R_t}{R_0} = 1 + \alpha t$; $\alpha t = \dfrac{R_t}{R_o} - 1 = \dfrac{R_t - R_0}{R_0}$; $t = \dfrac{R_t - R_0}{\alpha R_0}$.

Разом з тим опір можна визначити, виходячи із закону Ома. Тобто при проходженні струму через нитку розжарення вона нагрівається до температури t і матиме опір $R_t = \dfrac{U}{I}$.

Значення опору при $t = 0°C$ можна визначити, виходячи з умови, що $R_{20} = 35{,}9\,Ом$ при температурі $20°C$:

$R_{20} = R_0(1 + \alpha t_{20})$. Звідси $R_0 = \dfrac{R_{20}}{1 + \alpha t_{20}}$.

Таким чином: $t = \dfrac{\dfrac{U}{I} - \dfrac{R_{20}}{1 + \alpha t_{20}}}{\dfrac{\alpha R_{20}}{1 + \alpha t_{20}}}$; $t = \dfrac{\dfrac{U(1 + \alpha t_{20}) - R_{20} I}{I(1 + \alpha t_{20})}}{\dfrac{\alpha R_{20}}{1 + \alpha t_{20}}} = \dfrac{U(1 + \alpha t_{20}) - R_{20} I}{I \alpha R_{20}}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[t] = \frac{B\left(1 + \dfrac{1}{K} \cdot K\right) - Ом \cdot A}{A \cdot \dfrac{1}{K} \cdot Ом} = \frac{B - \dfrac{B}{A} \cdot A}{A \cdot \dfrac{1}{K} \cdot \dfrac{B}{A}} = \frac{\dfrac{B}{1}}{\dfrac{B}{K}} = K.$$

Підставимо числові значення:

$$t = \frac{220 \cdot (1 + 4{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 20) - 35{,}9 \cdot 0{,}6}{0{,}6 \cdot 4{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 35{,}9} \approx 2201(°C).$$

Задача 9.6. Вугільний стержень з'єднаний в колі із залізним такої ж товщини. При якому співвідношенні їх довжин зміна спаду напруги на них залишатиметься постійною і не залежною від температури.

Дано:

$\frac{l_1}{l_2} - ?$
$\rho_1, \rho_2, \alpha_1, \alpha_2$

Як відомо, в послідовно з'єднаних ділянках кола сила струму на цих ділянках, а саме у вугільному стержні та залізному, однакова $I_1 = I_2$, а отже, виходячи з закону Ома, температурна зміна спадів напруги $\Delta U_1 = \Delta U_2$ і буде залежати від температурної зміни опорів ΔR_1 і ΔR_2.

Отже, $\Delta U_1 = \Delta U_2$ при умові, якщо $\Delta R_1 = \Delta R_2$, тобто повинна зберігатись рівність: $R_{1t} - R_{10} = R_{2t} - R_{20}$. (1)

Враховуючи, що $R_0 = \rho_0 \frac{l}{S}$, а $R_t = R_0(1 + \alpha t)$ можна записати для вугільного стержня: $R_{10} = \rho_{10} \frac{l_1}{S_1}$ та $R_{1t} = R_{10}(1 + \alpha_1 t)$, а для залізного: $R_{20} = \rho_{20} \frac{l_2}{S_2}$ та $R_{2t} = R_{20}(1 + \alpha_2 t)$.

Підставивши ці значення у встановлену рівність (1), одержимо:

$R_{10}(1 + \alpha_1 t) - R_{10} = R_{20}(1 + \alpha_2 t) - R_{20}$; $R_{10}(1 + \alpha_1 t - 1) = R_{20}(1 + \alpha_2 t - 1)$; $R_{10}\alpha_1 t = R_{20}\alpha_2 t$ та $\rho_{10} \frac{l_1}{S_1} \alpha_1 = \rho_{20} \frac{l_2}{S_2} \alpha_2$.

Враховуючи, що $S_1 = S_2 = S$, можна записати: $\rho_{10} \frac{l_1}{S} \alpha_1 = \rho_{20} \frac{l_2}{S} \alpha_2$; $\rho_{10} l_1 \alpha_1 = \rho_{20} l_2 \alpha_2$.

Таким чином, зміна спадів напруги на ділянках вугільного і залізного стержнів залишатиметься незалежною від температури, якщо справедливим буде наступне співвідношення: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\rho_{20}\alpha_2}{\rho_{10}\alpha_1}$.

Задача 9.7. По залізному провіднику з площею поперечного перерізу $S = 0{,}64\ мм^2$ протікає струм силою $I = 24\,A$. Вважаючи, що кількість вільних електронів n_0 в одиниці об'єму дорівнює кількості атомів n_0' в одиниці об'єму провідника, визначити середню швидкість напрямленого руху електронів.

Дано:

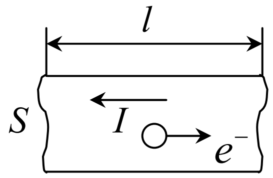
$\upsilon - ?$

$I = 24\,A$

$S = 0{,}64 \cdot 10^{-6}\, м^2$

$M = 56 \cdot 10^{-3}\, \frac{кг}{моль}$

$\rho = 7{,}87 \cdot 10^{3}\, \frac{кг}{м^3}$



Середня швидкість напрямленого руху електронів $\upsilon = \frac{l}{t}$ (1), де t – час, за який усі вільні електрони, що знаходяться у відрізку провідника довжиною l, пройдуть через вихідний поперечний переріз і перенесуть заряд $q = Ne$, де N – кількість вільних електронів у відрізку провідника довжиною l.

При цьому електрони створюватимуть струм силою $I = \frac{q}{t} = \frac{Ne}{t}$. (2)

$N = n_0 V$; $V = lS$; тоді $N = n_0 lS$. (3)

За умовою задачі: $n_0 = n_0' = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V}$, кількість речовини $\nu = \frac{m}{M}$.

Тоді $n_0 = n_0' = \dfrac{\frac{m}{M} N_A}{V} = \frac{\rho}{M} N_A$ (4)

Підставимо отриманий для знаходження концентрації вираз (4) у рівняння (3) і отримуємо $N = \frac{\rho N_A lS}{M}$. (5)

Тоді з урахуванням (5) рівняння для обчислення сили струму набуває вигляду: $I = \frac{\rho N_A elS}{Mt}$. (6)

Звідки $l = \frac{IMt}{e\rho SN_A}$. (7)

Підставляючи (7) у (1), отримуємо вираз для знаходження середньої швидкості напрямленого руху електронів:

$$\upsilon = \frac{IMt}{e\rho SN_A t} = \frac{IM}{e\rho SN_A}.$$

Виконаємо перевірку розмірностей:

$$[\upsilon] = \frac{A \cdot \frac{кг}{моль}}{Кл \cdot \frac{кг}{м^3} \cdot м^2 \cdot \frac{1}{моль}} = \frac{A \cdot м}{Кл} = \frac{Кл \cdot м}{с \cdot Кл} = \frac{м}{с}.$$

Підставимо числові значення:

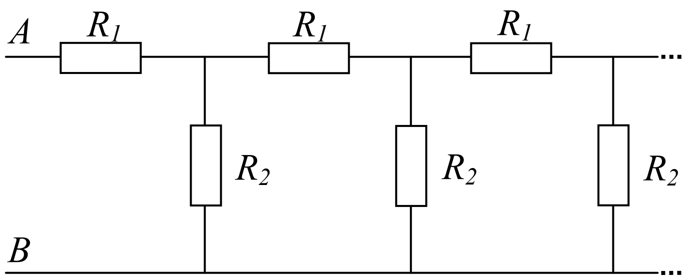
$$\upsilon = \frac{24 \cdot 56 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 7{,}87 \cdot 10^{3} \cdot 0{,}64 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}} = \frac{1344 \cdot 10^{-3}}{48{,}53 \cdot 10} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-3} \left(\frac{м}{с}\right).$$

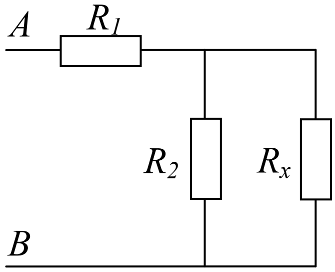
ТЕМА: <u>ОПІР ПРОВІДНИКІВ. З'ЄДНАННЯ ПРОВІДНИКІВ</u>.

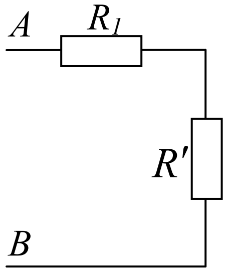
Задача 10.1. Знайти опір R_x нескінченної ділянки, що складається з опорів R_1 та R_2.

Дано:

R_x
R_1, R_2 $x \to \infty$







Якщо від нескінченної ділянки відрізати одну ланку, то загальний опір не зміниться. Таким чином опір нескінченної ділянки $AB(R_x)$ можна обчислити як послідовне з'єднання опору R_1, з деяким опором R', який в свою чергу є паралельним з'єднанням опорів R_2 та R_x: $R_x = R_1 + R'$.

Встановимо вираз для визначення R': $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_x}$; $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{R_x + R_2}{R_2 R_x}$; $R' = \dfrac{R_2 R_x}{R_x + R_2}$.

Тоді $R_x = R_1 + \dfrac{R_2 R_x}{R_x + R_2}$; $R_x = \dfrac{R_1 R_x + R_1 R_2 + R_2 R_x}{R_x + R_2}$; $R_x^2 + R_x R_2 = R_1 R_x + R_1 R_2 + R_2 R_x$;

$R_x^2 + R_x R_2 - R_1 R_x - R_1 R_2 - R_2 R_x = 0$; $R_x^2 - R_x R_1 - R_1 R_2 = 0$; $D = R_1^2 + 4R_1 R_2$.

Отже

$$R_x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2} = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2\left(1 + \dfrac{4R_2}{R_1}\right)}}{2} = \frac{R_1 + R_1\sqrt{1 + \dfrac{4R_2}{R_1}}}{2} = \frac{R_1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}}\right).$$

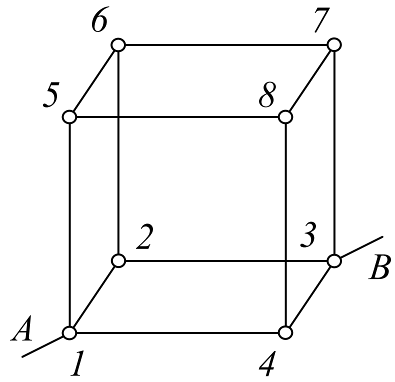
Задача 10.2. 12 провідників опором $R = 1\ Ом$ кожний спаяні в куб. Визначити загальний опір з'єднання, якщо куб приєднаний до джерела струму в електричне коло вершинами по діагоналі.

Дано:

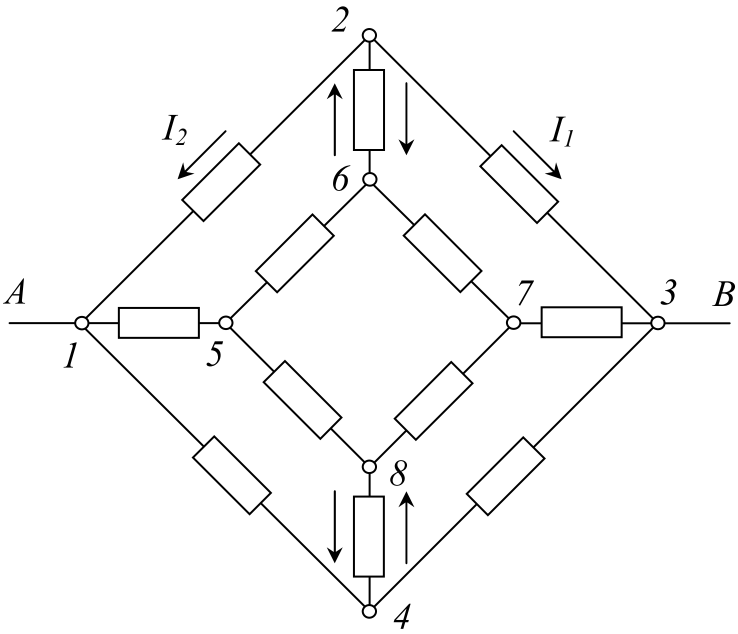
$R_{\sum} \ -?$

$R = 1 \ Ом$

$n = 12$



Перебудуємо схему наступним чином:



Струми напрямків I_1 та I_2 на ділянці 2 – 6 мають протікати в протилежних напрямках. При цьому $\varphi_2 = \varphi_6$. Така ж ситуація спостерігається на ділянці 4 – 8, де $\varphi_4 = \varphi_8$, отже цими опорами можна знехтувати. Визначимо опір розгалуджених ділянок 1, 2, 3 і 1, 4, 3, та 1, 5, 7, 3.

$R_{1,2,3} = R_{1,2} + R_{2,3} = 2R$; $R_{1,4,3} = R_{1,4} + R_{4,3} = 2R$; $R_{1,5,7,3} = R_{1,5} + R_{7,3} + R'$.

Визначимо опір R' $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{1}{R_{5,6,7}} + \dfrac{1}{R_{5,8,7}}$;

$R_{5,6,7} = R_{5,6} + R_{6,7}$; $R_{5,8,7} = R_{5,8} + R_{8,7}$; $R_{5,6,7} = R_{5,8,7} = 2R$; $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{R_{5,6,7} \cdot R_{5,8,7}}{R_{5,6,7} + R_{5,8,7}}$;

$R' = \dfrac{R_{5,6,7} + R_{5,8,7}}{R_{5,6,7} \cdot R_{5,8,7}}$; $R' = R$. Тоді $R_{1,5,7,3} = R + R + R = 3R$.

$\dfrac{1}{R_{\sum}} = \dfrac{1}{R_{1,2,3}} + \dfrac{1}{R_{1,5,7,3}} + \dfrac{1}{R_{1,4,3}}$; $R_{\sum} = \dfrac{R_{1,2,3} \cdot R_{1,5,7,3} \cdot R_{1,4,3}}{R_{1,5,7,3} \cdot R_{1,4,3} + R_{1,2,3} \cdot R_{1,4,3} + R_{1,2,3} \cdot R_{1,5,7,3}}$;

$$R_{\sum} = \frac{2R \cdot 3R \cdot 2R}{3R \cdot 2R + 2R \cdot 2R + 3R \cdot 2R} = \frac{3}{4}R. \; R_{\sum} = \frac{3}{4}(Ом).$$

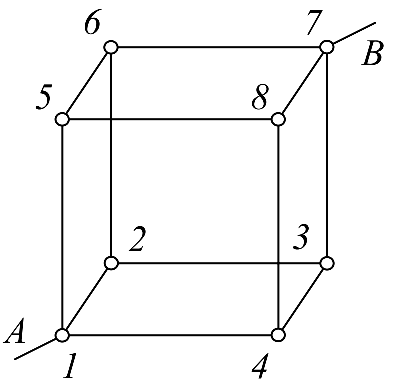
Задача 10.3. 12 провідників опором $R = 1Ом$ кожний спаяні в куб. Визначити загальний опір з'єднання, якщо куб підєднаний до джерела струму в електричне коло вершинами по діагоналі куба.

Дано:

$R_{\sum} - ?$

$R = 1Ом$

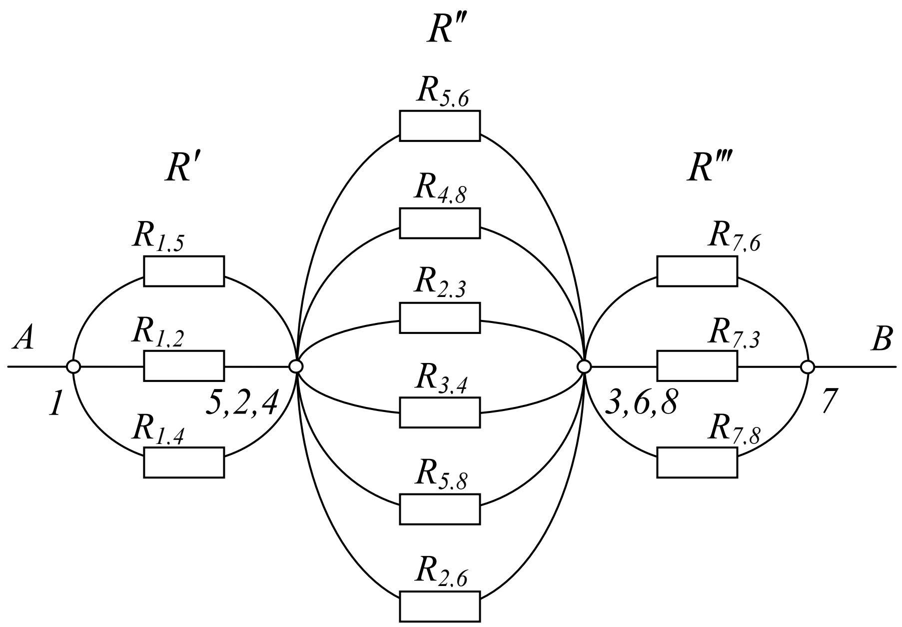
$n = 12$



Точки 5, 2, 4 та 3, 6, 8 мають однаковий потенціал.

$\varphi_5 = \varphi_2 = \varphi_4$; $\varphi_3 = \varphi_6 = \varphi_8$.

Тому ці точки можна з'єднати між собою. Зобразимо еквівалентну схему:



Загальний опір $R_{\sum} = R' + R'' + R'''$.

Визначимо R', R'' та R''' $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1,5}} + \frac{1}{R_{1,2}} + \frac{1}{R_{1,4}}$; $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}$; $R' = \frac{R}{3}$.

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_{5,6}} + \frac{1}{R_{4,8}} + \frac{1}{R_{2,3}} + \frac{1}{R_{3,4}} + \frac{1}{R_{5,8}} + \frac{1}{R_{2,6}}; \; \frac{1}{R''} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{6}{R}; \; R'' = \frac{R}{6}.$$

$$\frac{1}{R'''} = \frac{1}{R_{7,6}} + \frac{1}{R_{7,3}} + \frac{1}{R_{7,8}}; \; \frac{1}{R'''} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}; \; R''' = \frac{R}{3}.$$

Тоді загальний опір з'єднання $R_{\sum} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{2R + R + 2R}{6} = \frac{5}{6}R$.

Підставимо числові значення: $R_{\sum} = \frac{5}{6}(Ом)$.

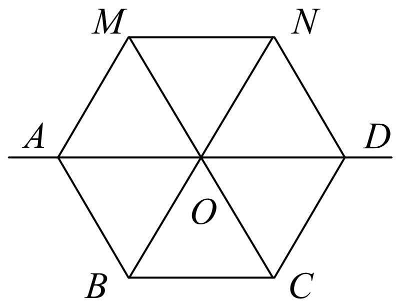
Задача 10.4. 12 провідників опором R кожний спаяні так, як показано на схемі. Визначити загальний опір з'єднання, якщо схема приєднана до джерела струму точками A та D.

Дано:

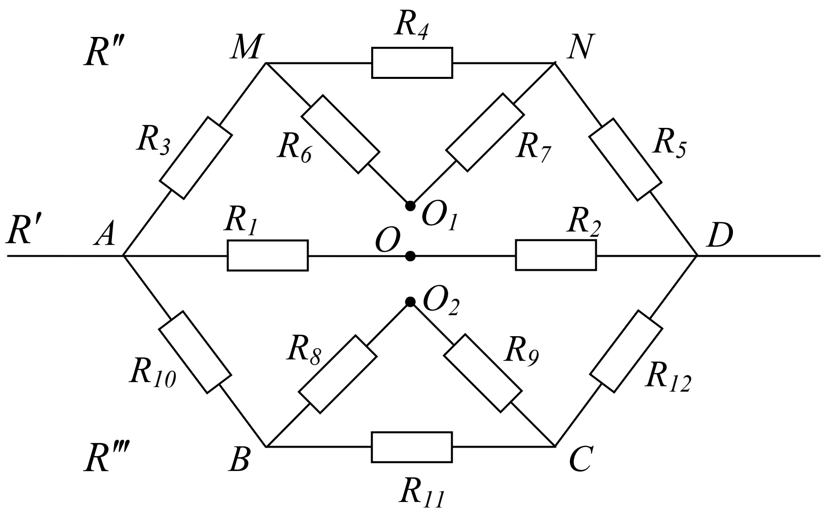
$R_{\sum} - ?$

R

$n = 12$



Перемалюємо схему наступним чином:



Спади напруги на ділянках O_1O та OO_2 будуть рівні нулеві оскільки точки O_1, O та O_2 мають однаковий потенціал.

Тоді загальний опір з'єднання:

$$\frac{1}{R_{\sum}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''}; \quad \frac{1}{R_{\sum}} = \frac{R''R''' + R'R''' + R'R''}{R'R''R'''};$$

$$R_{\sum} = \frac{R'R''R'''}{R''R''' + R'R''' + R'R''}.$$

Визначимо R', R'' та R'''.

$R' = R_1 + R_2$; $R' = R + R = 2R$;

$R'' = R''' = R_3 + R_{4,6,7} + R_5$; $\frac{1}{R_{4,6,7}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{6,7}}$;

$R_{6,7} = R_6 + R_7$; $R_{6,7} = R + R = 2R$; $\frac{1}{R_{4,6,7}} = \frac{R_{6,7} + R_4}{R_4 \cdot R_{6,7}}$. Звідси $R_{4,6,7} = \frac{R_4 \cdot R_{6,7}}{R_{6,7} + R_4}$;

$$R_{4,6,7} = \frac{R \cdot 2R}{2R + R} = \frac{2}{3}R.$$

Тоді $R'' = R''' = R + \frac{2}{3}R + R = \frac{8}{3}R$.

Отже загальний опір з’єдгнання:

$$R_{\sum} = \frac{2R \cdot \frac{8}{3}R \cdot \frac{8}{3}R}{\frac{8}{3}R \cdot \frac{8}{3}R + 2R \cdot \frac{8}{3}R + 2R \cdot \frac{8}{3}R} = \frac{\frac{128}{9}R^3}{\frac{64}{9}R^2 + \frac{16}{3}R^2 + \frac{16}{3}R^2} = \frac{\frac{128}{9}R^3}{\left(\frac{64}{9} + \frac{32}{3}\right)R^2} =$$

$$= \frac{128}{160}R = \frac{5}{4}R.$$

Підставимо числові значення:

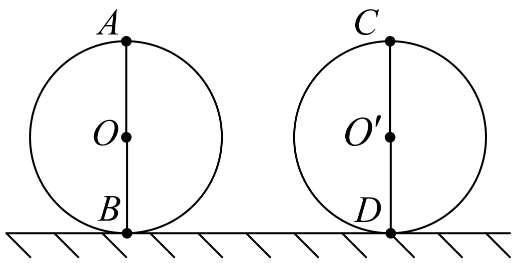
$$R_{\sum} = \frac{4}{5}\,(Ом).$$

Задача 10.5. Дві металеві колові рамки з діаметрами *AB* та *CD* в точках *B* та *D* дотикаються до металевої поверхні. Якою буде напруга між точками *A* та *C*, якщо напруга між точками *O* та *O'* становить 1 *В*? Опором поверхні між точками *B* та *D* знехтувати.

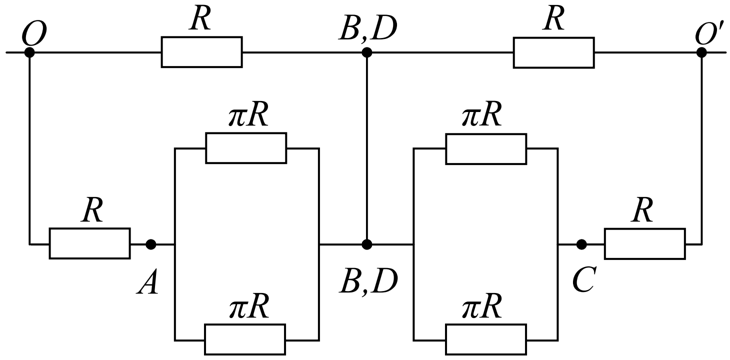
Дано:

$U_{AC} - ?$

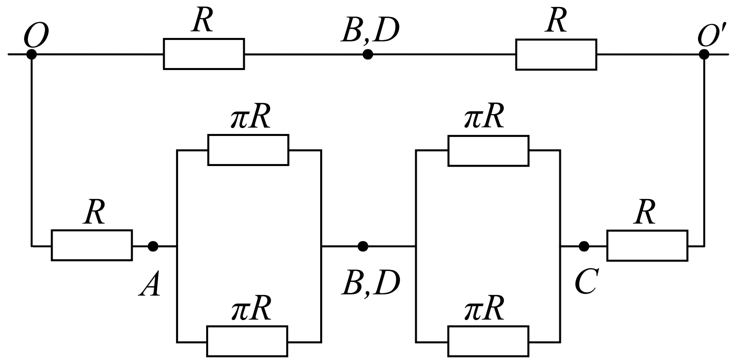
$U_{OO'} = 1B$



Позначимо опір ділянки дротин довжиною в один радіус через R. Складемо еквівалентну схему:



Внаслідок симетрії схеми можна не розглядати центральну перемичку оскільки потенціали точок, які перемичка з’єднувала на еквівалентній схемі, рівні.



Струм у колі розділиться на два з силами I_1 та I_2, величини яких будуть залежати від значень опорів відповідних ділянок.

Розрахуємо опір нижньої ділянки R_2:

$R_2 = R_{AC} + 2R$; $R_{AC} = R_{AB,D} + R_{B,DC}$;

$$\frac{1}{R_{AB,D}} = \frac{1}{R_{B,DC}} = \frac{1}{\pi R} + \frac{1}{\pi R} = \frac{2}{\pi R};\ R_{AB,D} = R_{B,DC} = \frac{\pi R}{2}.$$

Таким чином $R_{AC} = \frac{\pi R}{2} + \frac{\pi R}{2} = \pi R$.

Отже опір $R_2 = \pi R + 2R = (\pi + 2)R$.

Сили струму на ділянках $OACO'$ та AC будуть однакові і рівні I_2.

Тоді для цих ділянок можна записати $I_2 = \frac{U_{OO'}}{R_2}$ та $I_2 = \frac{U_{AC}}{R_{AC}}$.

Отже $\frac{U_{OO'}}{R_2} = \frac{U_{AC}}{R_{AC}}$.

Виразимо звідси U_{AC}: $U_{AC} = \frac{U_{OO'} R_{AC}}{R_2} = \frac{U_{OO'} \pi R}{(\pi + 2)R} = \frac{U_{OO'} \pi}{\pi + 2}$.

Підставимо числові значення:

$$U_{AC} = \frac{1 \cdot 3{,}14}{3{,}14 + 2} \approx 0{,}61(B).$$

<u>Тема 11.</u> РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ. ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА.

Задача 11.1. На вході електричної схеми знаходиться свинцевий запобіжник перерізом $S_1 = 1\ мм^2$. Підвід до споживача зроблено мідним дротом з площею перерізу $S_2 = 3\ мм^2$. Система знаходиться при температурі $T_0 = 17°C$. На яке підвищення температури підвідних провідників розраховано цей запобіжник при короткому замиканні в споживачі, вважаючи, що внаслідок великої швидкості процесу при короткому замиканні енергія при нагріванні не розсіюється.

Дано:

$\Delta T_2 - ?$

$S_1 = 10^{-6}\, м^2$

$S_2 = 3 \cdot 10^{-6}\, м^2$

$T_0 = 17°C = 290 K$

$T_{1пл} = 327°C = 600 K$

$c_1 = 120\ \dfrac{Дж}{кг \cdot К}$

$c_2 = 380\ \dfrac{Дж}{кг \cdot К}$

$q_1 = 2{,}26 \cdot 10^4\ \dfrac{Дж}{кг}$

$\rho_1' = 211 \cdot 10^{-9}\, Ом \cdot м$

$\rho_1' = 17{,}2 \cdot 10^{-9}\, Ом \cdot м$

$\rho_1 = 1133 \cdot 10^3\ \dfrac{кг}{м^3}$

$\rho_2 = 892 \cdot 10^3\ \dfrac{кг}{м^3}$

Кількість теплоти, яка необхідна для нагрівання свинцевого запобіжника від $290\,К$ до $600\,К$: $Q' = c_1 m_1 (T_{1пл} - T_0)$.

Кількість теплоти, яка необхідна для плавлення свинцевого запобіжника: $Q'' = m_1 q$.

Загальна кількість теплоти, що виділяється у свинцевому провіднику: $Q_1 = Q' + Q''$.

Отже: $Q_1 = c_1 m_1 (T_{1пл} - T_0) + m_1 q = m_1 (c_1 (T_{1пл} - T_0) + q)$.

$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 S_1 l_1$. $Q_1 = \rho_1 S_1 l_1 (c_1 (T_{1пл} - T_0) + q)$.

Кількість теплоти, яка виділяється у мідному провіднику витрачається на зміну його температури: $Q_2 = c_2 m_2 \Delta T_2$;

$m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 S_2 l_2$; $Q_2 = \rho_2 S_2 l_2 c_2 \Delta T_2$.

Кількості теплоти, що Q_1 та Q_2 виділяються протягом часу t у свинцевому та мідному провідниках відповідно внаслідок проходження через них струмів силами I_1 та I_2:

$Q_1 = I_1^2 R_1 t$; $Q_2 = I_2^2 R_2 t$.

Оскільки провідники з'єднані послідовно, то $I_1 = I_2 = I$, отже: $Q_1 = I^2 R_1 t$ та $Q_2 = I^2 R_2 t$.

$\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$ де $R_1 = \rho_1' \dfrac{l_1}{S_1}$ та $R_2 = \rho_2' \dfrac{l_2}{S_2}$.

Тоді $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{\rho_1' l_1 S_2}{\rho_2' l_2 S_1} = \dfrac{\rho_1 S_1 l_1 (c_1 (T_{1пл} - T_0) + q)}{\rho_2 l_2 S_2 c_2 \Delta T_2}$;

$\dfrac{\rho_1' S_2^2}{\rho_2' S_1^2} = \dfrac{\rho_1 (c_1 (T_{1пл} - T_0) + q)}{\rho_2 c_2 \Delta T_2}$. Звідси $\Delta T_2 = \dfrac{\rho_2' S_1^2 \rho_1 (c_1 (T_{1пл} - T_0) + q)}{\rho_1' \rho_2 c_2 S_2^2}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[\Delta T_2\right]=\frac{Ом\cdot м\cdot м^4\cdot\dfrac{кг}{м^3}\left(\dfrac{Дж}{кг\cdot K}\cdot K+\dfrac{Дж}{кг}\right)}{Ом\cdot м\cdot м^4\cdot\dfrac{кг}{м^3}\cdot\dfrac{Дж}{кг\cdot K}}=\frac{\dfrac{Дж}{кг}}{\dfrac{Дж}{кг\cdot K}}=K.$$

Підставимо числові значення:

$$\Delta T_2=\frac{17{,}2\cdot10^{-9}\cdot10^{-2}-1133\cdot10^3\cdot\left(120\cdot310+2{,}26\cdot10^4\right)}{211\cdot10^{-9}\cdot892\cdot10^3\cdot380\cdot9\cdot10^{-12}}=1{,}2\,(K).$$

Задача 11.2. Скільки електронів проходить за $1c$ через поперечний переріз мідного дроту довжиною $l=2\,м$ і площею поперечного перерізу $S=0{,}4\,мм^2$, якщо при цьому на R_a розсіюється потужність $P=0{,}35\,Вт$.

Дано:

$n-?$
$t=1c$
$S=0{,}4\cdot10^{-6}\,м^2$
$P=0{,}35\,Вт$
$\rho=211\cdot10^{-9}\,Ом\cdot м$

Кількість електронів, що переноситься через поперечний переріз провідника за $1c$ знайдемо скориставшись формулою:

$I=\dfrac{q}{t}$, де $q=ne$. Тоді $I=\dfrac{ne}{t}$. Звідси $n=\dfrac{It}{e}$.

$I=jS$, – де, згідно із законом Ома в диференціальній формі: $j=\sigma E$. Тоді $I=\sigma ES$ та $n=\dfrac{\sigma ESt}{e}$.

Для знаходження напруженості електричного поля запишемо закон Джоуля-Ленца у диференціальній формі. Питома потужність струму: $\omega=\sigma E^2=\dfrac{Q}{Vt}$.

Звідси $E=\sqrt{\dfrac{Q}{\sigma Vt}}=\sqrt{\dfrac{\rho Q}{Vt}}$.

Таким чином враховуючи, що $V=Sl$: $n=\dfrac{St}{\rho e}\sqrt{\dfrac{\rho Q}{Vt}}=\dfrac{t}{e}\sqrt{\dfrac{S^2\rho Q}{Sl\rho^2 t}}=\dfrac{t}{e}\sqrt{\dfrac{SQ}{l\rho t}}$; $\dfrac{Q}{t}=P$;

Отже $n=\dfrac{t}{e}\sqrt{\dfrac{SP}{l\rho}}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[n]=\frac{c}{Кл}\sqrt{\frac{м^2\cdot Вт}{м\cdot Ом\cdot м}}=\frac{c}{Кл}\sqrt{\frac{м^2\cdot Дж}{c\cdot м^2\cdot Ом}}=\frac{c}{Кл}\sqrt{\frac{Дж}{c\cdot Ом}}=\frac{c}{Кл}\sqrt{\frac{A\cdot B\cdot c\cdot A}{c\cdot B}}=\frac{c}{Кл}\sqrt{A^2}$$
$$=\frac{c\cdot A}{Кл}=\frac{c\cdot A}{c\cdot A}=1.$$

Підставимо числові значення:

$$n=\frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}}\sqrt{\frac{0{,}4\cdot10^{-6}\cdot0{,}35}{2\cdot211\cdot10^{-19}}}=6{,}25\cdot10^{18}\cdot0{,}58=3{,}625\cdot10^{18}.$$

Задача 11.3. Яким повинен бути опір обмотки підмагнічування гучномовця, щоб потужність струму підмагнічування становила P = 8 $Вт$? Струм від акумулятора з $\varepsilon = 8$ $В$ поступає до гучномовця по лінії опором 1 $Ом$.

Дано:

$R_x - ?$
$P = 8Вт$
$\varepsilon = 8В$
$R = 1\ Ом$

Запишемо вираз для визначення сили струму в колі: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + R_x}$.

Потужність, яка розвивається в котушці підмагнічування, можна виразити як: $P = I^2 R_x = \left(\dfrac{\varepsilon}{R + R_x}\right)^2 R_x = \dfrac{\varepsilon^2 R_x}{(R + R_x)^2} = \dfrac{\varepsilon^2 R_x}{R^2 + 2RR_x + R_x^2}$.

$$\varepsilon^2 R_x = PR^2 + 2PRR_x + PR_x^2;$$

$$PR^2 + 2PRR_x + PR_x^2 - \varepsilon^2 R_x = 0;$$

$$PR_x^2 + \left(2PR - \varepsilon^2\right)R_x + PR^2 = 0;$$

$$Д = \left(2PR - \varepsilon^2\right)^2 - 4P^2R^2 = 4P^2R^2 - 4PR\varepsilon^2 + \varepsilon^4 - 4P^2R^2 = \varepsilon^4 - 4PR\varepsilon^2 = \varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - 4PR\right).$$

$$R_{x_1} = \frac{\varepsilon^2 - 2PR + \sqrt{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - 4PR\right)}}{2P} = \frac{\varepsilon^2 - 2PR + \varepsilon\sqrt{\left(\varepsilon^2 - 4PR\right)}}{2P};$$

$$R_{x_2} = \frac{\varepsilon^2 - 2PR - \sqrt{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - 4PR\right)}}{2P} = \frac{\varepsilon^2 - 2PR - \varepsilon\sqrt{\left(\varepsilon^2 - 4PR\right)}}{2P}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[R] = \frac{B^2 - Вт \cdot Ом - B\sqrt{B^2 - Вт \cdot Ом}}{Вт} = \frac{B^2 - \frac{A \cdot B \cdot c}{c} \cdot \frac{B}{A} - B\sqrt{B^2 - \frac{A \cdot B \cdot c}{c} \cdot \frac{B}{A}}}{\frac{A \cdot B \cdot c}{c}} =$$

$$= \frac{B^2 - B^2 - B\sqrt{B^2 - B^2}}{A \cdot B} = \frac{B^2 - B\sqrt{B^2}}{A \cdot B} = \frac{B^2 - B^2}{A \cdot B} = \frac{B^2}{A \cdot B} = \frac{B}{A} = Ом.$$

Розрахуємо R_{x_1} та R_{x_2}:

$$R_{x_1} = \frac{64 - 2 \cdot 8 \cdot 1 + 8\sqrt{64 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{64 - 16 + 8\sqrt{64 - 32}}{16} = \frac{48 + 8\sqrt{32}}{16} \approx 5{,}8\ (Ом).$$

$$R_{x_2} = \frac{64 - 2 \cdot 8 \cdot 1 - 8\sqrt{64 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{64 - 16 - 8\sqrt{64 - 32}}{16} = \frac{48 - 8\sqrt{32}}{16} \approx 0{,}17\ (Ом).$$

Проаналізуємо одержані розв'язки.

а). Сила струму в колі становитиме $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_{x_1} + R}$, а втрати потужності в підвідних провідниках лінії становитимуть $P_1 = I_1^2 R = \dfrac{\varepsilon^2 R}{\left(R_{x_1} + R\right)^2}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[P] = \frac{B^2 \cdot Ом}{(Ом + Ом)^2} = \frac{B^2 \cdot Ом}{Ом^2} = \frac{B^2}{Ом} = \frac{\frac{B^2}{1}}{\frac{B}{A}} = \frac{B^2 \cdot A}{B} = B \cdot A = \frac{B \cdot A \cdot c}{c} = \frac{Дж}{c} = Bm.$$

Розрахуємо втрати потужності: $P_1 = \frac{64 \cdot 1}{(5{,}8 + 1)^2} \approx 1{,}38\,(Bm)$.

б). Сила струму в колі становитиме $I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{x_2} + R}$, а втрати потужності в підвідних провідниках лінії становитимуть $P_2 = I_2^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{\left(R_{x_2} + R\right)^2}$.

Розрахуємо втрати потужності: $P_2 = \frac{64 \cdot 1}{(0{,}17 + 1)^2} \approx 47\,(Bm)$.

Таким чином, енергетично вигідно котушку підмагнічування гучномовця виготовити з опором $R_{x_1} = 5{,}8\ Ом$.

Задача 11.4. Сила струму в провіднику опором $R = 10\ Ом$ протягом $t = 2\,c$ зростає по лінійному закону від $I_0 = 0$ до $I = 6A$. Визначити кількість теплоти, що виділяється протягом першої і протягом другої секунд проходження струму, а також співвідношення цих величин.

Дано:

$Q_{1,2} - ?$ $\frac{Q_2}{Q_1} - ?$	Скористаємось законом Джоуля-Ленца: $Q = I^2 Rt$. При зміні сили струму у провіднику цей закон справджується для нескінченно малого проміжку часу: $dQ = I^2 Rdt$, де I є лінійною функцією часу: $I = I_0 + kt$, тоді $k = \frac{I - I_0}{t}$, де час зміни сили струму $t = t_2 - t_1$.
$R = 10\ Ом$ $t = 2\,c$ $I_0 = 0A$ $I = 6A$	У загальному вигляді: $dQ = (I_0 + kt)^2 Rdt = \left(I_0^2 + 2I_0 kt + k^2 t^2\right)Rdt$.

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \left(I_0^2 + 2I_0 kt + k^2 t^2\right)Rdt = I_0^2 R\int_{t_1}^{t_2} dt + 2I_0 kR\int_{t_1}^{t_2} tdt + k^2 R\int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = I_0^2 R(t_2 - t_1) +$$

$$+ 2I_0 kR\left(\frac{t_2^2}{2} - \frac{t_1^2}{2}\right) + k^2 R\left(\frac{t_2^3}{3} - \frac{t_1^3}{3}\right) = I_0^2 R(t_2 - t_1) + I_0 kR\left(t_2^2 - t_1^2\right) + \frac{1}{3}k^2 R\left(t_2^3 - t_1^3\right) =$$

$$= I_0^2 R(t_2 - t_1) + \frac{R}{t} I_0 (I - I_0)\left(t_2^2 - t_1^2\right) + \frac{R}{3t^2}(I - I_0)^2\left(t_2^3 - t_1^3\right) = I_0^2 R(t_2 - t_1) +$$

$$+ \frac{R}{t} I_0 I\left(t_2^2 - t_1^2\right) - \frac{R}{t} I_0^2\left(t_2^2 - t_1^2\right) + \frac{R}{3t^2}\left(I^2 - 2I_0 I + I_0^2\right)\left(t_2^3 - t_1^3\right) = I_0^2 R(t_2 - t_1) +$$

$$+\frac{R}{t}I_0I\left(t_2^2-t_1^2\right)-\frac{R}{t}I_0^2\left(t_2^2-t_1^2\right)+\frac{R}{3t^2}I^2\left(t_2^3-t_1^3\right)-\frac{2R}{3t^2}I_0I\left(t_2^3-t_1^3\right)+\frac{R}{3t^2}I_0^2\left(t_2^3-t_1^3\right)=$$

$$=I_0^2R\left(\left(t_2-t_1\right)-\frac{1}{t}\left(t_2^2-t_1^2\right)+\frac{1}{3t^2}\left(t_2^3-t_1^3\right)\right)+I_0IR\left(\frac{1}{t}\left(t_2^2-t_1^2\right)-\frac{2}{3t^2}\left(t_2^3-t_1^3\right)\right)+$$

$$+\frac{R}{3t^2}I^2\left(t_2^3-t_1^3\right).$$

У випадку, коли $I_0=0$, формула для обчислення кількості теплоти набуває вигляду:

$$Q=\frac{R}{3t^2}I^2\left(t_2^3-t_1^3\right)=\frac{R}{3\left(t_2-t_1\right)^2}I^2\left(t_2^3-t_1^3\right).$$

Протягом першої секунди виділяється Q_1:

$$Q_1=\frac{R}{3\left(t_2-t_1\right)^2}I^2\left(t_2^3-t_1^3\right);\ Q_1=\frac{10}{3}\cdot 36\cdot 1=120\ (Дж).$$

Протягом другої секунди виділяється Q_2:

$$Q_2=\frac{R}{3\left(t_2-t_1\right)^2}I^2\left(t_2^3-t_1^3\right);\ Q_2=\frac{10}{3}\cdot 36\cdot 7=840\ (Дж).$$

Тоді співвідношення кількостей теплоти, що виділяється у провіднику під час протікання струму протягом перших двох секунд: $\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{840}{120}=7$.

Задача 11.5. Електрочайник має дві нагрівні спіралі. Якщо увімкнути першу, то вода закипає через $t_1=15\,хв$, якщо увімкнути другу – через $t_2=30\,хв$. Через який час закипить вода, якщо спіралі з'єднати послідовно, паралельно?

Дано:

$t_{посл}-?$

$t_{парал}-?$

$t_1=900\,c$

$t_2=1800\,c$

Для того, щоб вода закипіла потрібна однакова кількість теплоти, яка може бути обчислена за допомогою закону Джоуля-Ленца:

$$Q=IUt=I^2Rt=\frac{U^2}{R}t;\ Q_1=\frac{U_1^2}{R_1}t_1;\ Q_2=\frac{U_2^2}{R_2}t_2.$$

Враховуючи, що $Q=const$ та $U=const$, отримаємо:

$Q_1=Q_2=Q$; $U_1=U_2=U$.

Отже $Q=\frac{U^2}{R_1}t_1$ і $Q=\frac{U^2}{R_2}t_2$; $\frac{t_1}{R_1}=\frac{t_2}{R_2}$.

Враховуючи, що $t_1=900c$, а $t_2=1800c$, а отже $t_2=2t_1$, отримуємо $R_2=2R_1$.

Для послідовного з'єднання спіралей:

$R_{посл}=R_1+R_2=R_1+2R_1=3R_1$;

Тоді $\dfrac{t_{посл}}{R_{посл}} = \dfrac{t_{посл}}{3R_1}$; $Q = \dfrac{U^2}{R_1} t_1$; $Q = \dfrac{U^2}{R_{посл}} t_{посл}$; $\dfrac{t_{посл}}{R_{посл}} = \dfrac{t_1}{R_1}$; $\dfrac{t_{посл}}{3R_1} = \dfrac{t_1}{R_1}$; $t_{посл} = 3t_1$.

$t_{посл} = 3 \cdot 900 = 2700\,(с) = 45\,хв$.

Для паралельного з'єднання спіралей:

$$\frac{1}{R_{парал}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1} = \frac{2+1}{2R_1} = \frac{3}{2R_1};\ R_{парал} = \frac{2}{3} R_1.$$

$$\frac{t_{парал}}{R_{парал}} = \frac{t_1}{R_1};\ \frac{3t_{парал}}{2R_1} = \frac{t_1}{R_1};\ t_{парал} = \frac{2}{3} t_1;\ t_{парал} = \frac{2}{3} \cdot 900 = 600\,(с) = 10\,хв.$$

Задача 11.6. Тролейбус масою $9т$ рухається рівномірно зі швидкістю $36\dfrac{км}{год}$. Коефіцієнт тертя між колесами та дорогою дорівнює 0,011. Двигун тролейбуса працює при напрузі $U = 550\,B$ та має ККД 90%. Визначити силу струму в двигуні.

Дано:

$I - ?$

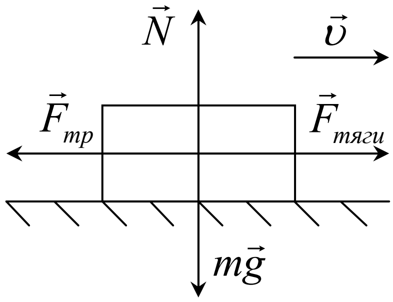
$m = 9 \cdot 10^3\,кг$

$\upsilon = 36\dfrac{км}{год} = 10\dfrac{м}{с}$

$\mu = 0{,}011$

$U = 550\,B$

$\eta = 0{,}9$



При русі тролейбуса робота електричного струму у двигуні перетворюється у механічну роботу по його переміщенню.

Тому можна записати:

$$\eta = \frac{A_{повн}}{A_{затр}} \qquad (1)$$

де $A_{затр}$ – робота двигуна, яка у відповідності з умовою задачі визначається формулою: $A_{затр} = IU\Delta t$ (2)

де Δt – час руху; $A_{повн}$ – корисна робота, що дорівнює роботі сили двигуна:

$A_{повн} = F_{тяги} S$.

Оскільки тролейбус рухається рівномірно, то сила тяги дорівнює силі тертя: $F_{тяги} = F_{тер} = \mu mg$, а переміщення тролейбуса $S = \upsilon\Delta t$.

З урахуванням цього можна записати, що $A_{повн} = \mu mg\upsilon\Delta t$. (3)

Підставимо (2) та (3) у (1): $\eta = \dfrac{\mu mg\upsilon\Delta t}{IU\Delta t}$. (4)

Звідси знайдемо шукану величину – силу струму у двигуні: $I = \dfrac{\mu mg\upsilon}{\eta U}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[I] = \frac{кг \cdot \frac{м}{с^2} \cdot \frac{м}{с}}{В} = \frac{Н \cdot м}{В} = \frac{Дж}{В \cdot с} = \frac{А \cdot В \cdot с}{В \cdot с} = А.$$

Підставимо числові значення:

$$I = \frac{0{,}011 \cdot 9 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 10}{0{,}9 \cdot 550} = 50(А).$$

<u>Тема 12.</u> РОЗГАЛУЖЕНІ КОЛА. ПРАВИЛА КІРХГОФА.

Задача 12.1. Визначити силу струму, що проходить через опори $R_1 = R_4 = 4\ Ом$, $R_2 = R_3 = 3\ Ом$, увімкнені в коло, як показано на малюнку, якщо $\square_1 = 10\,B$, $\square_2 = 4\,B$. Внутрішні опори $r_1 = 0{,}2\ Ом$, та $r_2 = 0{,}1\ Ом$.

Дано:

$I_{1,2,3,4} - ?$

$R_1 = R_4 = 4\ Ом$

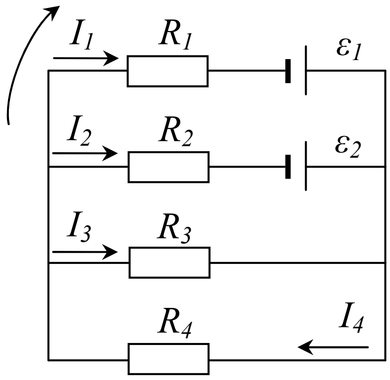
$R_2 = R_3 = 3\ Ом$

$\square_1 = 10B$

$\square_2 = 4B$

$r_1 = 0{,}2\ Ом$

$r_2 = 0{,}1\ Ом$



Виберемо напрям обходу контуру за годинниковою стрілкою. Тоді, згідно з першим правилом Кірхгофа:

$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$; $I_1 + I_2 + I_3 = I_4$.

Згідно до другого правила Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_1R_1 + I_1r_1 - I_2R_2 - I_2r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ I_1R_1 + I_1r_1 - I_3R_3 = \varepsilon_1, \\ I_3R_3 + I_4R_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1(R_1 + r_1) - I_2(R_2 + r_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ I_1(R_1 + r_1) - I_3R_3 = \varepsilon_1, \\ I_3R_3 + I_4R_4 = 0; \end{cases}$$

Виразимо з третього рівняння системи I_3: $I_3R_3 = -I_4R_4$; $I_3 = -\dfrac{I_4R_4}{R_3}$.

З першого рівняння системи:

$$I_2(R_2 + r_2) = I_1(R_1 + r_1) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2;\ I_2 = \frac{I_1(R_1 + r_1) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_2 + r_2}.$$

Враховуючи друге рівняння, матимемо:

$$I_2 = \frac{I_1(R_1 + r_1) - I_1(R_1 + r_1) + I_3R_3 + \varepsilon_2}{R_2 + r_2} = \frac{\varepsilon_2 + I_3R_3}{R_2 + r_2} = \frac{\varepsilon_2 - I_4R_4}{R_2 + r_2}.$$

Тоді з другого рівняння:

$$I_1(R_1 + r_1) = \varepsilon_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1 - I_4R_4;\ I_1 = \frac{\varepsilon_1 - I_4R_4}{R_1 + r_1}.$$

Після підстановки отримних для I_1, I_2 та I_3 виразів у вираз для першого правила Кірхгофа, отримуємо:

$$\frac{\varepsilon_1 - I_4R_4}{R_1 + r_1} + \frac{\varepsilon_2 - I_4R_4}{R_2 + r_2} - \frac{I_4R_4}{R_3} - I_4 = 0;$$

$$-\frac{I_4R_4}{R_3} - I_4 + \frac{\varepsilon_1}{R_1 + r_1} - \frac{I_4R_4}{R_1 + r_1} + \frac{\varepsilon_2}{R_2 + r_2} - \frac{I_4R_4}{R_2 + r_2} = 0;$$

$$\frac{I_4R_4}{R_3} + I_4 + \frac{I_4R_4}{R_1 + r_1} + \frac{I_4R_4}{R_2 + r_2} = \frac{\varepsilon_1}{R_1 + r_1} + \frac{\varepsilon_2}{R_2 + r_2};$$

$$I_4\left(\frac{R_4}{R_1 + r_1} + \frac{R_4}{R_2 + r_2} + \frac{R_4}{R_3} + 1\right) = \frac{\varepsilon_1}{R_1 + r_1} + \frac{\varepsilon_2}{R_2 + r_2}.$$

$$I_4 = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{R_1 + r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{R_2 + r_2}}{\dfrac{R_4}{R_1 + r_1} + \dfrac{R_4}{R_2 + r_2} + \dfrac{R_4}{R_3} + 1}.$$

Підставимо числові значення:

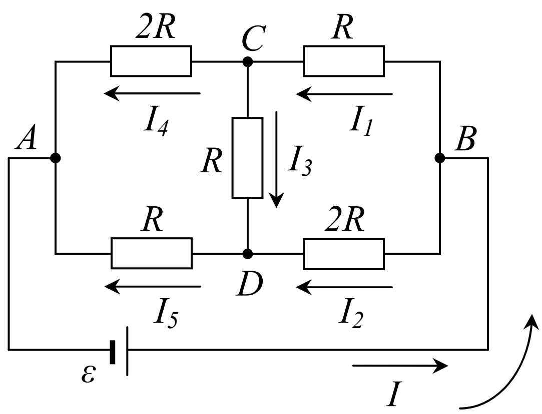
$$I_4 = \frac{\dfrac{10}{4+0,2} + \dfrac{4}{3+0,1}}{\dfrac{4}{4+0,2} + \dfrac{4}{3+0,1} + \dfrac{4}{3} + 1} \approx 0,81(A); \; I_1 = \frac{10 - 0,81 \cdot 4}{4 + 0,2} = 1,61(A);$$

$$I_2 = \frac{4 - 0,81 \cdot 4}{3 + 0,1} = 0,25(A); \; I_3 = -0,81 \cdot \frac{4}{3} = -1,08(A).$$

Задача 12.2. Визначити значення опору $R_{\sum}$ між точками A і B кола, що складається з джерела ЕРС та п’яти провідників, які з’єднані так, як показано на малюнку.

Дано:

$R_{\sum}$ $-?$



Виберемо напрям обходу контуру проти годинникової стрілки. При розв’язку знехтуємо внутрішнім опором джерела ЕРС.

Запишемо для перше правило Кірхгофа вузлів B, C, $Д$:

$B: I - I_1 - I_2 = 0;$

$C: I_1 - I_3 - I_4 = 0;$

$D: I_3 + I_2 - I_5 = 0.$

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2, \ (1) \\ I_1 = I_3 + I_4, \ (2) \\ I_5 = I_3 + I_2; \ (3) \end{cases}$$

За другим правилом Кірхгофа для контурів

$BCD: \ RI_1 + RI_3 - 2RI_2 = 0; \ (4)$

$ACD: \ 2RI_4 - RI_3 - RI_5 = 0; \ (5)$

$ADBC: \ RI_5 + 2RI_2 = \varepsilon. \ (6)$ нехтуючи внутрішнім опором джерела ЕРС.

З рівнянь (4) та (5):

$I_1 + I_3 - 2I_2 = 0;$

$I_1 + I_3 = 2I_2; \ (7)$

$2I_4 - I_3 - I_5 = 0;$

$2I_4 = I_3 + I_5. \ (8)$

Виразимо з рівняння (1) $I_2: \ I_2 = I - I_1$ і підставимо у (7): $I_1 + I_3 = 2(I - I_1). \ (9)$

Виразимо з рівняння (2) $I_4: \ I_4 = I_1 - I_3$ і підставимо у (8): $2(I_1 - I_3) = I_3 + I_5. \ (10)$

Виразимо з рівняння (3) $I_2: \ I_2 = I_5 - I_3$ і підставимо у (7): $I_1 + I_3 = 2(I_5 - I_3). \ (11)$

Зведемо подібні у рівняннях (9), (10) та (11):

$$\begin{cases} I_3 = 2I - 3I_1, \ (12) \\ I_5 = 2I_1 - 3I_3, \ (13) \\ I_1 = 2I_5 - 3I_3; \ (14) \end{cases}$$

Підставимо рівняння (14) у (13):

$I_5 = 2(2I_5 - 3I_3) - 3I_3 = 4I_5 - 6I_3 - 3I_3 = -9I_3 + 4I_5; \ 3I_5 = 9I_3; \ I_5 = 3I_3. \ (15)$

Підставимо рівняння (15) у (14):

$I_1 = 6I_3 - 3I_3; \ I_1 = 3I_3. \ (16)$

Виразимо з рівняння (12) $2I: \ 2I = I_3 + 3I_1. \ (17)$

Підставимо у рівняння (17) рівняння (16):

$2I = I_3 + 9I_3 = 10I_3; \ I = 5I_3. \ (18)$

Виразимо з рівняння (18) $I_3: \ I_3 = \frac{1}{5}I. \ (19)$

Підставимо у рівняння (7) значення I_1 з рівняння (16):

$2I_2 = I_1 + I_3 = 3I_3 + I_3 = 4I_3; \ I_2 = 2I_3. \ (20)$

Підставимо у рівняння (20) значення I_3 з (19): $I_2 = \frac{2}{5}I \ (21)$

Підставимо у рівняння (15) значення I_3 з (19): $I_5 = \frac{3}{5} I$. (22)

Підставимо значення I_2 та I_5 з рівнянь (21) та (22) у (6):

$\frac{3}{5}RI + \frac{4}{5}RI = \varepsilon$; $\frac{7}{5}RI = \varepsilon$. (23)

З рівняння (23) сила струму у повному колі: $I = \frac{5\varepsilon}{7R}$. (24)

Використаємо закон Ома для повного кола нехтуючи внутрішнім опором джерела ЕРС: $I = \frac{\varepsilon}{R_\Sigma}$. (25) Звідки $R_\Sigma = \frac{\varepsilon}{I}$. (26)

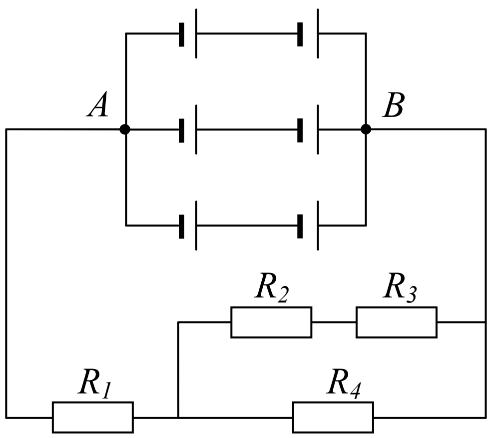
Підставляючи значення сили струму з рівняння (24) у рівняння (26), отримуємо сумарний опір ділянки між точками A і B:

$R_\Sigma = \frac{\varepsilon}{\frac{5}{7}\frac{\varepsilon}{R}} = \frac{7}{5}R$. (27)

Задача 12.3. Визначити силу струму в колі, що складається з $m = 5$ послідовно з'єднаних джерел ЕРС $\varepsilon = 1{,}1\ В$ в $n = 4$ паралельних вітках та зовнішнього опору змішаного з'єднання однакових провідників, як показано на малюнку. Внутрішній опір джерел ЕРС $r = 0{,}2\ Ом$.

Дано:

$I - ?$
$m = 5$; $n = 4$
$\varepsilon = 1{,}1 B$
$R = 1{,}5\ Ом$
$r_2 = 0{,}2\ Ом$



Застосуємо правила Кірхгофа. Як видно з малюнка, електричне коло має два вузли. За першим правилом Кірхгофа матимемо одне незалежне рівняння для вузлів $I = I_1 n$, де I_1 – сила струму у одній вітці. Оскільки опір кожної паралельної ділянки однаковий і рівний mr, то однакові і струми замкнутого кола, в яке входить зовнішній сумарний опір R' і одна з ділянок ЕРС між точками AB.

Отже запишемо: $IR' + I_1 rm = m\varepsilon$, $IR' + \frac{I_r m}{n} = m\varepsilon$; $I(R'n + rm) = m\varepsilon$.

Тоді $I = \frac{mn\varepsilon}{nR' + mr}$.

Загальний зовнішній опір R' визначається за формулами паралельно-послідовного з'єднання: $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$; $R' = R_1 + R_{2,3,4} = R + R_{2,3,4}$.

$$\frac{1}{R_{2,3,4}} = \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4};\ \frac{1}{R_{2,3,4}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R};\ R_{2,3,4} = \frac{2}{3}R;\ R' = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R.$$

Отже: $I = \dfrac{3mn\varepsilon}{5Rn + 3rm}$.

Використаємо перевірку розмірності: $[I] = \dfrac{B}{Ом + Ом} = \dfrac{B}{Ом} = A$.

Підставимо числові значення:

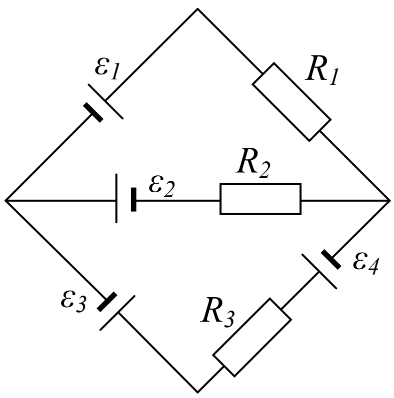
$$I = \frac{3 \cdot 20 \cdot 1{,}1}{5 \cdot 4 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 5} = \frac{66}{30 + 3} = \frac{66}{33} = 2\left(A\right).$$

Задача 12.4. Визначити сили струмів, що протікають через опори $R_1 = 2\ Ом$, $R_2 = 5\ Ом$ та $R_3 = 10\ Ом$, увімкнені в коло, як показано на малюнку, якщо $\varepsilon_1 = 15B$, $\varepsilon_2 = 5B$, $\varepsilon_3 = 10B$ та $\varepsilon_4 = 35B$. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

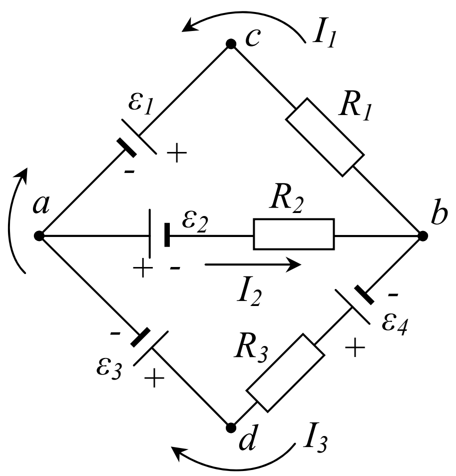
Дано:

$I_1 - ?$, $I_2 - ?$, $I_3 - ?$

$R_1 = 2\ Ом$, $R_2 = 5\ Ом$, $R_3 = 10\ Ом$, $\varepsilon_1 = 15B$, $\varepsilon_2 = 5B$, $\varepsilon_3 = 10B$, $\varepsilon_4 = 35B$



Як видно з малюнку, в схемі є декілька джерел струму, які увімкнені назустріч одне одному. Тому напрям струмів I_1, I_2 та I_3 виберемо довільно.



На схемі є дві вузлові точки *a* та *b*, що з'єднують три гілки, по яким течуть струми.

Згідно з першим правилом Кірхгофа, для вузла *a* можна скласти рівняння: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$. Виберемо напрям обходу контуру за годинниковою стрілкою, тоді для контурів *acb* та *abd* згідно до другого правила Кірхгофа можна записати:

для контура *acb*: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -I_1R_1 - I_2R_2$;

для контура *abd*: $-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 = I_2R_2 + I_3R_3$.

Для знаходження сил струмів складемо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0; & (1) \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -I_1R_1 - I_2R_2; & (2) \\ -\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 = I_2R_2 + I_3R_3. & (3) \end{cases}$$

Виразимо з рівняння (2) I_1: $I_1R_1 = -I_2R_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$; $I_1 = -\dfrac{I_2R_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_1}$. (4)

Виразимо з рівняння (3) I_3: $I_3R_3 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 - I_2R_2$; $I_3 = \dfrac{-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 - I_2R_2}{R_3}$.(5)

Підставимо (4) та (5) у рівняння (1):

$$-\frac{I_2R_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_1} - I_2 + \frac{-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 - I_2R_2}{R_3} = 0;$$

$$\frac{-I_2R_2R_3 - \varepsilon_1R_3 - \varepsilon_2R_3 - I_2R_1R_3 - \varepsilon_2R_1 + \varepsilon_4R_1 - \varepsilon_3R_1 - I_2R_1R_2}{R_1R_3} = 0;$$

$$-I_2R_2R_3 - \varepsilon_1R_3 - \varepsilon_2R_3 - I_2R_1R_3 - \varepsilon_2R_1 + \varepsilon_4R_1 - \varepsilon_3R_1 - I_2R_1R_2 = 0;$$

$$I_2R_2R_3 + I_2R_1R_3 + I_2R_1R_2 = -\varepsilon_1R_3 - \varepsilon_2R_3 - \varepsilon_2R_1 + \varepsilon_4R_1 - \varepsilon_3R_1;$$

$$I_2 = \frac{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R_3 + (-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3)R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}. \ (6)$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[I] = \frac{B \cdot Ом + B \cdot Ом}{Ом^2} = \frac{B \cdot Ом}{Ом^2} = \frac{B}{Ом} = \frac{\frac{B}{1}}{\frac{B}{A}} = \frac{B \cdot A}{B} = A.$$

Для знаходження I_2 та I_3 підставимо рівняння (6) у рівняння (4) та (5):

$$I_1 = -\frac{\dfrac{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R_2R_3 + (-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3)R_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_1} =$$

$$= -\frac{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R_2R_3 + (-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3)R_1R_2}{R_1^2R_2 + R_1^2R_3 + R_1R_2R_3} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_1}. \ (7)$$

$$I_3 = \frac{-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 - \dfrac{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R_2R_3 + (-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3)R_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}}{R_3} =$$

$$= \frac{-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3}{R_3} - \frac{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R_2R_3 + (-\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3)R_1R_2}{R_1R_2R_3 + R_1R_3^2 + R_2R_3^2}. \ (8)$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[I] = \frac{B}{Ом} - \frac{B \cdot Ом^2 + B \cdot Ом^2}{Ом^3} = \frac{B}{Ом} - \frac{B}{Ом} = \frac{B}{Ом} = \frac{\frac{B}{1}}{\frac{B}{A}} = \frac{B \cdot A}{B} = A.$$

Підставимо числові значення у формули (6) – (8):

$$I_1 = -\frac{-(15+5)\cdot 5\cdot 10 + (-5+35-10)\cdot 2\cdot 5}{4\cdot 5 + 4\cdot 10 + 2\cdot 5\cdot 10} - \frac{20}{2} = 5 - 10 = -5\ (A),$$

$$I_2 = \frac{-(15+5)\cdot 10 + (-5+35-10)\cdot 2}{2\cdot 5 + 2\cdot 10 + 5\cdot 10} = -2\ (A),$$

$$I_3 = \frac{-5+35-10}{10} - \frac{-(15+5)\cdot 5\cdot 10 + (-5+35-10)\cdot 2\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 100 + 5\cdot 100} = 3\ (A).$$

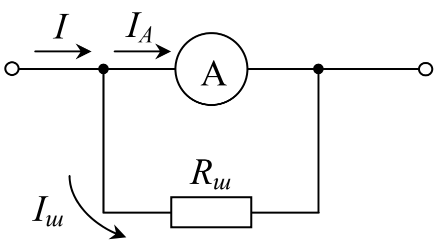
Знак “–” означає, що напрями струмів I_1 та I_2 насправді протилежні обраним. Для перевірки струмів підставимо їх значення у рівняння (1): $-5+2+3=0$. Отже сили струмів знайдені вірно.

Задача 12.5. Шкала амперметра, призначеного для вимірювання сили струму до 500 *мА* з внутрішнім опором 3 *Ом*, розділена на 50 поділок. Який опір шунта потрібно взяти, щоб цим амперметром можна було вимірювати силу струму до 2 *А*? Якої довжини має бути шунт, якщо для його виготовлення використовується нікеліновий дріт з питомим опором 400 *нОм·м* та діаметром 0,35 *мм*? Розрахувати ціну поділки амперметра у першому та другому випадках.

Дано:

$R_ш - ?$, $l_ш - ?$,
$C_1 - ?$, $C_2 - ?$

$R_a = 3\ Ом$
$I_a = 0{,}5\ A$
$I = 2\ A$,
$N = 50$
$\rho = 4\cdot 10^{-7}\ Ом\cdot м$
$d = 0{,}35\cdot 10^{-3}\ м$



Для вимірювання сили струму I паралельно до приладу необхідно підключити шунт, опір якого $R_ш$. Струм I має ділитись таким чином, щоб через амперметр протікав струм силою I_a, а “надлишковий” струм силою $I_ш$ йшов через шунт.

Тому загальний струм при паралельному підключенні дорівнює сумі $I = I_a + I_ш$. (1)

Згідно до закону Ома, опір шунта $R_ш = \dfrac{U_ш}{I_ш}$. (2)

Виразимо з рівняння (1) $I_ш$: $I_ш = I - I_a$. (3)

Оскільки шунт підключено паралельно до амперметра, то напруги на них однакові: $U_ш = U_a = I_a R_a$. (4)

Підставимо рівняння (3) та (4) у (2): $R_ш = \dfrac{I_a R_a}{I - I_a}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[R_ш] = \frac{A\cdot Ом}{A - A} = \frac{A\cdot Ом}{A} = Ом.$$

Підставимо числові значення:

$$R_ш = \frac{0,5 \cdot 3}{2 - 0,5} = 1 \ Ом.$$

Довжину шунта знайдемо використовуючи формулу $R_ш = \rho \frac{l_ш}{S}$. Виразимо звідси $l_ш$: $l_ш = \frac{R_ш S}{\rho}$. Площу поперечного перерізу знайдемо як площу кола діаметром *d*: $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Тоді довжина шунта $l_ш = \frac{\pi d^2 R_ш}{4\rho}$.

Виконаємо перевірку розмірності: $[l] = \frac{м^2 \cdot Ом}{Ом \cdot м} = м$.

Підставимо числові значення: $l_ш = \frac{3,14 \cdot 0,1225 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 10^{-7}} \approx 0,24 \ (м)$.

Знайдемо ціну поділки без шунта: $C_1 = \frac{I_a}{N}$; $C_1 = \frac{0,5}{50} = 10 \left(\frac{мА}{под}\right) = 0,01 \left(\frac{А}{под}\right)$.

Знайдемо ціну поділки з шунтом: $C_2 = \frac{I_ш}{N}$; $C_2 = \frac{2}{50} = 40 \left(\frac{мА}{под}\right) = 0,04 \left(\frac{А}{под}\right)$.

Тема 13. ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ ТВЕРДИХ ТІЛ.

Задача 13.1. Визначити середню швидкість напрямленого руху електронів в мідному провіднику діаметром $d = 1{,}8\,мм$, якщо сила струму в ньому $10\,A$.

Дано:

$<\upsilon> - ?$
$d = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\,м$
$I = 10A$
$\rho = 894\,\frac{кг}{м^3}$
$M = 64 \cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{моль}$

Густина струму в провіднику:

$$\vec{j} = n_0 e \vec{\upsilon}\,;\; j = n_0 e <\upsilon>;\; j = \frac{I}{S}.$$

Концентрація носіїв заряду:

$$n_0 = \frac{N_A}{V_M};\; V_M = \frac{M}{\rho};\; n_0 = \frac{N_A \rho}{M};\; \frac{I}{S} = \frac{N_A \rho}{M} e <\upsilon>.$$

Звідси $<\upsilon> = \dfrac{IM}{N_A \rho S e}$; $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Тоді $<\upsilon> = \dfrac{4IM}{N_A \rho d^2 e \pi}$;

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[<\upsilon>] = \frac{A \cdot \frac{кг}{моль}}{\frac{1}{моль} \cdot \frac{кг}{м^3} \cdot м^2 \cdot Кл} = \frac{A \cdot м}{Кл} = \frac{Кл \cdot м}{Кл \cdot с} = \frac{м}{с}.$$

Підставимо числові значення:

$$<\upsilon> = \frac{4 \cdot 10 \cdot 64 \cdot 10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot 894 \cdot 3{,}24 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}14} \approx 3 \cdot 10^{-3} \left(\frac{м}{с}\right).$$

Задача 13.2. Визначити величину заряду, який проходить через поперечний переріз срібного провідника $S = 9\,мм^2$ і довжиною $l = 50\,м$ за час гальмування, якщо лінійна швидкість елементів обмотки котушки $\upsilon = 60\,\frac{м}{с}$.

Дано:

$q - ?$
$S = 9 \cdot 10^{-6}\,м^2$
$l = 50\,м$, $\upsilon = 60\,м$
$\rho = 1{,}66 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м$

При проходженні струму по провіднику з опором R виконується робота $A = I^2 R t$; $I \neq const$ на протязі всього часу гальмування.

$I = I_0 + kt$. Звідки $k = \dfrac{I - I_0}{t}$. Тут $I = \dfrac{dq}{dt}$.

Знайдемо вираз для q: $dq = Idt$; $q = \int\limits_0^t Idt$;

$$q = \int\limits_0^t (I_0 + kt)dt = \int\limits_0^t I_0 dt + \int\limits_0^t ktdt = I_0 \int\limits_0^t dt + k \int\limits_0^t tdt = I_0 t + k\frac{t^2}{2} = I_0 t + \frac{(I - I_0)}{t}\frac{t^2}{2} =$$

$$= I_0 t + \frac{1}{2}(I - I_0)t = I_0 t + \frac{1}{2}It - \frac{1}{2}I_0 t = \frac{t}{2}(I + I_0).$$

Якщо враховувати, що у даному випадку $I_0 = I$, а $I = 0$, то $q = \frac{1}{2}It$. Звідки $2q = It$. $A = IRIt = 2qIR$.

З іншого боку, ця робота може бути виражена як: $A = -n\Delta E_k = -n\left(\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}\right)$.

Враховуючи, що швидкість змінюється від υ до нуля: $A = \frac{nm\upsilon^2}{2}$. Тут n – загальна кількість вільних електронів у провідниках.

Оскільки $I = jS$, а $j = en_0\upsilon$, де n_0 – кількість вільних електронів в одиниці об'єму, тобто концентрація, то $I = en_0\upsilon S$.

Тоді $A = 2en_0\upsilon SqR$; $n = n_0V = n_0Sl$.

Тоді $A = \frac{2eRq\upsilon_n}{l}$; $\frac{2eRq\upsilon_n}{l} = \frac{nm\upsilon^2}{2}$; $4eRq = m\upsilon l$; $q = \frac{m\upsilon l}{4eR}$; $R = \rho\frac{l}{S}$.

Таким чином заряд $q = \frac{mvlS}{4e\rho l} = \frac{mvS}{4e\rho}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[q] = \frac{кг \cdot м \cdot м^2}{с \cdot Кл \cdot Ом \cdot м} = \frac{кг \cdot м^2}{Кл \cdot с \cdot Ом} = \frac{кг \cdot м^2}{А \cdot с^2 \cdot Ом} = \frac{кг \cdot м \cdot м}{А \cdot с^2 \cdot Ом} = \frac{Н \cdot м}{А \cdot Ом} = \frac{Дж}{А \cdot Ом} =$$

$$= \frac{Дж}{В} = \frac{А \cdot В \cdot с}{В} = А \cdot с = Кл.$$

Підставимо числові значення:

$$q = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 60 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-8}} = 46\ (нКл)$$

Задача 13.3. Металевий диск радіусом $R = 10 см$ рівномірно обертається з частотою $\omega = 30\ \frac{об}{с}$. Визначити різницю потенціалів між центром і краєм диску.

Дано:

$\Delta\varphi - ?$
$R = 0{,}1 м$
$\omega = 30\ \frac{об}{с}$

Вільні електрони переміщуються до краю диску під дією сили інерції. Тому край диска зарядиться від'ємно, а центр – додатньо. Зміщення зарядів створює електричне поле, завдяки чому виникає доцентрова сила, що зрівноважує силу інерції: $m\omega^2R = Ee$. Тоді $E = \frac{m\omega^2R}{e}$, де E – напруженість поля у даній точці.

Модуль напруженості поля лінійно залежить від радіуса диска R і змінюється від $E_0 = 0$ у центрі, до $E = \frac{m\omega^2R}{e}$ на краю диска.

$E = E_0 + kR$. Звідси $k = \dfrac{E - E_0}{R}$.

Шукана різниця потенціалів дорівнює роботі, яку необхідно виконати при перенесенні одиничного заряду від краю диска до його центра: $d\varphi = EdR$.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^R EdR = \int_0^R (E_0 + kR)dR = \int_0^R E_0 dR + \int_0^R kRdR = E_0 R + \frac{kR^2}{2} = E_0 R + \frac{1}{2}\left(\frac{E - E_0}{R}\right)R^2 =$$

$$= E_0 R + \frac{1}{2}ER - \frac{1}{2}E_0 R = \frac{R}{2}(E_0 + E).$$

Враховуючи, що $E_0 = 0$: $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{RE}{2} = \dfrac{m\omega^2 R^2}{2e}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\varphi] = \frac{кг \cdot м^2}{с^2 \cdot Кл} = \frac{Н \cdot м}{Кл} = \frac{Дж}{Кл} = \frac{А \cdot В \cdot с}{Кл} = \frac{Кл \cdot В}{Кл} = В.$$

Підставимо числові значення:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 900 \cdot 0{,}01}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-12} (В).$$

Задача 13.4. Власна електропровідність чистого германію при $27^o C$ дорівнює $\sigma = 2{,}13 \dfrac{1}{Ом \cdot м}$. Рухливість електронів і дірок відповідно дорівнює $0{,}38 \dfrac{м^2}{В \cdot с}$ і $0{,}18 \dfrac{м^2}{В \cdot с}$. Визначити концентрацію носіїв струму та ширину забороненої зони. Передекспоненційний множник $A = 9{,}5 \cdot 10^{31} \dfrac{1}{м^3}$.

Дано:

$n - ?$

$\Delta E - ?$

$T = 300K$

$\sigma = 2{,}13 \dfrac{1}{Ом \cdot м}$

$U_n = 0{,}38 \dfrac{м^2}{В \cdot с}$

$U_p = 0{,}18 \dfrac{м^2}{В \cdot с}$

$A = 9{,}5 \cdot 10^{31} \dfrac{1}{м^3}$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \dfrac{Дж}{К}$

У випадку власної електропровідності концентрація електронів і дірок германію однакова, а отже: $\sigma = en(U_n + U_p)$.

Звідси $n = \dfrac{\sigma}{e(U_n + U_p)}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[n] = \frac{\frac{1}{Ом \cdot м}}{Кл \cdot \frac{м^2}{В \cdot с}} = \frac{В \cdot с}{Ом \cdot Кл \cdot м^2 \cdot м} = \frac{В \cdot с}{Ом \cdot Кл \cdot м^3} = \frac{А \cdot В \cdot с}{В \cdot А \cdot с \cdot м^3} = \frac{1}{м^3}$$

Підставимо числові значення:

$$n = \frac{2{,}13}{1{,}6 \cdot 10^{-19}(0{,}38 + 0{,}18)} \approx 2{,}4 \cdot 10^9 \left(\frac{1}{м^3}\right).$$

Для визначення ширини забороненої зони, або енергії активації ΔE використаємо вираз: $n = Ae^{-\frac{\Delta E}{kT}}$.

Прологарифмуємо праву і ліву частини рівняння:

$$\ln n = \ln\left(Ae^{-\frac{\Delta E}{kT}}\right) = \ln A + \ln\left(e^{-\frac{\Delta E}{kT}}\right) = \ln A - \frac{\Delta E}{kT}\ln e;\ \ln e = 1.$$

Тоді $\ln n = \ln A - \frac{\Delta E}{kT}$; $\frac{\Delta E}{kT} = \ln A - \ln n$.

$$\Delta E = kT(\ln A - \ln n) = kT\ln\frac{A}{n}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\Delta E] = \frac{Дж}{K}\cdot K\cdot\ln\frac{\frac{1}{м^3}}{\frac{1}{м^3}} = Дж.$$

Підставимо числові значення:

$$\Delta E = 1{,}38\cdot10^{-23}\cdot300\cdot29 = 1{,}2\cdot10^{-19}(Дж) = 0{,}75(еВ).$$

Задача 13.5. Визначити ширину забороненої зони кристалу кремнію, якщо при нагріванні від температури $0^\circ C$ до $10^\circ C$ його питома провідність зростає у 2,28 разів.

Дано:

$\Delta E - ?$
$T_1 = 273K$
$T_2 = 283K$
$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2{,}28$
$k = 1{,}38\cdot10^{-23}\frac{Дж}{K}$

Питома електропровідність власних напівпровідників може бути знайдена за формулою: $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$. Тоді питома електропровідність кремнію при температурі T_1 становить $\sigma_1 = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT_1}}$, а при температурі T_2 – $\sigma_2 = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT_2}}$.

Тоді $$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT_2}}}{\sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT_1}}} = \frac{e^{-\frac{\Delta E}{2kT_2}}}{e^{-\frac{\Delta E}{2kT_1}}} = e^{\left(\frac{\Delta E}{2kT_1} - \frac{\Delta E}{2kT_2}\right)} = e^{\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}.$$

Виразимо звідси ширину забороненої зони ΔE:

$$\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right);\ \Delta E = \frac{2k\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}.$$

Виконаємо перевірку розмірності: $[E]=\dfrac{\dfrac{Дж}{K}}{\dfrac{1}{K}-\dfrac{1}{K}}=\dfrac{\dfrac{Дж}{K}}{\dfrac{1}{K}}=\dfrac{Дж\cdot K}{K}=Дж$.

Підставимо числові значення:

$$\Delta E=\frac{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot \ln 2{,}28}{\dfrac{1}{273}-\dfrac{1}{283}}=\frac{2{,}275\cdot 10^{-23}}{0{,}00013}\approx 1{,}75\cdot 10^{-19}\ (Дж)\approx 1{,}1\ (еВ).$$

Тема 14. *КОНТАКТНІ ЯВИЩА В МЕТАЛАХ ТА НАПІВПРОВІДНИКАХ.*

Задача 14.1. Визначити контактну різницю потенціалів між міддю і платиною при $T = 800\,K$, якщо робота виходу електронів для міді $A_1 = 4{,}272\,eB$, для платини $A_2 = 6{,}275\,eB$. Стала термопари $\alpha = 7{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{B}{K}$.

Дано:

$(\varphi_1 - \varphi_2) - ?$

$T = 800\,K$

$A_1 = 4{,}272\,eB = 6{,}84 \cdot 10^{-19}\,Дж$

$A_2 = 6{,}275\,eB = 1 \cdot 10^{-18}\,Дж$

$\alpha = 7{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{B}{K}$

Для визначення контактної різниці потенціалів скористаємось відомою формулою:

$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e}\ln\frac{n_1}{n_2}$, де n_1 та n_2 – у міді та платині відповідно.

Якщо відома стала термопари: $\alpha = \frac{k}{e}\ln\frac{n_1}{n_2}$, то можна записати: $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e} + \alpha T$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\Delta\varphi] = \frac{Дж - Дж}{Кл} + \frac{B}{K} \cdot K = \frac{Кл \cdot B - Кл \cdot B}{Кл} + B = \frac{Кл \cdot B}{Кл} + B = B + B = B.$$

Таким чином:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{6{,}8352 \cdot 10^{-19} - 1 \cdot 10^{-18}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} + 7{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 800 = 1{,}984\,(B).$$

Задача 14.2. Визначити за допомогою диференціальної термопари температуру муфельної печі, якщо другий спай термопари знаходиться при температурі $T_2 = 1800\,K$, а стрілка гальванометра, що приєднана до термопари відхилилась на $n = 25$ поділок. Стала термопари $\alpha = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{B}{K}$, внутрішній опір гальванометра $r = 2\,кОм$, а ціна поділки $C = 10^{-8}\,A$.

Дано:

$T_1 - ?$

$T_2 = 1800\,K$

$n = 25$

$\alpha = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{B}{K}$

$r = 2 \cdot 10^3\,Ом$

$C = 10^{-8}\,A$

Термоелектрорушійна сила:

$$\varepsilon_T = \frac{k}{e}\ln\frac{n_1}{n_2}(T_1 - T_2) = \alpha(T_1 - T_2).$$

Нехтуючи опором термопари і з’єднувальних провідників, можна записати $\varepsilon_T = I_2$, або, враховуючи умову задачі: $Cnr = \alpha(T_1 - T_2)$ звідки: $T_1 = \frac{Cnr}{\alpha} + T_2$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[T]=\frac{A\cdot 1\cdot Ом}{\frac{B}{K}}+K=\frac{B\cdot K}{B}+K=K+K=K$$

Підставимо числові значення: $T_1=\frac{10^{-8}\cdot 25\cdot 2\cdot 10^{-3}}{0{,}5\cdot 10^{-6}}+1800\approx 2800(K)$.

Задача 14.3. Термопара вісмут-залізо ($\alpha=92\cdot 10^{-6}\frac{B}{K}$) опором $R=5\ Ом$ приєднано до гальванометра з внутрішнім опором $R_1=110\ Ом$. Яку силу струму покаже гальванометр, якщо один спай термопари поміщено у воду, що кипить, а другий в посудину Д'юара, в якій міститься суміш води і льоду.

Дано:

$I-?$
$\alpha=92\cdot 10^{-6}\frac{B}{K}$
$R=5\ \ Ом$
$R_1=110\ \ Ом$
$T_2=373K$
$T_1=273K$

Сила струму у розглядуваному колі може бути обчислена за законом Ома для повного кола: $I=\frac{\varepsilon_T}{R+R_1}$;

Термоелектрорушійну силу визначимо так: $\varepsilon_T=\alpha(T_2-T_1)$.

Таким чином: $I=\frac{\alpha(T_2-T_1)}{R+R_1}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[I]=\frac{\frac{B}{K}(K-K)}{Ом}=\frac{B\cdot K}{K\cdot Ом}=\frac{B}{Ом}=A$$

Підставимо числові значення: $I=\frac{92\cdot 10^{-6}\cdot 100}{115}=80\cdot 10^{-6}(A)$.

Задача 14.4. Визначити відношення концентрацій електронів у вісмуті та сурмі, якщо при нагріванні одного із спаїв на $200^{O}C$ виникає ЕРС $22мB$.

Дано:

$\frac{n_1}{n_2}-?$
$\Delta T=200\,K$
$\varepsilon=22\cdot 10^{-3}B$

Термоелектрорушійна сила: $\varepsilon=\alpha\Delta T$; $\alpha=\frac{k}{e}\ln\frac{n_1}{n_2}$;

$\varepsilon=\frac{k}{e}\ln\frac{n_1}{n_2}\Delta T$; $\ln\frac{n_1}{n_2}=\frac{\varepsilon e}{k\Delta T}$; $\frac{n_1}{n_2}=e^{\frac{\varepsilon e}{k\Delta T}}$;

Підставимо числові значення:

$$\frac{n_1}{n_2}=e^{\frac{22\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 200}}=e^{1{,}2754}=3{,}58.$$

Тема 15. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ В ЕЛЕКТРОЛІТАХ, ГАЗАХ ТА ВАКУУМІ.

Задача 15.1. Визначити електропровідність розчину кухонної солі, якщо при розчиненні m = 2,92 *г* солі в 1 *л* води 44 % молекул солі дисоціювали на іони. Рухливість іонів $U_+ = 45\cdot10^{-9}\,\frac{м^2}{В\cdot с}$ та $U_- = 68\cdot10^{-9}\,\frac{м^2}{В\cdot с}$.

Дано:

$\sigma - ?$

$m = 2{,}92\cdot10^{-3}$ *кг*

$V = 10^{-3}\,м^3$

$\alpha = 0{,}44$

$U_+ = 45\cdot10^{-9}\,\frac{м^2}{В\cdot с}$

$U_- = 68\cdot10^{-9}\,\frac{м^2}{В\cdot с}$

$N_A = 6{,}022\cdot10^{23}\,\frac{1}{моль}$

$M = 58\cdot10^{-3}\,\frac{кг}{моль}$

$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ *Кл*

Електропровідність електроліту можна визначити за формулою:

$$\sigma = \alpha q n_0 (U_+ + U_-). \qquad (1)$$

Кількість молекул розчиненої речовини в одиниці об’єму $n_0 = \frac{N}{V}$. Кількість молекул солі $N = \nu N_A$. $\nu = \frac{m}{M}$, отже $N = \frac{mN_A}{M}$.

Тоді
$$n_0 = \frac{mN_A}{MV}. \qquad (2)$$

Враховуючи, що при дисоціації $NaCl$ утворюються одновалентні іони, можемо записати, що

$$q = e. \qquad (3)$$

Підставимо рівняння (2) та (3) у (1):

$$\sigma = \frac{\alpha e m N_A}{MV}(U_+ + U_-).$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\sigma] = \frac{Кл\cdot кг\cdot\frac{1}{моль}}{\frac{кг}{моль}\cdot м^3}\left(\frac{м^2}{В\cdot с}+\frac{м^2}{В\cdot с}\right) = \frac{\frac{Кл\cdot кг}{моль}}{\frac{кг\cdot м^3}{моль}}\cdot\frac{м^2}{В\cdot с} = \frac{Кл\cdot кг\cdot моль\cdot м^2}{кг\cdot м^3\cdot моль\cdot В\cdot с} = \frac{Кл}{м\cdot В\cdot с} =$$
$$\frac{А\cdot с}{м\cdot В\cdot с} = \frac{1}{Ом\cdot м}.$$

Підставимо числові значення:

$$\sigma = \frac{0{,}44\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot2{,}92\cdot10^{-3}\cdot6{,}022\cdot10^{23}}{58\cdot10^{-3}\cdot10^{-3}}\left(45\cdot10^{-9}+68\cdot10^{-9}\right)\approx 0{,}24\left(\frac{1}{Ом\cdot м}\right).$$

Задача 15.2. При протіканні струму через розчин мідного купоросу на електроді площею $S = 9{,}65\,см^2$, при густині струму $j = 0{,}02\,\frac{А}{см^2}$, виділяється $m = 38{,}4\,мг$ міді. Визначити час проходження струму.

Дано:

$t - ?$	
$S = 9{,}65 \cdot 10^{-4}\ м^2$	
$j = 2 \cdot 10^2\ \dfrac{А}{м^2}$	
$m = 3{,}84 \cdot 10^{-2}\ кг$	
$A = 64\ \dfrac{кг}{моль}$	
$F = 9{,}65 \cdot 10^4\ \dfrac{Кл}{моль}$	
$z = 2$	

Для визначення часу проходження через електроліт скористаємось законом Фарадея: $m = kIt$, звідки $t = \dfrac{m}{kI}$.

Так, як $k = \dfrac{1}{F} \cdot \dfrac{A}{z}$, а I можна представити як jS, запишемо: $t = \dfrac{mFz}{AjS}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[t] = \frac{кг \cdot \dfrac{Кл}{моль}}{\dfrac{кг}{моль} \cdot \dfrac{А}{м^2} \cdot м^2} = \frac{кг \cdot Кл \cdot моль \cdot м^2}{моль \cdot кг \cdot А \cdot м^2} = \frac{Кл}{А} = \frac{А \cdot с}{А} = с.$$

Підставимо числові значення в одержану формулу і отримаємо:

$$t = \frac{3{,}84 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}65 \cdot 10^4 \cdot 2}{64 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^4} = 600\,(с) = 10\,хв.$$

Задача 15.3. Через підкислену воду протягом t = 1 *хв* пропускають струм силою I = 1 *А*. Який об'єм займе при нормальних умовах гримучий газ, який при цьому виділиться?

Дано:

$V - ?$	
$t = 60\,с$	
$I = 1\,А$	
$M_1 = 2 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{кг}{моль}$	
$M_2 = 32 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{кг}{моль}$	
$V_M = 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{м^3}{моль}$	
$F = 9{,}65 \cdot 10^4\ \dfrac{Кл}{моль}$	
$z_1 = 1,\ z_2 = 2$	
$A_1 = 1\ \dfrac{кг}{моль}$	
$A_2 = 16\ \dfrac{кг}{моль}$	

Об'єм гримучого газу V дорівнює сумі об'ємів водню V_1 та кисню V_2, які утворюються при електролізі, тобто

$$V = V_1 + V_2. \qquad (1)$$

Об'єми водню та кисню знайдемо із залежностей

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_1 V_M}{M_1} \qquad (2)$$

та

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{m_2 V_M}{M_2} \qquad (3)$$

Підставимо рівняння (2) та (3) у рівняння (1):

$$V = V_M\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right). \qquad (4)$$

Масу водню m_1, яка виділяється під час електролізу, визначаємо користуючись законом Фарадея:

$$m_1 = k_1 It,\ k_1 = \frac{A_1}{Fz_1}.$$

Отже,

$$m_1 = \frac{A_1 It}{Fz_1}. \qquad (5)$$

Аналогічно знаходимо масу кисню:

$$m_2 = \frac{A_2 It}{F z_2}. \qquad (6)$$

Підставимо рівняння (5) та (6) у (4):

$$V = V_M \left(\frac{A_1 It}{M_1 F z_1} + \frac{A_2 It}{M_2 F z_2} \right) = \frac{V_M It}{F} \left(\frac{A_1}{M_1 z_1} + \frac{A_2}{M_2 z_2} \right). \qquad (7)$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[V] = \frac{\frac{м^3}{моль} \cdot A \cdot c}{\frac{Кл}{моль}} \cdot \left(\frac{\frac{кг}{моль}}{\frac{кг}{моль}} - \frac{\frac{кг}{моль}}{\frac{кг}{моль}} \right) = \frac{м^3 \cdot A \cdot c \cdot моль}{моль \cdot Кл} = \frac{м^3 \cdot A \cdot c}{A \cdot c} = м^3.$$

Отже, при нормальних умовах гримучий газ займе об'єм:

$$V = \frac{22{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 60}{9{,}65 \cdot 10^4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1} + \frac{16}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2} \right) \approx 1{,}05 \cdot 10^{-2} \left(м^3 \right).$$

Задача 15.4. У скільки разів збільшиться струм насичення термоелектронної емісії при торіюванні вольфрамового катода при робочій температурі $T = 1860\ K$, якщо емісійна стала та робота виходу чистого і торійованого вольфраму відповідно становлять $B_1 = 6 \cdot 10^5 \frac{A}{K^2 \cdot м^2}$; $A_1 = 4{,}54\ еВ$; $B_2 = 0{,}3 \cdot 10^5 \frac{A}{K^2 \cdot м^2}$; $A_2 = 2{,}63\ еВ$.

Дано:

$\frac{j_2}{j_1} - ?$

$T = 1860 K$

$A_1 = 4{,}54 еВ =$

$= 7{,}26 \cdot 10^{-19}\ Дж$

$A_2 = 2{,}63 еВ =$

$= 4{,}21 \cdot 10^{-19}\ Дж$

$B_1 = 6 \cdot 10^5 \frac{A}{K^2 \cdot м^2}$

$B_2 = 0{,}3 \cdot 10^5 \frac{A}{K^2 \cdot м^2}$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{K}$

Густина струму насичення при температурі T у процесі термоелектронної емісії з чистого вольфраму може бути знайдена за допомогою рівняння Річардсона-Дешмана:

$$j_1 = B_1 T^2 e^{-\frac{A_1}{kT}}.$$

Аналогічно, густина струму з торійованого вольфрамового катоду:

$$j_2 = B_2 T^2 e^{-\frac{A_2}{kT}}.$$

Отже, збільшення струму насичення можна визначити, як відношення

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{B_2 T^2 e^{-\frac{A_2}{kT}}}{B_1 T^2 e^{-\frac{A_1}{kT}}} = \frac{B_2}{B_1} e^{-\frac{A_2}{kT} + \frac{A_1}{kT}} = \frac{B_2}{B_1} e^{\frac{A_1 - A_2}{kT}}.$$

Підставимо числові значення:

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{0{,}3 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^5} e^{\frac{7{,}26 \cdot 10^{-19} - 4{,}21 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 1860}} \approx 7{,}2 \cdot 10^3.$$

Задача 15.5. Між пластинами конденсатора, площею 250 *см²* кожна, знаходиться 375 *см³* водню. Концентрація іонів в газі $5{,}3\cdot10^{7}\ \frac{1}{см^{3}}$. Яку напругу потрібно прикласти до конденсатора, щоб викликати струм силою 2 *мкА*? Рухливість іонів $U_{+}=5{,}4\frac{см^{2}}{В\cdot с}$ і $U_{-}=7{,}4\frac{см^{2}}{В\cdot с}$.

Дано:

$U-?$
$S=2{,}5\cdot10^{-2}\ м^{2}$
$V=3{,}75\cdot10^{-4}\ м^{3}$
$n_0=5{,}3\cdot10^{13}\ \frac{1}{м^{3}}$
$I=2\cdot10^{-6}\ А$
$U_{+}=5{,}4\cdot10^{-4}\ \frac{м^{2}}{В\cdot с}$
$U_{-}=7{,}4\cdot10^{-4}\ \frac{м^{2}}{В\cdot с}$

Напруга U на пластинах конденсатора зв'язана з напруженістю електричного поля співвідношенням

$$U=Ed\,.$$

Напруженість поля можна знайти, знаючи густину струму у газі: $j=q_0n_0\left(U_{+}+U_{-}\right)E$.

Іони водню мають заряд $q_0=e$, тоді $j=en_0\left(U_{+}+U_{-}\right)E$.

Звідси $$E=\frac{j}{en_0\left(U_{+}+U_{-}\right)}.$$

Густина струму може бути знайдена, як $j=\frac{I}{S}$, тоді

$$E=\frac{I}{en_0S\left(U_{+}+U_{-}\right)}.$$

Отже, $U=\frac{Id}{en_0S\left(U_{+}+U_{-}\right)}$.

Відстань між пластинами конденсатора d може бути знайдена, як $d=\frac{V}{S}$, тоді

$$U=\frac{IV}{en_0S^{2}\left(U_{+}+U_{-}\right)}.$$

Виконаємо перевірку розмірностей:

$$\left[U\right]=\frac{А\cdot м^{3}}{Кл\cdot\frac{1}{м^{3}}\cdot\frac{м^{2}}{В\cdot с}\cdot м^{4}}=\frac{А\cdot м^{3}\cdot м^{3}\cdot В\cdot с}{Кл\cdot м^{6}}=\frac{А\cdot В\cdot с}{Кл}=\frac{Кл\cdot В}{Кл}=В\,.$$

Підставимо числові значення:

$$U=\frac{2\cdot10^{-6}\cdot3{,}75\cdot10^{-4}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5{,}3\cdot10^{13}\cdot6{,}25\cdot10^{-4}\cdot\left(5{,}4\cdot10^{-4}+7{,}4\cdot10^{-4}\right)}\approx111\left(В\right).$$

Задача 15.6. Знайти густину струму насичення у газорозрядній трубці, відстань між електродами якої 10 *см*, якщо під дією космічного випромінювання у 1 *см³* трубки щосекунди виникає 10 пар одновалентних іонів.

Дано:

$j_н - ?$
$n = 10^5 \dfrac{1}{м^3 \cdot с}$
$d = 0{,}1\ м$
$z = 1$

Густина струму насичення $j_н = \dfrac{I_н}{S}$, отже $I_н = j_н S$.

Кількість пар іонів, що утворюються в одиниці об'єму за одиницю часу $n = \dfrac{I_н}{qdS} = \dfrac{j_н S}{qdS} = \dfrac{j_н}{qd}$.

Тому густина струму насичення $j_н = qdn_0$.

Враховуючи, що за умовою задачі валентність іонів $z = 1$, можна записати, що $q = ze = e$, тоді

$$j_н = edn_0.$$

Виконаємо перевірку розмірності: $[j_н] = Кл \cdot м \cdot \dfrac{1}{м^3 \cdot с} = \dfrac{Кл}{м^2 \cdot с} = \dfrac{А}{м^2}$.

Підставимо числові значення:

$$j_н = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}1 \cdot 10^5 = 1{,}6 \cdot 10^{-15} \left(\frac{А}{м^2} \right).$$

Задача 15.7. В плоскому повітряному конденсаторі з площею пластин 100*см*^{2} кожна і відстанню між ними 5 *см* при іонізації рентгенівськими променями протікає струм насичення 10^{-7} *А*. Визначити максимально можливу кількість іонів в 1 *м*^{3}, якщо іони одновалентні, а коефіцієнт дисоціації $\gamma = 1{,}67 \cdot 10^{-12}$.

Дано:

$n_0 - ?$
$S = 10^{-2}\ м^2$
$d = 5 \cdot 10^{-2}\ м$
$I_н = 10^{-7}\ А$
$z = 1$
$\gamma = 1{,}67 \cdot 10^{-12}$

Кількість пар іонів, що утворюються в одиниці об'єму за одиницю часу

$$n = \frac{I_н}{qdS}.$$

Згідно до умови задачі, валентність іонів $z = 1$, тоді $q = ze = e$ і

$$n = \frac{I_н}{edS}.$$

Найбільша кількість пар іонів, що знаходитимуться у одиниці об'єму, визначається формулою: $n' = \sqrt{\dfrac{n}{\gamma}} = \sqrt{\dfrac{I_н}{ed\gamma S}}$.

Оскільки кількість пар іонів n', то максимально можлива кількість іонів в одиниці об'єму $n_0 = 2n'$.

Тоді

$$n_0 = 2\sqrt{\frac{I_н}{ed\gamma S}}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[n_0] = \sqrt{\frac{A \cdot c}{Кл \cdot м \cdot м^3 \cdot м^3}} = \sqrt{\frac{Кл}{Кл \cdot м^6}} = \sqrt{\frac{1}{м^6}} = \frac{1}{м^3}.$$

Підставимо числові значення:

$$n_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{10^7}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}} \approx 5{,}5 \cdot 10^{13} \left(\frac{1}{м^3}\right).$$

МОДУЛЬ 3. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

<u>Тема 16</u>. ІНДУКЦІЯ І НАПРУЖЕНІСТЬ МАГНІТНОГО ПОЛЯ.

Задача 16.1. По провіднику протікає струм силою $2A$. Визначити магнітну індукцію поля, створеного цим струмом в точці, що знаходиться на перпендикулярі до середини відрізку провідника довжиною $L = 20 см$ на відстані $d = 20 см$ від нього.

Дано:

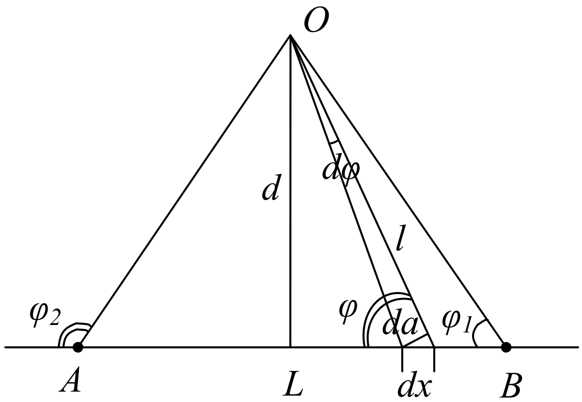
$B - ?$

$I = 2A$

$L = 0{,}2\, м$

$d = 0{,}2\, м$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{H}{A^2}$



Побудуємо малюнок, що відповідає умові задачі, обравши елементарний відрізок dx, по якому протікає струм, а також позначимо відстань від точки O до нього через l, а кут між dx і радіус-вектором l – через φ. Кут, під яким видно відрізок da з точки O позначимо через $d\varphi$.

Тоді згідно закону Біо-Савара-Лапласа: $dB = \dfrac{\mu\mu_0 I dx \sin\varphi}{4\pi l^2}$.

Як видно з аналізу виразу, в нього входять три змінні величини: dx, l і φ.

Зручно виразити всі змінні через змінну величину φ: $l = \dfrac{d}{\sin\varphi}$;

$$dx = \frac{da}{\sin\varphi} = \frac{ldl}{\sin\varphi} = \frac{dd\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Отже: $dB = \dfrac{\mu\mu_0 I d d\varphi \sin^3\varphi}{\sin^2\varphi \pi d^2} = \dfrac{\mu\mu_0 I \sin\varphi d\varphi}{4\pi d}$.

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu\mu_0 I \sin\varphi d\varphi}{4\pi d} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi d}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi d\varphi = -\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi d}\cos\varphi\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = -\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\varphi_2 - \cos_1\right) =$$

$$= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right).$$

Так як $\cos\varphi_2 = \cos(\pi - \varphi_1) = -\cos\varphi_1$.

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\varphi_1 - (-\cos\varphi_1)\right) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi d}\cos\varphi_1; \quad \cos\varphi_1 = \frac{L}{2\sqrt{\frac{L^2}{4} + d^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4d^2}}.$$

Отже: $B = \dfrac{\mu\mu_0 IL}{2\pi d\sqrt{L^2 + 4d^2}}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[B] = \frac{Н \cdot А \cdot м}{А^2 \cdot м \cdot \sqrt{м^2 + м^2}} = \frac{Н}{А \cdot м} = \frac{Н \cdot м}{А \cdot м^2} = \frac{Дж}{А \cdot м^2} = \frac{А \cdot В \cdot с}{А \cdot м^2} = \frac{Вб}{м^2} = Тл .$$

Підставимо числові значення:

$$B = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-17} \cdot 2 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{0{,}04 + 0{,}16}} = \frac{4 \cdot 10^{-17}}{\sqrt{2}} = 2{,}8 \cdot 10^{-7} (Тл).$$

Задача 16.2. По двох довгих прямолінійних провідниках протікає струм $I = 10\,А$. Відстань між провідниками $r = 5\,см$. Визначити напруженість і магнітну індукцію поля, що утворене струмами в точці, яка рівновіддалена від провідників, за таких умов: а) струми протилежного напрямку, якщо провідники розміщені в просторі паралельно та під кутом $60°$ або $90°$; б) струми одного напрямку.

Дано:

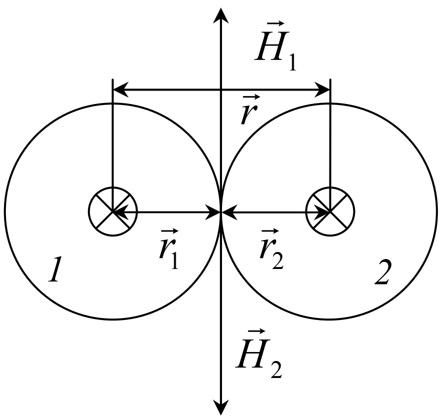
$H', H'', H''', H'''' - ?$

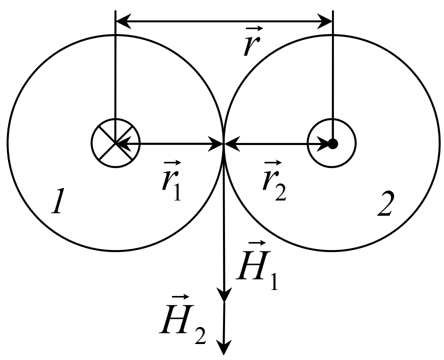
$B', B'', B''', B'''' - ?$

$I = 10\,А$

$r = 5 \cdot 10^{-2}\,м$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{Н}{А^2}$





Виконаємо малюнки, що відповідатимуть випадкам паралельного розміщення провідників та струмам в них, що протікатимуть в одному та протилежному напрямках (переріз здійснено площиною, перпендикулярною до провідників).

Запишемо: $r = \vec{H}_{\Sigma} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$; $r_1 = r_2 = \dfrac{1}{2} r$.

Для всіх випадків: $H_1 = \dfrac{I}{2\pi r_1} = H_2 = \dfrac{I}{2\pi r_2} = \dfrac{I}{\pi r}$.

Індукція магнітного поля: $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$.

За умовою $r_1 = r_2$. Якщо струм протікає в одному напрямку, то:

$H' = \dfrac{I}{\pi r} - \dfrac{I}{\pi r} = 0$; $B' = 0$.

Якщо струм протікає в різних напрямках, то:

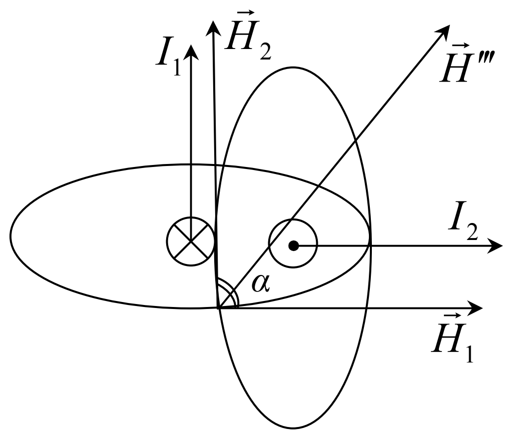
$$H'' = \frac{I}{\pi r} + \frac{I}{\pi r} = \frac{2I}{\pi r}.$$

Отже $H'' = \dfrac{2 \cdot 10}{3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 130\left(\dfrac{A}{м}\right)$;

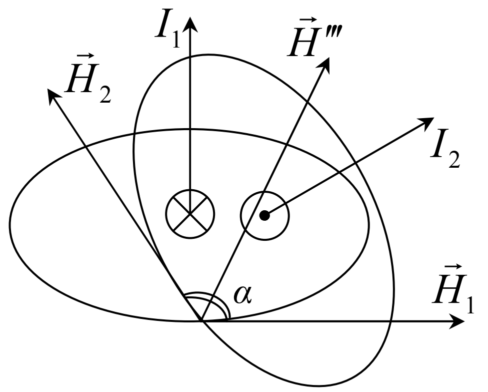
$B'' = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 130 = 1{,}6 \cdot 10^{-6}(Тл)$.

Виконаємо малюнки, що відповідають розміщенню провідників під певним кутом а) $60°$, б) $90°$ та оберемо напрямки струмів, як вказано на малюнках:

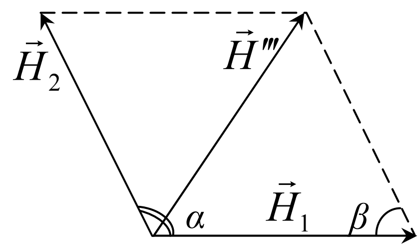
а)



б)



На площинних фігурах векторні суми напруженостей в точці, рівновіддаленій від провідників, визначається як: $\vec{H}_{\sum} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$.



Скалярна величина сумарної напруженості поля у випадку а):

$$H'''^2 = H_1^2 + H_2^2 - 2H_1H_2\cos\beta.$$

Кут $\alpha = 120°$, отже $\beta = 60°$.

Тоді $H''' = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 - H_1H_2} = H_1 = \dfrac{I}{\pi r}$;

$$H''' = 63\left(\frac{A}{м}\right);\ B''' = 8{,}5 \cdot 10^5(Тл).$$

У випадку б): $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$.

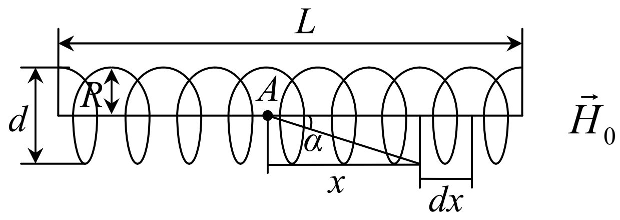
$$H'''' = H_1\sqrt{2} = 90\left(\frac{A}{м}\right);\ B'''' = 11{,}3 \cdot 10^5(Тл).$$

У випадках зміни напрямків одного або обох струмів необхідно чітко уявляти їх просторове взаємне розміщення і зобразити на малюнку.

Задача 16.3. Визначити напруженість магнітного поля в центрі однієї з основ соленоїда довжиною $L = 10\,см$ і діаметром $d = 4\,см$, якщо він має $N = 150$ витків і по них проходить струм $I = 0{,}5\,A$.

Дано:

$H_0 - ?$
$L = 0{,}1\,м$
$d = 0{,}04\,м$
$N = 150$
$I = 0{,}5\,A$



Виберемо на осі соленоїда точку A, яка відповідає положенню центра соленоїда. На відстані x від центра виділимо елемент довжини соленоїда dx. На цей елемент соленоїда припадає $\frac{N}{L}$ витків.

Вважаючи струм, що проходить в цьому елементі соленоїда коловим, запишемо значення напруженості магнітного поля в точці A, яке створене цим струмом: $dH = \frac{IR^2N}{rL\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$.

Виразимо x через діаметр чи радіус соленоїда: $x = Rctg\alpha = \frac{R}{tg\alpha}$.

Тоді $dx = R\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Крім того $R^2 + x^2 = l^2 = \frac{R^2}{\sin^2\alpha}$, а отже

$$dH = \frac{IR^2N}{2L\left(\frac{R^2}{\sin^2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha = \frac{IN}{2L}\frac{R^3 d\alpha\sin^3\alpha}{R^3\sin^2\alpha} = \frac{IN\sin\alpha d\alpha}{2L}.$$

$$H_A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{IN}{2L}\sin\alpha d\alpha = \frac{IN}{2L}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = -\frac{IN}{2L}\cos\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{IN}{2L}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

Для точки, яка лежить в центрі однієї з основ: $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$; $\cos\alpha_2 = 0$.

Отже: $H_O = \frac{IN}{2L}\cos\alpha_1$; $\cos\alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}$; $H_O = \frac{INL}{2L\sqrt{R^2+L^2}} = \frac{IN}{2\sqrt{R^2+L^2}}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[H_O\right] = \frac{A}{\sqrt{м^2+м^2}} = \frac{A}{м};$$

Підставимо числові значення:

$$H_O = \frac{0{,}5 \cdot 150}{\sqrt{0{,}0016 + 0{,}04}} = \frac{75}{0{,}204} = 368\left(\frac{A}{м}\right).$$

Задача 16.4. Щільно укладені одним шаром 30 витків тонкого дроту утримуються на каркасі у вигляді півсфери радіусом $R = 10\,см$. Визначити величину струму, який протікає по провіднику, якщо магнітна індукція поля у центрі сфери становить $B = 1{,}26 \cdot 10^{-4}\,Тл$.

Дано:

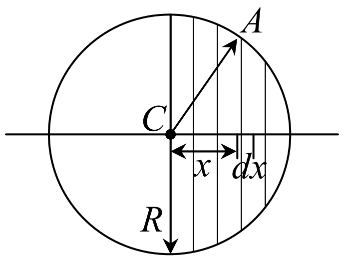
$I - ?$

$N = 30$

$R = 0{,}1\ м$

$B = 1{,}26 \cdot 10^{-4}\,Тл$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Н}{A^2}$



Виділимо на відстані x від центра півсфери елемент довжиною dx, на якому розміщено $\frac{N}{R}$ витків. Позначивши радіус кожного витка через $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ ($R^2 = r^2 + x^2$) і вважаючи, що по кожному елементу протікає коловий струм, запишемо значення індукції магнітного поля: $dB = \frac{\mu\mu_0 I r^2}{2\left(r^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{R} dx = \frac{\mu\mu_0 IN\left(R^2 - x^2\right)dx}{2R^4}$.

Проінтегруємо вираз від 0 до R і одержимо значення магнітної індукції:

$$B = \int_0^R \frac{\mu\mu_0 IN}{2R^4}\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{\mu\mu_0 IN}{2R^4}\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{\mu\mu_0 IN}{3R}.$$

Звідси $I = \frac{3BR}{\mu\mu_0 N}$;

$\mu = 1$; $I = \frac{3BR}{\mu\mu_0 N} = \frac{3BR}{\mu_0 N}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[I] = \frac{Тл \cdot м \cdot A^2}{Н} = \frac{Вб \cdot м \cdot A^2}{м^2 \cdot Н} = \frac{В \cdot с \cdot A \cdot м \cdot A}{Н \cdot м \cdot м} = \frac{Дж \cdot м \cdot A}{Дж \cdot м} = A.$$

Підставимо числові значення:

$$I = \frac{3 \cdot 1{,}26 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 30 \cdot 10^{-7}} = \frac{0{,}1}{10^{-2} \cdot 10} = \frac{0{,}1}{0{,}1} = 1(A).$$

Задача 16.5. По циліндричному провіднику діаметром $0{,}4\,см$ за $0{,}3 \cdot 10^{-8}\,с$ переноситься сторонніми силами, рівномірно розподіленими по перерізу провідника, заряди, сумарна величина яких $0{,}6\,нКл$. Визначити напруженість магнітного поля в точках на відстанях $r_1 = 0{,}1\,см$ і $r_2 = 4\,см$ від осі провідника.

Дано:

$H_{1,2} - ?$

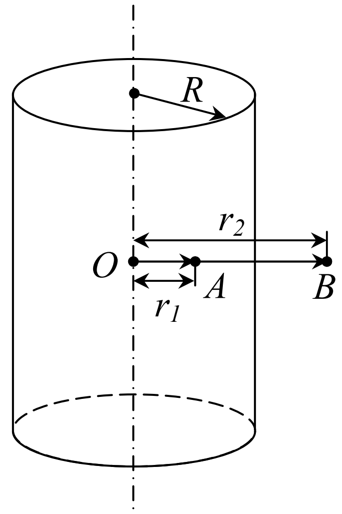
$d = 4 \cdot 10^{-3}\,м$

$t = 0{,}3 \cdot 10^{-8}\,с$

$q = 6 \cdot 10^{-10}\,Кл$

$r_1 = 10^{-3}\,м$

$r_2 = 4 \cdot 10^{-2}\,м$



При аналізі даних задачі зрозуміло, що точка на відстані $r_1 = 0{,}1\ см$ від осі знаходиться в провіднику, а точка з $r_2 = 4\ см$ – за його межами.

Згідно з симетрією напруженість H для всіх точок, які розміщені від осі на однаковій відстані r, буде однаковою. Для розрахунку скористаємось виразом для циркуляції вектора напруженості магнітного поля: $\oint\limits_{L_1} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 = \int\limits_{S_1} j_n dS_1$.

Густина струму провідності:

$$j_n = \frac{I}{S};\ S = \pi R^2;\ L_2 = 2\pi r_1.$$

Тоді циркуляція вектора напруженості:

$$\oint\limits_{L_1} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 = H_1 \oint\limits_{L_1} dl_1 = H_1 2\pi r_1;\ \int\limits_{S_1} j_n dS_1 = \int\limits_{S_1} \frac{I}{S} dS_1 = \frac{I}{\pi R^2} \int\limits_{S_1} dS_1;\ S_1 = \pi r_1^2;\ I = \frac{q}{t};$$

$$\int\limits_{S_1} j_n dS_1 = \frac{q}{\pi t R^2} \pi r_1^2 = \frac{q r_1^2}{t R^2};\ R = \frac{d}{2};\ \int\limits_{S_1} j_n dS_1 = \frac{4 q r_1^2}{t R^2}.$$

Таким чином: $2 H_1 \pi r_1 = \dfrac{4 q r_1^2}{t R^2}$.

Звідси $H_1 = \dfrac{4 q r_1^2}{2\pi r_1 t R^2} = \dfrac{2 q r_1}{\pi t R^2}$;

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[H_1] = \frac{Кл \cdot м}{с \cdot м^2} = \frac{Кл}{с \cdot м} = \frac{А}{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$H_1 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{-9} \cdot 16 \cdot 10^{-6}} = \frac{12 \cdot 10^{-13}}{150{,}72 \cdot 10^{-15}} \approx 8\left(\frac{А}{м}\right).$$

Запишемо вираз циркуляції вектора напруженості магнітного поля для точки, що лежить поза провідником.

$$\oint\limits_{L_2} \vec{H}_2 d\vec{l}_2 = \int\limits_{S_2} j_n dS_2;\ L_2 = 2\pi r_2;\ S_2 = S = \pi R^2;\ \oint\limits_{L_2} \vec{H}_2 d\vec{l}_2 = H_2 \oint\limits_{L_2} dl_2 = 2 H_2 \pi r_2;$$

$$\int_{S_2} j_n dS_2 = \int_{S_2} \frac{I}{S} dS_2 = \int_{S_2} \frac{q}{t\pi R^2} dS_2 = \frac{q}{t\pi R^2} \pi R^2 = \frac{q}{t}.$$

Отже: $2H_2 \pi r_2 = \dfrac{q}{t}$.

Звідси $H_2 = \dfrac{q}{2\pi t r_2}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[H_2] = \frac{Кл}{с \cdot м} = \frac{А}{м}.$$

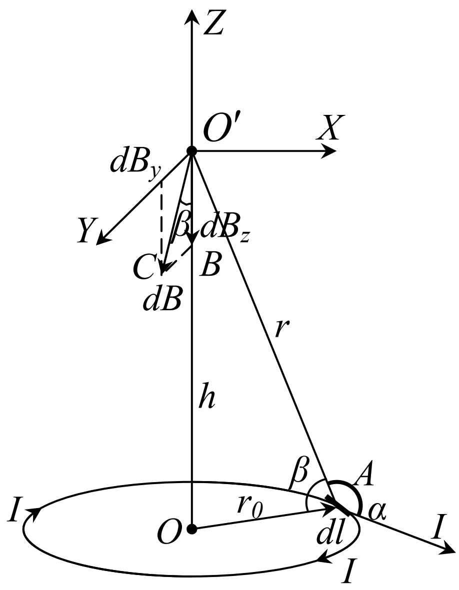
Підставимо числові значення:

$$H_2 = \frac{6 \cdot 10^{-10}}{6{,}28 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-9}} \approx 0{,}8 \left(\frac{А}{м} \right).$$

Задача 16.6. Обчислити індукцію магнітного поля колового лінійного струму силою I і радіусом r_0 у точці O', віддаленій вздовж осі Oz від центра кола O на відстань h.

Дано:

$B_z - ?$
I, r_0, h



За законом Біо-Савара-Лапласа елементарна індукція магнітного поля dB в точці O', створювана елементом струму Idl, буде рівною: $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{Idl \sin\alpha}{r^2}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; $\sin 90^0 = 1$, тому $dB = \dfrac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}$.

Вектор елементарної індукції $d\vec{B}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $Id\vec{l}$ та $\vec{r}$, і нахилений до осі OO' під кутом β.

Тоді проекції $d\vec{B}$ на осі OY та OZ: $dB_Y = dB \sin\beta$, $dB_Z = dB \cos\beta$.

Проекції на осі OX і OY векторів $d\vec{B}$ взаємно компенсуються, отже $B_X = B_Y = 0$.

Проекція вектора індукції на вісь OZ: $B_Z = \int dB \cos\beta$.

З подібності трикутників OAO' і $O'BC$ випливає, що

$\angle O'AO = \angle BO'C = \beta \left(d\vec{B} \perp \vec{r}; O'B \perp OA \right)$.

Таким чином $r_0 = \cos\beta \cdot r$. Тоді проекція вектора індукції на вісь OZ:

$$B_Z = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \frac{r_0}{r} = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\mu_0 r_0 I dl}{4\pi r^3}, \; r = \sqrt{r_0^2 + h^2} \; .$$

$$B_Z = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\mu_0 r_0 I dl}{4\pi \left(\sqrt{r_0^2 + h^2}\right)^3} = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\mu_0 r_0 I dl}{4\pi \left(r_0^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 r_0 I}{4\pi \left(r_0^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi r_0} dl = \frac{2\pi \mu_0 r_0^2 I}{4\pi \left(r_0^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0 r_0^2 I}{2\left(r_0^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[B] = \frac{Н \cdot м^2 \cdot А}{А^2 \cdot м^3} = \frac{Н \cdot м}{А \cdot м^2} = \frac{Дж}{А \cdot м^2} = \frac{А \cdot В \cdot с}{А \cdot м^2} = \frac{Вб}{м^2} = Тл \, .$$

Тема 17. ***ВЗАЄМОДІЯ СТРУМІВ. ЗАКОН АМПЕРА.СИЛА ЛОРЕНЦА.***

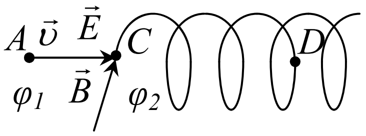
Задача 17.1. Електрон з дуже малою початковою швидкістю проходить в однорідному електричному полі з різницею потенціалів $1000 B$. Після цього він потрапляє в перпендикулярне до напрямку його руху магнітне поле з індукцією $0{,}34\,Тл$. Визначити ларморівський радіус руху електрона.

Дано:

$R - ?$

$\Delta\varphi = 1000\,B$

$B = 0{,}34\,Тл$



Нехай вектор напруженості електричного поля направлений зліва направо, а напрямок $\vec{B}$ – від нас до площини малюнка в точці C.

За час dt електрон пройде шлях $CD = dl$ в напрямку швидкості $\vec{\upsilon}$. Переміщення електрона вздовж dl еквівалентне величині струму I по цій ділянці. Величина струму $I = \frac{e}{dt}$.

Однорідне магнітне поле діє на елемент струму Idl з силою: $d\vec{F} = I\vec{B}dl\sin\alpha$, оскільки $\alpha = 90°$, то $\sin\alpha = 1$, тому: $dF = IBdl$, або $dF = B\frac{e}{dt}dl = Be\upsilon$.

Сила Лоренца, яка виражається цією рівністю перпендикулярна до напрямку швидкості електрона, а тому під її дією змінюється лише напрям швидкості електрона, тобто електрон набуває нормального (доцентрового) прискорення по ларморівському радіусу: $a = \frac{\upsilon^2}{R}$, отже $dF = \frac{m\upsilon^2}{R} = eB\upsilon$. Звідси $dF = \frac{m\upsilon^2}{R} = eB\upsilon$.

Швидкість електрона після прольоту різниці потенціалів можна визначити з формули: $e(\varphi_1 - \varphi_2) = eU = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}$, де $\upsilon_0 = 0$ за умовою, тому $eU = \frac{m\upsilon^2}{2}$.

$m\upsilon^2 = 2eU$; $\upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$.

Таким чином $R = \frac{m\sqrt{2eU}}{\sqrt{m}eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[R] = \frac{1}{Тл}\sqrt{\frac{кг\cdot B}{Кл}} = \frac{1}{Тл}\sqrt{\frac{кг\cdot B}{A\cdot c}} = \frac{1}{Тл}\sqrt{\frac{кг\cdot B^2}{B\cdot A\cdot c}} = \frac{1}{Тл}\sqrt{\frac{кг\cdot B^2}{Дж}} = \frac{1}{Тл}\sqrt{\frac{кг\cdot B^2}{H\cdot м}} =$$

$$= \frac{1}{Тл}\sqrt{\frac{кг\cdot B^2\cdot c^2}{кг\cdot м^2}} = \frac{1}{Тл}\frac{B\cdot c}{м} = \frac{Вб}{Тл\cdot м} = \frac{Вб\cdot м^2}{Вб\cdot м} = м.$$

Підставимо числові значення:

$$R = \frac{1}{0{,}34}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^3}{1{,}6\cdot 10^{-19}}} = 0{,}001(м) = 1\,мм.$$

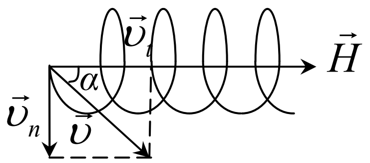
Задача 17.2. Протон, набувши швидкості $\upsilon = 2\cdot 10^4\ \frac{м}{с}$, влітає в магнітне поле під кутом 30° до напрямку вектора напруженості поля $\vec{H} = 2{,}4\cdot 10^3\ \frac{А}{м}$. Визначити крок гвинтової лінії руху протона.

Дано:

$h-?$
$\upsilon = 2\cdot 10^4\ \frac{м}{с}$
$\alpha = 30°$
$H = 2{,}4\cdot 10^3\ \frac{А}{м}$
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{Н}{А^2}$

На протон діє сила Лоренца, яка перпендикулярна до напруженості поля і швидкості його руху: $F = e\upsilon B\sin\alpha$.

Під дією сили Лоренца протон набуває обертального руху по колу радіусом R з нормальним прискоренням:



$$a = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

Оскільки $\upsilon\sin\alpha = \upsilon_n$, та $B = \mu\mu_0 H$ можна записати, що $F = \mu\mu_0 He\upsilon_n$.

В результаті одночасного руху по колу і вздовж прямої протон рухається вздовж гвинтової лінії. Для визначення кроку гвинтової лінії запишемо:

$h = \upsilon_t T$, період обертання протона визначимо з формули: $T = \frac{2\pi R}{\upsilon_n}$.

Тоді $h = \frac{2\pi R\upsilon_t}{\upsilon_n}$, $\upsilon_t = \upsilon\cos t$.

Таким чином, $F = \frac{m\upsilon^2}{R}$, а отже $\mu\mu_0 Hev_n = \frac{m\upsilon^2}{R}$. Звідси радіус обертання протона $R = \frac{mv}{\mu\mu_0 He\sin\alpha}$.

Тоді крок гвинтової лінії руху протона

$$h = \frac{2\pi\, m\upsilon\upsilon_t}{\mu\mu_0 H\, e\sin\alpha\,\upsilon_n} = \frac{2\pi\, m\upsilon^2\cos\alpha}{\mu\mu_0 H\, e\sin\alpha\,\upsilon\sin\alpha} = \frac{2\pi\, m\upsilon\cos\alpha}{\mu\mu_0 H\, e\sin^2\alpha}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[h] = \frac{кг\cdot м\cdot м\cdot А^2}{с\cdot А\cdot Кл\cdot Н} = \frac{кг\cdot м^2\cdot А^2}{с\cdot А\cdot А\cdot с\cdot Н} = \frac{кг\cdot м^2\cdot А^2}{с^2\cdot А^2\cdot Н} = \frac{кг\cdot м\cdot м}{с^2\cdot Н} = \frac{Н\cdot м}{Н} = м.$$

Підставимо числові значення:

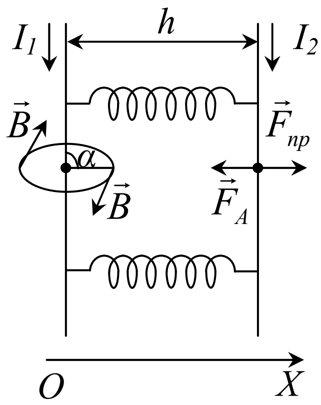
$$h = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\sqrt{3}\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 2{,}4\cdot 10^3\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = 0{,}41\cdot 10^{-7}(м) = 4{,}1\cdot 10^{-8}(м).$$

Задача 17.3. Відрізок шини та провідник, з'єднані між собою двома діелектричними пружинами, що розміщені у вертикальній площині. Якщо по шині і провіднику не проходить струм, відстань між ними дорівнює h. Визначити відстань між шиною і провідником, якщо по них відповідно проходять струми I_1 та I_2. Коефіцієнт пружності кожної пружини k, а довжина провідника L.

Дано:

$x_1 - ?$	$x_1' - ?$
$x_2 - ?$	$x_2' - ?$
h, I_1, I_2, k, L	

У даній задачі можливі два випадки:



1. Струми в шині і провіднику протікають в одному напрямку.

2. Струми в шині і провіднику мають різні напрямки.

Розглянемо *перший випадок*:

Напруженість магнітного поля струму I_1 в точках другого провідника на відстані x може бути знайдена як $H = \dfrac{I_1}{2\pi x}$. Сила Ампера: $F_1 = I_2 LB \sin\alpha$, $\alpha = 90°$, $\sin 90° = 1$.

Тоді $F_1 = I_2 LB$.

Індукція та напруженість магнітного поля пов'язані між собою формулою: $B = \mu\mu_0 H$. З урахуванням цього вираз для знаходження сили Ампера набуває вигляду: $F_1 = \mu\mu_0 H I_2 L = \mu\mu_0 \dfrac{I_1 I_2 L}{2\pi x}$.

Аналіз напрямків векторів сил показує, що провідники притягуються. Поруч з силою Ампера на провідники діє сила пружності: $F_{пр} = 2k(h - x)$.

В положенні рівноваги $F_1 = F_{пр}$, а отже: $2k(h - x) = \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi x}$;

$\mu\mu_0 I_1 I_2 L = (2kh - 2kx)\cdot 2\pi x = 4\pi khx - 4\pi kx^2$; $4\pi kx^2 - 4\pi khx + \mu\mu_0 I_1 I_2 L = 0$.

Спростимо отримане квадратне рівняння: $x^2 - hx + \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2 L}{4\pi k} = 0$;

$$x_1 = \frac{h + \sqrt{h^2 - \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2 L}{\pi k}}}{2} = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 L}{4\pi k}};\ x_1' = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 L}{4\pi k}}.$$

Проаналізувавши підкореневі вирази можна стверджувати, що якщо $k < \dfrac{4\mu\mu_0 I_1 I_2 L}{4\pi}$, то провід притягуватиметься до шини. Розв'язок x_1 характеризує стійку рівновагу, а x_1' – нестійку оскільки при значеннях $k \le \frac{4\mu\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi}$ провід повністю притягнеться до шини.

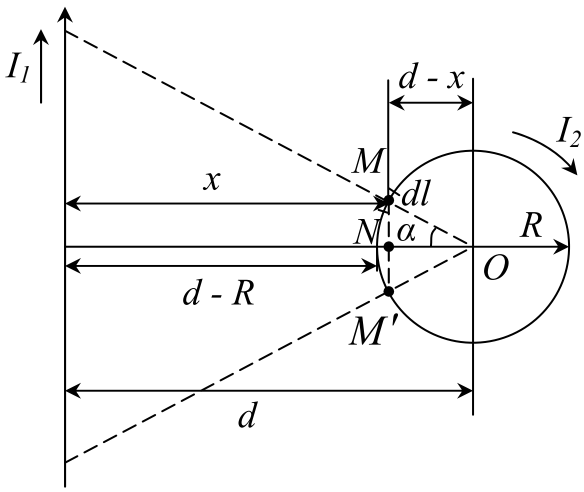
Другий випадок:

Якщо струми I_1 та I_2 мають протилежні напрямки, то провід буде перебувати у стійкій рівновазі на відстані x_2: $x_2 = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 L}{4\pi k}}$.

Задача 17.4. Визначити силу дії прямого нескінченного провідника зі струмом силою I_1 на коловий контур, вздовж якого тече струм силою I_2. Радіус контура R, а відстань його центра від нескінченного провідника зі струмом – d. Коловий струм I_2 та струм I_1 знаходяться в одній площині.

Дано:

$F - ?$
I_1, I_2, R, d



Сили, що діють на елементи колового контуру, згідно з напрямом струму, напрямлені по радіусах від центра.

Для розв'язання задачі оберемо точку M на колі і на відстані x від прямого струму та симетричну їй M_1.

Напруженість магнітного поля в цій точці створена струмом I_1 дорівнює $H = \frac{I_1}{2\pi x}$. Сила, що діє на елемент струму $I_2 d_1$ збоку струму I_1 біля точки M запишемо як: $dF = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi x}$.

Розкладемо цю силу на дві складові: паралельну і перпендикулярну до I_1. Якщо елемент d в точці M зв'яжемо з симетричним d_1 в точці M_1, то всі складові, що паралельні струму, взаємно скомпенсуються. Залишаються перпендикулярні складові, результуюча яких дорівнює:

$$F = \oint \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 \cos\alpha dl}{2\pi x} + \oint \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 \cos\alpha dl}{2\pi x} = \oint \frac{2\mu\mu_0 I_1 I_2 \cos\alpha dl}{2\pi x} = \oint \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 \cos\alpha dl}{\pi x}.$$

З малюнку видно, що: $dl = \dfrac{dx}{\sin\alpha}$.

Тоді: $F = \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\oint \dfrac{\cos\alpha dl}{x} = \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\oint \dfrac{\cos\alpha dx}{\sin\alpha x} = \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\oint ctg\alpha \dfrac{dx}{x}$.

Розглянемо трикутник MNO. Сторони $NO = d - x$; $MN^2 = MO^2 - NO^2$;

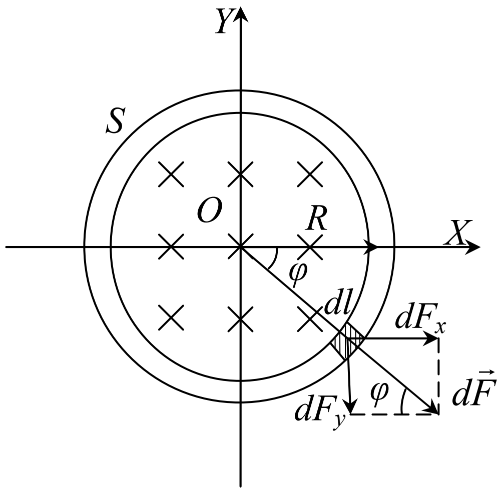
$MN = \sqrt{R^2 - (d-x)^2}$; $ctg\alpha = \dfrac{NO}{MN}$; $ctg\alpha = \dfrac{dx}{\sqrt{R^2-(d-x)^2}}$.

Таким чином: $F = \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int\limits_{d-R}^{d+R}\dfrac{(d-x)dx}{x\sqrt{R^2-(d-x)^2}} = \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left(\dfrac{d}{\sqrt{d^2-R^2}} - 1\right)$.

Задача 17.5. По кільцю діаметром $d = 0{,}1\,м$ із свинцевого провідника площею перерізу $S = 0{,}7\,мм^2$ проходить струм $I = 2\,А$. Чи розірветься кільце в перпендикулярному магнітному полі індукцією $B = 0{,}2\,Тл$, якщо при температурі, до якої нагрівся провідник при проходженні струму, його міцність на розрив становить $p_0 = 2\cdot 10^6\,\dfrac{Н}{м}$.

Дано:

$p - ?$
$d = 0{,}1\,м$
$S = 0{,}7\,мм^2$
$I = 2\,А$
$B = 0{,}2\,Тл$
$p_0 = 2\cdot 10^6\,\dfrac{Н}{м}$



За законом Ампера сила, з якою магнітне поле діє на елемент провідника зі струмом, дорівнює:

$dF = IBdl\sin(\vec{B}, \vec{dl})$.

За умовою задачі кут між векторами $\vec{B}$ та $\vec{dl}$ дорівнює $90°$.

Тоді $\sin(\vec{B}, \vec{dl}) = \sin 90° = 1$.

$dF = BIdl$; $Rd\varphi \approx dl$.

Обчислимо, з якою силою одна половинна кільця взаємодіє з другою. Знайдемо проекцію сили на вісь OX:

$$F_x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} IBR\cos\varphi d\varphi = IBR\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = IBR\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = IBR\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= IBR(1-(-1)) = 2IBR.$$

Проекція $d\vec{F}$ на вісь OY: $dF_y = IB\sin\varphi d\varphi$.

$$F_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} IBR\sin\varphi d\varphi = IBR\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = -IBR\cos\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -IBR\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= -IBR(0+0) = 0.$$

Враховуючи, що F_x діє на поперечні перерізи двох половин кільця, матимемо: $p = \frac{F_x}{2S} = \frac{2IBR}{2S} = \frac{2IB\frac{d}{2}}{2S} = \frac{IBd}{2S}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[p] = \frac{A \cdot Тл \cdot м}{м^2} = \frac{A \cdot Тл}{м} = \frac{A \cdot Вб}{м^3} = \frac{A \cdot B \cdot c}{м^3} = \frac{Дж}{м^3} = \frac{H \cdot м}{м^3} = \frac{H}{м^2}.$$

Підставимо числові значення:

$$p = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-6}} = 0{,}03 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^4 \left(\frac{H}{м^2}\right).$$

Отже, $p < p_0$. Кільце не розірветься.

Задача 17.6. Прямий провідник довжиною $20\,см$ та масою $50\,г$ підвішений на двох легких нитках в однорідному магнітному полі, індукція якого має горизонтальний напрям і перпендикулярна до провідника. Якого напряму та якої величини струм потрібно пропустити через провідник, щоб нитки розірвались? Індукція магнітного поля $0{,}5\,Тл$. Кожна нитка розривається при навантаженні, що перевищує $0{,}4\,H$.

Дано:

$I - ?$

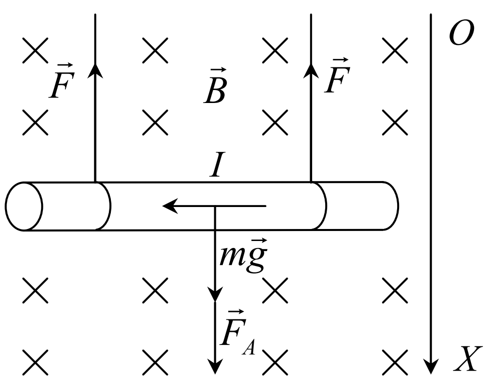
$l = 0{,}2\,м$

$F = 0{,}4\,H$

$B = 0{,}5\,Тл$

$m = 5 \cdot 10^{-2}\,кг$

$\alpha = 90°$



На провідник зі струмом діють сила тяжіння $m\vec{g}$, дві сили натягу нитки $\vec{F}$ та сила Ампера $\vec{F}_A$. Для того щоб нитки розірвались, сила Ампера повинна бути напрямлена перпендикулярно до площини малюнку від спостерігача. Застосувавши правило лівої руки, зможемо визначити напрям сили струму у провіднику: справа на ліво.

Оскільки перед розривом ниток провідник перебуває у рівновазі, то у відповідності з першим законом Ньютона можна записати:

$m\vec{g} + 2\vec{F} + \vec{F}_A = 0$.

Спроектуємо це рівняння на вісь OX:

$mg - 2F + F_A = 0$.

Сила Ампера $F_A = IBl\sin\alpha$, тоді

$mg - 2F + IBl\sin\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$, тоді $mg - 2F + IBl = 0$.

Виразимо звідси силу струму:

$IBl = 2F - mg$.

Отже, $I = \dfrac{2F - mg}{Bl}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[I] = \frac{Н - \frac{кг \cdot м}{с^2}}{Тл \cdot м} = \frac{Н - Н}{\frac{Вб}{м^2} м} = \frac{Н \cdot м}{Вб} = \frac{Н \cdot м}{В \cdot с} = \frac{Дж}{В \cdot с} = \frac{А \cdot В \cdot с}{В \cdot с} = А.$$

Отже, сила струму, необхідна для розриву ниток становить:

$$I = \frac{2 \cdot 0{,}4 - 5 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}84}{0{,}5 \cdot 0{,}2} = \frac{0{,}8 - 0{,}4905}{0{,}1} \approx 3(A).$$

<u>Тема 18.</u> МАГНІТНИЙ ПОТІК. РОБОТА ПО ПЕРЕМІЩЕННЮ ПРОВІДНИКА ІЗ СТРУМОМ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ.

Задача 18.1. Плоский квадратний контур з стороною $a=10\,см$, вздовж якого тече струм $I=100A$, вільно встановився в однорідному магнітному полі індукцією $B=1Тл$. Визначити роботу зовнішніх сил при повороті контуру відносно осі, яка проходить через середини протилежних сторін контуру, на кут: 1) $\alpha_1=\frac{\pi}{2}\ рад$; 2) $\alpha_2=0{,}05\ рад$. При повертанні контуру сила струму в ньому не змінюється.

Дано:

$A_1-?$ $A_2-?$	
$\alpha_1=\frac{\pi}{2}\ рад$ $\alpha_2=0{,}05\ рад$ $a=0{,}1\,м$ $I=100\,A$ $B=1Тл$	

На контур зі струмом в магнітному полі діє обертальний механічний момент: $M=p_M B\sin\alpha$, де p_M – магнітний момент, α – кут між вектором $\vec{p}_M$, що напрямлений по нормалі до площини контуру і вектором $\vec{B}$.

Оскільки контур вільно встановлений, то $M=0$, а отже $\alpha=0$, тобто вектори $\vec{p}_M$ і $\vec{B}$ співпадають за напрямом.

Робота зовнішніх сил здійснюється внаслідок виведення контуру з даного положення при повороті на деякий кут $d\alpha$. Елементарна робота зовнішніх сил: $dA=Md\alpha$; $p_M=Ia^2$.

Звідси $dA=IBa^2\sin\alpha d\alpha$;

$$A=IBa^2\int_0^{\alpha}\sin\alpha d\alpha .$$

1). $A_1=IBa^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha d\alpha=IBa^2\left(-\cos\alpha\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=IBa^2$.

2). Оскільки α_2 малий, то $\sin\alpha_2\approx\alpha_2$.

Тоді $A_2=IBa^2\int_0^{\alpha_2}\alpha d\alpha=IBa^2\frac{\alpha_2^2}{2}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[A\right]=A\cdot Тл\cdot м^3=\frac{A\cdot Вб}{м^2}\cdot м^2=A\cdot Вб=A\cdot B\cdot c=\left[Дж\right].$$

Підставимо числові значення:

$A_1=100\cdot1\cdot0{,}01=1(Дж)$;

$A_2=100\cdot1\cdot0{,}01\cdot0{,}00125=1{,}25\cdot10^{-3}(Дж)$.

Задача 18.2. Поруч з довгим прямим проводом MN, по якому проходить струм силою I, розташована квадратна рамка зі стороною l, по якій проходить струм силою I'. Рамка лежить в одній площині з проводом так, що найближча сторона рамки знаходиться на відстані a_0 від проводу. Визначити магнітну силу, що діє на рамку, та роботу цієї сили по переміщенню рамки за межі поля. Струми I та I' весь час підтримуються сталими.

Дано:

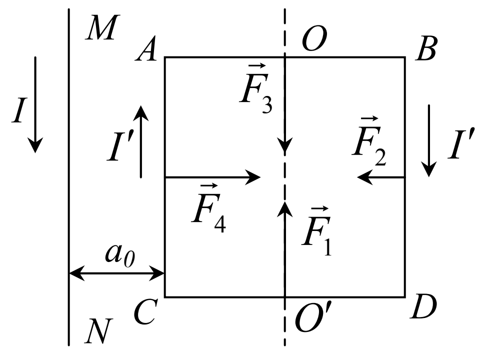
$F - ?$

$A - ?$

$I = const$

$I' = const$

a_0, l



1. На кожний елемент довжини контуру $ABCD$ з боку магнітного поля, створеного струмом I, діятиме сила Лоренца: $dF = IBdl\sin\alpha$.

Користуючись правилом свердлика, а потім лівої руки, визначимо напрям сил, що діють на кожну із сторін рамки. AB та CD розташовані однаково відносно провідника MN. $F_3 = -F_4$.

Таким чином, рівнодійна сила, що діє на контур: $F = F_1 - F_2$, напрямлена від контуру.

$F_1 = I'B_1 l\sin\alpha$; $F_2 = I'B_2 l\sin\alpha$, де B_1 та B_2 – індукції магнітного поля, створеного струмом I, що протікає по провіднику MN в провідниках AC та DB, тобто на відстані a_0 та $a_0 + l$ від проводу MN відповідно. Кут α між напрямом вектора індукції магнітного поля $\vec{B}$ та напрямом струму I' $\alpha = 90°, \sin\alpha = 1$.

Індукції B_1 та B_2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a_0};\ B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a_0 + l)}.$$

Отже $F = F_1 - F_2 = \dfrac{\mu_0 II'l}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a_0} - \dfrac{1}{a_0 + l}\right).$

При видаленні рамки за межі поля струму I сили F_1 та F_2, які тепер розглядатимуться як змінні, здійснять роботу: сила F_1 – додатну A_1, сила F_2 – від’ємну A_2. Повна робота: $A = A_1 + A_2 = \int\limits_{a_0}^{\infty} F_1 da - \int\limits_{a_0 + l}^{\infty} F_2 da$.

Сила F_1 перемістивши провідник з відстані a_0 до відстані a_0+l далі здійснить роботу по переміщенню в нескінченність таку ж як і сила F_2. Отже:

$$A=\int_{a_0}^{a_0+l}F_1da=\frac{\mu_0 II'l}{2\pi}\int_{a_0}^{a_0+l}\frac{da}{a}=\frac{\mu_0 II'l}{2\pi}\ln\frac{a_0+l}{a_0}.$$

2. Обчислимо роботу магнітних сил розрахувавши зміну магнітного потоку $\Phi-\Phi_0$ через контур $ABCD$. Φ_0 – магнітний потік при початковому положенні контуру: $A=(\Phi-\Phi_0)I'=\Delta\Phi I'=-\Phi_0 I'$.

Для визначення магнітного потоку Φ_0 розіб'ємо поверхню обмежену контуром $ABCD$ на елементарні полоски, паралельні до MN, довжиною l і шириною da. Тоді: $d\Phi=B_n dS=-Blda=-\dfrac{\mu_0 lI}{2\pi}\dfrac{da}{a}$.

Повний потік через весь контур $ABCD$:

$$\Phi_0=\int_S B_n dS=-\frac{\mu_0 lI}{2\pi}\int_{a_0}^{a_0+l}\frac{da}{a}=\frac{\mu_0 lI}{2\pi}\ln\frac{a_0+l}{a_0}.$$

Отже: $A=-\Phi_0 I'=\dfrac{\mu_0 II'l}{2\pi}\ln\dfrac{a_0+l}{a_0}$; $dA=Fda$. Звідси $F=\dfrac{dA}{da}$.

Тоді $F=\dfrac{\mu_0 lII'}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a_0}-\dfrac{1}{a_0+l}\right)$.

Потік магнітної індукції через поверхню площею S: $\Phi=BS\cos(B;n)$, n – нормаль до поверхні.

Сила взаємодії між двома паралельними струмами в провідниках, довжина одного з яких l.

$F=\mu\mu_0\dfrac{I_1I_2l}{2\pi a}$, де a – відстань між провідниками.

Отже робота по переміщенню провідника з струмом в магнітному полі:

$A=I\Delta\Phi=I(\Phi_1-\Phi_2)$.

Задача 18.3. Між полюсами магніта у повітрі на двох тонких нитках горизонтально підвішений лінійний провідник вагою *P* = 0,1 *Н* і довжиною *L* = 0,2 *м*. Вектор напруженості однорідного магнітного поля $H = 2\cdot 10^5\ \frac{A}{м}$ напрямлений вертикально. На який кут φ від вертикалі відхиляються нитки, що підтримують провідник, якщо по ньому пропустити струм *I* = 2 *А*? Вагою ниток знехтувати.

Дано:

$\varphi - ?$

$P = 0{,}1\ H$

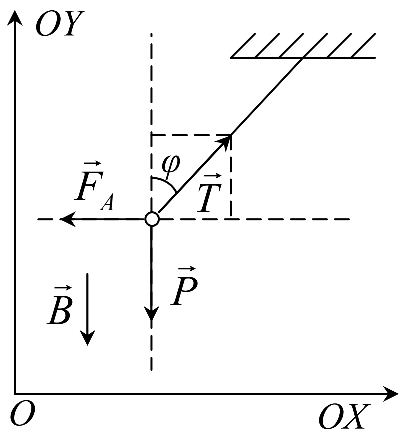
$L = 0{,}2\ \ м$

$H = 2 \cdot 10^5\ \dfrac{A}{м}$

$I = 2\ \ A$

$\mu = 1$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{H}{A^2}$



На провідник зі струмом діють сили натягу двох ниток $\vec{T}$, сила тяжіння $\vec{P}$ та з боку магнітного поля, перпендикулярно до провідника сила Ампера $\vec{F}_A = \vec{I}\vec{B}L\sin\alpha$.

Результуюча сила, що діє провідник зі струмом

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_A. \tag{1}$$

В стані рівноваги сила $\vec{F}$ дорівнює 0, отже

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_A = 0. \tag{2}$$

Струм по провіднику йде від спостерігача вглиб малюнку. Кут α між напрямом струму та напрямом вектора $\vec{B}$ становить $90°$. Тоді $\sin 90° = 1$, тому сила Ампера, що діє на провідник зі струмом

$$\vec{F}_A = IBL. \tag{3}$$

Спроектуємо рівняння (2) на осі OX та OY:

OX: $T\sin\varphi - F_A = 0$, або $T\sin\varphi = F_A$. (4)

OY: $T\cos\varphi - P = 0$, або $T\cos\varphi = P$. (5)

Розділимо почленно рівняння (4) та (5):

$$\frac{T\sin\varphi}{T\cos\varphi} = \frac{F_A}{P} = tg\varphi. \tag{6}$$

Підставимо у рівняння (6) вираз (3) для F_A:

$$tg\varphi = \frac{IBL}{P}. \tag{7}$$

Враховуючи, що вектори індукції $\vec{B}$ та напруженості $\vec{H}$ магнітного поля пов'язані співвідношенням $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, можна записати

$$tg\varphi = \frac{\mu\mu_0 IHL}{P}. \tag{8}$$

Таким чином, кут відхилення ниток з провідником

$$\varphi = arctg\frac{\mu\mu_0 IHL}{P}. \tag{9}$$

Підставимо числові значення:

$$\varphi = arctg\frac{1 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2}{0{,}1} \approx arctg 1 = 45°.$$

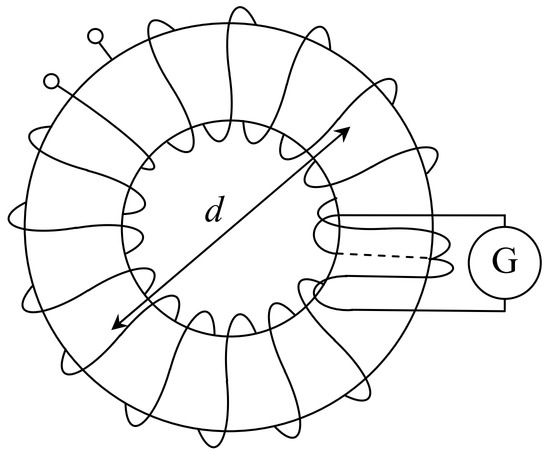
<u>Тема 19.</u> МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ. ЕНЕРГІЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ.

Задача 19.1. На стальному намагніченому тороїді, середній діаметр якого $d = 0{,}3\,м$ і площа поперечного перерізу $S = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,м^2$, намотана обмотка, що містить $N = 800$ витків. Коли по обмотці пустили струм силою $I = 18\,A$, чутливий гальванометр з опором $R = 0{,}8\ Ом$ зафіксував відхилення, що відповідає проходженню заряду $q = 0{,}24\,мКл$. Визначити напруженість поля H, магнітну індукцію B всередині кільця, намагніченість J та магнітну проникність сталі μ.

Дано:

$H - ?$
$B - ?$
$J - ?$
$\mu - ?$

$d = 0{,}3\ м$
$S = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,м^2$
$N = 800$
$I = 18\,A$
$R = 0{,}8\ Ом$
$q = 0{,}24 \cdot 10^{3}\ Кл$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{H}{A^2}$



Напруженість поля всередині тороїда залежить лише від струму в обмотці:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{NI}{\pi d}.$$

Напруженість залежить від діаметра. Але, враховуючи значення d і S напруженість H (як і B) можна вважати величиною сталою для всього кільця.

Для обчислення індукції B використаємо формулу: $\Phi = BS$.

При включенні струму магнітний потік в тороїді зріс від нуля до Φ, що привело до появи індукційного струму в колі гальванометра. Заряд, який пройшов за час зміни потоку визначимо виходячи із закону електромагнітної індукції Фарадея-Максвелла: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, або $IR = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Отже, $q = -\dfrac{\Delta\Phi}{R}$; Опускаючи „–" матимемо: $\Delta\Phi = \Phi = qR$; $B = \dfrac{qR}{S}$.

Тоді $J = \dfrac{B}{\mu_0} - H = \dfrac{qR}{\mu_0 S} - \dfrac{NI}{\pi d}$ та $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H} = \dfrac{qR\pi d}{\mu_0 SNI}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[H]=\frac{A}{м},\ [B]=\frac{Кл\cdot Ом}{м^2}=\frac{A\cdot c\cdot B}{B\cdot м^2}=\frac{Вб}{м^2}=Тл,$$

$$[J]=\frac{Кл\cdot Ом\cdot A^2}{H\cdot м^2}-\frac{A}{м}=\frac{A\cdot c\cdot B\cdot A^2}{H\cdot A\cdot м^2}-\frac{A}{м}=\frac{Дж\cdot A}{H\cdot м^2}-\frac{A}{м}=\frac{H\cdot м\cdot A}{H\cdot м^2}-\frac{A}{м}=\frac{A}{м}-\frac{A}{м}=\frac{A}{м},$$

$$[\mu]=\frac{Кл\cdot Ом\cdot м\cdot A^2}{H\cdot м^2\cdot A}=\frac{A\cdot c\cdot B\cdot м\cdot A^2}{H\cdot м^2\cdot A}=\frac{Дж\cdot м}{H\cdot м^2}=\frac{H\cdot м^2}{H\cdot м^2}=1.$$

Підставимо числові значення:

$$H=\frac{800\cdot 1{,}8}{3{,}14\cdot 0{,}3}=1{,}5\cdot 10^3\left(\frac{A}{м}\right);\ B=\frac{0{,}24\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}8}{1{,}6\cdot 10^{-4}}=1{,}2(Тл);$$

$$J=\frac{0{,}24\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}8}{3{,}14\cdot 4\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-4}}-\frac{800\cdot 1{,}8}{3{,}14\cdot 0{,}3}=1\cdot 10^6\left(\frac{A}{м}\right);$$

$$\mu=\frac{0{,}24\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}8\cdot 3{,}14\cdot 0{,}3}{3{,}14\cdot 4\cdot 10^{7}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-4}\cdot 800\cdot 1{,}8}=6\cdot 10^2.$$

Задача 19.2. При вимиканні струму в обмотці тороїда, описаного в попередній задачі, через гальванометр пройшов заряд $q'=80\ мкКл$. Визначити залишкову намагніченість J' стального кільця та залишкові напруженість H' та індукцію B' магнітного поля всередині кільця після зникнення струму в обмотці.

Дано:

$J'-?$
$H'-?$
$B'-?$
$q'=80\cdot 10^{-6}\ Кл$

Скористаємось розв'язком попередньої задачі.

Якщо струму в обмотці не буде, тобто I = 0, то і $H'=\frac{NI}{\pi d}=0$. Заряд, що пройшов через гальванометр $q'=-\frac{\Delta\Phi}{R}$. Зміна магнітного потоку $\Delta\Phi=\Phi'-\Phi$, де Φ' та Φ – магнітні потоки в кільці після та до зникнення стуму.

Тоді $q'=-\frac{\Phi'-\Phi}{R}=\frac{\Phi-\Phi'}{R}$.

Враховуючи, що $\Phi=BS$ та $\Phi'=B'S$, можна записати, що $q'=\frac{BS-B'S}{R}=\frac{S(B-B')}{R}$. Звідси $S(B-B')=q'R$; $B-B'=\frac{q'R}{S}$; $B'=B-\frac{q'R}{S}$.

Індукція $B=\frac{qR}{S}$, тоді $B'=\frac{qR}{S}-\frac{q'R}{S}=\frac{(q-q')R}{S}$.

Залишкова намагніченість $J'=\frac{B'}{\mu_0}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[H']=\frac{A}{м};\ [B']=\frac{(Кл-Кл)\cdot Ом}{м^2}=\frac{Кл\cdot Ом}{м^2}=\frac{Кл\cdot B}{A\cdot м^2}=\frac{A\cdot B\cdot c}{A\cdot м^2}=\frac{Вб}{м^2}=Тл;$$

$$[J'] = \frac{Тл \cdot A^2}{H} = \frac{Вб \cdot A^2}{м^2 \cdot H} = \frac{B \cdot A \cdot с \cdot A}{м^2 \cdot H} = \frac{Дж \cdot A}{м^2 \cdot H} = \frac{H \cdot м \cdot A}{м^2 \cdot H} = \frac{A}{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$B' = \frac{\left(0{,}24 \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-5}\right) \cdot 0{,}8}{1{,}6 \cdot 10^{-4}} = 0{,}8 \ (Тл).$$

$$J' = \frac{0{,}8}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}} = 6{,}4 \cdot 10^5 \ \left(\frac{A}{м}\right).$$

Задача 19.3. На стержень з немагнітного матеріалу завдовжки $l = 50 см$ і площею поперечного перерізу $S = 2\, см^2$ намотано в один шар провідник так, що на кожен сантиметр довжини стержня припадає 20 витків. Визначити енергію магнітного поля провідника, якщо сила струму в ньому $I = 0{,}5\, A$.

Дано:

$W - ?$

$l = 0{,}5\, м$

$S = 2 \cdot 10^{-4} м^2$

$n = 20$

$I = 0{,}5\, A$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ \frac{H}{A^2}$

Енергія магнітного поля соленоїда: $W = \frac{LI^2}{2}$.

Індуктивність соленоїда: $L = \mu\mu_0 n^2 V$.

Таким чином: $W = \frac{\mu\mu_0 n^2 V I^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 l S I^2}{2}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[W] = \frac{H \cdot м^2 \cdot A^2}{A^2 \cdot м} = H \cdot м = Дж.$$

Підставимо числові значення:

$$W = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}25}{2} = 6{,}3 \cdot 10^{-5} (Дж).$$

Задача 19.4. Визначити об'ємну густину енергії магнітного поля в повітрі на відстані $a = 1 м$ від дуже довгого провідника, по якому тече струм силою $I = 10 A$.

Дано:

$\omega_m - ?$

$a = 1\, м$

$I = 10\, A$

Об'ємна густина енергії магнітного поля:

$$\omega_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Індукція магнітного поля:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}; \ \mu = 1. \text{ Тоді } \omega_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2};$$

Виконаємо перевірку розмірності: $[\omega_m] = \frac{Гн \cdot A^2}{м \cdot м^2} = \frac{Гн \cdot A^2}{м^3} = \frac{Дж \cdot A^2}{A^2 \cdot м^3} = \frac{Дж}{м^3}$.

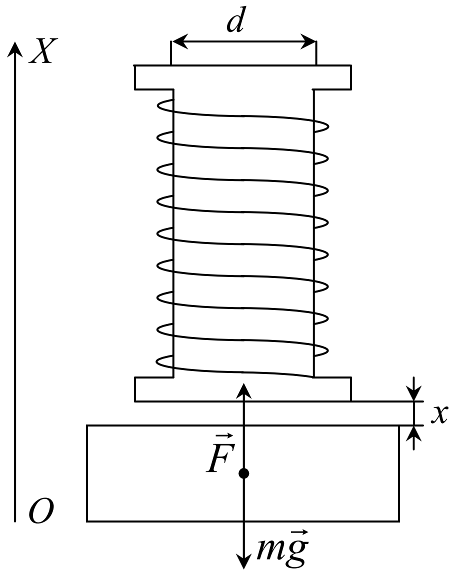
Підставимо числові значення:

$$\omega_m = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 100}{8 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 100}{8 \cdot 3{,}14} = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \left(\frac{Дж}{м^3}\right).$$

Задача 19.5. Обчислити максимальну масу вантажу, який може бути піднятий за допомогою електромагніту, якщо індукція в його осерді $B = 1\ Тл$, а діаметр осердя $d = 0{,}5 м$.

Дано:

$m - ?$
$B = 1 Тл$
$d = 0{,}5\, м$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Гн}{м}$



На вантаж масою m, що утримується електромагнітом, діятимуть сила тяжіння $m\vec{g}$ та підіймальна сила магніту $\vec{F}$.

В стані спокою сума діючих на вантаж сил $m\vec{g} + \vec{F} = 0$.

Спроектуємо ці сили на вісь Ох:

$-mg + F = 0$.

Отже, у стані спокою підіймальна сила електромагніта врівноважуватиме силу тяжіння: $mg = F$.

Звідси $m = \frac{F}{g}$.

Знайдемо підіймальну силу електромагніта.

Припустимо, що між вантажем і осердям існує малий зазор x і вантаж віддаляється від осердя на відрізок dx. При цьому згідно із законом електромагнітної індукції магнітний потік через обмотку змінюється на деяку величину $d\Phi$ і у колі виникає додаткова електрорушійна сила

$$d\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Згідно до закону Ома $d\varepsilon = dI \cdot R$, де R – повний опір кола, включаючи опір джерела струму, тоді $dI \cdot R = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Отже, додаткова сила струму, що виникає в колі $dI = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$.

Згідно до закону збереження енергії при переміщенні вантажу на dx зміна роботи джерела струму буде визначатись зміною кількості теплоти Джоуля-Ленца, зміною енергії магнітного поля та механічною роботою, тобто

$$dA_д = dQ + dW + dA_м.$$

Зміна роботи джерела струму:

$$dA_д = \varepsilon(I + dI)dt - \varepsilon Idt = \varepsilon Idt + \varepsilon dIdt - \varepsilon Idt = \varepsilon dIdt = -\frac{\varepsilon}{R}\frac{d\Phi}{dt}dt = -Id\Phi .$$

Зміна кількості теплоти Джоуля-Ленца:

$$dQ = R(I + dI)^2 dt - RI^2 dt = R\left(I^2 + 2IdI + d^2 I\right)dt - RI^2 dt = RI^2 dt + 2RIdIdt +$$
$$+ Rd^2 Idt - RI^2 dt.$$

Внаслідок малості $d^2 I$ доданок $Rd^2 Idt \to 0$, отже

$$dQ = 2RIdIdt = -2RI\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}dt = -2Id\Phi .$$

Залежність сили струму від часу в процесі його встановлення, можна знайти за формулою

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \text{ де } I_0 = \frac{\varepsilon}{R} .$$

Робота джерела струму за час dt дорівнює εIdt і зменшується на величину

$$\varepsilon I_0 dt - \varepsilon Idt = \varepsilon I_0 dt - \varepsilon I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \varepsilon I_0 dt - \varepsilon I_0 dt + \varepsilon I_0 e^{-\frac{R}{L}t}dt = \varepsilon I_0 e^{-\frac{R}{L}t}dt .$$

Тому протягом всього процесу встановлення струму відбудеться „розвантаження” контуру, рівне

$$\varepsilon I_0\int_0^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t}dt = \varepsilon I_0\left(-\frac{L}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{\varepsilon I_0 L}{R}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = -LI_0^2(0-1) = LI_0^2 .$$

Зменшення кількості теплоти, що виділяється можна знайти як

$$\int_0^{\infty}\left(RI_0^2 - RI^2\right)dt = \int_0^{\infty}\left(RI_0^2 - RI_0^2\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2\right)dt = RI_0^2\int_0^{\infty}\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2\right)dt =$$

$$= RI_0^2\int_0^{\infty}\left(1 - \left(1 - 2e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{2R}{L}t}\right)\right)dt = RI_0^2\int_0^{\infty}\left(2e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{2R}{L}t}\right)dt =$$

$$= RI_0^2\int_0^{\infty} 2e^{-\frac{R}{L}t}dt - RI_0^2\int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t}dt = 2RI_0^2\int_0^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t}dt - RI_0^2\int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t}dt = 2RI_0^2\frac{L}{R} -$$

$$- RI_0^2\frac{L}{2R} = 2LI_0^2 - \frac{L}{2}I_0^2 = \frac{4LI_0^2 - LI_0^2}{2} = \frac{3}{2}LI_0^2.$$

Таким чином, енергія магнітного поля буде становити

$$W = \frac{3}{2}LI_0^2 - LI_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 .$$

Зміна енергії магнітного поля: $dW = \frac{1}{2}I_0^2 dL$, де dL – збільшення індуктивності електромагніта при збільшенні зазора на dx.

Оскільки $\Phi = LI$, то $d\Phi = IdL$, тому $dW = \frac{1}{2}Id\Phi$.

Механічна робота $dA = Fdx$.

Таким чином можна записати:

$$-Id\Phi = -2Id\Phi + \frac{1}{2}Id\Phi + Fdx;$$

$$Fdx = -Id\Phi + 2Id\Phi - \frac{1}{2}Id\Phi = \frac{1}{2}Id\Phi. \qquad F = \frac{1}{2}I\frac{d\Phi}{dx}.$$

Якщо кількість витків в котушці електромагніта N, то повний магнітний потік $\Phi = NBS$, де B – індукція магнітного поля в осерді, S – площа поперечного перерізу осердя.

При наявності зазору закон повного струму запишеться у вигляді:

$Hl + H'x = NI$, де H' – напруженість поля в зазорі.

Враховуючи, що індукція і напруженість магнітного поля пов’язані співвідношенням $H = \frac{B}{\mu\mu_0}$, можна записати також і вираз для обчислення H':

$$H' = \frac{B}{\mu'\mu_0}.$$

Якщо у зазорі знаходиться повітря, то $\mu' = 1$ і $H' = \frac{B}{\mu_0}$.

Тоді закон повного струму запишеться так:

$$\frac{Bl}{\mu\mu_0} + \frac{Bx}{\mu_0} = NI.$$

Виразимо звідси індукцію магнітного поля:

$$\frac{Bl + \mu Bx}{\mu\mu_0} = NI; \quad \frac{B(l + \mu x)}{\mu\mu_0} = NI; \quad B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l + \mu x}.$$

Тоді повний магнітний потік: $A = \frac{\mu\mu_0 N^2 IS}{l + \mu x}$.

Обчислимо значення $\frac{dA}{dx}$:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \mu\mu_0 N^2 IS\frac{dx}{l + \mu x} = \mu\mu_0 N^2 IS(l + \mu x)^{-1}dx = \mu\mu_0 N^2 IS\left(-1\cdot(l + \mu x)^2\right)\mu x dx =$$

$$= -\frac{\mu^2\mu_0 N^2 IS}{(l + \mu x)^2}.$$

Підставимо одержаний вираз у формулу для розрахунку сили F:

$$F = -\frac{1}{2}I\frac{\mu^2\mu_0 N^2 IS}{(l + \mu x)^2} = -\frac{\mu^2\mu_0 N^2 I^2 S}{2(l + \mu x)^2} = -\frac{\mu_0 S}{2}\left(\frac{\mu NI}{l + \mu x}\right)^2 = -\frac{S}{2\mu_0}\left(\frac{\mu\mu_0 NI}{l + \mu x}\right)^2 =$$

$$= -\frac{B^2 S}{2\mu_0}.$$

Знак „–” показує, що сила, яка діє на вантаж, намагається зменшити зазор x.

Таким чином максимальна маса вантажу, який може бути піднятий за допомогою електромагніту:

$m = \dfrac{B^2 S}{2\mu_0 g}$. $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, тоді остаточно $m = \dfrac{\pi d^2 B^2}{8\mu_0 g}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[m] = \frac{Тл^2 \cdot м^2}{\frac{Гн}{м}\frac{м}{с^2}} = \frac{Тл^2 \cdot м^2 \cdot с^2}{Гн} = \frac{Вб^2 \cdot м^2 \cdot А \cdot с^2}{В \cdot с \cdot м^4} = \frac{В^2 \cdot с^2 \cdot А \cdot с^2}{В \cdot с \cdot м^2} = \frac{А \cdot В \cdot с \cdot с^2}{м^2} =$$

$$= \frac{Дж \cdot с^2}{м^2} = \frac{Н \cdot м \cdot с^2}{м^2} = \frac{кг \cdot м^2 \cdot с^2}{с^2 \cdot м^2} = кг.$$

Підставимо числові значення:

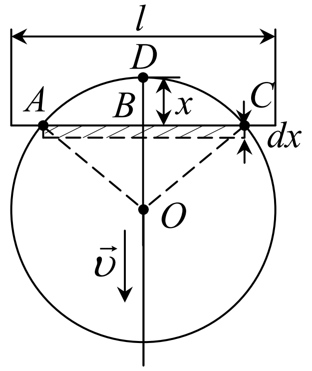
$$m = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 1}{8 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 9{,}81} \approx 8 \cdot 10^3 (кг).$$

<u>Тема 20.</u> ЗАКОН ФАРАДЕЯ-МАКСВЕЛЛА. ІНДУКТИВНІСТЬ. САМОІНДУКЦІЯ.

Задача 20.1. Визначити ЕРС індукції в стержні довжиною l, який переміщується паралельно самому собі в однорідному магнітному полі з швидкістю υ. Магнітне поле викликане проходженням колового струму радіусом R і є перпендикулярним до стержня.

Дано:

$\varepsilon - ?$
l, υ, R, B, t



Будемо вважати, що у вибраний нами момент спостереження стержень обмежений довжиною відрізку AC. Виберемо на відстані $BD = x$ нескінченну малу площу:

$dS = ACdx$.

Оскільки час руху стержня з точки D в точку $B - t$, то $x = \upsilon t$.

Для визначення ЕРС індукції необхідно знати зміну магнітного потоку, час протягом якого відбулась ця зміна та кількість витків в рамці колового струму. Оскільки $d\Phi = BdS$ визначимо dS через швидкість та зміну часу: $dx = \upsilon dt$, тоді $dS = AC\upsilon dt$. З геометричних міркувань: $AC = 2AB = 2BC$;

$$AB = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2R_x - x^2}; \; AC = 2\sqrt{2R_x - x^2} = 2\sqrt{x(2R - x)}.$$

Підставивши значення x одержимо: $dS = 2\upsilon\sqrt{\upsilon t(2R - \upsilon t)}dt$.

Елементарний потік через dS: $d\Phi = BdS = 2B\upsilon\sqrt{\upsilon t(2R - \upsilon t)}dt$.

Таким чином ЕРС індукції в стержні утвореної одним витком зі струмом в момент часу t дорівнює: $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -2B\upsilon\sqrt{\upsilon t(2R - \upsilon t)}$.

Якщо поле напрямлено з площини малюнка, а стержень рухається зверху вниз, то ЕРС індукції визначається зменшенням потенціалу справо на ліво.

Задача 20.2. Визначити струм індукції рамки площею $S = 0{,}1\,м^2$ і активним опором $R = 0{,}5\ Ом$, що протягом $0{,}4\,с$ повертається в магнітному полі Землі ($B = 5 \cdot 10^{-5}\,Тл$) з одного в друге можливе крайнє положення.

Дано:

$I - ?$
$S = 0{,}1\ м^2$
$R = 0{,}5\ Ом$
$t = 0{,}4\,с$
$B = 5 \cdot 10^{-5}\,Тл$

Кратними можливими положеннями можуть бути:

а). Положення паралельно лініям індукції;

б). Положення перпендикулярно лініям індукції.

Коли рамка паралельна лініям $\Phi_1 = 0$.

Якщо ж рамка перпендикулярна лініям індукції, то $\Phi_2 = BS$, а отже індукований заряд буде: $q = \frac{\Delta\Phi}{R} = -\frac{BS}{R}$, ($\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$).

Величина струму $I = \frac{q}{\Delta t}$, або $I = \frac{q}{t}$ оскільки $\Delta t = t - t_0$, а $t_0 = 0$.

$$I = -\frac{BS}{Rt}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[I] = \frac{Тл \cdot м^2}{Ом \cdot с} = \frac{Вб \cdot м^2}{м^2 \cdot Ом \cdot с} = \frac{Вб}{Ом \cdot с} = \frac{В \cdot с}{Ом \cdot с} = \frac{В}{Ом} = А.$$

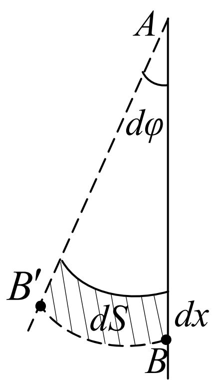
Підставимо числові значення:

$$I = -\frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,1}{0,5 \cdot 0,4} = -2,5 \cdot 10^{-5}(А).$$

Задача 20.3. Визначити різницю потенціалів між кінцями стержня довжиною $l = 0,4\,м$, який обертається відносно одного із своїх кінців з кутовою швидкістю $\omega = 10\,с^{-1}$ в магнітному полі індукцією $B = 10^{-3}\,Тл$, яке перпендикулярне до площини обертання стержня.

Дано:

$(\varphi_A - \varphi_B) - ?$
$l = 0,4\,м$
$\omega = 10\,с^{-1}$
$B = 10^{-3}\,Тл$



Позначимо кінці стержня буквами A та B.

Якщо мова йде про різницю потенціалів на кінцях стержня це означає, що коло розімкнене. Отже, потрібно визначити можливу ЕРС індукції, для чого слід знайти $d\Phi$ і час його зміни dt.

Виберемо на відстані x від точки обертання елемент довжини стержня dx. При повороті стержень переміститься на кут $d\varphi$, а елемент dx опише площу dS.

$dS = dldx$, де dl – довжина дуги, $dl = xd\varphi$, отже $dS = xdxd\varphi$.

Зміна магнітного потоку $d\Phi = BdS\cos(\vec{B}, \vec{n})$.

Кут між векторами $\vec{B}$ та $\vec{n}$ становить $0°$, тому $\cos(\vec{B}, \vec{n}) = 1$.

Таким чином $d\Phi = Bxdxd\varphi$.

Елементарне значення ЕРС індукції, що знаходиться у елементі dx визначається як: $d\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\omega xdx$.

Тоді ЕРС індукції в стержні довжиною l: $\varepsilon_i = -\int_0^l B\omega xdx = -B\omega\frac{l^2}{2}$.

А отже різниця потенціалів між кінцями стержня: $\varphi_A - \varphi_B = U = \dfrac{B\omega l^2}{2}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\Delta\varphi] = \frac{Тл \cdot м^2}{с} = \frac{Вб \cdot м^2}{м^2 \cdot с} = \frac{Вб}{с} = \frac{В \cdot с}{с} = В .$$

Підставимо числові значення:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{10^{-3} \cdot 10 \cdot 0{,}16}{3} = 0{,}08 \cdot 10^{-2} = 0{,}8\,(В)$$

Задача 20.4. Визначити коефіцієнт самоіндукції тороїда довжиною $l = 0{,}5\,м$, площею перерізу $S = 0{,}1\,м^2$ і числом витків $N = 3000$. Магнітна проникність осердя соленоїда $\mu = 2$.

Дано:

$L - ?$

$l = 0{,}5\,м$

$S = 0{,}1\,м^2$

$N = 3000$

$\mu = 2$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\dfrac{Н}{А^2}$

Магнітний потік через поперечний переріз і-того витка дорівнює: $\Phi_i = BS$.

Потік через усі витки становить: $\Phi = \Phi_i N = BSN$.

Враховуючи, що вектора індукції $\vec{B}$ та напруженості $\vec{H}$ магнітного пов'язані співвідношенням $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, можна записати, що $\Phi = \mu\mu_0 HSN$.

Вважаючи, що обмотка тороїда є нормальним соленоїдом, запишемо $H = \dfrac{IN}{l}$, де l – довжина середньої лінії тороїду.

Тоді магнітний потік $\Phi = \mu\mu_0 \dfrac{IN}{l} SN = \mu\mu_0 \dfrac{ISN^2}{l}$.

З іншого боку, магнітний потік та коефіцієнт самоіндукції пов'язані співвідношенням $\Phi = LI$, тому можна записати:

$$LI = \frac{\mu\mu_0 ISN^2}{l}.$$

Отже,коефіцієнт самоіндукції: $L = \dfrac{\mu\mu_0 SN^2}{l}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[L] = \frac{Н \cdot м^2}{А^2 \cdot м} = \frac{Н \cdot м}{А^2} = \frac{Дж}{А^2} = \frac{В \cdot А \cdot с}{А^2} = \frac{В \cdot с}{А} = \frac{Вб}{А} = Гн .$$

Підставимо числові значення:

$$L = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}1 \cdot 9 \cdot 10^6}{0{,}5} = 45{,}216 \cdot 10^{-1} = 4{,}5\,(Гн).$$

Задача 20.5. По довгому соленоїду з намагніченим осердям перерізом $S = 0{,}5\,см^2$, що містить $N = 1200$ витків, проходить струм силою $I = 2\,A$. Індукція магнітного поля в центрі соленоїда $B = 10\,мТл$. Визначити його індукцію.

Дано:

$L - ?$
$S = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,м^2$
$N = 1200$
$I = 2\,A$
$B = 10^{-2}\,Тл$

Для нормального соленоїда потік індукції магнітного поля крізь поверхню площею S, яку охоплює і-ий виток, у вакуумі $\Phi_i = BS$.

Повний потік через усі N витків $\Phi = \Phi_i N = BSN$.

З іншого боку, магнітний потік та коефіцієнт самоіндукції пов'язані співвідношенням $\Phi = LI$, тому можна записати $LI = BSN$.

Виразимо звідси індуктивність:

$$L = \frac{BSN}{I}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[L] = \frac{Тл \cdot м^2}{A} = \frac{Вб \cdot м^2}{м^2 \cdot A} = \frac{Вб}{A} = Гн.$$

Підставимо числові значення:

$$L = \frac{10^{-2} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 1200}{2} = 300 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-4} (Гн).$$

Задача 20.6. Котушка має опір $R = 8\;Ом$ та індуктивність $L = 0{,}2\,Гн$. Через який час після вмикання котушки в електричне коло в ній встановиться така сила струму, що дорівнює половині повної сили струму, що встановиться через тривалий час?

Дано:

$t - ?$
$R = 8\;Ом$
$L = 0{,}2\,Гн$
$I = \frac{1}{2} I_0$

При замиканні кола окрім зовнішньої електрорушійної сили ε виникає електрорушійна сила самоіндукції $\varepsilon_{ci} = -L\frac{dI}{dt}$, яка згідно до правила Ленца, перешкоджає збільшенню сили струму.

Згідно до закону Ома $IR = \varepsilon + \varepsilon_{ci}$, або $IR = \varepsilon - L\frac{dI}{dt}$; $IR - \varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$.

Введемо нову змінну:

$$U = IR - \varepsilon;\; dU = dIR;\; dI = \frac{dU}{R}.$$

Таким чином можна записати $U = -\frac{L}{R}\frac{dU}{dt}$.

Перепишемо останнє рівняння як $\frac{dU}{U} = -\frac{R}{L}dt$.

Розв’язком цього диференціального рівняння буде $U = Ce^{-\frac{R}{L}t}$.

Сталу інтегрування знайдемо з початкових умов.

У момент замикання ($t = 0$) сила струму $I = 0$ та $U = 0 \cdot R - \varepsilon = -\varepsilon$, тоді $-\varepsilon = Ce^{-\frac{R}{L}\cdot 0} = Ce^0 = C$.

Отже, $C = -\varepsilon$.

$IR - \varepsilon = -\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$.

Розділимо ліву та праву частини останнього рівняння на R: $I - \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$.

Враховуючи, що сила струму, що встановиться $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, можна записати $I - I_0 = -I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$; $I = I_0 - I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Згідно до умови задачі можна записати:

$\frac{1}{2}I_0 = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$; $\frac{1}{2} - 1 = -e^{-\frac{R}{L}t}$; $\frac{1}{2} = e^{-\frac{R}{L}t}$.

Прологарифмуємо останнє рівняння: $\ln\frac{1}{2} = -\frac{R}{L}t = -\ln 2$; $\ln 2 = \frac{R}{L}t$;

Звідси час $t = \frac{L\ln 2}{R}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$[t] = \frac{Гн}{Ом} = \frac{Вб}{А \cdot Ом} = \frac{В \cdot с}{А \cdot Ом} = \frac{Ом \cdot с}{Ом} = с$.

Підставимо числові значення:

$t = \frac{0{,}2\ln 2}{8} = 0{,}025 \cdot 0{,}7 \approx 0{,}017(с)$.

Задача 20.7. Електричне коло складається з котушки, індуктивність якої $L = 0{,}2\,Гн$, а опір $R = 1{,}6\ Ом$ та джерела струму. З кола одночасно вимикають джерело струму і накоротко замикають котушку. У скільки разів зменшиться сила струму в котушці через $t = 0{,}05\,с$?

Дано:

$h - ?$
$R = 1{,}6\ Ом$
$L = 0{,}2\,Гн$
$t = 0{,}05\,с$

Після одночасного вимикання джерела струму і замикання котушки струм не буде зникати миттєво за рахунок явища екстраструмів розмикання.

Згідно до другого правила Кірхгофа при вимиканні джерела струму, тобто при $\varepsilon = 0$, можна записати $IR = \varepsilon_{ci}$.

Електрорушійна сила самоіндукції $\varepsilon_{ci} = -L\dfrac{dI}{dt}$.

Тоді, $L\dfrac{dI}{dt} = -IR$.

Розділимо обидві частини останнього рівняння на I: $\dfrac{L}{dI}\dfrac{dI}{I} = -R$.

Домножимо обидві частини останнього рівняння на $\dfrac{dt}{L}$: $\dfrac{dI}{I} = -\dfrac{R}{L}dt$.

Розв’язком даного диференціального рівняння буде: $I = Ce^{-\frac{R}{L}t}$.

Сталу інтегрування знайдемо з початкових умов.

В момент часу $t = 0$, $I = I_0$, тоді $I_0 = Ce^{-\frac{R}{L}\cdot 0} = Ce^0 = C$.

Отже, $C = I_0 = \dfrac{\varepsilon}{R}$.

Тоді можна записати: $I = \dfrac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$.

Таким чином сила струму зменшиться у $n = \dfrac{I_0}{I} = \dfrac{I_0}{I_0 e^{-\frac{R}{L}t}} = e^{\frac{R}{L}t}$ разів.

Підставимо числові значення:

$$n = e^{\frac{1,6}{0,2}\cdot 0,05} = e^{0,4} = 1,5.$$

Задача 20.8. Знайти індуктивність $1 м$ кабелю, що складається з двох тонкостінних коаксіальних металевих циліндрів, якщо радіус зовнішнього циліндра у $n = 3,8$ разів більший за радіус внутрішнього. Магнітну проникність середовища між циліндрами вважати рівною одиниці.

Дано:

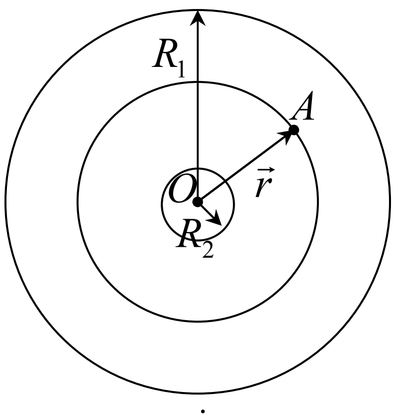
$L - ?$

$l = 1 м$

$\dfrac{R_1}{R_2} = n = 3,8$

$\mu = 1$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{H}{A^2}$



Зробимо деякі припущення.

Нехай по внутрішньому циліндру протікає струм I, а по зовнішньому – струм I протилежного напряму.

Завдяки тому, що струми у внутрішньому та зовнішньому циліндрах рівні за величиною та протилежні за напрямом, магнітні поля внутрішнього та зовнішнього циліндрів H_2 та H_1 у будь-якій точці простору поза коаксіального парою також будуть дорівнювати за величиною і напрямлені у протилежні сторони. Внаслідок цього, результуюче магнітне поле поза коаксіальною парою буде дорівнювати нулю:

$$H = H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi R} - \frac{I}{2\pi R} = 0.$$

Таким чином, поле буде сконцентроване тільки в просторі між циліндрами.

Знайдемо значення індукції B в довільній точці A, для чого через цю точку проведемо коло радіусом r з центром в точці O.

Запишемо теорему про циркуляцію магнітного поля $\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \mu\mu_0 I$.

Узгоджуючи напрями струму і обходу контуру, отримуємо $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$.

З міркувань симетрії значення B в усіх точках вибраного контуру однакові, тому: $\oint_l \vec{B}d\vec{l} = B\oint_l dl = 2\pi rB = \mu\mu_0 I$.

Виразимо звідси B:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{1}$$

Енергія магнітного поля в однорідному середовищі може бути розрахована за формулою:

$$W = \frac{1}{2\mu\mu_0}\int_V B^2 dV, \tag{2}$$

де, V – об'єм, в якому існує поле, тобто циліндричний прошарок між стінками циліндрів.

Підставляючи значення B з рівняння (1) у рівняння (2), отримуємо:

$$W = \frac{1}{2\mu\mu_0}\int_V \frac{\mu^2\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2}dV = \frac{\mu^2\mu_0^2 I^2}{2\mu\mu_0 4\pi^2}\int_V \frac{dV}{r^2} = \frac{\mu\mu_0 I^2}{8\pi^2}\int_V \frac{dV}{r^2}.$$

Виражаючи елемент об'єму в циліндричній системі координат $dV = rd\varphi drdz$, отримуємо:

$$W = \frac{\mu\mu_0 I^2}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 I^2}{8\pi^2}\cdot 2\pi \cdot l \cdot \ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu\mu_0 l I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}. \tag{3}$$

З іншого боку, енергія магнітного поля, сконцентрована в певній області простору може бути розрахована за формулою:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \tag{4}$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь (3) та (4), можна записати:

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 l I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}. \tag{5}$$

Таким чином, індуктивність ділянки коаксіального кабелю може бути розрахована за формулою:

$$L = \frac{\mu\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[L] = \frac{Н \cdot м}{А^2} = \frac{Дж}{А^2} = \frac{В \cdot А \cdot с}{А^2} = \frac{В \cdot с}{А} = \frac{Вб}{А} = Гн.$$

Підставимо числові значення:

$$L = \frac{1 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2 \cdot 3{,}14}\ln 3{,}8 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}335 \approx 2{,}7 \cdot 10^{-7}\left(Гн\right).$$

Тема 21. ЗМІННИЙ СТРУМ.

Задача 21.1. Визначити ефективну напругу генератора змінного струму при наявності двох синусоїдальних напруг з частотою $\nu_1 = 50\,Гц$ і амплітудою $U_1 = 170\,В$ та частотою $\nu_2 = 150\,Гц$ і амплітудою $U_2 = 20\,В$.

Дано:

$U_{еф} - ?$
$\nu_1 = 50\,Гц$
$U_1 = 170\,В$
$\nu_2 = 150\,Гц$
$U_2 = 20В$

Запишемо формулу взаємозв'язку ефективної напруги змінного струму $U_{еф}$ та миттєве значення напруги U:

$U_{еф} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2 dt}$. Звідси $U_{еф}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U^2 dt$. (1)

Генератори змінного струму дають ЕРС, що є сумою ЕРС основної частоти та декількох значно менших ЕРС з частотою у три, п'ять і т.д. разів більшими за основну частоту.

Результуюча миттєва напруга буде результатом складання двох синусоїдальних напруг:

$U = U_1 \sin\omega_1 t + U_2 \sin\omega_2 t$. (2)

Враховуючи, що циклічна частота пов'язана з частотою коливань співвідношенням $\omega = 2\pi\nu$, можна записати:

$\omega_1 = 2\pi\nu_1$ та $\omega_2 = 2\pi\nu_2$.

З аналізу умови видно, що $\nu_2 = 3\nu_1$, тому $\omega_2 = 6\pi\nu_1$.

Підставляючи значення ω_1 та ω_2 у рівняння (2), отримаємо

$U = U_1 \sin 2\pi\nu_1 + U_2 \sin 6\pi\nu_2$. (3)

Таким чином, після підстановки виразу для розрахунку миттєвої напруги (3) у рівняння (1), матимемо:

$$U_{еф}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(U_1 \sin 2\pi\nu_1 t + U_2 \sin 6\pi\nu_1 t\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(U_1^2 \sin^2 2\pi\nu_1 t + 2U_1U_2 \sin 2\pi\nu_1 \sin t 6\pi\nu_1 t + U_2^2 \sin^2 6\pi\nu_1 t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T U_1^2 \sin^2 2\pi\nu_1 t dt + \int_0^T 2U_1U_2 \sin 2\pi\nu_1 t \sin 6\pi\nu_1 t dt + \int_0^T U_2^2 \sin^2 6\pi\nu_1 t dt\right). \quad (4)$$

Обчислимо перший інтеграл з виразу (4):

$$\int_0^T U_1^2 \sin^2 2\pi\nu_1 t dt = U_1^2 \int_0^T \sin^2 2\pi\nu_1 t dt = U_1^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 4\pi\nu_1 t}{2} dt = U_1^2 \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4\pi\nu_1 t}{2}\right) dt =$$

$$= U_1^2 \left(\int_0^T \frac{dt}{2} - \int_0^T \frac{\cos 4\pi\nu_1 t dt}{2}\right) = U_1^2 \left(\frac{1}{2}\int_0^T dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos 4\pi\nu_1 t dt\right) = \frac{U_1^2}{2}\left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 4\pi\nu_1 t dt\right) =$$

$$=\frac{U_1^2}{2}\left(t\Big|_0^T-\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\nu_1 t\Big|_0^T\right)=\frac{U_1^2}{2}\left(T-0-\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\nu_1 T+\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\nu_1\cdot 0\right)=$$

$$=\frac{U_1}{2}\left(T-\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\nu_1 T\right).$$

Враховуючи, що $\nu_1=\frac{1}{T}$, (5)

запишемо $\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\frac{1}{T}T=0$, тому $\int_0^T U_1^2\sin^2 2\pi\nu_1 t dt=\frac{U_1^2}{2}(T-0)=\frac{U_1^2 T}{2}$. (6)

Аналогічно, третій інтеграл з виразу (4): $\int_0^T U_2^2\sin^2 6\pi\nu_1 t dt=\frac{U_2^2 T}{2}$. (7)

Обчислимо другий інтеграл з виразу (4):

$$\int_0^T 2U_1U_2\sin 2\pi\nu_1 t\sin 6\pi\nu_1 t dt=2U_1U_2\int_0^T\sin 2\pi\nu_1 t\sin 6\pi\nu_1 t dt=$$

$$=2U_1U_2\int_0^T\frac{1}{2}\left(\cos(2\pi\nu_1-6\pi\nu_1)t-\cos(2\pi\nu_1+6\pi\nu_1)t\right)dt=$$

$$=U_1U_2\int_0^T\left(\cos(-4\pi\nu_1)t-\cos 8\pi\nu_1 t\right)dt=U_1U_2\left(\int_0^T\cos 4\pi\nu_1 t dt-\int_0^T\cos 8\pi\nu_1 t dt\right)=$$

$$=U_1U_2\left(\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\nu_1 t\Big|_0^T-\frac{1}{8\pi\nu_1}\sin 8\pi\nu_1 t\Big|_0^T\right)=$$

$$=U_1U_2\left(\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\nu_1 T-\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\nu_1\cdot 0-\frac{1}{8\pi\nu_1}\sin 8\pi\nu_1 T+\frac{1}{8\pi\nu_1}\sin 8\pi\nu_1\cdot 0\right)=$$

$$=U_1U_2\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\nu_1 T.$$

З врахуванням виразу (5), отримуємо:

$$\int_0^T 2U_1U_2\sin 2\pi\nu_1 t\sin 6\pi\nu_1 t dt-U_1U_2\frac{1}{4\pi\nu_1}\sin 4\pi\frac{1}{T}T=0. \quad (8)$$

Отже, підставляючи вирази (6), (7) та (8) у (4), отримаємо:

$$U_{еф}^2=\frac{1}{T}\left(\frac{U_1^2 T}{2}+\frac{U_2^2 T}{2}\right)=\frac{T}{2T}\left(U_1^2+U_2^2\right)=\frac{U_1^2+U_2^2}{2}.$$

Таким чином $U_{еф}=\sqrt{\frac{U_1^2+U_2^2}{2}}$. (9)

Підставимо числові значення:

$$U_{еф}=\sqrt{\frac{170^2+20^2}{2}}\approx 121(B).$$

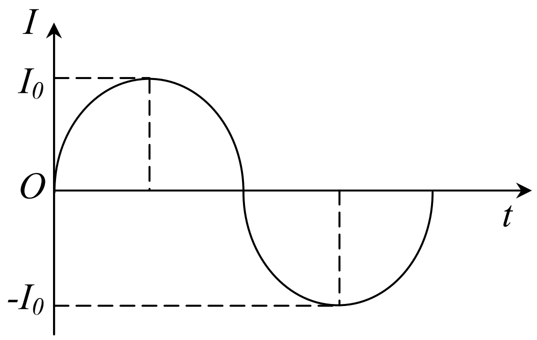
Задача 21.2. Визначити співвідношення між максимальним, ефективним та середнім значеннями змінного синусоїдального струму, якщо зміна сили струму відбувається так як показано на графіку.

Дано:

$\dfrac{I_0}{I_{еф}}-?$

$\dfrac{I_0}{I_{сер}}-?$

$I=f(t)$



Під ефективним (діючим) значенням змінного струму розуміють таке миттєве значення, яке залишається незмінним в часі та призводить до виділення на одному і тому ж опорі такої ж кількості теплоти, що і при проходженні змінного періодичного струму.

Ефективне значення сили струму може бути визначене за співвідношенням:

$$I_{еф}^2=\frac{1}{T}\int_0^T I^2dt=\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2\sin^2\omega t dt=\frac{I_0^2}{T}\int_0^T \sin^2\omega t dt=\frac{I_0^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt=$$

$$=\frac{I_0^2}{2T}\int_0^T (1-\cos 2\omega t)dt=\frac{I_0^2}{2T}\left(\int_0^T dt-\int_0^T \cos 2\omega t dt\right)=\frac{I_0^2}{2T}\left(t\Big|_0^T-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\Big|_0^T\right)=$$

$$=\frac{I_0^2}{2T}\left(T-0-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega T+\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega\cdot 0\right)=\frac{I_0^2}{2T}\left(T-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega T\right).$$

Враховуючи, що $\omega=2\pi\nu$ та $\nu=\dfrac{1}{T}$, а отже $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, одержуємо:

$$I_{еф}^2=\frac{I_0^2}{2T}\left(T-\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{T}T\right)=\frac{I_0^2}{2T}(T-0)=\frac{I_0^2}{2}.$$

Таким чином $I_{еф}=\sqrt{\dfrac{I_0^2}{2}}=\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ та $\dfrac{I_0}{I_{еф}}=\sqrt{2}$.

Середнє арифметичне синусоїдальних струмів за весь період дорівнює *0*, тому на практиці користуються середнім значенням за додатній півперіод:

$$I_{сер}=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} Idt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_0\sin\omega t dt=\frac{2I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\omega t dt=-\frac{2I_0}{\omega T}\cos\omega t\Big|_0^{\frac{T}{2}}=-\frac{2I_0}{\omega T}\left(\cos\omega t\frac{T}{2}-\cos\omega\cdot 0\right)=$$

$$=-\frac{2I_0T}{2\pi T}\left(\cos\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}-\cos 0\right)=-\frac{I_0}{\pi}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{I_0}{\pi}(-1-1)=\frac{2}{\pi}I_0.$$

Таким чином $I_{сер}=\dfrac{2}{\pi}I_0$ та $\dfrac{I_0}{I_{сер}}=\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 21.3. Визначити питомий опір діелектрика, який має діелектричну проникність $\varepsilon = 2{,}8$ і, використаний як ізолятор, в конденсаторі. Конденсатор при частоті змінного струму $\nu = 50\,Гц$ розсіює деяку потужність з коефіцієнтом потужності $\cos\varphi = 0{,}1$.

Дано:

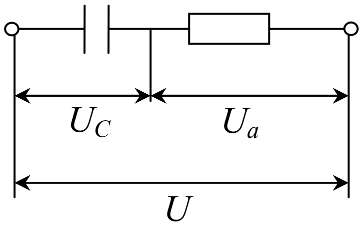
$\rho - ?$

$\varepsilon = 2{,}8$

$\nu = 50\,Гц$

$\cos\varphi = 0{,}1$

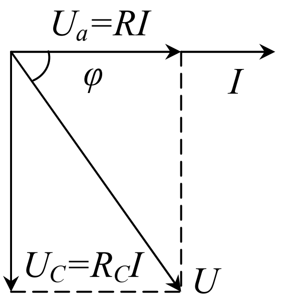
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{Ф}{м}$

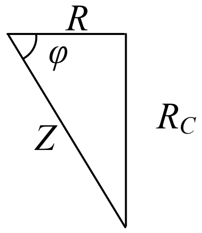


Реальний конденсатор в колі змінного струму необхідно розглядати як послідовне з'єднання безпосередньо конденсатора та еквівалентного послідовного опору, що у даному випадку, визначається втратами у діелектрику.

Напруга у колі у цьому випадку являє собою геометричну суму спадів напруг на окремих ділянках кола, тобто активного спаду напруги U_a, що співпадає за фазою зі струмом та спаду напруги на ємнісному опорі U_C, що відстає від струму за фазою на $\dfrac{\pi}{2}$.

Напруга, прикладена до зажимів кола, відстає за фазою від струму на кут φ. Тоді фазова діаграма матиме вигляд:





Розділивши сторони трикутника напруг на силу струму отримуємо трикутник опорів для того самого кола.

Таким чином, коефіцієнт напруженості, тобто зсув фаз між струмом та напругою $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$.

З трикутника опорів видно, що імпеданс Z, тобто повний опір кола змінного струму $Z = \sqrt{R^2 + R_C^2}$.

Ємнісний опір $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$, тому $Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$.

Тоді,

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \dfrac{2}{\omega^2 C^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2\left(1 + \dfrac{1}{R^2\omega^2 C^2}\right)}} = \frac{R}{R\sqrt{1 + \dfrac{1}{R^2\omega^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{R^2\omega^2 C^2}}}.$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{R^2\omega^2 C^2}} = \frac{1}{\cos\varphi};\quad 1 + \frac{1}{R^2\omega^2 C^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi};\quad \frac{1}{R^2\omega^2 C^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi};$$

$$R^2\omega^2C^2=\frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi};\ R\omega C=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}.$$

Електроємність конденсатора $C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, де S – площа обкладок, d – товщина шару діелектрика.

Активний опір $R=\rho\frac{d}{S}$.

Циклічна частота змінного струму $\omega=2\pi\nu$.

Таким чином можна записати:

$$\rho\frac{d}{S}2\pi\nu\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}};\ 2\pi\nu\rho\varepsilon\varepsilon_0=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}.$$

Виразимо звідси питомий опір діелектрика:

$$\rho=\frac{\cos\varphi}{2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{1-\cos^2\varphi}}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[\rho]=\frac{1}{\frac{1}{c}\frac{\Phi}{м}}=\frac{м\cdot c}{\Phi}=\frac{м\cdot c\cdot B}{Кл}=\frac{м\cdot c\cdot B}{A\cdot c}=Ом\cdot м.$$

Підставимо числові значення:

$$\rho=\frac{0{,}1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 2{,}8\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot\sqrt{1-0{,}01}}\approx 13\cdot 10^6\left(Ом\cdot м\right).$$

Задача 21.4. Коливальний контур містить котушку індуктивністю $L=0{,}1\,мГн$, резистор опором $R=3\ Ом$, а також конденсатор ємністю $C=10\,нФ$. Визначити середню потужність, що споживається контуром, необхідну для підтримання у ньому незатухаючих коливань з амплітудним значенням напруги на конденсаторі $U_m=2B$.

Дано:

$\langle P\rangle-?$
$L=0{,}1\cdot 10^{-3}\,Гн$
$R=3\ Ом$
$C=10^{-8}\Phi$
$U_m=2\,B$

Потужність електричного струму можна обчислити як:

$$P=I^2R.$$

Середнє за період T значення миттєвої потужності електричного струму можна знайти як:

$$\langle P\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T I^2Rdt.$$

Сила струму в електричному колі може бути знайдена як $I=\frac{dq}{dt}$, де q – заряд на обкладках конденсатора.

Заряд q буде змінюватись за гармонічним законом $q = q_0 \cos \omega t$, де q_0 – максимальне значення заряду.

Електроємність конденсатора $C = \frac{q_0}{U_0}$, звідки $q_0 = CU_0$.

Тоді $q = CU_0 \cos \omega t$.

Отже $I = \frac{d(CU_0 \cos \omega t)}{dt} = -CU_0 \omega \sin \omega t$.

Циклічна частота $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Таким чином, сила струму в колі $I = -\frac{CU_0}{\sqrt{LC}} \sin \omega t = -\sqrt{\frac{C}{L}} U_0 \sin \omega t$.

Підставляючи отриманий нами вираз для знаходження сили струму у вираз для середньої потужності, матимемо:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{C}{L} U_0^2 \sin^2 t dt = \frac{1}{T}\frac{C}{L} U_0^2 R \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{CU_0^2 R}{TL}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt =$$

$$= \frac{CU_0^2 R}{2TL}\int_0^T (1-\cos 2\omega t) dt = \frac{CU_0^2 R}{2TL}\left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt\right) = \frac{CU_0^2 R}{2TL}\left(T - \frac{1}{2}\sin 2\omega t \Big|_0^T\right) =$$

$$= \frac{CU_0^2 R}{2TL}\left(T - \frac{1}{2}\sin 2\omega T\right).$$

Враховуючи, що $T = \frac{1}{\nu}$, а $\omega = 2\pi\nu$, то можемо записати, що $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ та $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$.

Таким чином

$$\langle P \rangle = \frac{CU_0^2 R}{4\pi\sqrt{LC}\,L}\left(2\pi\sqrt{LC} - \frac{1}{2}\sin\frac{2}{\sqrt{LC}} 2\pi\sqrt{LC}\right) = \frac{CU_0^2 R}{4\pi\sqrt{LC}\,L}\left(2\pi\sqrt{LC} - \frac{1}{2}\sin 4\pi\right) =$$

$$= \frac{CU_0^2 R}{4\pi\sqrt{LC}\,L}\, 2\pi\sqrt{LC} = \frac{CU_0^2 R}{2L}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[P] = \frac{Ф \cdot В^2 \cdot Ом}{Гн} = \frac{Кл \cdot В^2 \cdot В \cdot А}{В \cdot А \cdot В \cdot с} = \frac{А \cdot с \cdot В}{с} = \frac{Дж}{с} = Вт.$$

Підставимо числові значення:

$$\langle P \rangle = \frac{10^{-8} \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}} = 60 \cdot 10^{-5} = 0{,}6 \cdot 10^{-3}\,(Вт) = 0{,}6\,мВт.$$

Задача 21.5. Вимірюючі прилади ввімкнені у коло змінного струму за схемою, зображеною на малюнку. Визначити величини опорів R_1 та R_L і побудувати векторну діаграму процесу. Визначити величину напруги на ділянці KM та зсув фаз φ у колі, якщо покази ватметра – 940 *Вт*, вольтметра – 220 *В*, амперметра – 5 *А*, а $R_2 = 22\ Ом$.

Дано:

$R_1 - ?\ \ U_1 - ?$

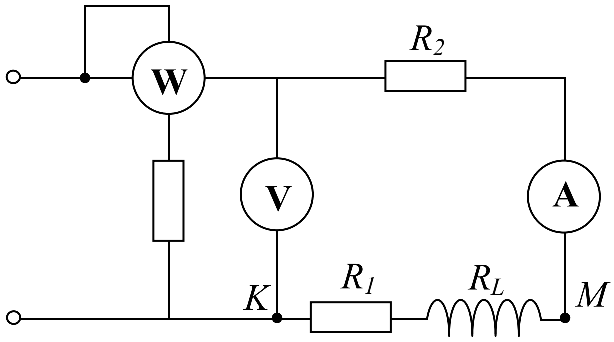
$R_L - ?\ \ \varphi - ?$

$W = 940\,Вт$

$U = 220\,В$

$I = 5\,А$

$R = 22\ Ом$



Для визначення величини розсіяної потужності на опорі R_2 запишемо $P_2 = I^2 R_2$.

$P_2 = 25 \cdot 22 = 250\,(Вт)$.

Тоді, на ділянці KM буде розсіюватись потужність $P_1 = P - P_2$.

$P_1 = 940 - 550 = 390\,(Вт)$.

Оскільки розсіювання енергії відбувається на активному опорі то, значення R_1 може бути визначене як $R_1 = \dfrac{P_1}{I^2}$;

$R_1 = \dfrac{390}{25} = 15{,}6\,(Ом)$.

Оскільки $P = IU\cos\varphi$, то $\cos\varphi = \dfrac{P}{IU}$; $\cos\varphi = \dfrac{940}{5 \cdot 220} = 0{,}855$.

Таким чином $\varphi = \arccos 0{,}855 \approx 31{,}2°$.

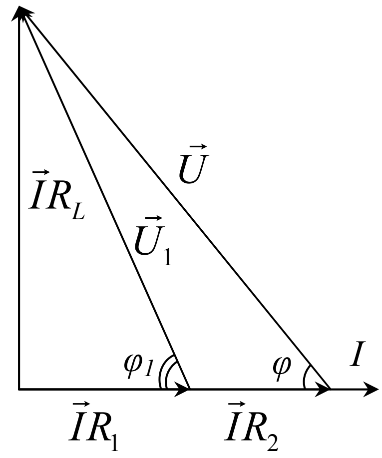
Знаючи, що $R_L = Z\cos\varphi$, де Z – загальний опір кола $Z = \dfrac{U}{I}$, визначимо $R_L = \dfrac{U}{I}\cos\varphi$.

$R_L = \dfrac{220}{5} \cdot 0{,}855 = 22{,}8\,(Ом)$.

Для того щоб побудувати векторну діаграму, обчислимо спади напруг на активних та реактивних опорах:

$IR_2 = 5 \cdot 22 = 110\,(В)$; $IR_1 = 5 \cdot 15{,}6 = 78\,(В)$; $IR_L = 5 \cdot 22{,}8 = 114\,(В)$.

Виберемо за горизонтальний напрямок вектор струму в колі. З його початку відкладемо значення спаду напруги на R_1.



Оскільки напруга на котушці індуктивності у колі змінного струму випереджає коливання струму на $\frac{\pi}{2}$, то з цієї ж точки побудуємо вектор спаду напруги на R_L. На продовженні вектору $\vec{I}R_1$ відкладаємо вектор $\vec{I}R_2$. Геометрична сума цих векторів є вектор, що з’єднує кінці цих векторів. Величина цих векторів є U.

Перевіримо це:

$$U = \sqrt{(IR_L)^2 + (IR_1 + IR_2)^2}\ ;\ U = \sqrt{114^2 + 188^2} \approx 220\,(B).$$

Для визначення зсуву фаз φ_1 на ділянці KM, з’єднаємо кінці векторів $\vec{I}R_1$ та $\vec{I}R_L$. Кут між сумарним вектором напруги на ділянці КМ $\vec{U}_1$ та вектором, що характеризує спад напруги на опорі R_1, визначає зсув фаз на ділянці КМ φ_1.

Задача 21.6. Трифазний споживач енергії, який має активний опір на кожній фазі $R = 8\ Ом$ та індуктивний опір $R_L = 6\ Ом$ ввімкнено в мережу трифазного струму з лінійною напругою $380\,B$. Визначити напругу та силу струму у кожній фазі, якщо фази сполучені: а) зіркою; б) трикутником.

Дано:

$U_{Ф1,2} - ?$

$I_{Ф1,2} - ?$

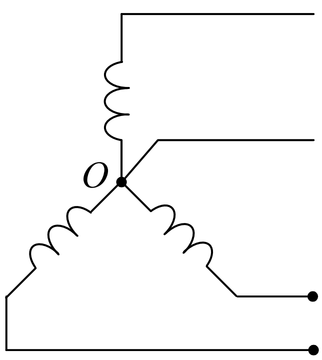
$R = 8\ Ом$

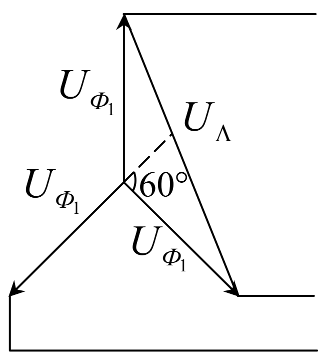
$R_L = 6\ Ом$

$U_л = 380B$

Оскільки навантаження рівномірне, обмежимось визначенням параметрів на одній фазі.

а). Якщо фази сполучені зіркою схема підключення та векторна діаграма матимуть вигляд:





З малюнка видно, що $U_л = 2U_{Ф1}\sin 60° = \sqrt{3}U_{Ф1}$.

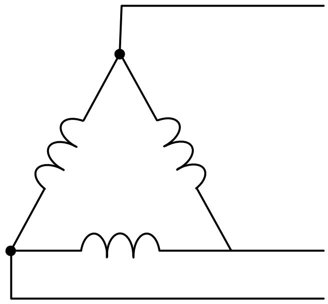
Отже $U_{Ф1} = \dfrac{U_л}{\sqrt{3}}$; $U_{Ф1} = \dfrac{380}{\sqrt{3}} = 220\,(В)$.

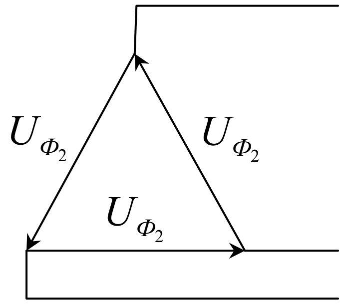
Опір кожної фази визначимо за формулою: $R_Ф = \sqrt{R^2 + R_L^2}$.

$R_Ф = \sqrt{64+36} = 10\,(Ом)$.

Тоді сила струму $I_{Ф1} = \dfrac{U_{Ф1}}{R_Ф}$; $I_{Ф1} = \dfrac{220}{10} = 22(A)$.

б). При підключенні фаз трикутником схема підключення та векторна діаграма матимуть вигляд:





При такому сполученні фазова та лінійна напруги однакові $U_{Ф2} = U_л = 380\,В$.

Тому струм у кожній фазі $I_{Ф2} = \dfrac{U_{Ф2}}{R_Ф}$; $I_{Ф2} = \dfrac{380}{10} = 38\,(A)$.

Задача 21.7. У коло змінного струму з частотою $\nu = 50\,Гц$ підключена котушка довжиною $l = 20\,см$ та діаметром $d = 5\,см$, що містить 500 витків мідного провідника з площею поперечного перерізу $S = 0{,}6\,мм^2$ та питомим опором $\rho = 17\,нОм \cdot м$. Визначити, яка частка повного опору котушки припадає на реактивний опір.

Дано:

$\dfrac{R_L}{Z} - ?$

$\nu = 50\,Гц$

$l = 0{,}2\,м$

$d = 5 \cdot 10^{-2}\,м$

$N = 500$

$S = 0{,}6 \cdot 10^{-6}\,м^2$

$\rho = 17 \cdot 10^{-9}\,Ом \cdot м$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\dfrac{Н}{A^2}$

Повний опір кола може бути знайдений з рівняння $Z = \sqrt{R^2 + R_L^2}$.

Активний опір котушки $R = \rho\dfrac{l_1}{S}$, де l_1 – довжина мідного провідника.

Довжину l_1 обчислимо з геометричних міркувань, тобто як суму довжин N колових витків: $l_1 = N\pi d$.

Тоді $R = \dfrac{\rho N \pi d}{S}$. Індуктивний опір $R_L = \omega L$.

Приймаючи до уваги, що $\omega = 2\pi\nu$, запишемо $R_L = 2\pi\nu L$.

Індуктивність котушки знайдемо з формули:

$L = \mu_0 \mu \dfrac{N^2 S_1}{l}$, де $\mu = 1$, $S_1 = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площа одного витка.

Тоді $L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4l}$.

Таким чином $R_L = \dfrac{2\pi \nu \mu_0 N^2 \pi d^2}{4l} = \dfrac{\mu_0 \pi^2 \nu N^2 d^2}{2l}$.

Підставляючи одержані нами вирази для активного та індуктивного опорів у рівняння для знаходження повного опору, матимемо:

$$Z = \sqrt{\frac{\rho^2 N^2 \pi^2 d^2}{S^2} + \frac{\mu_0^2 \pi^4 \nu^2 N^4 d^4}{4l^2}}.$$

Отже,

$$\frac{R_L}{Z} = \frac{\dfrac{\mu_0 \pi^2 \nu N^2 d^2}{2l}}{\sqrt{\dfrac{\rho^2 N^2 \pi^2 d^2}{S^2} + \dfrac{\mu_0^2 \pi^4 \nu^2 N^4 d^4}{4l^2}}} = \frac{\dfrac{\mu_0 \pi^2 \nu N^2 d^2}{2l}}{\sqrt{\dfrac{4l^2 \rho^2 N^2 \pi^2 d^2 + \mu_0^2 \pi^4 \nu^2 N^4 d^4 S^2}{4l^2 S^2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0 \pi^2 \nu N^2 d^2 \sqrt{4l^2 S^2}}{2l\sqrt{4l^2 \rho^2 N^2 \pi^2 d^2 + \mu_0^2 \pi^4 \nu^2 N^4 d^4 S^2}} = \frac{\mu_0 \pi^2 \nu N^2 d^2 \cdot 2lS}{2lN\pi d\sqrt{4l^2 \rho^2 + \mu_0^2 \pi^2 \nu^2 N^2 d^2 S^2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 \pi \nu N d S}{\sqrt{4l^2 \rho^2 + \mu_0^2 \pi^2 \nu^2 N^2 d^2 S^2}}.$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[\frac{R_L}{Z}\right] = \frac{\dfrac{Н \cdot м \cdot м^2}{А^2 \cdot с}}{\sqrt{м^2 \cdot Ом^2 \cdot м^2 + \dfrac{Н^2 \cdot м^2 \cdot м^4}{А^4 \cdot с^2}}} = \frac{\dfrac{Дж \cdot м^2}{А^2 \cdot с}}{\sqrt{Ом^2 \cdot м^4 + \dfrac{Дж^2 \cdot м^4}{А^4 \cdot с^2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{А \cdot В \cdot с \cdot м^2}{А^2 \cdot с}}{\sqrt{Ом^2 \cdot м^4 + \dfrac{А^2 \cdot В^2 \cdot с^2 \cdot м^4}{А^4 \cdot с^2}}} = \frac{Ом \cdot м^2}{\sqrt{Ом^2 \cdot м^4 + Ом^2 \cdot м^4}} = \frac{Ом \cdot м^2}{\sqrt{Ом^2 \cdot м^4}} =$$

$$= \frac{Ом \cdot м^2}{Ом \cdot м^2} = 1.$$

Підставимо числові значення:

$$\frac{R_L}{Z} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{4 \cdot 0{,}04 \cdot 2{,}89 \cdot 10^{-16} + 16 \cdot 9{,}8596 \cdot 2500 \cdot 250000 \cdot 0{,}0025 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-13}}} =$$

$$= \frac{2{,}96 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{5{,}5 \cdot 10^{-17}}} \approx 0{,}4.$$

Тема 22. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ.

Задача 22.1. У контурі є $R_1 = R_2 = R$, які під'єднані послідовно до конденсатора $C = 50\,мкФ$ і котушки індуктивності $L = 1{,}25\,мГн$. Опори змінюються одночасно і однаково. При якому значенні R настане резонанс струму при частоті $\nu = 1000\,Гц$? Визначити струм у витках і нерозгалуженій частині кола, якщо напруга змінного струму $12\,В$.

Дано:

$R - ?$

$I, I_1, I_2 - ?$

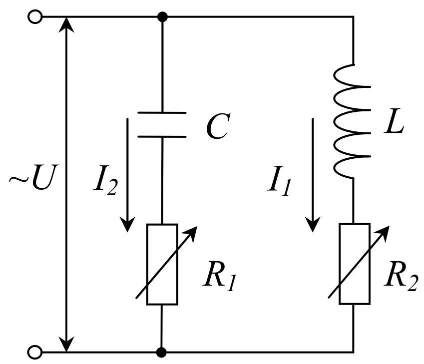
$R_1 = R_2 = R$

$C = 50 \cdot 10^{-6}\,Ф$

$L = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\,Гн$

$\nu = 1000\,Гц$

$U = 12\,В$



З умови задачі зрозуміло, що коливальний контур є паралельний.

Якщо $R_1 = R_2 = R$, то за умовою резонансу:

$$\frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_1^2 + X_C^2};\ X_L = \omega L;$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C};\ \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega C}{(R\omega C)^2 + 1};$$

$$\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega C}{\left(R\omega C\right)^2 + 1};\ \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{C}{R^2\omega^2 C^2 + 1};$$

$$\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)C = \left(R^2\omega^2 C^2 + 1\right)L;\ R^2 C + \omega^2 L^2 C = R^2\omega^2 C^2 L + L;$$

$$R^2 C - R^2\omega^2 C^2 L = L - \omega^2 L^2 C;$$

$$R^2\left(C - \omega^2 C^2 L\right) = L - \omega^2 L^2 C;\ R^2 = \frac{L - \omega^2 L^2 C}{C - \omega^2 C^2 L} = \frac{L\left(1 - \omega^2 LC\right)}{C\left(1 - \omega^2 LC\right)} = \frac{L}{C};$$

Звідки видно, що резонанс струмів настане при $R = R_{рез} = \sqrt{\dfrac{L}{C}} = \rho$. Це співвідношення показує, що значення опорів при резонансі не залежить від частоти зовнішньої дії, а лише від активних параметрів контуру. При частоті $\nu = 1000\,Гц$ $R_{рез} = \sqrt{\dfrac{1{,}25 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-6}}} = 6\left(Ом\right)$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$\left[R_{рез}\right] = \sqrt{\frac{Гн}{Ф}} = \sqrt{\frac{В^2 \cdot с}{А \cdot Кл}} = \sqrt{\frac{В^2 \cdot с}{А^2 \cdot с}} = \sqrt{Ом^2} = Ом.$$

Струми I_1 та I_2 знайдемо наступним чином:

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}};\ X_L = \omega L = 2\pi\nu L;\ I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L\right)^2}}.$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}\,;\ X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}\,;\ I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}\,.$$

Підставимо числові значення:

$$I_1 = \frac{12}{\sqrt{6^2 + \left(\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 1000\cdot 5\cdot 10^{-6}}\right)^2}} \approx 1{,}35\,(A);$$

$$I_2 = \frac{12}{\sqrt{6^2 + \left(\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 1000\cdot 50\cdot 10^{-6}}\right)^2}} \approx 2{,}0\,(A);$$

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[I_1] = \frac{B}{\sqrt{Ом^2 + \left(\frac{1}{c}\cdot Гн\right)^2}} = \frac{B}{\sqrt{Ом^2 + \left(\frac{B\cdot c}{A\cdot c}\right)^2}} = \frac{B}{\sqrt{Ом^2 + Ом^2}} = \frac{B}{Ом} = A\,.$$

$$[I_2] = \frac{B}{\sqrt{Ом^2 + \left(\frac{c}{Ф}\right)^2}} = \frac{B}{\sqrt{Ом^2 + \left(\frac{c\cdot B}{Кл}\right)^2}} = \frac{B}{\sqrt{Ом^2 + \left(\frac{c\cdot B}{A\cdot c}\right)^2}} = \frac{B}{\sqrt{Ом^2 + Ом^2}} = \frac{B}{Ом} = A\,.$$

Загальний струм в нерозгалуженій частині кола може бути визначений, як векторна сума $\vec{I}_1 + \vec{I}_2$.

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}\,.$$

Підставимо числові значення: $I = \sqrt{1{,}35^2 + 2^2} = 2{,}4\,(A)$.

Його величина не залежить від частоти змінного струму.

Задача 22.2. Визначити період вільних коливань у контурі, який складається з послідовно сполучених конденсатора ємністю $C = 10\,мкФ$, активного опору $R = 20\,Ом$ і двох котушок з індуктивностями $L_1 = 0{,}2\,мГн$ і $L_2 = 0{,}4\,мГн$ і дуже малим опором. Розглянути випадки при послідовному і паралельному з'єднанні котушок індуктивності між собою.

Дано:

$T_{II} - ?$

$T_{--} - ?$

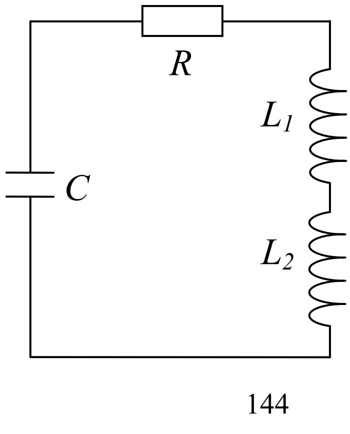
$C = 10\,мкФ$

$R = 20\,Ом$

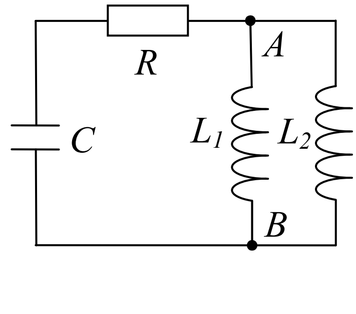
$L_1 = 0{,}2\cdot 10^{-3}\ Гн$

$L_2 = 0{,}4\cdot 10^{-3}\ Гн$

а).



б).



а). *Послідовне з'єднання*:

Період вільних коливань в контурі: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}$.

При послідовному з'єднанні в обох котушках протікає однаковий струм, а тому ЕРС самоіндукції, які в них виникають, визначаються так: $\varepsilon_1 = -L_1 \dfrac{dI}{dt}$; $\varepsilon_2 = -L_2 \dfrac{dI}{dt}$.

Результуюча ЕРС є сумою двох складових: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -(L_1 + L_2)\dfrac{dI}{dt} = -L\dfrac{dI}{dt}$, де L – повна індуктивність контуру. Отже: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{(L_1 + L_2)C} - \dfrac{R^2}{4(L_1 + L_2)^2}}}$.

Період вільних коливань в контурі: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \beta^2}}$.

б). *Паралельне з'єднання*:

Коефіцієнт затухання $\beta = \dfrac{R}{2L}$.

Нехай напруга між точками A і B в колі змінюється за законом $U = U_0 \sin \omega t$.

Струм у нерозгалуженій частині кола $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$.

Тоді для сил струму в котушках можна записати:

$I_1 = I_{01} \sin(\omega t - \varphi_1)$ і $I_2 = I_{02} \sin(\omega t - \varphi_2)$; $I = I_1 + I_2$.

Амплітудне значення цих струмів згідно закону Ома можна записати:

$I_{01} = \dfrac{U_0}{\omega L_1}$; $I_{02} = \dfrac{U_0}{\omega L_2}$.

Струми, що протікають в кожній котушці відстають за фазою від прикладеної напруги U на кути φ_1 та φ_2: $tg\varphi_1 = \dfrac{U_0}{\omega L_1}$; $tg\varphi_2 = \dfrac{\omega L_2}{R_2}$.

Оскільки за умовою активні опори котушок R_1 та R_2 дуже малі, то можна вважати, що $tg\varphi_1 \approx tg\varphi_2 \to \infty$, тому: $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Отже, залежність I_1 і I_2 від часу можна записати у вигляді:

$I_1 = \dfrac{U_0}{\omega L_1} \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{U_0}{\omega L_1} \cos \omega t$; $I_2 = -\dfrac{U_0}{\omega L_2} \cos \omega t$.

В нерозгалуженій частині контуру струм I дорівнює:

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{U_0}{\omega}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\cos\omega t .$$

Порівнявши формули $I = I_{01}\sin(\omega t - \varphi_1) + I_{02}\sin(\omega t - \varphi_2)$ і $I = -\frac{U_0}{\omega}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\cos\omega t$, можна зрс обити висновок, що еквівалентна індуктивність системи: $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$; $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$.

Тоді: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C} + \dfrac{(L_1 + L_2)^2 R^2}{4L_1^2 L_2^2}}}$.

Задача 22.3. В коливальному контурі, що складається з активного опору $R = 4\,кОм$, котушки індуктивності $L = 0{,}01\,Гн$ і конденсатора. Заряд конденсатора зменшується в 10 разів за період $T = 10^{-5}\,с$. Визначити активний опір котушки індуктивності.

Дано:

$R_L - ?$
$R = 4\cdot 10^3\,Ом$
$L = 0{,}01\,Гн$
$T = 10^{-5}\,с$
$\frac{Q_t}{Q_{t+T}} = 10$

Заряд конденсатора в будь-який момент часу визначається за співвідношенням $Q = ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \varphi)$, де – $\beta = \frac{R_n}{2L}$, a – стала, R_n – повний активний опір контуру, $ae^{-\beta t} = A$ – амплітуда затухаючих коливань.

Через час, що дорівнює $T: Q_{t+T} = ae^{-\beta(t+T)}\cos(\omega(t+T) - \varphi)$;

$$\frac{Q_t}{Q_{t+T}} = \frac{ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \varphi)}{ae^{-\beta(t+T)}\cos(\omega(t+T) - \varphi)}.$$

Так як $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а період зміни косинуса кутів дорівнює 2π одержимо:

$$\frac{Q_t}{Q_{t+T}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}} = e^{-\beta t + \beta t + \beta T} = e^{\beta T};\ \frac{Q_t}{Q_{t+T}} = e^{\frac{R_n T}{2L}}.$$

Отже $\frac{R_n T}{2L} = \ln\frac{Q_t}{Q_{t+T}}$; $R_n = \frac{2L}{T}\ln\frac{Q_t}{Q_{t+T}}$; $R_L = R_n - R$. Отже $R_L = \frac{2L}{T}\ln\frac{Q_t}{Q_{t+T}} - R$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[R_L] = \frac{Гн}{с} - Ом = \frac{В\cdot с}{А\cdot с} - Ом = Ом - Ом = Ом .$$

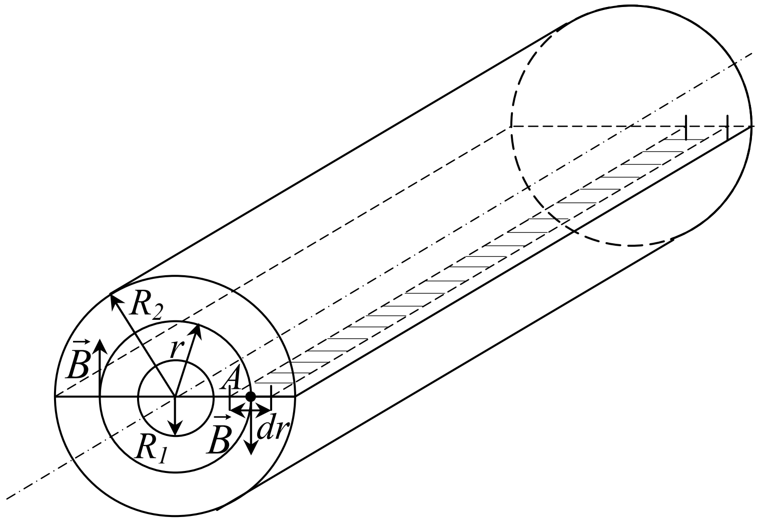
Підставимо числові значення:

$$R_L = \frac{2\cdot 0{,}01}{10^{-5}}\ln 10 - 4000 = 605\,(Ом).$$

Задача 22.4. Визначити хвильовий опір коаксіального кабелю, якщо магнітна та діелектрична проникності ізоляції μ та ε, а радіуси внутрішнього та зовнішнього провідників R_1 та R_2.

Дано:

$\rho - ?$
$\mu, \varepsilon, R_1, R_2$



Припустимо, що по внутрішньому циліндру проходить струм силою I, а по зовнішньому проходить струм силою I протилежного напрямку.

Завдяки тому, що струми у внутрішньому та зовнішньому циліндрах рівні за величиною та обернені за знаком, напруженості магнітного поля внутрішього та зовнішнього циліндрів H_1 та H_2 у будь-якій точці простору поза коаксіальною парою також будуть дорівнювати за величиною і напрямлені у протилежні сторони.

Внаслідок цього, результуюче магнітне поле поза коаксіальною парою буде дорівнювати нулю:

$$H = H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi R} - \frac{I}{2\pi R} = 0.$$

Таким чином, поле буде сконцентроване тільки в просторі між циліндрами.

Напруженість поля між циліндрами визначається лише струмом що проходить по внутрішньому циліндру.

Отже, напруженість поля між циліндрами можна записати як $H = \frac{I}{2\pi r}$, де r – відстань від осі циліндра до точки визначення напруженості.

Хвильовий опір коаксіального кабелю може бути розрахований за формулою

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Індуктивність коаксіального кабелю розраховується як $L = \frac{\Phi}{I}$, де Φ – магнітний потік через площу осьового перерізу кабелю.

Для розрахунку магнітного потоку, розділимо площу осьового перерізу на нескінченну кількість вузьких смужок площею $dS = ldr$.

Тоді елементарний потік магнітної індукції через dS: $d\Phi = BdS = Bldr$.

Враховуючи, що вектор індукції магнітного поля $\vec{B}$ пов’язаний з вектором напруженості магнітного поля $\vec{H}$ співвідношенням $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$, запишемо

$$d\Phi = \mu_0\mu Hldr = \frac{\mu_0\mu Ildr}{2\pi r}.$$

Тоді $\Phi = \int\limits_{2R_1}^{2R_2} \frac{\mu_0\mu Ildr}{2\pi r} = \frac{\mu_0\mu Il}{2\pi}\int\limits_{2R_1}^{2R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\mu Il}{2\pi}\ln\frac{2R_2}{2R_1} = \frac{\mu_0\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

Отже індуктивність коаксіального кабелю $L = \frac{\mu_0\mu Il}{2\pi I}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu_0\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

Знайдемо тепер електроємність коаксіального кабелю.

За теоремою Остроградського-Гаусса $\oint\limits_S D_n dS = q$, де D_n – проекція вектора індукції електричного поля, q – заряд.

Враховуючи, що вектор індукції електричного поля $\vec{D}$ пов’язаний з вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$ співвідношенням $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, запишемо:

$$\oint\limits_S \varepsilon_0\varepsilon E dS = q.$$

Для циліндричної поверхні довжиною l та радіусом r

$$dS = l\cdot 2\pi dr.$$

Тоді $\int\limits_0^r \varepsilon_0\varepsilon El2\pi dr = q$; $2\pi\varepsilon_0\varepsilon El\int\limits_0^r dr = q$; $2\pi\varepsilon_0\varepsilon Elr = q$.

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon lr}.$$

Напругу між циліндрами знайдемо як

$$U = \int\limits_{2R_1}^{2R_2} Edr = \int\limits_{2R_1}^{2R_2}\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\ln\frac{2R_2}{2R_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Тоді електроємність коаксіального кабелю: $C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$.

Таким чином, хвильовий опір коаксіального кабелю:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}}{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu l\ln\frac{R_2}{R_1}\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\cdot 2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Задача 22.5. Випромінювання антени міської радіостанції має потужність $P = 100\,кВт$. Обчислити на відстанях $R_1 = 1\,км$ і $R_2 = 100\,км$ величину вектора Умова-Пойтінга $\vec{\Pi}$, напруженість електричного поля $\vec{E}$, напругу U, яка виникає у приймальній антені радіоприймача завдовжки $l = 1\,м$ та тиск електромагнічних хвиль p.

Дано:

$\Pi_{1,2} - ?$ $E_{1,2} - ?$ $U_{1,2} - ?$ $p_{1,2} - ?$	Вектор Умова-Пойтінга дорівнює потоку електромагнітної енергії крізь одиницю поверхні, тобто потужності випромінювання через одиницю поверхні: $$\Pi = \frac{P}{S}.$$
$P = 10^5\,Вт$ $R_1 = 10^3\,м$ $R_2 = 10^5\,м$ $l = 1\,м$ $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}$	У першому випадку $S_1 = 4\pi R_1^2$ – площа поверхні сфери радіусом R_1, а у другому $S_2 = 4\pi R_2^2$ – площа поверхні сфери радіусом R_2. Тоді $\Pi_1 = \frac{P}{4\pi R_1^2}$ та $\Pi_2 = \frac{P}{4\pi R_2^2}$. Підставимо числові значення:

$$\Pi_1 = \frac{10^5}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^6} \approx 8 \cdot 10^{-3}\left(\frac{Вт}{м^2}\right);\ \Pi_2 = \frac{10^5}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{10}} \approx 8 \cdot 10^{-7}\left(\frac{Вт}{м^2}\right).$$

Відомо, що в електромагнітній хвилі відбувається взаємні перетворення електричного та магнітного полів, тому об’ємні густини електричної та магнітної енергії дорівнюють одна одній $W_е = W_м$.

$$W_е = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} \text{ та } W_м = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}, \text{ тому } \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu};\ \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu_0\mu}.$$

Звідси $E^2 = \dfrac{B^2}{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$; $E = \dfrac{B}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$.

Вважатимемо, що $\varepsilon = 1$ та $\mu = 1$, тоді

$B = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}E = B\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E = \dfrac{E}{c}$; де $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ – швидкість світла у вакуумі.

Модуль вектора Умова-Пойтінга визначає потік електромагнітної енергії за одиницю часу крізь одиницю поверхні, перпендикулярної до напряму поширення енергії:

$$\Pi = EH;\ H = \frac{B}{\mu_0\mu};\ \Pi = \frac{EB}{\mu_0\mu}.$$

Враховуючи, що $B = \dfrac{E}{c}$, запишемо $\Pi = \dfrac{E^2}{c\mu_0}$. Звідси $E = \sqrt{c\mu_0\Pi}$.

Або враховуючи, що $\mu_0 = \dfrac{1}{c^2\varepsilon_0}$, можемо записати $E = \sqrt{\dfrac{c\Pi}{c^2\varepsilon_0}} = \sqrt{\dfrac{\Pi}{c\varepsilon_0}}$.

Тоді $E_1 = \sqrt{\dfrac{\Pi_1}{c\varepsilon_0}}$ та $E_2 = \sqrt{\dfrac{\Pi_2}{c\varepsilon_0}}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[E] = \sqrt{\frac{Вт \cdot с \cdot м}{м^2 \cdot м \cdot Ф}} = \sqrt{\frac{Дж}{м^2 \cdot Ф}} = \sqrt{\frac{В \cdot А \cdot с \cdot В}{м^2 \cdot Кл}} = \sqrt{\frac{В^2 \cdot А \cdot с}{м^2 \cdot А \cdot с}} = \sqrt{\frac{В^2}{м^2}} = \frac{В}{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$E_1 = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}} \approx 1{,}74\left(\frac{В}{м}\right);\ E_2 = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}} \approx 1{,}74 \cdot 10^{-2}\left(\frac{В}{м}\right).$$

Напруга, що виникає в приймальній антені завдовжки l може бути обчислена за формулою: $U = El$.

Тоді $U_1 = E_1 l$ та $U_2 = E_2 l$.

Підставимо числові значення:

$U_1 = 1{,}74 \cdot 1 = 1{,}74\,(В)$; $U_2 = 1{,}74 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 1{,}74 \cdot 10^{-2}\,(В)$.

Запишемо рівняння для співвідношення E та H:

$\varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = W$.

Тоді $H^2 = \dfrac{W}{\mu_0 \mu}$. $\mu = 1$. Тому $H = \sqrt{\dfrac{W}{\mu_0}}$ та $E^2 = \dfrac{W}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. $\varepsilon = 1$. Тому $E = \sqrt{\dfrac{W}{\varepsilon_0}}$.

Отже $\Pi = EH = \sqrt{\dfrac{W}{\varepsilon_0}}\sqrt{\dfrac{W}{\mu_0}} = \dfrac{W}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = Wc$.

З іншого боку, відомо, що тиск електромагнітних хвиль дорівнює об’ємній енергії електромагнітних хвиль, тобто $P = W$.

Тоді $\Pi = pc$.

Звідси тиск елементарних хвиль на поглинаючу поверхню $p = \dfrac{\Pi}{c}$.

Отже $p_1 = \dfrac{\Pi_1}{c}$ та $p_2 = \dfrac{\Pi_2}{c}$.

Виконаємо перевірку розмірності:

$$[p] = \frac{Вт \cdot с}{м^2 \cdot м} = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н \cdot м}{м^3} = \frac{Н}{м^2} = Па$$

Підставимо числові значення:

$$p_1 = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-11}(Па);\ p_2 = \frac{8 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-15}(Па).$$

Задача 22.6. Написати закони зміни напруги U та сили струму I з часом t для електроплитки з опором $R = 50\,Ом$, що увімкнута у мережу змінного струму з частотою $\nu = 50\,Гц$ та напругою $U = 220\,В$.

Дано:

$I = I(t) - ?$
$U = U(t) - ?$
$R = 50\,Ом$
$\nu = 50\,Гц$
$U = 220\,В$

Напруга змінюється за гармонічним законом $U = U_m \cos\omega t$ (1), де U – напруга в момент часу t; U_m – амплітудне (максимальне) значення напруги; ω – циклічна частота.

Циклічна частота $\omega = 2\pi\nu$.

Таким чином: $\omega = 2 \cdot 20\pi = 100\pi \left(\frac{1}{c}\right)$; $[\omega] = \frac{1}{c}$.

Знаючи діюче значення напруги U, знаходимо U_m.

$U_m = \sqrt{2}U$.

$U_m = 1{,}41 \cdot 220 = 310\,(В)$.

Підставляючи значення U_m та ω в рівняння (1), отримаємо:

$$U = 310\cos 100\pi t.$$

Електроплитка має тільки активний опір, тому коливання сили струму в ній співпадають за фазою з коливаннями напруги. Тому, закон зміни сили струму I має вигляд: $I = I_m \cos 100\pi t$. (2), де I_m – амплітудне значення сили струму.

За законом Ома $I_m = \frac{U_m}{R}$; $I_m = \frac{310}{50} = 6{,}2\,(A)$; $[I] = \frac{B}{Ом} = A$.

Таким чином, підставляючи отримане нами значення амплітудного значення сили струму в рівняння (2) отримаємо:

$$I = 6{,}2\cos 100\pi t.$$

Задача 22.7. Коливальний контур приймача складається із слюдяного конденсатора, площа пластин $S = 800\,см^2$, а відстань між ними $d = 1\,мм$, та котушки. На яку довжину хвилі резонує цей контур, якщо максимальне значення напруги на пластинах конденсатора у 100 разів більше максимального значення сили струму в котушці? Активним опором котушки знехтувати.

Дано:

$\lambda - ?$
$\varepsilon = 7$
$S = 8 \cdot 10^{-2}\,м^2$
$d = 10^{-3}\,м$
$\frac{U_m}{I_m} = 100$

Довжина хвилі λ пов’язана з періодом T коливань за формулою: $\lambda = \upsilon T$, де υ – швидкість електромагнітних хвиль у даному середовищі. У вакуумі вона дорівнює:

$\upsilon = c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{c}$.

Період власних коливань визначається за формулою:

$T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Електроємність конденсатора можна обчислити, скориставшись формулою: $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$.

Для знаходження індуктивності L котушки скористаємось законом збереження енергії у застосуванні до даного контуру: $\dfrac{CU_m^2}{2} = \dfrac{LI_m^2}{2}$.

Звідси виражаємо L: $L = C\dfrac{U_m^2}{I_m^2}$.

Таким чином можна записати, що:

$$\lambda = 2\nu\pi\sqrt{LC} = 2\nu\pi\sqrt{\frac{\varepsilon^2\varepsilon_0^2 S^2}{d^2}\frac{U_m^2}{I_m^2}} = \frac{2\nu\pi\varepsilon\varepsilon_0 SU_m}{dI_m};$$

$$[\lambda] = \frac{\frac{м}{с}\cdot\frac{Ф}{м}\cdot м^2\cdot В}{м\cdot А} = \frac{м\cdot Ф\cdot В}{с\cdot А} = \frac{Кл\cdot В\cdot м}{В\cdot с\cdot А} = \frac{А\cdot с\cdot м}{с\cdot А} = м.$$

$$\lambda = \frac{2\cdot 3\cdot 10^{-8}\cdot 3{,}14\cdot 7\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 8\cdot 10^{-2}\cdot 100}{10^{-3}} \approx 934\,(м).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Загальна фізика. Програма нормативної навчальної дисципліни підготовки освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр" напряму 6.040203 Фізика*/ М.І.Шут, Л.Ю.Благодаренко, Т.Г.Січкар – К.: НПУ, 2015. – 42 с.
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: Навчальний посібник. –Т. 2.: Електрика і магнетизм. – К.: Техніка, 2001. – 452 с.
3. Січкар Т.Г., Касперський А.В. Електрика і магнетизм. Практичні заняття – К.: НПУ, 2008. – 164 с.
4. Січкар Т.Г. Електрика і магнетизм, Модуль № 1 Електростатика: Навчальний посібник – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2004. – 109 с.
5. Січкар Т.Г. Електрика і магнетизм, Модуль № 2 Постійний струм: Навчальний посібник – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2004. – 122 с.
6. Загальний курс фізики: Збірник задач/ І.П. Гаркуша, І.Т. Горбачук, В.П. Курінний та ін./ За заг.ред. І.П. Гаркуші. – К.: Техніка., 2003.– 560 с.
7. Загальний курс фізики. Збірник задач: Навч. посібник за заг.ред. І.Т. Горбачука. – К.: Вища школа, 1993. – 359 с.
8. Шут М.І., Сташкевич О.М., Касперський А.В., Січкар Т.Г. Електрика і магнетизм. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2002. – 236 с.
9. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1985г. – 384с.
10. Сборник задач по общему курсу физики. Под ред. Цедрика М.С. – М.: Просвещение, 1989 г. – 271с.
11. Касперський А.В., Богданов І.Т. Електрика і магнетизм. Збірник задач, вправ і тестів. – К.: Четверта хвиля, 2006. – 248с.
12. Коршак Є.В., Гончаренко С.У., Коршак Н.М. Методика розв'язування задач з фізики. Практикум. – К.: Вища школа,1976. – 240с.
13. Сусь Б.А., Шут М.І. Проблеми дидактики фізики у вищій школі. – К.: ВЦ "Просвіта", 2003. – 155с.
14. Гончаренко С.У., Ляшенко О.І. Основні поняття і закони фізики. – К.: Рад. школа, 1986. – 286с.
15. Шут М.І., Возний П.О. Фізика. Методичні поради та контрольні роботи. Навчально-методичний посібник. – К.: НПУ, 2003. – 101с.

Навчальне видання

Т.Г. СІЧКАР, М.О. РОКИЦЬКИЙ,

А.В. КАСПЕРСЬКИЙ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА
ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ
ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

Підписано до друку 01.03.2017 р. Формат 60x84/16.
Папір офісний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. др. арк. 8,95. Обл.-вид. арк. 2,85
Зам. № 332.
Віддруковано з оригіналів.

Видавництво Національного педагогічного університету
імені М.П. Драгоманова. 01601, м. Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію ДК № 1101 від 29.10.2002. (044) 234-75-87
Віддруковано в друкарні Національного педагогічного університету
імені М.П. Драгоманова (044) 239-30-26