МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО

Е. И. СКУГОРЕВА

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
педагогических наук

Киев — 1962

Единственно правильной формой создания новой школы, построения в ней всего педагогического процесса, является осуществление марксистско-ленинского принципа соединения обучения с производительным трудом учащихся. Новая средняя школа решает задачу подготовки коммунистически воспитанных и разносторонне образованных людей, хорошо знающих основы наук и вместе с тем способных к систематическому труду.

В наш век, век завоевания космоса, век электронных вычислительных машин, математическое просвещение приобретает особенно важное значение и закон укрепления связи школы с жизнью предъявляет новые, более высокие требования к преподаванию математики. Особенно назрела необходимость изменения метода преподавания решения алгебраических уравнений.

В соответствии с требованиями новых програм в процессе преподавания алгебры в трехлетней школе функциональной зависимости отводится ведущая роль, и степень подготовки учащихся к практической жизни и изучению высшей математики измеряется тем, насколько твердо, полно и культурно они свыклись с понятием функции. Но несмотря на то, что это положение является общепризнанным, переход от традиционного преподавания алгебры с его отрывом от потребностей жизни еще не окончен из-за отсутствия новой учебно-методической литературы.

Настоящая работа имеет целью дать пример методической разработки основных вопросов преподавания решения алгебраических уравнений в курсе алгебры 9—11 классов средней школы, используя связь уравнений с функциями, рассматривая уравнение как равенство динамическое. В средней школе рассматривается уравнение как равенство статическое с постоянными значениями неизвестных.

Решение уравнений является одним из наиболее ответственных разделов алгебры, имеющих прикладное значение. Отсутствие же функциональной трактовки уравнений мешает в работе на производстве, так как решение технических задач требует функционального понимания уравнений, и мешает понимать и усваивать высшую математику. Ведь аналитическая геометрия, математический анализ и решение дифференциальных уравнений требуют функционального понимания уравнений.

Эта работа базируется, кроме современной литературы по этому вопросу, на личной многолетней практике преподавания элементарной математики в старших классах средней школы и одновременно преподавания элементов высшей математики в высшем техническом учебном заведении самого автора, на опыте работы ряда преподавателей средних школ и на эксперименте в школе № 13 г. Киева.

В этой работе, состоящей из введения, трех глав и приложения, наряду с изложением положений, уже известных, приведены собственные исследования автора, частью опубликованные в виде журнальных статей. В приложении даны методический анализ уроков, посещенных автором, в средних школах г. Киева (13, 135, 92) и проведение эксперимента в школе № 13 г. Киева по методическим разработкам автора. (Приложение напечатано отдельно от диссертации).

В главе I, которая называется «История преподавания решения алгебраических уравнений в отечественной средней школе», дан краткий исторический очерк основных этапов преподавания решения алгебраических уравнений.

В § 1 излагается история преподавания алгебраических уравнений в школах дореволюционной России XVIII и XIX столетий. Из учебников XVIII века отмечаем работы Л. Магницкого и Л. Эйлера. «Алгебра» Эйлера легла в основу почти всех позднейших учебников по алгебре как в России, так и на Западе. В первой половине XIX века изданы выдающиеся три курса алгебры, которые в общей сложности представляли собой полную энциклопедию алгебры того времени. Это работы Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского и И. И. Сомова.

Работа Н. И. Лобачевского «Исчисление конечных» в ряде вопросов отличалась оригинальностью. Главным вопросом алгебры Н. И. Лобачевский считает теорию решения уравнений, но для правильного понимания их находит необходимым в курс элементарной алгебры ввести изучение функций. Особый интерес представляет для нас метод Лобачевского приближенного решения уравнений.

Учебник М. В. Остроградского «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа» содержал все новейшие идеи алгебры того времени; здесь впервые в России была изложена в популярной форме теорема Руфини-Абеля о невозможности решения в радикалах алгебраических уравнений общего вида выше четвертой степени. Остроградский резко критиковал современную ему школу за схоластичность в преподавании и требовал включения в программу средней школы учения о функциях и элементов высшей математики, уделяя особое внимание нахождению приближенных корней уравнений.

§ 2 посвящен вопросу о разрыве в преподавании между элементарной и высшей математикой. К концу XIX столетия движение за реформу средней школы стало массовым. Центральным вопросом первого и второго всероссийских съездов математиков (1912, 1914 г.) стоял вопрос о ликвидации разрыва в преподавании математики между средней и высшей школой. На съезде этому вопросу было посвящено большинство докладов. Съезды приняли резолюции о немедленном введении в программу средней школы идеи функциональной зависимости и элементов высшей математики; и в средней школе стали вводить университетский сокращенный курс высшей математики. Практика реальных училищ показала, что если дать высшую математику как надстройку над элементарной, то такое преподавание теряет свою воспитательную, общеобразовательную и практическую ценность. Высшая математика в этом случае усваивалась с трудом и замечалось понижение интереса к математике.

В Советской школе этот вопрос решен правильно, и в объяснительной записке к программам указывалось, что идея функциональной зависимости и ее графическое изображение изучается на протяжении всей программы по математике (1954—1958 гг.). Но в большинстве случаев на практике нужных результатов не получалось, так как тема «Функции и их графики» прорабатывалась без связи с остальным материалом и никакого практического приложения не имела. Тема эта давалась в 8-м классе после решения квадратных уравнений. Отдел о функциях изучался сам по себе и затем учащимися забывался, так как нигде не применялся.

Преподаватели средней школы не всегда интересуются требованиями высшей школы, ссылаясь на то, что подготовка учащихся для поступления в высшую школу не является их основной задачей. А фактически правильно поставленное обучение по подготовке учащихся к труду даст и нужную подготовку для высшей школы. Здесь идет речь не о количестве знаний, а о сознательности их усвоения и уменьи их применять в жизни. По некоторым разделам знания в средней школе даются в такой форме, что учащиеся в высшей школе их не узнают. Часто это зависит от разнобоя в функциональной терминологии и символике. Например, в средней школе дается обозначение функции через «y», а обозначений $f(x)$, $f_1(x)$ и т. д. избегают, считая, что так учащимся будет понятнее, доходчивее. Наблюдения автора показали, что этим учащимся оказывалась медвежья услуга; разнобой в символике мешает понимать высшую математику. Чтобы свыкнуться с новой символикой и терминологией, нужно продолжительное время, а это часто не учитывают преподаватели высшей школы. Студентам трудно даются, например, доказательства теории Коши, Лагранжа, Ролля, формула Ньютона для нахождения приближенных корней уравнений; и графики в этих вопросах им мало помогают. Это происходит в основном потому, что учащиеся еще не владеют символикой $f(x)$, $f(a)$, $f(в)$. Например, для определения вида функции $f(x)=\begin{cases}-3(-\pi;\ 0)\\+3(0,\pi)\end{cases}$ при разложении ее в ряд Фурье предлагается построить график. Оказывается, что построение этого простого графика затрудняет учащихся. Если же предложить построить график функции $y=\pm 3$, это всем понятно, Бывают факты, что студенты не узнают материала потому, что в школе он был подан не с той точки зрения, которая требуется в высшей школе. Например, учащиеся знают формулы $1-\cos x=$ $=2\sin^2\frac{x}{2}$, $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ и т. д., но при интегрировании $\int\sin^2 x dx$, $\int\sin ax\cos bx bx$ и др. не могут подинтегральное выражение заменить суммой, умея логарифмировать произведение и частное, не отвечают на вопросы, чему равна сумма и разность логарифмов. И таких примеров можно привести много.

Разрыв между преподаванием в средней и высшей школе имеется и в стиле работы. В средней школе основной формой работы является урок с домашним заданием и проверкой его выполнения; в высшей школе — лекция и самостоятельная проработка материала по конспекту и книгам. Как вести конспект, как работать над книгой, этому должна научить средняя школа. Значительная часть студентов, пока научится самостоятельно работать, много теряет зря времени и энергии. Приходилось наблюдать факты, что неуменье самостоятельно работать было причиной, что некоторые хорошие ученики (медалисты) попадали в разряд отстающих студентов.

В § 3 дан критический анализ изложения решения алгебраических уравнений в старших классах средней школы в современной учебно-методической литературе. Охватить полностью все программы, журнальные статьи, методики, учебники и задачники по алгебре нет возможности. Цель этого раздела—указать на различные существующие направления в литературе и дать краткий обзор наиболее популярных из трудов, обратив внимание на учебники, ставящие себе задачу дать развитие функционального мышления. Все существующие руководства можно разбить на две группы. К первой группе относятся труды, в которых не отразилось новое направление (например, Кисилев, Пржевальский, Шапошников, Брадис и др.). Ко второй группе относятся руководства, авторы которых в той или иной степени считались с новым направлением (Лебединцев, Новоселов, Александров П. С., Колмогоров, Фадеев и Соминский). У большинства этих авторов новое направление сказалось на введении в школьный курс алгебры статей, связанных с изучением функций, но непосредственной связи между решением уравнений и исследованием функций не устанавливается.

Учебник алгебры Лебединцева К. Ф. является новым видом учебников начала двадцатого века; основной заслугой К. Ф. Лебединцева является внедрение в курс средней школы учения о функциях, что послужило крупным шагом вперед по сравнению с существующими в то время учебниками.

Обзор в сборниках задач глав, посвященных решению уравнений, показывает, что в большинстве существующих задачников решение алгебраических уравнений изложено формально, не используя учения о функциях, что не соответствует современному состоянию алгебры как учебного предмета. К таким задачникам относятся сборники следующих авторов: Шмулевича, Пржевальского, Шапошникова и Вальцева, Моденова, Кречмера, Антонова, Шклярского и др. В последние 20 лет стали появляться задачники, в которых проводится функциональная точка зрения на решение уравнений. К таким задачникам относятся сборники задач Ларичева П. А., Березанской Е. С. и Нагибина Ф. Ф., Шахно К. У. и др. В журнале «Математика в школе» напечатаны статьи Новоселова С. И. и других авторов о настоятельном требовании ввести в школьный курс алгебры функциональную трактовку уравнений.

Во второй главе кратко изложены основные вопросы теории алгебраических уравнений и отмечается, что из этого материала следует использовать в средней школе.

Как известно, понятие об уравнении является одним из основных понятий всей математики, имеющих прикладное значение, поэтому чрезвычайно важно, чтобы учащиеся правильно его понимали. В технических задачах и при изучении высшей математики всегда требуется понимание уравнения как равенства динамического, содержащего переменные величины. Средняя же школа дает понятие об уравнении как о равенстве статическом. Почему укоренился такой взгляд на уравнение, становится ясным из истории развития понятия об уравнении. Исторические факты подтверждают, что первоначальное содержание понятия об уравнении было функциональным. Памятники древней культуры за четырепять тысячелетий до нашей эры говорят о том, что халдеи уже решали уравнения методом подбора и методом ложных положений. Эти методы принципиально отличаются от методов синтетических, которыми пользовались Диофант, Ньютон, Эйлер и которые применяются широко и в настоящее время.

Динамическая суть уравнения стала все ярче обнаруживаться после работ Декарта (1637 г.) и Ферма. Учение об уравнениях окончательно стало трактоваться как учение о функциях со времени Лагранжа (1736—1813), который говорил, что «на алгебру надо смотреть как на науку о функциях» [1].

В настоящее время общепризнанным и весьма актуальным является научная трактовка уравнения, связанного с понятием функции. В современной учебной литературе чаще всего уравнение определяется как равенство числовых значений двух функций (или равенство функций нулю). Уравнения отражают зависимости между переменными величинами. Введение в математику переменных величин имеет революционное значение. Ф. Энгельс говорит: «Сама математика, занимаясь величинами переменными, вступила в диалектическую область. Как математика переменных относится к математике постоянных величин, так и диалектическое мышление вообще относится к метафизическому» [2].

Как известно, основная теорема алгебры состоит в том, что всякий многочлен степени $n (n \geqslant 1)$ имеет в поле комплексных чисел хотя бы один корень. Для преподавателей средней школы необходимо общее и достаточно широкое знакомство с историей этого вопроса. В диссертации дан критический обзор изложения доказательств основной теоремы алгебры у следующих авторов: Гаусса, Куроша Г. А., Граве Д. А., Чебышова П. Л., Шмидта О. Ю. и Ван-дер-Вардена. Исключительно большое значение основной теоремы алгебры подтверждается на целом ряде ее следствий. Наиболее существенными из них являются теорема о количестве корней алгебраического уравнения и формулы Виета. С этими следствиями чаще всего приходится встречаться в практических приложениях.

О следствии из основной теоремы алгебры, что всякое уравнение имеет столько корней, какова его степень, следует сообщить ученикам 8-го класса (без доказательства). В 11-ом же классе вполне возможно дать частный случай доказательства основной теоремы алгебры: «многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень».

---

[1] Лагранж, „Lesons sur le calcul des fonctions". 1804 г.

[2] Ф. Энгельс. Диалектика природы.

Это доказательство не встречает никаких затруднений и требует только знакомства со свойством непрерывной функции, что непрерывная функция на отрезке, изменяя свой знак, проходит через нуль. Кроме этого, требуется знание леммы: «при действительных значениях X достаточно больших по абсолютной величине знак многочлена с действительными коэффициентами совпадает со знаком его старшего члена». Со свойствами непрерывной функции на отрезке учащиеся знакомятся описательно еще в 8-м классе.

О том, что необходимо учащихся средней школы познакомить с фактом неразрешимости уравнений выше четвертой степени в общем виде в радикалах, не существует двух мнений. Это необходимо для тех учащихся, которые будут в дальнейшем изучать высшую математику, еще более это необходимо для тех, которые не будут изучать высшей математики, но будут встречаться с математикой, работая на производстве. Этот факт фундаментальной важности является завершающим в изучении алгебраических уравнений в средней школе.

Впервые с этим вопросом следует познакомить учащихся после изучения квадратных уравнений. При изучении систем квадратных уравнений учащиеся сталкиваются с уравнениями кубическими и уравнениями четвертой степени и задают преподавателю вопросы о способах их решений. Здесь уместно дать краткие исторические сведения о решении алгебраических уравнений, в том числе и о решении алгебраических уравнений в радикалах. Вторично на этом вопросе следует остановиться при решении трансцендентных уравнений, обращая внимание учащихся на различия между уравнениями алгебраическими и трансцендентными, которые не имеют общего метода выражения корней через их коэффициенты, но когда коэффициенты даны в численном виде, то всегда можно вычислить корни с любой степенью точности. И, наконец, при заключительном повторении, когда все сведения по решению алгебраических уравнений, полученные учащимися, приводятся в систему, акцентируется внимание учащихся на вопросе решения уравнений в радикалах и на приближенном решении уравнений графическими и аналитическими способами.

Почти каждому квалифицированному рабочему надо уметь находить приближенные корни алгебраических уравнений. Во время классных занятий в 11-м классе следует сообщить учащимся о методе Штурма, который дает возможность определить число действительных корней, определить, сколько из них положительных и отрицательных и в каких интервалах они лежат, и о методе Лобачевского. Метод Лобачевского приближенного вычисления корней является наилучшим методом вычисления всех действительных и комплексных корней. В учебной литературе этот метод известен под названием метода Греффе-Энке. В диссертации приведены основания, указывающие на очевидные права первенства Лобачевского в изобретении этого метода. На занятиях математического кружка можно поставить доклады на темы: вычисление приближенных корней методом Штурма, методом Лобачевского и методом касательных.

В главе III, кроме изложения некоторых из основных принципов общей методики, дается методика преподавания решения квадратных уравнений, рассматривая их с функциональной точки зрения.

Что касается содержания программы, то, по мнению автора, школьный курс последнего года обучения важно построить так, чтобы отдел анализа бесконечно-малых имел законченный вид. Особенно это нужно для учащихся, которые на этом свое образование будут заканчивать. Знакомство только с производными законченного вида не дает. Следует ввести и действие обратное дифференцированию интегрирование и завершить этот раздел понятием о дифференциальных уравнениях. Из дифференциальных уравнений достаточно познакомить только с уравнениями с легко отделяющимися переменными.

Механическая часть дифференцирования и интегрирования должна играть второстепенную роль; при доказательствах широко использовать графические интерпретации. Время для интегрирования освобождается проработкой нахождения всех объектов и площадей поверхностей тел вращения при помощи интегралов.

Педагогическая практика автора показала, что начала интегрального исчисления гораздо легче для учащихся многих вопросов элементарной геометрии. С таким небольшим курсом анализа бесконечно-малых можно решать много задач, важных в научном и практическом отношении. На уроках алгебры учащиеся будут знакомиться с производными, а на уроках геометрии с понятием об интеграле и его практическом приложении.

Слабым местом в знаниях учащихся средней школы являются доказательства теорем. У многих учащихся даже сложилось убеждение, что доказательства теорем имеются только в геометрии, а в алгебре доказательств нет, есть только правила. Печально смотреть на так называемых хороших учеников (медалистов), которые, старательно исписав всю доску, не могут ответить, что им давалось, к чему они шли, чего ожидали, что хотели доказать и что получили.

В средней школе перед выводом общего положения преподаватели стараются в угоду доходчивости разбирать много конкретных фактов. На вывод общего положения мало обращается внимания, и в сознании учащихся превалируют не общие положения, а отдельные факты. В работе проводится мысль, что дедуктивный метод изложения и общие приемы решения уравнений в 9-м классе надо выдвигать на первый план. Мощность общих методов способствует развитию ума и облегчает применение математических знаний в других областях науки и в практической жизни. Слишком затяжное задерживание учащихся на индуктивном методе изложения материала и на усвоении особых частных приемов решения уравнений математического развития не дает.

Надо экономить умственную энергию учащихся; нет смысла перегружать память их заучиванием голых фактов. Надо развивать логическую память при изучении математики. Лучше добиться, чтобы учащиеся усвоили основные этапы процесса мышления, которые привели к формуле; процессы мышления прочнее запоминаются и дают возможность восстановить доказательством забытые формулы.

В общем плане школьного курса алгебры уравнениям дается исключительно большое значение. Квадратные уравнения выдвигаются на первый план из соображений практического порядка; умение решать квадратные уравнения требуется при изучении физики, химии, геометрии и тригонометрии. Но формальное знание формулы для нахождения корней квадратного уравнения еще не дает учащимся умения решать практические задачи при помощи квадратных уравнений. Для достижения этой цели необходимо понимать функциональный смысл уравнения.

Попытки преподавателей увязать проработку квадратных уравнений с квадратной функцией обычно разбивались о трудности, связанные с незнакомством учащихся с основными свойствами квадратной функции, так как тема «Функции и их графики» изучались после квадратных уравнений. Не имея возможности в начале года увязать эти темы, преподаватели и в дальнейшем обходили использование функций. Таким образом изучение функций являлось пассивным благодаря разрыву между проработкой этих тем.

Новые программы дают возможность преодолеть эти трудности в 9-м классе, так как в 8-м классе изучаются основные свойства квадратной функции, а в 9-м дается систематическое изложение решения квадратных уравнений. Если тема «функции и их графики» изучается ранее квадратных уравнений, эксперимент автора в школах г. Киева (53, 135, 49) показал, что в этом случае знания учащихся по решению уравнений глубже и продуктивнее.

И только при таком условии школа может дать достаточную подготовку для практической деятельности и для высшей школы.

Исключительно большое внимание уделяется графическому методу нахождения приближенных корней квадратных уравнений.

Изложение решения квадратных уравнений естественно начать с нескольких задач, решение которых приводит к составлению квадратной функции.

Строительная практика, например, может поставить такую задачу: в треугольном фронтоне стены здания надо устроить просвет, имеющий форму вписанного прямоугольника максимальной площади. Предварительно решают задачу с такими, например, числовыми данными.

Задача. В треугольник, высота которого 3 метра и делит основание его на отрезки 1 м и 2 м, требуется вписать прямоугольник с площадью 2 кв. метра. Определить высоту этого прямоугольника.

Пользуясь подобием треугольников, учащиеся определяют зависимость между высотой «X» прямоугольника и его площадью « ».

$$\Delta ACB \sim \Delta MCN; \quad \frac{AB}{MN} = \frac{CD}{CK};$$

$$MN = \frac{AB \cdot CK}{CD}; \quad MN = \frac{3(3-x)}{3};$$

$$y = (3-x)x; \quad y = 3x - x^2.$$

Итак, получали функцию y одной независимой переменной X, $f(x)$.

При $y = 2$ получаем квадратное уравнение с одной переменной величиной X:

$$2 = 3x - x^2.$$

Этому уравнению всегда можно придать вид:

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Здесь естественно дать определение квадратного уравнения как равенства квадратной функции нулю, и решить квадратное уравнение значит найти те значения переменной величины X, при которых функция обращается в нуль.

Чтобы закрепить функциональное понимание уравнения, решаем уравнение графически, строя параболу по точкам. Общий прием построения графиков по точкам известен учащимся уже из 8-го класса. В последующих задачах выбирается минимальное количество точек, определяющих ход кривой.

Находим точки пересечения параболы с осью X; абсциссы этих точек это нули функции или корни функции, корни уравнения. В работе разобран случай этой задачи при максимальном значении функции.

Большой интерес учащихся вызывает задачи, имеющие практическое применение. Например, доску определенной длины надо распилить на две части в крайнем и среднем отношении; определить длину отрезков. Задача № 496 из задачника Ларичева ч. II о вычислении глубины шахты и др.

Чтобы приобрести практику в графическом решении уравнений, даем задачи, приводящие к уравнениям с небольшими числовыми коэффициентами, решение которых легко проверить. Обращаем внимание учащихся, что уравнения, порожденные технической практикой, содержат коэффициенты, которые явились в результате измерений и потому являются сами приближенными числами; например,

$$x^2 - 1{,}63x - 2{\cdot}47 = 0.$$

На занятиях математического кружка знакомим учащихся с другими приемами графического решения квадратных уравнений; при помощи параболы и прямой, гиперболы и прямой.

Только после графического решения квадратных уравнений, когда учащиеся освоились с функциональной сутью уравнений, переходим к аналитическим методам их решения. При этом придерживаемся принципа, что всю массу учащихся надо учить общим методам решения квадратных уравнений. С отдельными частными приемами решения уравнений можно знакомить учащихся на занятиях математического кружка (например, метод Кардано).

Биквадратные уравнения, по мнению автора, должны в 9-ом классе играть исключительно важную роль. Этот материал является удобным для углубления, обобщения и закрепления всех сведений, полученных учащимися по решению алгебраических уравнений. Многие преподаватели полагали, что подытаживание решения алгебраических уравнений будет выполнено при проработке последней темы «уравнения высших степеней», что соответствует и новой программе. Но практика показала, что в большинстве случаев учащиеся нужного материала не получали. В последние часы занятий углублять, закреплять и обобщать материал не удается из-за отсутствия времени.

В средней школе необходимо дать вполне законченный комплекс знаний по алгебраическим уравнениям. Опыт лучших преподавателей г. Киева (школ 92, 13, 25) показал, что в 8-ом классе можно познакомить учащихся с рядом принципиально важных свойств алгебраических уравнений на большом конкретном материале во время проработки темы: «квадратные уравнения и приводимые к ним».

Принципиально важными вопросами теории алгебраических уравнений, которые в соответствии с новой программой должны быть даны в 9-ом классе, являются следующие.

1) Нормальная форма алгебраического уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ . \ . \ . \ . +a_n=0 \text{ или } f(x)=0.$$

В связи с этим необходимо знакомство с числовыми полями. Преподаватель должен настойчиво подчеркивать необходимость указывать числовую область, в которой решается уравнение.

2) Основная теорема алгебры.

3) Связь вопроса разложения левой части алгебраического уравнения на линейные множители с нахождением корней уравнения.

4) Алгебраическое уравнение общего вида выше четвертой степени не решается в радикалах.

В работе указывается на необходимость предварительного графического исследования поведения биквадратной функции на всем промежутке изменения аргумента. Для сокращения времени удобно пользоваться готовыми таблицами графиков всех видов биквадратной функции. Учащиеся убеждаются, что всякое биквадратное уравнение, как уравнение четвертой степени, имеет 4 корня, которые все могут быть действительными, или 2 корня действительные и два мнимые, или все четыре корня мнимые, когда график не пересекает оси X-ов.

Опыт преподавания автора и других преподавателей показал, что при графическом решении уравнений с числовыми коэффициентами основные вопросы теории решения алгебраических уравнений воспринимаются учащимися без затруднений.

Аналитическое решение биквадратных уравнений выгоднее начинать разложением биквадратной функции на множители и, когда учащиеся научатся свободно владеть этим методом, тогда переходить к выводу общей формулы.

Вопросы эквивалентности уравнений вызывают большие затруднения у учащихся. Благодаря функциональному подходу к решению уравнений и графической их интерпретации эти вопросы, как показал опыт автора, становятся предельно ясными и осязаемыми, так как при этом теоретические рассуждения конкретизируются.

В 7 и 8-м классах учащиеся пользуются частными случаями теорем об эквивалентности уравнений без доказательств. Систематическое же изложение этих теорем автор намечает давать в 9-м классе, чтобы учащиеся могли ими пользоваться в 9—11 классах. Теоремы об эквивалентности уравнений являются одним из вопросов, в которых нельзя обойтись без понимания функциональной сути уравнений, при функциональной же трактовке уравнений доказательство этих теорем становится вполне доступным учащимся 9-го класса. В существующих учебных пособиях графическое истолкование равносильности уравнений отсутствует.

Обычно в школе излагаются аналитические методы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными, а затем на графиках иллюстрируют, что найти решения системы это значит найти координаты точек пересечения двух линий. Автор считает нужным начинать решение систем уравнений с геометрической интерпретации. Это один из вопросов алгебры, нуждающийся в предварительном геометрическом истолковании. Аналитическое решение бывает, конечно, короче, но им можно пользоваться только тогда, когда на графиках уяснен смысл вопросов: что значит найти решение системы, существование решения системы, количество решений и эквивалентность систем уравнений. Последний вопрос в школе не рассматривается, и школьная практика показала, что учащиеся теряют решения и установить факт, все ли решения найдены, не в состоянии. На заранее изготовленных таблицах графиков систем уравнений в работе рассмотрены случаи конечного числа решений бесконечного и пустого. Такие таблицы охотно изготовляются учащимися на занятиях математического кружка (шк. 135).

ВЫВОДЫ

Работа над диссертацией привела к следующим результатам.

1) Функциональная трактовка алгебраического уравнения как равенства динамического дает учащимся целый ряд преимуществ, являясь актуальным и эффективным приемом в преподавании.

2) Динамическая трактовка уравнения помогает учащимся применять полученные математические знания к решению практических задач, которые всегда требуют функциональной трактовки.

3) Ряд вопросов теории решения уравнений, трудных для усвоения учащимися, при функциональной трактовке уравнений и

графической интерпретации их становятся предельно ясными и прочно закрепляются. Такими вопросами являются:

а) эквивалентность уравнений и систем уравнений,

б) количество вещественных корней уравнения,

в) существование и количество вещественных решений систем уравнений,

г) смысл уравнения с двумя неизвестными,

д) вычисление приближенных корней уравнения.

4) Функциональная трактовка уравнения необходима при изучении высшей математики, так как в аналитической геометрии и математическом анализе бесконечно-малых почти всегда уравнения рассматриваются с функциональной точки зрения.

5) Геометрическая интерпретация решения уравнения должна быть использована в процессе самого изучения, а не является иллюстрацией их аналитического решения.

6) Графические методы решения уравнений и систем уравнений должны предшествовать аналитическим.

7) Для повышения качества изучения решения уравнений, как частного вида функции, необходимо ввести в 7 и 8-м классах пропедевтический курс изучения графиков функций.

8) Во многих случаях изучение свойств квадратной функции не имеет практического применения при решении квадратных уравнений и задач. Чтобы избежать разрыва в этом материале, следует изучение свойств квадратной функции давать раньше аналитического решения квадратных уравнений.

9) При изучении высшей математики студенты-заочники встречаются с непреодолимыми трудностями: они не понимают функциональной сути высшей математики. Если средняя школа будет давать функциональное понимание уравнений, то этим будет оказана заочникам эффективная помощь в их самостоятельной работе над высшей математикой.

БФ 23466. Подписано к печати 9 IV 1962 г. Формат бумаги 64×84. Печ. лист. 1. Условн. печ. л. 0,8. Заказ 547. Тираж 150.

Типография при Киевском государственном пединституте им. Горького, ул. Франко, 44.