КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. ГОРЬКОГО

ПОДШЕВКИН Ю. В.

Вопросы классификации трехмерных многообразий

(Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук).

Гор. Киев—1953 г.

В настоящее время советская топология может законно гордиться своими блестящими успехами, которые достигнуты благодаря работам П. С. Александрова, П. С. Урысона, Л. С. Понтрягина, А. Н. Колмогорова, А. А. Маркова, А. Н. Тихонова и других.

В 1927 г. П. С. Александровым была завершена колоссальная работа по объединению теоретико-множественной и комбинаторной топологии.

Теория Александрова охватила все «компакты» — метризуемые пространства и затем была распространена на более широкие классы пространств и определила в большой мере все дальнейшее развитие топологии. В 1931 г. советским ученым Л. С. Понтрягиным был обобщен «закон двойственности», открытый в простейшей форме Александером. В 1935 г. А. Н. Колмогоровым была раскрыта геометрическая сущность топологических «законов двойственности».

Благодаря работам советских ученых топология получила различные приложения.

Советскими учеными А. Н. Тихоновым, Л. С. Понтрягиным, А. А. Марковым, Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым разработаны топологические методы в теории дифференциальных уравнений, а Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом созданы новые топологические методы в вариационном исчислении.

Топологическая алгебра, являющаяся соединением основных понятий топологии и алгебры, наиболее значительным успехом своим обязана советским исследователям Л. С. Понтрягину, А. А. Маркову, А. И. Мальцеву и другим и в этом сказывается влияние советской топологической школы.

Вопрос классификации трехмерных многоообразий — один из основных вопросов современной топологии. Существующие классификации трехмерных многообразий являются неудовлетворительными. Например, метод классификации трехмерных многообразий в связи с проблемой пространственных форм, разработанный В. Трельфаллем и Г. Зейфертом, не охватывает ряд трехмерных многообразий, например, топологическое произведение сферы на окружность.

Метод классификации трехмерных многообразий путем построения диаграмм Хегора не дает решения проблемы гомеоморфизма даже для случая диаграмм Хегора первого рода. О диаграммах Хегора высших родов известно очень мало.

Затруднения в решении проблемы классификации трехмерных многообразий связаны с тем, что пока неизвестна полная система инвариантов относительно топологических отображений трехмерных многообразий. Поэтому являются существенными такие методы построения и изучения трехмерных многообразий, которые дают систематизацию отдельных более или менее широких категорий трехмерных многообразий.

Реферируемая работа посвящена конструкции, изучению и систематизации ряда категорий трехмерных многообразий, получаемых в результате замыкания полого и неполого трехмерных колец. Для края (тора) T трехмерного кольца вводится метод обобщенного самоотображения его, который заключается в том, что край T различными способами разбивается на четное число попарно отождествляемых плоских колец, которые располагаются вдоль меридианов или параллелей края T.

В простейшем случае, рассмотренном в главе I, когда тор T трехмерного кольца разбивается на два отождествляемых плоских кольца, обобщенное самоотображение тора T дает два способа инволюционного без неподвижных точек самоотображения тора T. Многообразия, получаемые замыканием трехмерного кольца путем инволюционного без неподвижных точек самоотображения его края, обозначены в работе через A_1, A'_1, M_1, M_1' и подробно изучены в первой главе.

Во второй главе изложен следующий материал. В §§ 1 — 2 показано, что, подвергая край T трехмерного кольца обобщенному самоотображению, можно получить десять категорий многообразий, а именно многообразия $A_к$, $A'_к$, $\overline{A}_к$, $\overline{A}'_к$, $\overline{A}''_к$ (обозначенные в работе через (A)) и многообразия $M_к$, $M'_к$, $\overline{M}_к$, $\overline{M}'_к$, $\overline{M}''_к$ (обозначенные в работе через (M)), причем многообразия $A'_к$, $M'_к$, $\overline{A}_к$, $\overline{M}_к$ ориентируемы, а многообразия $A_к$, $M_к$, $\overline{A}'_к$, $\overline{M}'_к$, $\overline{A}''_к$, $\overline{M}''_к$ неориентируемы.

§ 3 посвящен изучению простейших многообразий вида (A) и вида (M), когда индекс $к$ равен единице.

В §4 установлено, что всякие два многообразия, принадлежащие к одной и той же категории или к двум различным категориям многообразий вида (A) и вида (M), негомеоморфны между собой при любых (целых положительных) значениях индекса $к$.

Изучение многообразий вида (A) показало:

а) Ориентируемое многообразие $A'_к$ и неориентируемое многообразие $A_к$ являются гиперсферами с $2к$ сферическими полостями, края которых попарно отождествляются.

б) Ориентируемое многообразие $\overline{A}_к$ и неориентируемое многообразие $\overline{A}''_к$ являются гиперсферами с $2к$ торовидными полостями, края которых попарно элементарно отождествляются, то-есть отождествляются таким образом, что параллели (меридианы) края одной торовидной полости отождествляются с параллелями (меридианами) края другой торовидной полости.

в) Многообразия $A_к, A'_к, \overline{A}_к, \overline{A}'_к, \overline{A}''_к$ могут быть получены каждое склеиванием $к$ многообразий, соответственно A_1, A'_1, $\overline{A}_1$, $\overline{A}'_1$, $\overline{A}''_1$, краями проделанных в них сферических полостей.

Изучение многообразий вида (M) показало:

а) Наряду с категорией неориентируемых многообразий $M_к$, являющихся топологическими произведениями сферы с $к$ пленками Мебиуса на окружность и имеющих фундаментальные группы с образующими $A_1, A_2, \ldots, A_к, C$, связанными определяющими соотношениями:

$$CA_i C^{-1} A_i^{-1} = 1, \qquad (i = 1,2, \ldots, к)$$
$$A^2_1 A^2_2 \ldots A^2_к = 1,$$

существует категория ориентируемых многообразий $M'_к$, фундаментальные группы которых имеют образующие $A_1, A_2, \ldots, A_к, C$, связанные определяющими соотношениями:

$$CA_i CA_i^{-1} = 1, \qquad (i = 1,2, \ldots, к)$$
$$A^2_1 A^2_2 \ldots A^2_к = 1.$$

б) Наряду с категорией ориентируемых многообразий $\overline{M}_к$, являющихся топологическими произведениями сферы с $к$ ручками на окружность и имеющих фундаментальные группы с образующими C, A_i, B_i $(i = 1,2,\ldots,к)$, связанными определяющими соотношениями:

$$CA_i C^{-1} A_i^{-1} = 1,$$

$$CB_i C^{-1} B_i^{-1} = 1,$$

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_к B_к A_к^{-1} B_к^{-1} = 1,$$

существуют две категории неориентируемых многообразий $\overline{M}'_к$ и $\overline{M}''_к$, фундаментальные группы которых имеют образующие $C, A_1, A_2, \ldots, A_к, B_1, B_2, \ldots B_к$, связанные определяющими соотношениями соответственно:

$$CA_i\, CA_i^{-1} = 1, \qquad (i = 1,2, \ldots, к)$$

$$CB_i\, CB_i^{-1} = 1,$$

$$A_1B_1\, A_1^{-1}B_1^{-1} \ldots A_к\, B_к\, A_к^{-1}\, B_к^{-1} = 1$$

и

$$CA_i\, C^{-1}A_i^{-1} = 1, \qquad (i = 1,2, \ldots, к)$$

$$CB_i\, CB_i^{-1} = 1,$$

$$A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1} \ldots A_к\, B_к\, A_к^{-1}B_к^{-1} = 1.$$

в) Многообразия $M_к, M'_к, \overline{M}_к, \overline{M}'_к, \overline{M}''_к$ могут быть получены каждое элементарным склеиванием $к$ многообразий, соответственно $M_1, M'_1, \overline{M}_1, \overline{M}'_1, \overline{M}''_1$, краями проделанных в них торовидных полостей.

В § 5, подвергая различным видам обобщенного самоотображения оба края полого трехмерного кольца, в результате замыкания последнего получено тридцать категорий многообразий, которые были разбиты на две группы: группу многообразий (A, A) и группу многообразий (A, M). При этом было установлено, что всякие два многообразия негомеоморфны, если они принадлежат к двум различным категориям или если они принадлежат к одной и той же категории, не являющейся одной из следующих категорий: $(A_к, A_{к1})$, $(A'_к, A'_{к1})$, $(\overline{A}_к, \overline{A}_{к1})$, $(\overline{A}'_к, \overline{A}'_{к1})$ $(\overline{A}''_к, \overline{A}''_{к1})$.

В § 6 показано, что многообразия, принадлежащие к одной из перечисленных категорий, гомеоморфны тогда и только тогда, когда у них одинакова сумма индексов $к$ и $к_1$.

Сопоставление многообразий вида (A) и вида (M) с многообразиями группы (A, A) и группы (A, M) показало, что среди многообразий групп (A, A) и (A, M) не содержится ни многообразий, гомеоморфных многообразиям вида (A), ни многообразий, гомеоморфных многообразиям $M_1, M'_1, \overline{M}_1, \overline{M}'_1, \overline{M}''_1$.

Каждое из многообразий группы (A, A) является элементарно склеенным из двух многообразий вида (A) или двух многообразий вида (M) краями проделанных в них торовидных полостей; каждое многообразие группы (A, M) является элементарно склеенным из многообразия вида (A) и многообразия вида (M) краями проделанных в них торовидных полостей. В качестве параллелей и меридианов краев торовидных полостей, проделываемых в склеиваемых многообразиях, избираются кривые, гомотопные определенным замкнутым путям линейчатых комплексов многогранников, изображающих эти многообразия.

В третьей главе рассматриваются следующие вопросы:

В § 1 рассматривается топологическое отображение друг на друга краев двух трехмерных колец, а также многообразия, которые получаются при этом в результате отождествления соответствующих точек.

В § 2 изучаются ориентируемые многообразия типов S_i^3 $(i=1,2, \ldots, 8)$, получаемые замыканием полого трехмерного кольца путем инволюционного без неподвижных точек самоотображения по первому способу одного его края и топологического отображения второго его края на край трехмерного кольца с последующим отождествлением соответствующих точек.

В § 3 изучаются неориентируемые многообразия типов T_j^3 $(j=1,2, \ldots, 8)$, получаемые подобно многообразиям S_i^3 также замыканием полого трехмерного кольца. При этом вместо первого способа употребляется второй способ инволюционного без неподвижных точек самоотображения тора. Выясняется, что все существенно различные фундаментальные группы ориентируемых многообразий типов $S_i^3\,(i=1,2,\ldots,8)$ представляются фундаментальными группами многообразий следующих типов:

$$S_1^3,\ S_6^3,\ S_8^3, \tag{1}$$

а все существенно различные фундаментальные группы неориентируемых многообразий типов $T_j^3(j=1,2,\ldots,8)$ представляются фундаментальными группами многообразий типов

$$T_6^3,\ T_8^3. \tag{2}$$

При этом фундаментальные группы перечисленных типов (1) и (2) многообразий будут полностью определяться следующими определяющими соотношениями:

Для типа $S_1^3 : CDCD^{-1}=C^p D^{2q}=1,$

" " $S_6^3 : A^p DA^p D^{-1}=D^2=1,$

" " $T_6^3 : A^p DA^{-p}D^{-1}=D^2=1,$

" " $S_8^3,\ T_8^3 : A^p=D^2.$

(p и q — целые положительные взаимно простые числа). Показано, что гомеоморфных многообразий среди многообразий типа S_1^3 не может быть. При разных значениях числа p

многообразия, принадлежащие к одному и тому же типу из $S_6^3, S_8^3, T_6^3, T_8^3$, также негомеоморфны. Наконец, многообразия, принадлежащие к разным типам перечисленных типов (1) и (2), не могут быть гомеоморфны.

В § 4 доказано, что многообразия S_i^3 ($i=1,2,...,8$) получаются в результате склеивания гиперсферы с многообразием M'_1 или A'_1, а многообразия T_j^3($j=1,2,...,8$) — в результате склеивания гиперсферы с многообразием A_1 или M_1 краями торовидных полостей, проделываемых в склеиваемых многообразиях. При этом установлено, каким образом проделываются торовидные полости внутри склеиваемых многообразий.

Сопоставление фундаментальных групп многообразий (1) и (2) с фундаментальными группами многообразий (A), (M), (A, A), (A, M) показывает, что среди многообразий (1), (2) нет ни одного, топологически эквивалентного какому-либо из многообразий (A), (M), (A, A), (A, M). Исключение представляют типы S_6^3, S_8^3, T_6^3, T_8^3 при $p=1$.

В работе показано также, что пространства линзы — многообразия (p, q) — являются продуктом склеивания двух гиперсфер краями торовидных полостей, проделанных в гиперсферах.

БИ 14843 Тип. КГПИ. Франка, 44. Зак. 594—100