МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

В. И. ШАПОВАЛОВСКИЙ

ДВОЙСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НА СЕТИ

№ 01.001 (математический анализ)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(диссертация написана на русском языке)

Киев — 1971 2

Работа выполнена на кафедре математического анализа Киевского государственного педагогического института имени А. М. Горького.

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, профессор
С. И. ЗУХОВИЦКИЙ;
кандидат физико-математических наук
Р. А. ПОЛЯК.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Б. Н. ПШЕНИЧНЫЙ;
кандидат физико-математических наук
И. А. РАДЧИК.

Ведущее предприятие — Институт автоматики АН УССР.

Автореферат разослан « 10 » января 1972 г.

Защита диссертации состоится «   »   197   г. на заседании Ученого совета Киевского государственного педагогического института имени А. М. Горького.

Отзывы просим присылать по адресу: г. Киев-30, Бульвар Тараса Шевченко, 22/24.

Ученый секретарь Совета

Особое место в теории математического программирования занимают экстремальные задачи на сети. Интерес к этим задачам объясняется тем, что таковыми являются разнообразные проблемы транспортного типа, сетевого планирования и многие ~~другие~~ комбинаторные задачи. Исследованию указанных задач посвящена большая журнальная и монографическая литература [1], [2], [3], [8], [9], [10], среди которой следует выделить известную монографию Л. Форда и Д. Фалкерсона «Потоки в сетях», содержащую ряд фундаментальных фактов теории экстремальных задач на сети и методов их решения.

Одним из центральных результатов теории экстремальных задач на сети с ограниченными сверху пропускными способностями дуг является теорема о равенстве максимального потока минимальному разрезу. Между тем этот результат означает по сути перефразировку применительно к задаче о максимальном потоке известной теоремы о том, что экстремальные значения пары двойственных задач линейного программирования совпадают. Это немедленно обнаруживается, если наряду с задачей о максимальном потоке рассмотреть двойственную к ней задачу, являющуюся экстремальной задачей на двойственной в смысле К. Бержа [1] сети.

Оказывается, что вообще учет специфики экстремальных задач на сети, которую обнаруживает двойственный подход, является более полным, когда переходу к двойственной экстремальной задаче сопутствует также переход к двойственной сети. Исследованию с указанных позиций ряда экстремальных задач и построению методов их решения посвящена настоящая диссертационная работа.

Большинство исследуемых в работе задач рассматривается на $x_0 x_n$-плоских ориентированных сетях (графах) $G=[N; A]$, под которыми понимают множество вершин $N=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ и множество дуг $A=\{(x_i, x_j)\}$, соединяющих вершины так, что пересечение любой пары дуг является вершиной сети, при этом вершины x_0 и x_n могут быть соединены дугой, которая не пересекает ни одну дугу из множества A.

В § 1 первой главы приводится, следуя [1], методика построения двойственных ориентированных сетей и устанавливаются некоторые свойства этих сетей [11], [12].

Второй параграф рассматриваемой главы посвящен задаче о минимальном и максимальном потоках в $x_0\, x_n$-плоской сети, пропускные способности дуг которой ограничены снизу и сверху, т. е. речь идет о задаче отыскания минимального и максимального значений функции

$$z = v \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{x_j \in A(x_i)} f(x_i, x_j) - \sum_{x_j \in B(x_i)} f(x_j, x_i) = \begin{cases} v & \text{если } x_i = x_0 \\ o & \text{если } x_i \neq x_0, x_n \\ -v & \text{если } x_i = x_n \end{cases} \tag{2}$$

$$a_{ij} \leqslant f(x_i, x_j) \leqslant b_{ij} \text{ для всех } (x_i, x_j) \in A,$$

где: $A(x_i)$ — множество всех $x_j \in N$, для которых $(x_i, x_j) \in A$, $B(x_i)$ — множество всех $x_j \in N$, для которых $(x_j, x_i) \in A$, числа $f(x_i, x_j)$ — дуговые потоки, a_{ij} и b_{ij} — нижняя и верхняя границы пропускной способности дуги (x_i, x_j).

Двойственная задача заключается в отыскании минимального и максимального значений функции

$$w = \sum_A \gamma(x_i, x^j)\, b_{ij} - \sum_A \sigma(x_i, x_j)\, a_{ij} \tag{3}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} -\pi(x_0) + \pi(x_n) \geqslant 1, \\ \pi(x_i) - \pi(x_j) + \gamma(x_i, x_j) - \sigma(x_i, x_j) \geqslant 0 \text{ для всех } (x_i, x_j) \in A, \\ \gamma(x_i, x_j) \geqslant 0 \quad \text{для всех } (x_i, x_j) \in A \\ \sigma(x_i, x_j) \geqslant 0 \quad \text{для всех } (x_i, x_j) \in A \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть (x_i, x_j) и $(y_l, y_к)$ — взаимно соответствующие дуги двойственных сетей G и G*. Дуге $(y_l, y_к)$ отнесем числа $d_{lк} = a_{ij}$ и $D_{lк} = b_{ij}$, которые интерпретируются соответственно как нижняя и верхняя границы допустимой длины этой дуги.

Оказывается, что на сети G* задача (3)—(4) может быть сформулирована следующим образом: требуется каждой дуге $(y_l, y_к)$ сети G* приписать длину $\lambda_{lк} \in [d_{lк}, D_{lк}]$ так, чтобы все пути по G* из y_0 в y_s имели одну и ту же длину w и надо найти наименьшее и наибольшее значения w.

Для решения этой задачи предложен в § 3 алгорифм, основанный на специальном методе расстановки и исправления пометок в вершинах сети G*. Показано, как по решению двойственной задачи (3)—(4) получить решение задачи (1)—(2).

Во второй главе приведены методы для решения некоторых задач дискретного программирования на сети. Хотя подобные задачи изучались в работах — [4], [5], [6], [7] — однако общего подхода к их решению не существует. В рассматриваемой главе для решения этих задач приведены алгорифмы, основанные на методе ветвей и границ, существенно использующие специфику рассматриваемых задач.

В § 1 рассматривается задача отыскания максимального потока по произвольной сети G=[N; A] по каждой дуге (x_i, x_j) которой величина потока является некоторым числом из множества $Q(x_i, x_j) = \{0\} \cup [a_{ij}, b_{ij}]$, где $0 \leqslant a_{ij} \leqslant b_{ij}$, a_{ij} и b_{ij} — целые числа. Поставленная так задача имеет комбинаторный характер. Для ее решения приведен алгорифм [13] типа метода ветвей и границ. Особенностью алгорифма является то, что для отыскания границ на каждом шаге решается классическая задача о максимальном потоке. При этом полученное решение используется при построении некоторого приближения в последующих задачах о максимальном потоке, решаемых для отыскания границ.

В § 2 исследуется транспортная задача на сети G=[N; A] с величиной потока по каждой дуге $(x_i, x_j) \in A$ равной некоторому числу из множества $Q(x_i, x_j)$, т. е. изучается задача отыскания минимума функции

$$z = \sum_{A} c_{ij} f(x_i, x_j) \tag{5}$$

при ограничениях на дуговые потоки $f(x_i, x_j)$:

$$\sum_{x_j \in A(x_i)} f(x_i, x_j) - \sum_{x_j \in B(x_i)} f(x_j, x_i) = \begin{cases} v \text{ если } x_i = x_0 \\ o \text{ если } x_i \neq x_0, x_n \\ -v \text{ если } x_i = x_n \end{cases} \tag{6}$$

$$f(x_i, x_j) \in Q(x_i, x_j) \text{ для всех } (x_i, x_j) \in A,$$

где c_{ij} — стоимость перевозки единицы груза из x_i и x_j по дуге (x_i, x_j), v — количество единиц груза, которое необходимо доставить из x_0 в x_n.

Задача (5)—(6) также решается методом типа ветвей и границ. При этом для построения оценок используется решение этой задачи при условии, что $Q(x_i, x_j) = [\alpha^{ij}, b_{ij}]$, где α_{ji}

равно либо 0, либо a_{ij}. Решение последней задачи основано на критерии оптимальности, устанавливаемом следующей теоремой:

ТЕОРЕМА. Допустимое решение $\{f_0(x_i, x_j), v\}$ задачи (5)—(6) при $Q(x_i, x_j) = [a_{ij}, b_{ij}]$ оптимально тогда и только тогда, когда нет циклов отрицательной длины в сети G с длинами дуг, определенными следующим образом:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{если } f_0(x_i, x_j) < b_{ij} \\ \infty & \text{если } f_0(x_i, x_j) = b_{ij} \end{cases}$$

$$\lambda_{ji} = \begin{cases} -c_{ij} & \text{если } f_0(x_i, x_j) > a_{ij} \\ \infty & \text{если } f_0(x_i, x_j) = a_{ij} \end{cases}$$

Последний параграф второй главы посвящен решению следующей задачи: среди всех допустимых стационарных потоков фиксированной величины v из x_0 в x_n по x_0x_n-плоской сети $G=[N; A]$, по каждой дуге (x_i, x_j) которой величина потока является числом из множества $Q(x_i, x_j) = [a_{ij}, b_{ij}]$ найти поток, для которого число дуг с нулевым дуговым потоком максимально.

Задача, двойственная к этой, при рассмотрении на двойственной сети заключается в отыскании максимального числа дуг (y_l, y_k) нулевой длины λ_{lk} двойственной сети G^*, если под длиной λ_{lk} дуги (y_l, y_k) этой сети, соответствующей дуге (x_i, x_j) сети G, понимать число $\lambda_{lk} \in Q(x_i, x_j)$, выбранное так, чтобы все пути по G^* из y_0 в y_s имели одну и ту же длину v.

Для получения решения прямой задачи ищется решение двойственной методом типа ветвей и границ. При отыскании нижней и верхней оценок возможного числа дуг с нулевой длиной для каждого допустимого решения двойственной задачи использован алгорифм, изложенный в § 3 первой главы.

В третьей главе исследуется задача выпуклого целочисленного программирования: каждой дуге (x_i, x_j) произвольной ориентированной сети $G=[N; A]$ отнесено множество $Q(x_i, x_j) = [a_{ij}, b_{ij}]$ действительных чисел, где $o < a_{ij} < b_{ij}$, a_{ij} и b_{ij} — целые числа, и некоторая функция $f_{ij}(t_{ij})$ определенная для всех $t_{ij} \in Q(x_i, x_j)$. Необходимо каждой дуге

(x_i, x_j) сопоставить целое число $t_{ij} \in Q(x_i, x_j)$, интерпретируемое как длина дуги (x_i, x_j), так, чтобы длина любой цепи из x_0 в x_n по G не превышала некоторого наперед заданного числа T и чтобы при этом достигался минимум функции $z = \sum\limits_A f_{ij}(t_{ij})$.

Подобная задача для случая линейных или кусочно-линейных функций $f_{ij}(t_{ij})$ изучалась в совместной работе Келли и Уолкера [15] и в работе Келли [16] и изложена в [3], [10]. Предложенные там алгорифмы при линейных $f_{ij}(t_{ij})$ сводятся к решению ряда задач о максимальном потоке на сети $G=[N; A]$ со специально определенными параметрами. В случае кусочно-линейных функций $f_{ij}(t_{ij})$ строится вспомогательная сеть, имеющая значительно большее число вершин и дуг, чем исходная, что создает известные неудобства при решении. Эта же задача в случае выпуклых убывающих функций $f_{ij}(t_{ij})$ и без требования целочисленности решается в работе [9] методом наискорейшего спуска.

В рассматриваемой главе предложены методы решения поставленной задачи для случая, когда $f_{ij}(t_{ij})$ выпуклые вниз функции и сеть G является $x_0 x_n$-плоской, при этом существенно используется двойственный подход.

Для сети $G=[N; A]$ строится двойственная сеть аналогично тому, как это делается в первой главе настоящей работы. Пусть $\{t_{ij}, T_j\}$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$ — некоторое допустимое решение задачи, которое удовлетворяет условию: для каждой некритической дуги (x_i, x_j) имеют место неравенства:

$$f_{ij}(t_{ij}+1) - f_{ij}(t_{ij}) \geqslant 0 \text{ если } t_{ij} < b_{ij}$$

$$f_{ij}(t_{ij}-1) - f_{ij}(t_{ij}) \geqslant 0 \text{ если } t_{ij} > a_{ij}$$

(Здесь T_j — величина самой длинной цепи из x_0 в x_j, если считать длину каждой дуги (x_i, x_j) равной t_{ij}; критическими называем дуги каждой цепи из x_0 в x_n длина которой равна T для заданной системы значений t_{ij}).

Исходя из этого допустимого решения $\{t_{ij}, T_j\}$ каждой дуге (x_i, x_j) сети G ставится в соответствие два числа — c_{ij} и c_{ji} — по правилу:

$$c_{ij} = \begin{cases} f_{ij}(t_{ij}-1) - f_{ij}(t_{ij}) & \text{если дуга } (x_i, x_j) \text{ критическая} \\ & \text{и } t_{ij} > a_{ij} \\ \infty & \text{если дуга } (x_i, x_j) \text{ критическая и } t_{ij} = a_{ij}, \end{cases}$$

$$c_{ji} = \begin{cases} f_{ij}(t_{ij}+1) - f_{ij}(t_{ij}) & \text{если дуга } (x_i, x_j) \text{ критическая,} \\ & t_{ij} < b_{ij} \text{ и } f_{ij}(t_{ij}+1) - f_{ij}(t_{ij}) < 0. \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

$c_{ij} = c_{ji} = 0$ для всех некритических дуг.

Число c_{ij} (c_{ji}) характеризует величину приращения целевой функции z, если t_{ij} для дуги (x_i, x_j) уменьшить (увеличить) на единицу.

Длину λ_{lk} каждой дуги (y_l, y_k) сети G^* определяем так:

$$\begin{aligned} &\lambda_{lk} = c_{ji} \text{ если } (y_l, y_k) \text{ пересекает дугу } (x_i, x_j) \in A \\ &\text{так, что вершина } x_i \text{ находится справа от } (y_l, y_k); \\ &\lambda_{lk} = c_{ij} \text{ если } (y_l, y_k) \text{ пересекает дугу } (x_i, x_j) \in A \\ &\text{так, что вершина } x_j \text{ находится справа от } (y_l, y_k); \end{aligned} \qquad (7)$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА (критерий оптимальности допустимого решения).

Допустимое решение $\{t_{ij}, T_j\}$ оптимально тогда и только тогда, когда двойственная сеть с длинами дуг, определенными в соответствии с (7), не содержит ни одного простого направленного цикла отрицательной длины.

Предложены два варианта алгорифма для решения поставленной задачи, каждый из которых существенно использует полученный критерий оптимальности.

Первый из них состоит в следующем: отправляясь от некоторого допустимого решения, уменьшаем от шага к шагу значение целевой функции путем исправления величин t_{ij} для дуг (x_i, x_j), соответствующих дугам циклов отрицательной длины по G^*. Последние ищем при помощи метода, использующего идею Форда и Фалкерсона [10] для обоснования алгорифма отыскания кратчайшей цепи по сети. Процесс закончен, если сеть G^* с длинами дуг, определенными по некоторому допустимому решению $\{t'_{ij}, T'_j\}$, не содержит циклов отрицательной длины.

Во втором варианте отправляемся от системы значений $\tilde{t}_{ij} \in Q(x_i, x_j)$ и соответствующих значений $\tilde{T}_j$, $j=0,1,\ldots, n$, при которых достигается

$$\min z = \sum_{A} f_{ij} (\tilde{t}_{ij}).$$

Если оказалось, что $\tilde{T}_n \leqslant T$, то найдено оптимальное решение. Если же $\tilde{T}_n > T$, то производим следующую операцию: исходя из системы чисел $\{\tilde{t}_{ij}, \tilde{T}_j\}$, определяем длины дуг сети G^* в соответствии с (7) и находим кратчайшую цепь из y_0 в y_s. Если теперь по специальному правилу [12] исправить t_{ij} для дуг (x_i, x_j), соответствующих дугам этой кратчайшей цепи, то уменьшим $\tilde{T}_n$ по крайней мере на единицу и получим систему значений $\{t_{ij}, T_j\}$, $T_n \leqslant \tilde{T}_n - 1$, при этом значение целевой функции увеличится минимально — т. е. будет получен min z для $T_n \leqslant \tilde{T}_n - 1$. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдено первое допустимое решение, являющееся оптимальным решением задачи.

Этот вариант алгорифма близок по идее к методу Келли решения параметрической задачи минимизации стоимости проекта для случая $f_{ij} (t_{ij}) = -\alpha_{ij} t_{ij} + \beta_{ij}$. Вместо отыскания минимального разреза в сети с определенными специальным образом числовыми параметрами путем решения задачи о максимальном потоке, предлагаемый метод для этих же целей использует алгорифм построения кратчайшей цепи по двойственной сети.

Все изложенные в диссертации алгорифмы иллюстрируются числовыми примерами.

Основные результаты, изложенные в статьях автора [11], [12], [13], [14] докладывались и обсуждались на Киевском семинаре по математическому программированию, на Второй и Третьей всесоюзных зимних школах по математическому программированию и смежным вопросам в г. Дрогобыч, на IV республиканской конференции молодых математиков Украины, на научно-методических конференциях профессорско-преподавательского состава Дрогобычского пединститута им. Ив. Франко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берж К. Теория графов и ее применения. ИЛ 1962.

2. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. Советское радио, 1966.

3. Зуховицкий С. И., Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. Наука, 1965.

4. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. Наука, 1969.

5. Лебедев С. С., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. Материалы всесоюзной летней школы по математическому программированию, Алма-Ата, 1969.

6. Литл Д., Мурти К., Суини Д., Кэрэл К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. «Экономика и математические методы», 1965, I, выпуск I.

7. Первая всесоюзная конференция по оптимизации и моделированию транспортных сетей (сборник докладов). Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1967.

8. Пшеничный Б. Н. Численные методы расчета транспортных сетей. Автореферат кандидатской диссертации. Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1963.

9. Радчик И. А. Некоторые задачи оптимизации на сети. В сборнике «Экономическая кибернетика и исследование операций». Семинар, вып. 3, Киев, 1966.

10. Форд Л., Фалкерсон Д., Потоки в сетях. Мир, 1965.

11. Шаповаловський В. І. Про один алгорифм одночасового відшукання мінімального та максимального потоків по $x_0\,x_n$-плоскій сіті. Материалы IV республиканской конференции молодых математиков Украины, 1968.

12. Шаповаловский В. И. Об одной задаче минимизации выпуклой функции на графе. Труды второй всесоюзной зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. Выпуск 3, Москва, 1969.

13. Шаповаловський В. І. Задача про максимальний потік в сіті з незв'язною областю пропускних спроможностей. ДАН УРСР, № 9, 1970.

14. Шаповаловский В. И. Метод двойственности в некоторых экстремальных задачах на $x_0\,x_n$-плоских сетях. Труды третьей всесоюзной зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. Выпуск 3, Москва, 1970.

15. Kelley J. E. Walker M. R. Critical path planning and scheduling. Proc. of Eastern Joint Computer Conference, Boston, 1959.

16. Kelley J. E. Critical path planning and scheduling, mathematical basis. «Operat. Res». 1961, № 9.