7. Погорелов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10-11 кл. середн. шк. – 4-е вид. – Київ: Освіта, 1998. – 128с.

8. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11класів загальноосвітніх навчальних закладів/ М. І. Шкіль, З. І. Слепкань, О. С. Дубинчук. – 2-е вид. – Київ: Зодіак – Еко, 2000. – 608с.

9. Яковлев Г. Н. Алгебра и начала анализа.: Учебник: в 2 ч./ М. И. Каченовский, Ю. М. Колягин, А. Д. Кутасов и др.; Под ред. Г. Н. Яковлева. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1987. – (Математика для техникумов).

Аннотация

В статье рассматриваются возможности использования компьютера на уроке математики в высших медицинских учебных заведениях I – II уровней аккредитации.

Шаповалова Н.В.

ІНТЕГРУВАННЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОГО ІНТЕГРАЛУ ЗА ЧАСТИНАМИ

Мультиплікативний інтеграл для матричних функцій вперше ввів Вольтерра [1], [2].

Нехай $A(t)$ — неперервна матрична функція, де дійсна змінна t знаходиться в інтервалі (t_0; t). Аналогічно побудові інтегралу Рімана визначається матрична функція

$$Y(t) = \lim_{\Delta t_k \to 0} \prod_k \left(E + A(t_k) \cdot \Delta t_k\right) = \overset{\frown}{\int_{t_0}^{t}} E + A(t)dt\,, \qquad (1)$$

яка називається *мультиплікативним інтегралом.* Матриця E — одинична.

Первісна мультиплікативного інтегралу задовольняє системі лінійних диференціальних рівнянь:

$$Y' = A(t)Y\,. \qquad (2)$$

Розглянемо мультиплікативний інтеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt\,, \qquad (3)$$

де $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — неперервна матрична функція.

Нехай маємо

$$Y' = (B + C)Y, \qquad Y = \int^{\frown} E + (B + C)dt. \qquad (4)$$

Позначимо через $B = Z'Z^{-1}$, тобто $Z = \int^{\frown} E + Bdt$. Тоді

$$Y' = (Z'Z^{-1} + C)Y \quad \text{або} \quad Y = \int^{\frown} E + (Z'Z^{-1} + C)dt.$$

Оскільки в підінтегральному виразі маємо повну мультиплікативну похідну, то за [2]:

$$Y = Z\int^{\frown} E + Z^{-1}CZdt. \qquad (5)$$

Порівнявши вирази (4) і (5), отримаємо формулу мультиплікативного інтегрування за частинами для мультиплікативного інтегралу (3):

$$\int^{\frown} E + (B + C)dt = \int^{\frown} E + Bdt \cdot \int^{\frown} E + Ad\left(\int^{\frown} E + Bds\right)\{C\}dt, \qquad (6)$$

де $Ad(g)\{f\} = g^{-1}fg$.

Дослідимо умови, що накладаються на елементи $a_{ij}(t)$ матриці $A(t)$, при виконанні яких мультиплікативний інтеграл (3) обчислюється в скінченому вигляді.

Такий спосіб обчислення мультиплікативного інтегралу базується на багаторазовому застосуванні формули мультиплікативного інтегрування за частинами. Після першого кроку інтегрування знову отримаємо мультиплікативний інтеграл. Якщо підінтегральна матриця трикутна, то мультиплікативний інтеграл обчислюється в скінченому вигляді. Якщо трикутну матрицю одержимо на n-кроці мультиплікативного інтегрування за частинами, тоді підінтегральну матрицю зобразимо у вигляді інтегрованої частини і залишку.

Зобразимо матрицю $A(t)$ у вигляді суми мультиплікативно інтегрованої частини і залишку наступним чином:

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Для того, щоб записи були менш громіздкими введемо позначення: $\int a(t)dt=\int a$.

Тоді

$$\overset{\frown}{\int} E+A(t)dt=\begin{pmatrix}1 & \int a_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot \overset{\frown}{\int} E+Ad\begin{pmatrix}1 & \int a_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right\}dt=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \int a_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot \overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix}a_{11}-a_{12}\int a_{12} & (a_{11}-a_{22})\int a_{12}-a_{21}\int^2 a_{12}\\ a_{21} & a_{22}+a_{21}\int a_{12}\end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \int a_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot \overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22}\end{pmatrix}dt.$$

Умова $\tilde{a}_{12}=0$ еквівалентна умові

$$a_{12}=\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{21}}\right)'. \qquad (8)$$

При виконанні умови (8) мультиплікативний інтеграл (3) матиме вигляд:

$$\overset{\frown}{\int} E+A(t)dt=\begin{pmatrix}1 & \int a_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^{\int \tilde{a}_{11}} & 0\\ e^{\int \tilde{a}_{22}}\int \tilde{a}_{21}\cdot e^{\int \tilde{a}_{11}-\tilde{a}_{22}} & e^{\int \tilde{a}_{22}}\end{pmatrix}.$$

Якщо умова (8) не виконується, то процес інтегрування за частинами потрібно продовжити.

$$\overset{\frown}{\int} E+\tilde{A}dt=\begin{pmatrix}1 & \int \tilde{a}_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot \overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix}\tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12}\\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22}\end{pmatrix}dt.$$

Умова $\tilde{b}_{12}=0$ еквівалентна умові

$$2a_{12}+(a_{11}-a_{22})\int a_{12}-a_{21}\int^2 a_{12}=\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{21}}\right)'. \qquad (9)$$

При виконанні умови (9) мультиплікативний інтеграл (3) буде мати вигляд:

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt = \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int \tilde{a}_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\int \tilde{b}_{11}} & 0 \\ e^{\int \tilde{b}_{22}} \int \tilde{b}_{21} \cdot e^{\int \tilde{b}_{11} - \tilde{b}_{22}} & e^{\int \tilde{b}_{22}} \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо висновок.

Теорема. Нехай $\begin{pmatrix} a_{11,\,n} & a_{12,\,n} \\ a_{21,\,n} & a_{22,\,n} \end{pmatrix}$, $a_{ij,\,0} = a_{ij}$ — підінтегральна матриця, отримана на n-кроці мультиплікативного інтегрування за частинами. Тоді при виконанні умов

$$a_{12,\,n} = ((a_{11,\,n} - a_{22,\,n}) / a_{21,\,n})',$$

де

$$a_{11,\,n} = a_{11,\,n-1} - a_{21,\,n-1} \int a_{12,\,n-1} dt,$$

$$a_{22,n} = a_{22,\,n-1} + a_{21,\,n-1} \int a_{12,\,n-1} dt,$$

$$a_{21,\,n} = a_{21,\,n-1},$$

$$a_{12,\,n} = (a_{11,\,n-1} - a_{22,\,n-1}) \int a_{12,\,n-1} dt - a_{21,\,n-1} \int^2 a_{12,\,n-1} dt$$

на (n+1)-кроці мультиплікативного інтегрування за частинами матрична функція A_{n+1} стане трикутною і, отже, мультиплікативний інтеграл (3) обчислюватиметься в скінченому вигляді:

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt = \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12,\,n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\int a_{11,\,n}} & 0 \\ e^{\int a_{22,\,n}} \cdot \int a_{21,\,n} \cdot e^{\int a_{11,\,n} - a_{22,\,n}} & e^{\int a_{22,\,n}} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Проілюструємо цей висновок на прикладі. Розглянемо рівняння $y'' = k(t)y$, яке еквівалентне системі рівнянь

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot Y.$$

Умова (9) матиме вигляд

$$k(t) = \frac{2}{(t + C)^2}.$$

Отже, маємо рівняння Ейлера:

$$y'' = \frac{2}{(t + C)^2} \cdot y.$$

Тоді загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1(t+C)^2 + C_2(t+C)^{-1}.$$

Розглянемо мультиплікативний інтеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dx, \qquad (11)$$

де $a_{12}(x)$, $a_{21}(x)$ — гладкі функції.

Тоді з формули (9) випливає, що достатньою умовою інтегрованості мультиплікативного інтегралу в скінченому вигляді є наступна умова:

$$\int a_{12}(x)dx \cdot \int a_{21}(x)dx = -2. \qquad (12)$$

Наприклад, для мультиплікативного інтегралу

$$\overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} dx \qquad (13)$$

умова інтегрованості (12) приймає вигляд:

$$\int u dx = -\frac{2}{x+C} \text{ або } u = \frac{2}{(x+C)^2}. \qquad (14)$$

І розв'язок (14) є розв'язком рівняння Кортевега - де Фриса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{або} \quad u_t - 6uu'_x + u'''_{xxx} = 0,\ x,t \in R^1,\ u(x,t) \in R^1.$$

(15)

Розглянемо, наприклад, мультиплікативний інтеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k}u & 0 \end{pmatrix} dx, \text{ де } k = const. \qquad (16)$$

Застосовуючи формулу мультиплікативного інтегрування за частинами, отримаємо, що

$$\overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k}u & 0 \end{pmatrix} dx = \overset{\frown}{\int} E + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{k}u - \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} ch\int\frac{k}{2}dx & sh\int\frac{k}{2}dx \\ sh\int\frac{k}{2}dx & ch\int\frac{k}{2}dx \end{pmatrix} \cdot \overset{\frown}{\int} E + \left(\frac{2}{k}u - \frac{k}{2}\right) ch^2 \int\frac{k}{2}dx \cdot \begin{pmatrix} -cth\int\frac{k}{2}dx & -cth^2\int\frac{k}{2}dx \\ 1 & cth\int\frac{k}{2}dx \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Введемо позначення

$$\widetilde{a}_{21} = \left(\frac{2}{k}u - \frac{k}{2}\right) ch^2 \int \frac{k}{2} dx; \qquad (18)$$

$$\int \widetilde{a}_{12} dx = cth \frac{k}{2} dx.$$

Враховуючи позначення (18), з формули (17) одержимо:

$$\overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k}u & 0 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} ch\int \frac{k}{2}dx & sh\int \frac{k}{2}dx \\ sh\int \frac{k}{2}dx & ch\int \frac{k}{2}dx \end{pmatrix} \cdot \overset{\frown}{\int} E + \widetilde{a}_{21} \begin{pmatrix} -\int \widetilde{a}_{12}dx & -\int^2 \widetilde{a}_{12}dx \\ 1 & \int \tilde{a}_{12}dx \end{pmatrix} dx \quad (19)$$

Враховуючи наступну тотожність

$$\overset{\frown}{\int} E + \widetilde{a}_{21} \begin{pmatrix} -\int \widetilde{a}_{12}dx & -\int^2 \widetilde{a}_{12}dx \\ 1 & \int \widetilde{a}_{12}dx \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 & -\int \widetilde{a}_{12}dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & 0 \end{pmatrix} dx,$$

рівність (19) матиме вигляд:

$$\overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k}u & 0 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} ch\int \frac{k}{2}dx & sh\int \frac{k}{2}dx \\ sh\int \frac{k}{2}dx & ch\int \frac{k}{2}dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\int \widetilde{a}_{12}dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{21} & 0 \end{pmatrix} dx. \quad (20)$$

З умови $\int \widetilde{a}_{12}dx \cdot \int \widetilde{a}_{21}dx = -2$, яка забезпечує інтегрованість в скінченому вигляді мультиплікативного інтегралу (20), випливає, що

$$cth\int \frac{k}{2}dx \int \left(\left(\frac{2}{k}u - \frac{k}{2}\right) ch^2 \int \frac{k}{2}dx\right) dx = -2, \quad u = \frac{2k^2}{sh^2 2 \cdot \int \frac{k}{2}dx} + \frac{k^2}{4}. \qquad (21)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (15) Кортвега-де Фриса використаємо наступну рівність

$$\int \frac{k}{2}dx = \frac{k}{2}\left(x + f(t)\right), \qquad (22)$$

де $f(t)$ — деяка гладка функція.

Підставляючи рівність (22) в рівняння (15), отримаємо:

$f(t) = -\frac{5}{2}k^2 t + C$, де $C = const.$

Отже, $u = \dfrac{2k^2}{sh^2 k\left(x - \frac{5}{2}k^2 t + C\right)} + \dfrac{k^2}{4}$

є розв’язком рівняння (15).

Розглянемо приклад мультиплікативного інтегралу виду

$$\int^{\frown} E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k}u & 0 \end{pmatrix} dx = \int^{\frown} E + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{k}u + \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} dx, \qquad (23)$$

де $k = const$.

Проводячи аналогічні до попереднього прикладу міркування, отримаємо, що достатньою умовою інтегрованості мультиплікативного інтегралу (23) в скінченому вигляді є наступна рівність:

$$u = \frac{2k^2}{\sin^2 k(x + f(t))} - \frac{k^2}{4}\ . \qquad (24)$$

Підставляючи рівність (24) в рівняння (15) маємо, що

$f(t) = \frac{5}{2}k^2 t + C$, де $C = const$.

А отже,

$$u = \frac{2k^2}{\sin^2 k\left(x + \frac{5}{2}k^2 t + C\right)} - \frac{k^2}{4}$$

є розв’язком рівняння (15).

Використана література:

1. *Volterra V.* Sulle equazioni differenziali lineari. Rendiconti Accad. dei Lincei (4). — V.3. — sen.1, 393-396, 1887.

2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — 4-е изд., доп. — М.: Наука, 1988. — 548 с.

3. *Деревенский В.П.* Экспоненциальное решение матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Изв. вузов // Математика. — № 7. — 1981. — С. 31-33.

4. *Шаповалова Н.В.* Мультиплікативний інтеграл та його застосування // Наукові записки: Збірник наукових статей Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — Вип. 4. — С. 120-124.

5. *Шаповалова Н.В.* Інтегрування мультиплікативного інтегралу за частинами // Дев'ята Міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, 16-19 травня 2002 р.: Тези доповідей.— К.: НТУУ "КПІ", 2002.— С. 398.

А н н о т а ц и я

В статье выведены условия, которые накладываются на коэффициенты непрерывной матричной функции для того, чтобы мультипликативный интеграл вычислялся в конечном виде. Полученные результаты оформлены в виде теоремы и проиллюстрированы на конкретных примерах.