Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 218–229.

УДК 515.127

Група перетворень простору, які зберігають фрактальну ентропійну розмірність

М. В. Працьовитий, С. А. Сотнікова
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
Луганський державний педагогічний університет імені Т.Г.Шевченка)

Анотація. Вводяться в розгляд і досліджуються перетворення простору R^n, які зберігають фрактальну ентропійну розмірність. Показано, що біліпшицеві перетворення, зокрема афінні перетворення R^2, належать групі таких перетворень. Доведено критерій належності функції розподілу випадкової величини з незалежними s-адичними цифрами до групи перетворень одиничного відрізка, які зберігають фрактальну ентропійну розмірність.

Abstract. We introduce and study transformations of R^n preserving the fractal entropy dimension. It is shown that bi-Lipschitz transformations, in particular affine transformations of R^2, belong to the group of such transformations. We also prove the criterion for the distribution function of the random variable with independent s-adic digits to belong to the group of transformations of unit interval preserving the fractal entropy dimension.

1. Вступ

Центральним поняттям теорії фракталів (фрактальної геометрії, фрактального аналізу) є поняття метричної розмірності, яка може набувати як цілих, так і дробових значень. Широко використовується цілий ряд різних метричних розмірностей. Класичними в цьому відношенні є розмірність Хаусдорфа-Безиковича (її іноді називають просто розмірністю Хаусдорфа) та ентропійна розмірність. Першоджерелом ідей метричних розмірностей і мір дробових порядків є робота Фелікса Хаусдорфа "Розмірність і зовнішні міри" [**8**]. Ці поняття покладені в основу фрактальної геометрії [**6**], групове тлумачення якої було дано в роботах [**2, 4**].

Міра Хаусдорфа. Нехай M — повний метричний простір з метрикою ρ, E — його обмежена підмножина, $d(E)$ — діаметр E, $h(t)$ — неперервна зростаюча дійснозначна функція, задана на півосі $t \geq 0$, причому $h(0) = 0$ (клас таких функцій позначатимемо через H_0), F_M — сім'я підмножин простору M така, що для $\forall E \subset M$

Робота частково підтримана проектом DFG 436 113/80, SFB 611

і $\forall \varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне ε-покриття $\{G_i\}$, $G_i \in F_M$, множини E (тобто $\exists\{G_i\}, \quad G_i \in F_M, \quad E \subset \bigcup\limits_i G_i, \quad d(G_i) \le \varepsilon$). Для заданих E, h і будь-якого $\varepsilon > 0$ означимо функцію

$$m_h^\varepsilon(E) = \inf_{d(G_i)\le\varepsilon} \left\{ \sum_i h[d(G_i)] : \quad E \subset \bigcup_i G_i \right\},$$

де нижня грань береться за всеможливими, не більш ніж зчисленними, ε-покриттями $\{G_i\}$, $G_i \in F_M$, множини E.

Число

$$H_h(E) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} m_h^\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon>0} m_h^\varepsilon(E) \tag{1}$$

називають зовнішньою h-мірою Хаусдорфа множини E, що відповідає сім'ї покриттів F_M. При цьому функцію h називають вимірюючою, а зовнішню міру m_h^ε — мірою наближення порядку ε.

Оскільки функція множини $m_h^\varepsilon(E)$ є незростаючою по ε (при зменшенні ε інфімум визначається по все біднішому класу покриттів), то границя в (1) (скінченна чи нескінченна) завжди існує, а отже, завжди визначена величина $H_h(E)$, яка на σ-кільці H_h-вимірних множин простору R^n є борелівською регулярною мірою.

Нагадаємо **[5]**, що множина $E \in 2^M$ називається *μ^*-вимірною (або вимірною по відношенню до зовнішньої міри μ^*)*, якщо для довільного $A \subset M$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*\left(A \cap \bar{E}\right)\big) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Різні сім'ї F_M і функції h приводять, взагалі кажучи, до різних мір $H_h(\cdot)$. В наукових дослідженнях фігурує чимало різних варіацій означення міри Хаусдорфа. Далі $M = R^n$. Якщо в якості F_M розглядається сім'я всіх непорожніх підмножин простору M, а $h(t) = \gamma(\alpha)t^\alpha$, де α — фіксоване додатне (не обов'язково ціле) число, а $\gamma(\alpha)$ — додатна константа, залежна лише від α (зокрема,

$$\gamma(\alpha) = \frac{\Gamma^\alpha(\frac{1}{2})}{2^\alpha \Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}, \text{ де } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \text{ — гамма-функція Ейлера}), \tag{2}$$

то h-міру Хаусдорфа називають *α-мірною мірою (α-мірою) Хаусдорфа.* Її позначатимемо $H_\alpha(\cdot)$ (права частина равності (2) є об'ємом α-мірної кулі радіуса t).

Якщо в якості F_M розглядати сім'ю всіх непорожніх замкнених множин або сім'ю всіх відкритих множин простору M, то отримаємо ту ж саму H_α-міру Хаусдорфа, хоча наближаючі міри порядку ε можуть відрізнятись одна від одної.

Якщо F_M — сім'я всіх замкнених (відкритих) куль в M, то $H_\alpha(E)$ називається *сферичною α-мірою Хаусдорфа.* Коли ж покриття здійснюються кулями однакового діаметра, то таку міру називають *ентропійною.*

При натуральних m H_m-міра Хаусдорфа з функцією $h(t)$, означеною рівністю (2), для множин простору R^n співпадає з зовнішньою m-вимірною мірою Лебега. Для інших констант $\gamma(m)$ ці міри кількісно відрізняються, але їх рівність нулю або нескінченності досягаються одночасно. Таким чином, H_α-міра Хаусдорфа узагальнює зовнішню міру Лебега з цілочисельних значень α на довільні додатні. При її означенні не використовується розмірність простору, в якому вона розглядається, що створює додаткові зручності. Більше того, вона дозволяє сформулювати суттєві відмінності у властивостях множин нетривіальної (відмінної від нуля і нескінченності) H_α-міри для цілих та дробових α в термінах самої H_α-міри [**5**].

Теорема 1. [**11**] *Для того щоб компакт $C \subset R^n$ мав нульову h-міру Хаусдорфа, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існував скінченний розклад компакта $C = A_1 \bigcup ... \bigcup A_k$ такий, що*

$$h[d(A_1)] + ... + h[d(A_k)] < \varepsilon.$$

Очевидно, що h-міра Хаусдорфа є монотонно неспадною функцією множини, тобто з $E_1 \subset E_2$ випливає $H_h(E_1) \leq H_h(E_2)$. Кожне стискуюче відображення, визначене в околі множини, може, як легко показати, тільки зменшити його h-міру.

Фрактальною розмірністю множини $E \subset M$, що відповідає сім'ї покриттів F_M, називається число

$$\alpha_0 = \alpha_0(E, F_M) = \inf\{\alpha : \quad H_\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \quad H_\alpha(E) \neq 0\}. \tag{3}$$

Фрактальна розмірність множини E визначається поведінкою $H_\alpha(E)$ як функції числа α. Коректність означення фрактальної розмірності обгрунтовує наступна властивість міри Хаусдорфа:

якщо $H_{\alpha_1} < \infty$, то $H_{\alpha_2} = 0$ для всіх $\alpha_2 > \alpha_1$;

якщо $H_{\alpha_2} \neq 0$, то $H_{\alpha_1} = \infty$ для всіх $\alpha_1 < \alpha_2$.

Взагалі кажучи, $H_{\alpha_0}(E)$ може бути додатним числом, нулем або нескінченністю.

Відмітимо деякі властивості фрактальної розмірності.

(1) якщо $E_1 \subset E_2$, то $\alpha_0(E_1) \leq \alpha_0(E_2)$;

(2) $\alpha_0\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m} E_n\right) = \max\limits_{1\leq n\leq m}\{\alpha_0(E_n)\}$ (властивість скінченної стабільності);

(3) якщо множини E_1 і E_2 геометрично подібні (тобто існує перетворення подібності, яке переводить E_1 в E_2), то $\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2)$.

В роботі [**2**] введені в розгляд і досліджені перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича. З їх допомогою в [**3, 4**] дано трактування фрактальної геометрії як науки про інваріанти групи перетворень простору, які зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

В даній роботі ми, підтримуючи попередню ідеологію, вивчаємо аналогічні перетворення для ентропійної міри (розмірності).

2. Фрактальна ентропійна розмірність множини

Нехай H_*^α — ентропійна α-міра, про яку йшлося вище. Її можна означити наступним чином. Нехай E — обмежена множина простору R^n, α — фіксоване дійсне додатне число. Для кожного $\varepsilon > 0$ покладемо

$$H_*^\alpha(E, \varepsilon) = \inf_{d \le \varepsilon} N(d) d^\alpha,$$

де $N(d)$ — найменше число d_α-куль, необхідних для покриття множини E. Нижня грань береться за всеможливими покриттями d_α-кулями з діаметрами $d \le \varepsilon$. При цьому число $N(d)d^\alpha$ називається *α-об'ємом покриття.*

Функція $N(d)$ набуває натуральні значення для всіх додатних d, змінюючись лише в точках деякої послідовності $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty)$. Вона є постійною на інтервалах $(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n)$, $n = 1, 2, ...$, і необмежено зростає, коли d прямує до нуля (якщо множина E не є скінченною). Наприклад, якщо $E = [0; 1]$, то

$$N(d) = \begin{cases} \frac{1}{d}, & \text{коли } \frac{1}{d} \text{ — ціле,} \\ \\ \left[\frac{1}{d}\right] + 1, & \text{коли } \frac{1}{d} \text{ — не є цілим,} \end{cases}$$

де $[x]$ — ціла частина числа x. Тому послідовністю $\{\varepsilon_n\}$ в цьому випадку є $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, де $n = 1, 2, \ldots$. Таким чином, для обмеженої множини E і фіксованого $\alpha \ge 0$ однозначно визначається значення функції $H_*^\alpha(E, \varepsilon)$. Вона є незростаючою по ε, тобто для $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ $H_*^\alpha(E, \varepsilon_1) \le H_*^\alpha(E, \varepsilon_2)$. Справді, зменшуючи ε, нижня грань береться за все більш бідним класом покриттів.

Ентропійною α-мірною мірою множини E називаєтъся число

$$H_*^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_*^\alpha(E, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf_{d \le \varepsilon} N(d) d^\alpha \right).$$

Ентропійна міра $H_*^\alpha(E)$ множини E, в залежності від α, може бути рівною нулю, додатному числу або ж нескінченності. Дійсне невід'ємне число $\alpha_*(E)$, при якому α-мірна ентропійна міра множини E нетривіальна або

$$\alpha_*(E) = \inf\{\alpha : \quad H_*^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \quad H_*^\alpha(E) \ne 0\}$$

називається *ентропійною розмірністю множини E.*

Зауваження. Ентропійна розмірність відрізняється від розмірності Хаусдорфа-Безиковича. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича зчисленної множини рівна 0, а ентропійна розмірність зчисленної, але всюди щільної множини більша 0. Наприклад, множина раціональних чисел відрізка $[0, 1]$ має ентропійну розмірність рівну 1.

Ентропійна розмірність не має властивості зчисленної стабільності:

$$\alpha_0 \left(\bigcup_n E_n \right) = \sup_n \alpha_0(E_n),$$

але володіє скінченною стабільністю.

3. Локальна ентропійна розмірність

Означення 1. *Локальною ентропійною розмірністю множини E в точці x_0* називається число

$$\alpha_*(E, x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_*(E \cap O(x_0, \varepsilon)) = \inf_{\varepsilon > 0} \alpha_*(E \cap O(x_0, \varepsilon)), \tag{4}$$

де $O(x_0, \varepsilon)$ — ε-окіл точки x_0.

Якщо $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то

$$E \cap O(x_0, \varepsilon_1) \subset E \cap O(x_0, \varepsilon_2)$$

і

$$\alpha_*(E \cap O(x_0, \varepsilon_1)) \leq \alpha_*(E \cap O(x_0, \varepsilon_2)).$$

Тому границя (4) завжди існує, а отже визначена локальна ентропійна розмірність множини E в довільній точці.

Очевидно, що $0 \leq \alpha_*(E, x_0) \leq \alpha_*(E)$ для довільного $x_0 \in R^n$.

Теорема 2. *1. Для кожної обмеженої множини $E \subset R^n$*

$$\alpha_*(E) = \sup_{x \in E} \alpha_*(E, x).$$

2. Якщо E — замкнена множина, то існує точка $x_0 \in E$ така, що

$$\alpha_*(E) = \alpha_*(E, x_0).$$

Доведення. Розіб'ємо простір R^n на піввідкриті куби $K_1^{(i)}$ з довжиною ребра 1. Обмежена множина E має лише зі скінченною кількістю кубів непорожній переріз. Нехай це $K_1^{i_m}$, $m = \overline{1, m_1}$. Серед них є принаймні один (нехай $K_1^{i_{m_1}}$), такий, що

$$\alpha_*(E) = \alpha_* \left(E \cap [K_1^{i_{m_1}}] \right),$$

$[K_1^{i_{m_1}}]$ замикання $K_1^{i_{m_1}}$.

Розбивши $K_1^{m_1}$ на 2^n рівних кубів $K_2^{m_1 m}$ з довжиною ребра $\frac{1}{2}$, знайдемо $K_2^{m_1 m_2}$ такий, що

$$\alpha_*(E) = \alpha_*(E \cap [K_2^{m_1 m_2}])$$

і т.д. Отримаємо послідовність вкладених замкнених кубів $K^{m_1 m_2 \ldots m_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, що

$$\alpha_*(E) = \alpha_*(E \cap [K^{m_1 m_2 \ldots m_k}]).$$

За аксіомою Кантора існує єдина точка x_0 — спільна для всієї послідовності кубів. За означенням локальної розмірності

$$\alpha_*(E, x_0) = \alpha_*(E).$$

Якщо E — замкнена, то $x_0 \in E$, а отже , має місце друге твердження теореми. $\square$

4. Перетворення, які зберігають ентропійну розмірність

Означення 2. Перетворення f метричного простору R^n (тобто бієктивне відображення R^n на себе) називатимемо *перетворенням, яке зберігає ентропійну розмірність*, якщо розмірність довільної множини $G \subset R^n$ і її образу $G' = f(G)$ співпадають, тобто

$$\alpha_*(G) = \alpha_*(G') = \alpha_*(f(G)).$$

Такі перетворення називатимемо *ентропійними або E-перетвореннями.*

Теорема 3. *Множина $\mathcal{E}$ всіх перетворень метричного простору (M, ρ), що зберігають ентропійну розмірність, утворює групу відносно операції $\circ$ (композиція перетворень), одиничним (нейтральним) елементом якої є тотожне перетворення.*

Доведення. Як відомо, множина F всіх перетворень кожної непорожньої множини (зокрема R^n) разом з операцією "композиція" утворює групу. Оскільки $\mathcal{E}$ підмножина F, то скористаємось критерієм підгрупи.

Очевидно, що з $f_1,\ f_2 \in \mathcal{E}$ випливає $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{E}$, оскільки

$$\alpha_*(G'') = \alpha_*(f_2(G')) = \alpha_*(f_1(G)) = \alpha_*(G) \quad \forall G \subset M.$$

З того, що $f \in \mathcal{E}$ випливає, що $f^{-1} \in \mathcal{E}$.

Справді, якщо $F = f(G')$, то $F' = f^{-1}(G)$; і з того, що $\alpha_*(G) = \alpha_*(G')$ маємо $\alpha_*(G') = \alpha_*(f^{-1}(G')) = \alpha_*(G)$.

Отже, $(\mathcal{E}, \circ)$ — група за критерієм підгрупи. □

Зауважимо, що група $\mathcal{E}$ є нетривіальною, оскільки кожне перетворення подібності є E-перетворенням.

Теорема 4. *Якщо для перетворення f метричного простору R^n існують додатній константи λ_1 і λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) такі, що для довільних точок $x, y \in M$ і їх образів $f(x)$ і $f(y)$ мають місце нерівності*

$$\lambda_1 \rho(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq \lambda_2 \rho(x, y), \tag{5}$$

то перетворення f зберігає ентропійну розмірність.

Доведення. З нерівностей (5) випливає

$$\lambda_1 d(E) \leq d[f(E)] \leq \lambda_2 d(E) \quad \forall E \subset M.$$

Якщо $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття E, то $\{f(E_j)\}$ — деяке ε_1-покриття множини $f(E)$ і

$$\inf_{d(E_j) \leq \varepsilon_1} \lambda_1 N(d) d^\alpha(E_j) \leq \inf_{d[f(E_j)] \leq \varepsilon} N(d) d^\alpha[f(E_j)] \leq \inf_{d(E_j) \leq \varepsilon_1} \lambda_2 N(d) d^\alpha(E_j)$$

для довільного $\alpha > 0$. Тому

$$\lambda_1 H_*^\alpha(E) \leq H_*^\alpha[f(E)] \leq \lambda_2 H_*^\alpha(E).$$

Тобто $H_*^\alpha[f(E)]$ і $H_*^\alpha(E)$ одначасно рівні 0 або ∞, а отже, E і $f(E)$ мають однакову ентропійну розмірність. □

Наслідок 1. *Кожне афінне перетворення простору R^2 є перетворенням, що зберігає ентропійну розмірність.*

Доведення. Дане твердження випливає з того, що для кожного афінного перетворення існують додатні константи λ_1 і λ_2 такі, що виконується умова (5). □

Означення 3. Перетворення f простору R^n, для якого виконується рівність

$$\alpha_*(E,x) = \alpha_*(E',x')$$

для кожної множини $E \subset R^n$, будь-якого $x \in R^n$ та їх образів $E' = f(E)$, $x' = f(x)$, називається *перетворенням, що зберігає локальну ентропійну розмірність.*

Теорема 5. *Неперервне перетворення f простору R^n зберігає ентропійну розмірність тоді і тільки тоді, коли воно зберігає локальну розмірність.*

Доведення. 1. Нехай f — неперервне перетворення, що зберігає ентропійну розмірність. Доведемо, що f зберігає локальну ентропійну розмірність.

Нехай E — довільна множина, x_0 — довільна точка простору, $E' = f(E)$, $x_0' = f(x_0)$.

Якщо x_0 — ізольована точка для E, то x_0' — ізольована точка для E' і

$$\alpha_*(E,x) = \alpha_*(E',x') = 0.$$

Нехай x_0 — гранична точка для E. Оскільки перетворення f неперервне, то x_0' — гранична для E'. За умовою

$$\alpha_*(E) = \alpha_*(E').$$

Тому

$$\alpha_*(E',x_0') = \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_*(E'\cap O(x_0',\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_*(E_\varepsilon(x_0)), \tag{6}$$

де $E_\varepsilon(x_0)$ — прообраз $E'\cap O(x_0',\varepsilon)$, тобто $f(E_\varepsilon(x_0) = E'\cap O(x_0',\varepsilon)$.

Очевидно, що $x_0 \in E_\varepsilon(x_0)$ і $E_{\varepsilon_1}(x_0) \subset E_{\varepsilon_2}(x_0)$, якщо $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Оскільки f — неперервне відображення, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що

$$|x_0x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_0)f(x)| < \varepsilon.$$

Тому для $\varepsilon > 0$ існує δ-окіл $O(x_0,\delta)$ точки x_0 такий, що

$$f(O(x_0,\delta)) \subset O(x_0',\varepsilon), \quad \text{а} \quad \text{отже,} \quad O(x_0,\delta) \subset E_\varepsilon(x_0).$$

Звідки $E\cap O(x_0,\delta) \subset E\cap E_\varepsilon(x_0)$ і $\alpha_*(E\cap O(x_0,\delta)) \le \alpha_*(E\cap E_\varepsilon(x_0))$.

Перехід до границь в останній нерівності з урахуванням (6) приводить до нерівності

$$\alpha_*(E',x_0') \ge \alpha_*(E,x_0).$$

Враховуючи, що f^{-1} теж неперервне перетворення, аналогічними міркуваннями отримаємо

$$\alpha_*(E, x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_*(E \cap O(x_0, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_*(E'_\varepsilon(x'_0)) \geq \alpha_*(E', x'_0).$$

Дві останні нерівності дають рівність $\alpha_*(E, x_0) = \alpha_*(E', x'_0)$, тобто f зберігає локальну розмірність.

2. Нехай тепер f зберігає локальну розмірність, тобто

$$\alpha_*(E, x) = \alpha_*(E', x') \quad \forall E \subset R^n, \ \ \forall x \in R^n. \tag{7}$$

Доведемо, що f зберігає і глобальну фрактальну ентропійну розмірність.

Оскільки

$$\alpha_*(E) = \sup_{x \in E} \alpha_*(E, x) \quad \forall E \subset R^n,$$

то з (7) маємо

$$\alpha_*(E) = \sup_{x \in E} \alpha_*(E, x) = \sup_{x' \in E'} \alpha_*(E', x') = \alpha_*(E'),$$

що й треба було довести. □

5. Неперервні перетворення відрізка $[0, 1]$

Нехай f — неперервне перетворення $[0, 1] \subset R^1$. Тоді, очевидно, що f є строго тзростаючою або строго спадною функцією. В першому випадку $f(x)$ є неперервною функцією розподілу на $[0, 1]$, а в другому $f(x) = 1 - F(x)$, де $F(x)$ є неперервною строго зростаючою функцією розподілу.

Серед строго зростаючих функцій є такі, які змінюються досить "плавно" глобально і локально, інші ж "достатньо сильно" деформують множини. Серед функцій розподілу, що більш менш правильно змінюються, є абсолютно неперервні. Неперервно ж сингулярні функції здатні значно сильніше трансформувати властивості. Чи узгоджені ці лебегівські властивості функцій з властивістю зберігати ентропійну розмірність?

Дійсну неперервну строго монотонну (зростаючу або спадну) функцію на R називатимемо *E-функцією або функцією, яка зберігає ентропійну розмірність*, якщо для довільної обмеженої множини $G \subset R$:

$$\alpha_*(G) = \alpha_*(f(G)),$$

де $\alpha_*(\cdot)$ — ентропійна розмірність.

E-функцію f, для якої

$$0 < H^\alpha_*(G) < \infty \quad \Rightarrow \quad 0 < H^\alpha_*(f(G)) < \infty \quad \forall G \subset R$$

називатимемо EH-функцією.

Очевидно, що кожна EH-функція є E-функцією.

Лема 1. *Якщо f є E-функцією, то такою є kf, де $k > 0$.*

Дане твердження є наслідком теореми 4.

Лема 2. *Якщо f_1 і f_2 неперервні строго зростаючі функції, то для довільної множини G*

$$\alpha_*[f_m(G)] \leq \alpha_*[f(G)], \tag{8}$$

де $f = f_1 + f_2$, $m \in \{1, 2\}$, $\alpha_*(\cdot)$ — ентропійна розмірність.

Доведення. Очевидно, що функція f є неперервною строго зростаючою. Враховуючи, що для довільного відрізка $\Delta = [a; b]$

$$f(\Delta) = [f_1(a) + f_2(a);\; f_1(b) + f_2(b)],$$

маємо

$$|f_m(\Delta)| < |f(\Delta)| = |f_1(\Delta)| + |f_2(\Delta)|$$

і для всіх $\alpha \in (0; 1]$

$$|f_m(\Delta)|^\alpha \leq |f(\Delta)|^\alpha \leq |f_1(\Delta)|^\alpha + |f_2(\Delta)|^\alpha \leq 2\max\{|f_1(\Delta)|^\alpha, |f_2(\Delta)|^\alpha\}. \tag{9}$$

Якщо $\{\Delta_i\}$ — покриття d_ε-кулями множини G, то $\{f_m(\Delta_i)\}$ є покриттям образу G'. Оскільки $|f_m(\Delta)| < |f(\Delta)|$, то $N_\varepsilon(f_m(G)) \leq N_\varepsilon(f(G))$ і

$$H^\alpha_*(f_m(G)) \leq H^\alpha_*(f(G)).$$

З властивості ентропійної α-міри:

$$H^\alpha_*(B) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha > \alpha_*, \\ \infty & \text{при} \quad \alpha < \alpha_*, \end{cases}$$

де $\alpha_* = \alpha_*(B)$, випливає нерівність (8). □

Наслідок 2. *Якщо f_1 і f_2 неперервні строго зростаючі функції, які зберігають ентропійну розмірність, то функція $f = f_1 + f_2$ її не зменшує.*

Теорема 6. *Для того, щоб неперервна строго зростаюча функція f зберігала ентропійну розмірність будь-якої борелівської множини, необхідно і достатньо, щоб вона зберігала розмірність досконалих ніде не щільних нуль-множин Лебега.*

Доведення. *Необхідність* очевидна. Вона випливає з означення функції, що зберігає ентропійну розмірність, і того, що кожна досконала ніде не щільна нуль-множина Лебега є борелівською.

Достатність (від супротивного). Нехай існує борелівська множина G така, що

$$\alpha_* = \alpha_*(G) \neq \alpha_*(G') = \alpha^*, \quad \text{де} \;\; G' = f(G).$$

Оскільки f — неперервна строго зростаюча функція, то G' є борелівською множиною. Можливі випадки:

$$1.\ \alpha_* < \alpha^*, \qquad 2.\ \alpha_* > \alpha^*.$$

Зупинимось на випадку 1. Розглянемо $\alpha' \in (\alpha_*; \alpha^*)$. За властивістю ентропійної α-міри

$$H_*^{\alpha'}(G') = \infty.$$

Тоді існує [**6**] компактна множина $G'' \subset G$ така, що

$$0 < H_*^{\alpha'}(G'') < \infty,$$

тобто $\alpha_*(G'') = \alpha' < \alpha^* \leq 1$. З того, що $\alpha_*(G'') < 1$ випливає, що G'' — ніде не щільна нуль-множина Лебега. Тоді множина $G_0'' = G'' \setminus I$, де I — множина ізольованих точок G'' (якщо такі існують), є досконалою ніде не щільною нуль-множиною Лебега

$$\alpha_*(G_0'') = \alpha_*(G') = \alpha'.$$

Досконалою і ніде не щільною є множина $G_0 = f^{-1}(G_0'')$, що випливає з строгої монотонності фуекції f. Оскільки $G_0 \subset G$, то $\alpha_*(G_0) \leq \alpha_*$. Тоді

$$\alpha_*(f(G_0)) = \alpha_*(G_0'') = \alpha' > \alpha_*,$$

що суперечить умові, а саме, що f зберігає розмірність.

2. Нехай тепер виконується $\alpha_* > \alpha^*$. Розглянемо $\alpha' \in (\alpha^*, \alpha_*)$. Тоді за властивістю ентропійної α-міри $H_*^{\alpha'}(G) = \infty$ і по згаданій вище причині існує досконала підмножина $\widetilde{G} \subset G$ така, що

$$0 < H_*^{\alpha'}(\widetilde{G}) < \infty, \quad \text{тобто} \quad \alpha_*(\widetilde{G}) = \alpha'.$$

Використовуючи аналогічні вище наведеним міркування, можна отримати протиріччя і в цьому випадку. $\square$

6. Збереження розмірності функцією розподілу випадкової величини з незалежними s-адичними цифрами

Розглядається випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k s^{-k}, \tag{10}$$

де η_k — незалежні випадкові величини, які набувають значень $0, 1, ..., s-1$ з ймовірностями p_{0k}, p_{1k}, ..., $p_{(s-1)k}$ відповідно ($p_{ik} \geq 0$, $p_{0k} + p_{1k} + ... + p_{(s-1)k} = 1$), $k = 1, 2, ...$

Структура і властивості, включаючи фрактальні, розподілів цього класу випадкових величин добре вивчені [**5**].

Теорема 7. [**5**] *Розподіл випадкової величини ξ є чистим, причому*

1) чисто дискретним — тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leq i \leq s-1} \{p_{ik}\} > 0; \tag{11}$$

2) чисто абсолютно неперервним — тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{s-1}(1-sp_{ik})^2<\infty; \tag{12}$$

3) чисто сингулярним — тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток (11) *і ряд* (12) *розбігаються одночасно.*

Наслідок 3. *Якщо s-адичні цифри випадкової величини ξ однаково розподілені (тобто $p_{ik}=p_i$ $\forall k\in N$), то розподіл ξ є чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли $\max\limits_i\{p_i\}=1$; чисто абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли $p_i=\dfrac{1}{s}$, $i=\overline{0,s-1}$, сингулярно неперервним, коли існує $p_i\neq\dfrac{1}{s}$.*

Лема 3. [**5**] *Функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ представляється у вигляді*

$$F_\xi=\beta_{\alpha_1(x)}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k}p_{\alpha_j(x)j}\right],\quad x\in[0;1],$$

де $\alpha_k(x)$ — k-та s-адична цифра x ($\alpha_k(x)\in\{0,1,...,s-1\}$), $\beta_{\alpha_k(x)}=\sum\limits_{i=0}^{\alpha_k(x)-1}p_{ij}$.

Теорема 8. *Для того, щоб функція розподілу випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими s-адичним цифрами зберігала ентропійну розмірність необхідно і достатньо, щоб $p_i=\dfrac{1}{s}$, $i=\overline{0,s-1}$.*

Доведення. *Достатність* очевидна, оскільки при $p_i=\dfrac{1}{s}$ функція розподілу є лінійною: $F_\xi(x)=x$ і задає тотожнє перетворення.

Необхідність доведемо методом від супротивного. Припустимо, що функція $F_\xi(x)$ зберігає ентропійну розмірність і існує $p_i\neq\dfrac{1}{s}$. Оскільки $p_0+p_1+...+p_{s-1}=1$, то, не порушуючи загальності, можна вважати, що $p_i>\dfrac{1}{s}$.

Нехай $j=|i-1|$. Розглянемо множину

$$C=\{x:\ x=\Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots},\ (\alpha_{2k-1}\alpha_{2k})\in\{(i,i),(j,j)\}\ \forall k\in N\}.$$

Множина C є самоподібною [**5**], її самоподібна розмірність співпадає з ентропійною і дорівнює $\alpha_*(C)=\dfrac{1}{2}\log_s 2$.

Множина $C'=F_\xi(C)$ також є самоподібною і її самоподібна (а отже, і ентропійна) розмірність $\alpha_*(C')$ є розв'язком рівняння:

$$p_i^{2x}+p_j^{2x}=1,$$

який при умові, що $p_i\neq\dfrac{1}{s}$, не співпадає з $\dfrac{1}{2}\log_s 2$. Отримане протиріччя доводить необхідність. □

Наслідок 4. *Функція розподілу випадкової велчини ξ з незалежними однаково розподіленими s-адичними цифрами зберігає ентропійну розмірність тоді і тільки тоді, коли вона є абсолютно неперервною.*

Література

[1] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296с.

[2] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. & Dynam. Sys. — 2004, 24. — P. 1-16.

[3] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень R^1, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 4, 2003. — С. 207-215.

[4] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу – 2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — P.77-93.

[5] *Працьовитий М.В., Сотникова С.А.* Перетворення простору R^1, що зберігають самоподібну фрактальну розмірність // Труды Ин-та прикл. матем и мех. Том 13. – Донецк, 2006. – С.142-147.

[6] *Falconer K.J.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — Chichester: Wiley, 1990. — 290p.

[7] *Когония П.Г.* О структуре множества чисел Маркова // Труды Тбилисского математического института. — Т. XIX. — 1953. — С.121-133.

[8] *Hausdorff F.* Dimension und auβeres Maβ // Math. Ann.— 1919.— P.137-154.

[9] *Klein F.* Verschiedene Betrachtung *ü*ber neuere geometrische Forschunden. — Erlangen, 1872. [Російський переклад: Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований // Изв. физ.-мат. о-ва при Казанс. ун-те. — 1986, Т.5].

[10] *Mandelbrot B.* The Fractal geometry of nature. — Freeman and Co, San-Francisco, 1983.

[11] *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 231с.

[12] *Гливенко Е.В.* О мере типа Хаусдорфа // Мат. сб.— 1956. — 39, №4.— С.423-432.