Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 174–189.

УДК 519.21

Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум

І. М. Працьовита
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

Анотація. В даній роботі вивчаються властивості рядів Остроградського 2-го виду. Доводиться, що їх суми є ірраціональними числами. Знайдено деякі співвідношення між членами ряду та виразами, що в ньому фігурують. Описано тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум довільного заданого ряду Остроградського 2-го виду. Доведено, що випадкова неповна сума заданого ряду Остроградського з незалежними доданками має або чисто дискретний, або чисто сингулярний розподіл канторівського типу. Знайдено достатні умови, при яких функція розподілу випадкової неповної суми зберігає фрактальну розмірність.

Abstract. In this paper we study properties of the second Ostrogradsky series. It is proven that sums of such series are irrational. Some relations between terms of the second Ostrogradsky series and other expressions related to the series are found. Metric, topological and fractal properties of sets of incomplete sums of an arbitrary second Ostrogradsky series are described. It is also proven that a random incomplete sum of a given Ostrogradsky series with independent addends has either purely discrete or purely singularly continuous distribution of the Cantor type. Sufficient conditions under which the probability distribution function of a random incomplete sum preserves the fractal dimension are also found.

1. Вступ

В XIX столітті в роботах Дедекінда, Кантора, Вейєрштрасса та інших була створена теорія дійсних чисел. Пізніше була побудована аксіоматична теорія дійсного числа. Сьогодні бурхливо розвиваються ймовірнісна, метрична, ергодична та фрактальна теорії чисел. Загальна аксіоматична теорія дійсних чисел має різні інтерпретації. Різні теорії вивчають окремі її моделі. Це теорія s-кових розкладів [**4**], ланцюгових дробів [**10**], $\widetilde{Q}$-зображень [**4**] тощо [**11**]. В кожній з цих теорій дійсне число "одягається" в ту чи іншу форму, що часто є формально або змістовно зручним при розв'язанні ряду задач. Два алгоритми розкладу чисел в знакозмінні ряди незадовго до смерті розглянув вітчизняний математик М.В.Остроградський, які детально описані в роботах Ремеза ([**8**],[**9**]).

Перший алгоритм Остроградського дозволяє розкласти дійсне число в ряд виду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \ldots q_k} + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 \ldots q_k}, \tag{1}$$

де

$$q_1, q_2, \ldots \in N, \quad q_{k+1} \geq q_k + 1, \ k \in N.$$

За другим алгоритмом числа розкладаються в ряди виду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_k} + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}, \tag{2}$$

де

$$q_k \in N, \quad q_{k+1} \geq q_k(q_k + 1), \quad k \in N.$$

Інтерес до розкладів Остроградського висловлював інший видатний вітчизняний математик Б.В.Гнєденко, в примітках наукового редактора до книги Хінчина "Цепные дроби" [**10**]. Відзначимо, що незалежно від Остроградського до розкладів (1) і (2) прийшов польський математик В.Серпінський [**15**]. Розвинення чисел в ряд (1) вивчав також Пірс [**16**], що обумовило називати в англомовній літературі такі розклади — розкладами Пірса ([**12**], [**13**], [**14**]).

За останнє десятиліття ряди Остроградського 1-го виду інтенсивно вивчались([**1**], [**2**], [**4**], [**5**], [**6**]), що не можна сказати про ряди Остроградського 2-го виду. Незважаючи на деяку візуальну схожість, розклади чисел в ряди Остроградського 1-го та 2-го виду мають принципові відмінності. В першу чергу, це різний алгебраїчний (арифметичний) та геометричний зміст елементів представлення. Ці розклади породжують різні метричні співвідношення, а отже, мають різні метричні теорії. В перспективі ми плануємо детально вивчити ці відмінності і по аналогії з ланцюговими дробами і рядами Остроградського 1-го виду створити теорію розкладів чисел в ряди Остроградського 2-го виду, належну увагу при цьому приділивши геометрії таких представлень, розвинути метричну та ергодичну теорії.

2. Ряди Остроградського 2-го виду

Означення 1. Числовий ряд виду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_k} + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}, \tag{3}$$

де q_k — натуральні числа, причому

$$q_{k+1} \geq q_k(q_k + 1) \quad \forall k \in N, \tag{4}$$

називається *рядом Остроградського 2-го виду.*

Прикладами рядів Остроградського 2-го виду є такі ряди:

$$1)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 7}-\frac{1}{42\cdot 43}+\frac{1}{1806\cdot 1807}-\ldots; \tag{5}$$

$$2)\ \frac{1}{s}-\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^7}-\frac{1}{s^{15}}+\frac{1}{s^{31}}-\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{s^{m_k}}, \tag{6}$$

де $2\le s\in N$, $m_1=1$, $m_k=2m_{k-1}+1$;

$$3)\ \frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2^4\cdot 3}+\frac{1}{2^8\cdot 3^8}-\frac{1}{2^8\cdot 3^{32}}+\frac{1}{2^{64}\cdot 3^{64}}-\frac{1}{2^{256}\cdot 3^{64}}+\ldots; \tag{7}$$

$$4)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{59}-\frac{1}{3541}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{p_k}, \tag{8}$$

де $\{p_k\}$ — нескінченна послідовність простих чисел така, що

$$p_1=2,\quad p_2=7,\quad p_3=59,\ \ldots,$$

p_k — найменше просте число таке, що $p_k\ge p_{k-1}(p_{k-1}+1)$.

Зауваження 1. *Існують ряди Остроградського 1-го виду, які не є рядами Остроградського 2-го виду і навпаки.*

Справді, ряд Остроградського 1-го виду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...$$

не є рядом Остроградського 2-го виду, оскільки не виконується умова (4).

Прикладом ряду Остроградського 2-го виду, що не є рядом Остроградського 1-го виду, є ряд (8).

Лема 1. *Ряд Остроградського 1-го виду* (1) *є рядом Остроградського 2-го виду* (3) *тоді і тільки тоді, коли для довільного $k\in N$ виконується нерівність*

$$q_{k+1}\ge q_1...q_k+1. \tag{9}$$

Доведення. Справді, якщо ряд Остроградського 1-го виду (1) задовольняє умову (9), то він, очевидно є рядом Остргградського 2-го виду згідно з означенням.

Якщо ж принаймні для одного значення k нерівність (9) не виконується, то порушується вимога означення і ряд не є рядом Остроградського 2-го виду. □

З умови (4) легко отримуються наступні наслідки.

Лема 2. *Для довільного ряду Остроградського 2-го виду* (2) *і будь-якого натурального числа n мають місце співвідношення:*

1. $q_n\ge n!$, *причому* $q_n>n!$ *при* $n\ge 4$;
2. $q_{n+1}\ge q_nq_{n-1}\ldots q_2q_1(q_1+1)+q_n\ldots q_2+\ldots+q_nq_{n-1}+q_n$;
3. $q_{n+2}>q_2^{2^n}>q_1^{2^{n+1}}$;
   $q_{n+2}>{q_2}^{2^n}\ge 2^{2^n}$.

4. $\dfrac{q_n}{q_{n+1}} \le \dfrac{1}{q_n+1} \le \dfrac{1}{q_n} - \dfrac{1}{q_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n}$;

5. $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{q_i} < \dfrac{2}{q_{n+1}}$;

6. $\dfrac{q_1 \dots q_n}{q_{n+1}} \le \dfrac{1}{q_1+1+\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_1q_2}+\dots+\dfrac{1}{q_1\dots q_{n-1}}} < \dfrac{1}{q_1+1}$.

Доведення. Твердження 1 є очевидним.

Твердження 2 є наслідком наступних індуктивних міркувань:

$$\begin{cases} q_2 \ge q_1(q_1+1) = q_1^2+q_1 \ge q_1^2+1 \ge q_1^2; \\ q_3 \ge q_2(q_2+1) = q_2^2+q_2 \ge q_2q_1(q_1+1)+q_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{k+1} \ge q_k(q_k+1) \ge q_kq_{k-1}\dots q_2q_1(q_1+1)+q_k\dots q_2+\dots+q_kq_{k-1}+q_k. \end{cases}$$

Твердження 3 є наслідком твердження 2.

Перша з нерівностей 4 випливає з наступних міркувань

$$\frac{1}{q_n+1} - \frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - {q_n}^2 - q_n}{(q_n+1)q_{n+1}} \ge 0.$$

Друга з нерівностей 4 випливає з таких співвідношень:

$$\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_n+1} = \frac{q_n+1-q_n}{q_n(q_n+1)} = \frac{1}{q_n(q_n+1)} \ge \frac{1}{q_{n+1}};$$

$$\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n+1}} \ge \frac{1}{q_n+1}.$$

Доведемо твердження 5:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \le \frac{1}{q_{n+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{n+i}(q_{n+i}+1)} < \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{n+i}+1} \le$$

$$\le \frac{1}{q_{n+1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{n+i}}\right) < \frac{1}{q_{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \le \frac{1}{q_{n+1}}(e-1) \le \frac{2}{q_{n+1}}.$$

Твердження 6 випливає з наступних міркувань

$$\frac{q_1 \cdots q_n}{q_{n+1}} \le \frac{q_1 \cdots q_n}{q_n(q_n+1)} = \frac{q_1 \cdots q_{n-1}}{q_n+1} \le$$

$$\le \frac{q_1 \cdots q_{n-1}}{q_{n-1}(q_{n-1}+1)+1} = \frac{q_1 \cdots q_{n-2}}{q_{n-1}+1+\frac{1}{q_{n-1}}} \le$$

$$\le \frac{q_1 \cdots q_{n-2}}{q_{n-2}(q_{n-2}+1)+1+\frac{1}{q_{n-1}}} = \frac{q_1 \cdots q_{n-3}}{q_{n-2}+1+\frac{1}{q_{n-2}}+\frac{1}{q_{n-2}q_{n-1}}}.$$

Далі по індукції за $n-3$ кроки отримуємо першу з нерівностей 6. Друга нерівність є очевидною.

□

Наслідок 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q_n}{q_{n+1}} = 0.$

Зауваження 2. *Кожен ряд Остроградського 2-го виду є абсолютно збіжним.*

Справді, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{q_n}$ з модулів членів ряду (3) є збіжним згідно з ознакою Даламбера збіжності знакододатних рядів:

$$\frac{1}{q_{n+1}} : \frac{1}{q_n} = \frac{q_n}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Сума S ряду Остроградського (3) згідно з теоремою Лейбніца про збіжність знакозмінних рядів не перевищує $\frac{1}{q_1}$. Більше того, має місце наступне твердження.

Лема 3. *Всі часткові суми*

$$S_n = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n}$$

ряду Остроградського (3) *є додатними, причому:*

1) часткові суми парного порядку є меншими його суми S і утворюють зростаючу послідовність;

2) часткові суми непарного порядку є більшими S і утворюють спадну послідовність, тобто

$$0 < S_{2k} < S_{2k+2} < S < S_{2k+1} < S_{2k-1}.$$

Доведення. Оскільки ряд (3) можна переписати у вигляді

$$\frac{q_2-q_1}{q_1q_2} + \frac{q_4-q_3}{q_3q_4} + \ldots + \frac{q_{2k}-q_{2k-1}}{q_{2k-1}q_{2k}} + \ldots$$

і

$$\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{q_{n+1}-q_n}{q_nq_{n+1}} \geq \frac{q_n}{q_{n+1}} > 0, \quad \forall n \in N,$$

то $S_n > 0$ для довільного n.

Більше того,

$$S > S_{2k+2} = \frac{q_2-q_1}{q_1q_2} + \frac{q_4-q_3}{q_3q_4} + \ldots + \frac{q_{2k}-q_{2k-1}}{q_{2k-1}q_{2k}} + \frac{q_{2k+2}-q_{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k+2}} =$$

$$= S_{2k} + \frac{q_{2k+2}-q_{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k+2}} \geq S_{2k} + \frac{q_{2k+1}}{q_{2k+2}} > S_{2k};$$

$$S < S_{2k+1} = S_{2k-1} - \left(\frac{1}{q_{2k}} - \frac{1}{q_{2k+1}}\right) = S_{2k-1} - \frac{q_{2k+1}-q_{2k}}{q_{2k}q_{2k+1}} < S_{2k-1}.$$

□

Лема 4. *Якщо S — сума ряду Остроградського* (3), *то $q_1 = [\frac{1}{S}]$ – ціла частина числа $\frac{1}{S}$.*

Доведення. Досить показати, що

$$q_1 \leq \frac{1}{S} < q_1 + 1. \tag{10}$$

Як уже зазначалось, згідно з теоремою Лейбніца, $S \leq \frac{1}{q_1}$. Більше того, оскільки

$$\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n} + \ldots > 0,$$

то $S < \frac{1}{q_1}$. Тому $\frac{1}{S} > q_1$.

Тепер доведемо праву з нерівностей (10). Оскільки

$$S > \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{q_2 - q_1}{q_1 q_2} \geq \frac{q_1}{q_2} > 0,$$

то

$$\frac{1}{S} < \frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1},$$

$$\frac{1}{S} < \frac{q_1}{1 - \frac{q_1}{q_2}} < \frac{q_1}{1 - \frac{q_1}{q_1+1}} = q_1 + 1,$$

що й вимагалось довести. Отже, $[\frac{1}{S}] = q_1$. □

Наслідок 2. *Ціла частина* $\left[\dfrac{1}{\frac{1}{q_k} - \frac{1}{q_{k+1}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n} + \ldots}\right] = q_k.$

3. Ірраціональність суми ряду Остроградського 2-го виду

Теорема 1. *Сума S ряду Остроградського другого виду є ірраціональним числом.*

Доведення. Скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що сума S ряду Остроградського (3) є числом раціональним, тобто $S = \frac{m}{n}$, де $m \in N$, $n \in N$. Оскільки $S \in (0;1)$, то дріб $\frac{m}{n}$ є правильним ($m < n$). Тоді додатне число

$$r_1 = \frac{1}{q_1} - S = \frac{1}{q_1} - \frac{m}{n} = \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3} + \ldots$$

теж є раціональним. Більше того

$$r_k = \frac{1}{q_{k+1}} - \frac{1}{q_{k+2}} + \ldots$$

є додатним раціональним числом при довільному $k \in N$. Нехай

$$r_k = \frac{m_k}{n_k}, \quad m_k \in N, \quad n_k \in N.$$

Якщо $\frac{m_1}{n_1}$ – нескоротний дріб, що дорівнює r_1, то

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{q_1} - \frac{m}{n} = \frac{n - q_1 m}{q_1 n}, \quad m_1 \leq n - q_1 m. \tag{11}$$

Очевидно, що для цілої частини числа $[\frac{n}{m}]$ мають місце нерівності

$$\frac{n}{m} - 1 < \left[\frac{n}{m}\right] \leq \frac{n}{m},$$

а отже,

$$0 = n - m\frac{n}{m} \leq n - m\left[\frac{n}{m}\right] < n - m\left(\frac{n}{m} - 1\right) = m.$$

Оскільки $r_1 = \frac{m_1}{n_1} \neq 0$, а ціла частина $\left[\frac{n}{m}\right]$ згідно з лемою 3 дорівнює q_1, то

$$0 < n - m\left[\frac{n}{m}\right] = n - q_1 m < m.$$

Отже, враховуючи (11), отримуємо $m_1 < m$, тобто чисельник нескоротного дробу $\frac{m_1}{n_1}$ менший за m. Аналогічно міркуючи стосовно нескоротного дробу

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{1}{q_2} - \frac{m_1}{n_1} > 0,$$

отримаємо $m_2 < m_1$ і т.д.

$$\frac{m_k}{n_k} = \frac{1}{q_k} - \frac{m_{k-1}}{n_{k-1}} > 0, \quad m_k < m_{k-1} \quad \forall k \in N.$$

Але існує лише скінченне число натуральних чисел, менших від m. Тому отримали суперечність з тим, що $m_k \in N$ для всіх натуральних k. □

4. Множина неповних сум ряду Остроградського

Нехай M — підмножина множини N натуральних чисел. Розглянемо довільний фіксований ряд Остроградського (3).

Означення 2. Число

$$x = x(M) = \sum_{k \in M \subset N} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}$$

називається *неповною сумою ряду Остроградського* (3).

Іншими словами, кожне число

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k}, \tag{12}$$

де $a_k \in \{0, 1\}$, називається *неповною сумою ряду* (3). Число x і його вираз (12) формально зображатимемо $\Delta_{a_1 \ldots a_k \ldots}$.

Зрозуміло, що всі часткові суми S_n і залишки

$$\sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}$$

ряду Остроградського (3) є його неповними сумами. Але не лише вони. Неповними сумами також є

$$d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2i-1}} \quad \text{і} \quad b = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2i}}.$$

Очевидно, що d є найбільшою неповною сумою, а b — найменшою.

Означення 3. Множина

$$C = \left\{ x = \sum_{k \in M \subset N} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}, \quad M \in \sigma(N) \right\},$$

де $\sigma(N)$ — множина всіх підмножин множини N (буліан множини N), називається *множиною неповних сум ряду Остроградського* (3).

Оскільки послідовність $\{a_k\}$ (див. рівність (12)) пробігає всю множину $A \times A \times \ldots$, де $A = \{0, 1\}$, то очевидно, що C є континуальною множиною. З метою вивчення топологічних, метричних і фрактальних властивостей множини C неповних сум ряду Остроградського (3), розглянемо циліндричні множини і деякі їх властивості.

Нехай c_1, c_2,..., c_m — фіксований набір нулів та одиниць.

Означення 4. *Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$* (це символічно позначатимемо: $\Delta'_{c_1 \ldots c_m}$) називається множина всіх неповних сум, які мають зображення

$$\Delta_{c_1 \ldots c_m a_{m+1} \ldots a_{m+j} \ldots}, \quad a_{m+j} \in \{0, 1\}, \quad j \in N.$$

Очевидно, що

$$\Delta'_{c_1 \ldots c_m} = \Delta'_{c_1 \ldots c_m 0} \cup \Delta'_{c_1 \ldots c_m 1}.$$

Означення 5. *Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$* (символічно: $\Delta_{c_1 \ldots c_m}$) називається відрізок, кінці якого є відповідно нижньою і верхньою гранями циліндра $\Delta'_{c_1 \ldots c_m}$, тобто

$$\Delta_{c_1 \ldots c_m} = \left[s_m - \sum_{i: 2i > m} \frac{1}{q_{2i}}; s_m + \sum_{i: 2i-1 > m} \frac{1}{q_{2i-1}} \right] = [-b + u_m; d - v_m],$$

де

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} c_k}{q_k},$$

$$u_m = \sum_{i: 2i-1 \le m} \frac{c_{2i-1}}{q_{2i-1}} + \sum_{i: 2i \le m} \frac{1 - c_{2i}}{q_{2i}},$$

$$v_m = \sum_{i: 2i-1 < m} \frac{1 - c_{2i-1}}{q_{2i-1}} + \sum_{i: 2i \le m} \frac{c_{2i}}{q_{2i}}.$$

Лема 5. *Циліндричні множини мають властивості:*

1. $\Delta'_{c_1 \ldots c_m} \subset \Delta_{c_1 \ldots c_m}$;

2. $\Delta_{c_1 \ldots c_m} = \Delta_{c_1 \ldots c_m 0} \bigcup \Delta_{c_1 \ldots c_m 1}$;

3. $|\Delta_{c_1 \ldots c_m}| = \operatorname{diam}(\Delta'_{c_1 \ldots c_m}) = d + b - \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{q_k} = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{q_k} < \frac{2}{q_{m+1}} \to 0 \ (m \to \infty)$;

4. $\Delta_{c_1 \ldots c_m 0} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_m 1} = \text{O}$;

5. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \ldots c_m} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1 \ldots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1 \ldots c_m \ldots}$;

6. $C = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\substack{c_i \in A,\\ i=\overline{1,m}}} \Delta_{c_1\ldots c_m}$, $A = \{0,1\}$.

Теорема 2. *Множина* C *неповних сум ряду Остроградського 2-го виду є:*
1) ніде не щільною;
2) досконалою;
3) нуль-множиною Лебега;
4) множиною нульової розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

Доведення. 1. Перше твердження випливає з попередньої леми, а саме властивостей циліндричних множин 3, 4 та 6.

2. Якщо x — гранична точка множини неповних сум C, то для довільного k знайдеться циліндричний відрізок $\Delta_{c_1\ldots c_k}$, який містить x, оскільки в протилежному випадку x належав би до одного із суміжних циліндричних інтервалів і існувало б $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \cap C = \mathrm{O}^{\cdot}$$

А це суперечить тому, що x — гранична точка множини C. Переріз $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_k}$ містить єдину точку, яка належить C і співпадає з x. Отже, C — замкнена множина.

Припустимо, що C містить ізольовані точки, $x = \Delta_{a_1\ldots a_k\ldots}$ — одна з них. Тоді, за означенням ізольованої точки, існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \cap [C \setminus \{x\}] = \mathrm{O}^{\cdot} \tag{13}$$

Виберемо k таким великим, щоб $|\Delta_{a_1\ldots a_k}| < \varepsilon$ (це завжди можна зробити в силу леми 3, властивість 3). Тоді

$$\Delta_{a_1\ldots a_k} \subset (x-\varepsilon; x+\varepsilon)$$

і

$$x \neq x' = \Delta_{a_1\ldots a_k(1-a_{k+1})a_{k+2}a_{k+3}\ldots} \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon),$$

що суперечить (13). Отже, C — замкнена множина, яка не має ізольованих точок, тобто є досконалою за означенням.

3. З леми 5 (властивостей 6 і 3) випливає, що міра Лебега множини C обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \lim_{m\to\infty} 2^m \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \right).$$

За лемою 5 (властивості 5 і 3) маємо

$$\lambda(C) \leq \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m+1}}{q_{m+1}} < 2^2 \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m-1}}{q_2^{2^{m-1}}} = 0.$$

4. Усі циліндричні відрізки рангу m утворюють покриття множини неповних сум C. Тоді α-об'єм цього покриття виражається наступним чином

$$l_m^\alpha(C) = 2^m \cdot \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{q_k}\right)^\alpha$$

За лемою 5 (властивість 5)

$$l_m^\alpha(C) < 2^m \left(\frac{2}{q_{m+1}}\right)^\alpha.$$

Враховуючи порядок росту елементів q_k (лема 5, властивість 3), маємо:

$$l_m^\alpha(C) < 2^\alpha \cdot \frac{2^m}{(q_2^{2^{m-1}})^\alpha} = 2^{\alpha+2} \cdot \frac{2^{m-2}}{(q_2^{2\alpha})^{2^{m-2}}}.$$

Оскільки $q_2^{2\alpha} > 1$ для довільного α і

$$\frac{2^x}{a^{2^x}} \to 0 \quad (x \to \infty) \quad \text{при} \quad a > 1,$$

то

$$\frac{2^{m-2}}{(q_2^{2\alpha})^{2^{m-2}}} \to 0 \quad (m \to \infty),$$

а отже,

$$\lim_{m\to\infty} l_m^\alpha(C) = 0$$

для довільного α, що й вимагалось довести. □

5. Випадкова неповна сума заданого ряду Остроградського 2-го виду з незалежними доданками

Нехай (3) — фіксований ряд Остроградського другого виду. Розглянемо випадкову величину

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{q_k}, \tag{14}$$

де $\{\tau_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1, причому

$$\mathbb{P}\{\tau_k = 0\} = p_{0k} \geq 0, \quad \mathbb{P}\{\tau_k = 1\} = p_{1k} \geq 0, \quad p_{0k} + p_{1k} = 1.$$

Згідно з теоремою Джессена-Вінтнера [**4**], випадкова величина X має чисто дискретний, чисто сингулярний або чисто абсолютно неперервний (відносно міри Лебега) розподіл.

Теорема 3 (наслідок з теореми П.Леві). *Для того, щоб випадкова величина X мала дискретний розподіл, необхідно і достатньо, щоб*

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Наслідок 3. *Для того, щоб випадкова величина X мала неперервний розподіл, необхідно і достатньо, щоб $M = 0$.*

Означення 6. *Спектром S_X розподілу випадкової величини X* називається множина всіх точок росту її функції розподілу F_X, тобто мінімальна замкнена множина, на якій зосереджений розподіл X:

$$S_X = \{x : F_X(x+\varepsilon) - F_X(x-\varepsilon) > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\} =$$
$$= \{x : \mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\}$$

Якщо $p_{ik} > 0$ для всіх $i \in \{0,1\}$ і $k \in N$, то спектр S_X співпадає з множиною всіх неповних сум ряду Остроградського (3).

Лема 6. *Спектром розподілу випадкової величини X є множина*

$$E = \{x : x = \triangle_{a_1 \ldots a_k \ldots}, \quad p_{a_k k} > 0 \ \ \forall k \in N\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_X$. Нехай $\triangle_{a_1 \ldots a_k \ldots} = x \in E$. Тоді

$$\mathbb{P}\{X \in \triangle_{a_1 \ldots a_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{a_i i} > 0 \ \ \forall k \in N.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує k таке, що

$$\triangle_{a_1 \ldots a_k} \subset (x-\varepsilon; x+\varepsilon).$$

Тому

$$\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} \geq \mathbb{P}\{X \in \triangle_{a_1 \ldots a_k}\} > 0,$$

тобто $x \in S_X$ і $E \subset S_X$.

2. Покажемо тепер, що $S_X \subset E$. Нехай $x \in S_X$, тобто

$$\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0. \tag{15}$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{a_k k} = 0$. Тоді

$$\mathbb{P}\{X \in \triangle_{a_1 \ldots a_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{a_i i} = 0.$$

Розглянемо довільне x таке, що $x = \triangle_{a_1 \ldots a_k \ldots}$. Можливі випадки:

1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \subset \triangle_{a_1 \ldots a_k}$;

2) $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \not\subset \triangle_{a_1 \ldots a_k}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку

$$\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} \leq \mathbb{P}\{X \in \triangle_{a_1 \ldots a_k}\} = 0,$$

що суперечить (15).

У другому випадку x є односторонньо граничною точкою множини C. Для конкретності, нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$(x-\varepsilon; x) \subset \triangle_{a_1 \ldots a_k}, \quad \mathbb{P}\{X \in (x; x+\varepsilon)\} = 0.$$

І в цьому випадку

$$\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} = \mathbb{P}\{X \in \triangle_{a_1 \ldots a_k}\} = 0,$$

що суперечить умові (15). Отримана суперечність доводить, що $p_{a_k k} > 0$ для довільного $k \in N$, тобто $x \in E$.
Отже, $S_X = E$, що й вимагалось довести. □

Теорема 4. *Якщо $M = 0$, то розподіл X є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром.*

Доведення. При $M = 0$ розподіл, згідно з наслідком з теореми 3, є неперервним. Оскільки $S_X = E \subset C$, то S_X, як і C, є аномально фрактальною множиною. Оскільки міра Лебега $\lambda(C) = 0$, то і $\lambda(S_X) = 0$. Отже, X має канторівський сингулярний розподіл, що й вимагалось довести. □

6. Функція розподілу випадкової неповної суми ряду Остроградського другого виду з незалежними доданками

Спочатку розглянемо випадок, коли X має дискретний розподіл ($M > 0$). Нехай

$$x^* = \triangle_{a'_1 \ldots a'_k \ldots},$$

де

$$\{a'_k\} := \{i : p_{ik} \geq p_{(1-i)k}\}.$$

Очевидно, що x^* є атомом розподілу X, оскільки

$$\mathbb{P}\{X = x^*\} = M > 0.$$

Більше того, x^* є атомом з найбільшою "масою" (ймовірністю). Інші атоми відрізняються від x^* лише скінченною кількістю символів a_k. Точніше, x є атомом розподілу випадкової величини X тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} x & = & \triangle_{a_1 \ldots a_k \ldots}, \\ p_{a_k k} & > & 0 \quad \forall k \in N, \\ a_k & = & a'_k, \quad k > m. \end{cases}$$

Якщо x — атом розподілу X, причому $a_k(x) = a'_k$ при $k > m$, то

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \prod_{k=1}^{m} p_{a_k(x)k} \prod_{k=1}^{m+1} p_{a'_k k} = M \prod_{k=1}^{m} \frac{p_{a_k(x)k}}{p_{a'_k k}}$$

і функція розподілу

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x' < x, \\ x' \in E}} \mathbb{P}\{X = x'\}.$$

Якщо x_0 не належить спектру S_X, то $F_X(x_0) = F_X(\overline{x})$, де $\overline{x} = \sup\{x : \ x \in E, \ x \leq x_0\}$.

Розглянемо тепер випадок неперервності розподілу X, тобто $M = 0$.

Лема 7. *В точці* $\triangle_{a_1 \ldots a_k \ldots} = x \in S_X$ *функція розподілу* F_X *випадкової величини* X *виражається формулою:*

$$F_X(x) = \beta_{a_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{a_k k} \prod_{j=1}^{k-1} P_{a_j j} \right], \tag{16}$$

де при непарному k

$$\beta_{a_k k} = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad a_k = 0, \\ p_{0k}, & \textit{якщо} \quad a_k = 1; \end{cases}$$

і при парному k

$$\beta_{a_k k} = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad a_k = 1, \\ p_{1k}, & \textit{якщо} \quad a_k = 0. \end{cases}$$

Доведення. Подія $\{X < x\}$ має вираз

$$\{X < x\} = \{\tau_1 < a_1\} \bigcup \{\tau_1 = a_1, \tau_2 > a_2\} \bigcup \{\tau_1 = a_1, \tau_2 = a_2, \tau_3 < a_3\} \bigcup \ldots$$
$$\bigcup \{\tau_1 = a_1, \tau_2 = a_2, \ldots, \tau_{k-1} = a_{k-1}, \tau_k \vee a_k\} \bigcup \ldots,$$

де знак $\vee$ має такий зміст:

$$\vee = \begin{cases} >, & \text{якщо} \quad k = 2n, \ n \in N, \\ <, & \text{якщо} \quad k = 2n-1, \ n \in N. \end{cases}$$

Тоді

$$\mathbb{P}\{X < x\} = \mathbb{P}\{\tau_1 < a_1\} + \mathbb{P}\{\tau_1 = a_1, \tau_2 > a_2\} + \mathbb{P}\{\tau_1 = a_1, \tau_2 = a_2, \tau_3 < a_3\} + \ldots +$$
$$+ \mathbb{P}\{\tau_1 = a_1, \tau_2 = a_2, \ldots, \tau_{k-1} = a_{k-1}, \tau_k \vee a_k\} + \ldots \ .$$

Оскільки події $\tau_i = a_i, \tau_j = a_j$ і $\tau_k \vee a_k$ є незалежними, то

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = a_1, \tau_2 = a_2, \ldots, \tau_{k-1} = a_{k-1}, \tau_k \vee a_k\} =$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\{\tau_i = a_i\} \right) \cdot \mathbb{P}\{\tau_k \vee a_k\} = \beta_{a_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j j}.$$

Отже, функція розподілу $F_x(x) = \mathbb{P}\{X < x\}$ виражається у формі (16). Лему доведено. □

Теорема 5. *Функція розподілу* F_X *випадкової величини* X *виражається*

$$F_X(x) = F_X(\overline{x}),$$

де

$$\overline{x} = \sup\{u : \ u < x, \ u \in S_X\}.$$

Теорема 5 випливає з леми 7 і означення функції розподілу.

7. Збереження фрактальної розмірності

Локальні властивості сингулярно неперервного розподілу характеризуються властивістю його функції розподілу зберігати чи змінювати фрактальні властивості підмножин спектра, що коректно виражається в термінах розмірності Хаусдорфа.

Нагадаємо, що *α-мірною мірою Хаусдорфа-Біллінгслі множини E відносно міри μ* називається число

$$\widehat{H}^{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\inf_{\mu(u_i) \leq \varepsilon} \left\{ \sum_i \mu^{\alpha}(u_i), \bigcup_i u_i \supset E \right\} \right),$$

де інфімум береться за всеможливими покриттями $\{u_i\}$ множини E відрізками u_i, для яких $\mu(u_i) \leq \varepsilon$. Число

$$\alpha_{\mu} = \alpha_{\mu}(E) = \inf\{\alpha : \widehat{H}^{\alpha}(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \widehat{H}^{\alpha}(E) \neq 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа-Біллінгслі множини E відносно міри μ*.

Кажуть, що функція розподілу $F(x)$ *зберігає фрактальну розмірність*, якщо розмірність Хаусдорфа-Біллінгслі $\alpha_{\overline{\mu}}(\cdot)$ довільної підмножини E спектра розподілу S_X і розмірність Хаусдорфа-Безиковича її образу $E' = F(E)$ співпадають, тобто

$$\alpha_{\overline{\mu}}(E) = \alpha_0(E'),$$

де $\overline{\mu}$ — міра, що відповідає рівномірному розподілу на S_X.

Нехай X — випадкова величина, означена рівністю (14). Якщо $p_{ik} > 0$ для всіх $i \in \{0; 1\}$ та $k \in N$, то $S_X = C$ і

$$\mu\{(-\infty; x]\} = F_{X_0}(x), \quad \text{де} \quad X_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\varepsilon_k}{q_k}, \quad \mathbb{P}\{\varepsilon_k = i\} = p_{ik} = \frac{1}{2}$$

для всіх $i \in \{0; 1\}$ та $k \in N$.

Теорема 6. *Якщо*

$$\lim_{k \to \infty} p_{0k} = \frac{1}{2}, \tag{17}$$

то функція розподілу F_X випадкової величини X, означеної рівністю (14), *зберігає фрактальну розмірність.*

Доведення. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $p_{ik} > 0$. Нехай μ_X — ймовірнісна міра, що відповідає розподілу випадкової величини X, $\overline{\mu}(\cdot)$ — міра, що відповідає рівномірному розподілу на S_X.

Тоді

$$\mu_X(\triangle_{c_1 \ldots c_m}) = \mathbb{P}\{X \in \triangle_{c_1 \ldots c_m}\} = \prod_{i=1}^{m} p_{c_i i} = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{2} \tau_{c_i i} \right),$$

де $\tau_{c_i i} = 2p_{c_i i}$.

З рівності (17) маємо

$$\tau_{c_i i} \to 1 \quad (i \to \infty) \quad \text{і} \quad \lim_{i\to\infty} \ln(\tau_{c_i i}) = 0. \tag{18}$$

для довільної послідовності $\{c_i\}$, $c_i \in \{0,1\}$.

Тоді

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln \mu_X(\triangle_{c_1\ldots c_m})}{\ln \overline{\mu}(\triangle_{c_1\ldots c_m})} = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln \prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i i}}{\ln 2^{-m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \ln p_{c_i i}}{-m\ln 2} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\ln 2^{-m} + \sum\limits_{i=1}^{m} \ln \tau_{c_i i}}{-m \ln 2} = 1 + \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \ln \tau_{c_i i}}{-\ln 2}.$$

Враховуючи (18), маємо

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \ln \tau_{c_i i} = 0.$$

Тому

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln \mu_X(\triangle_{c_1\ldots c_m})}{\ln \overline{\mu}(\triangle_{c_1\ldots c_m})} = 1 \tag{19}$$

для довільного $x \in S_X$.

Для циліндричного зображення чисел і розмірності Хаусдорфа-Біллінгслі має місце аналог теореми Біллінгслі: якщо ν_1, ν_2 — неперервні ймовірнісні міри і

$$E \subset E_0 = \left\{ x : \lim_{m\to\infty} \frac{\ln \nu_1(\triangle_{c_1\ldots c_m})}{\ln \nu_2(\triangle_{c_1\ldots c_m})} = \delta \right\},$$

то $\alpha_{\nu_2}(E) = \delta\alpha_{\nu_1}(E)$. Тому враховуючи рівність (14), $\alpha_{\overline{\mu}}(E) = 1 \cdot \alpha_{\mu_X}(E)$. Отже, F_X зберігає фрактальну розмірність. $\square$

Література

[1] *Барановський О.М.* Задання ніде не диференційовних функцій за допомогою представлення чисел рядами Остроградського // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: Ін-т математики НАН України; НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — №2. — С. 215-221.

[2] *Барановський О.М.* Ряди Остроградського як засіб аналітичного задання множин і випадкових величин // Фрактальний аналіз та суміжні питання.— Київ: Ін-т математики НАН України; НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — №1. — С.91-102.

[3] *Працьовитий М.В.* Геометрія чисел, представлених знакозмінними рядами за допомогою другого алгоритму Остроградського // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Вип.2. — К.:НПУ імені М.П.Драгоманова , 1998. — С. 159-164.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296с.

[5] *Працьовитий М.В., Барановський О.М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2004. — №70. — С. 131-144.

[6] *Працьовитий М.В., Барановський О.М.* Використання рядів Остроградського для аналітичного задання розподілів випадкових величин і відображень // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С. 59-76.

[7] *Працьовитий М.В., Барановський О.М.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2004. — №5. — С. 217-227.

[8] *Ремез Е.Г.* О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М.В.Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи математических наук. — 1951. — Т. 6, №5(45). — С. 33-42.

[9] *Ремез Е.Г.* О математических рукописях академика М.В.Остроградского // Историко-математические исследования. — Москва: Гостехтеоретиздат, 1951. — С. 9-98.

[10] *Хинчин А.Я.* Цепные дроби.— Москва: Физматгиз, 1978. — 112 с.

[11] *Schweiger F.* Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory. — New York: Oxford Univ. Presas., 1995.

[12] *Shallit J.O.* Metric theory of Pierce expansions // Fibonacci Quart. — 1986. — Vol. 24, no. 1. — P. 22-40.

[13] *Shallit J.O.* Pierce expansions and rules for the determination of leap years // Fibonacci Quart. — 1994. — Vol. 32, no. 5. — P. 416-423.

[14] *Shallit J.O.* Some predictable Pierce expansions // Fibonacci Quart. — 1984. — Vol. 22, no. 4. — P. 332-335.

[15] *Sierpinski W.* Sur quelques algorithms pour developper les numbers reels en series // Oeuvres choisies, tm. I, PWN, Warsawa, 1974. — P. 236-254.

[16] *Pierce T.A.* On an algorithm and its use in approximating roots of algebraic equations // Amer. Math. Monthly. — 1929. — Vol. 36. — P. 523-525.