Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 160–167.

Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій

О. Б. Панасенко

(Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського)

Анотація. Розглянуто клас однопараметричних неперервних функцій, кожна з яких задається як гранична функція деякої функціональної послідовності. Досліджено умови ніде не диференційовності функцій з цього класу, а також деякі фрактальні властивості їх графіків.

Abstract. A one-parameter class of continuous functions, each of those is defined as a limit function of some functional sequence, was considered. The conditions of nowhere differentiability and also some fractal properties of their graphs are investigated in this article.

1. Вступ

Після того, як в 1872 році Карл Вейєрштрасс представив Берлінській академії наук приклад неперервної ніде не диференційовної функції, багато математиків зосередили свою увагу на пошуку нових неперервних функцій, які ніде не мають похідної. На сьогоднішній день відомо чимало прикладів неперервних недиференційовних функцій [**1, 2**], зокрема функції Такаґі, ван дер Вардена, а також їхні узагальнення [**3, 4**]. Засоби теорії фракталів, що розвивається швидкими темпами, дають певний інструментарій для дослідження локальних властивостей таких функцій.

Об'єктом дослідження в даній роботі є клас однопараметричних неперервних функцій, який будується в наступний спосіб [**5**]. Передусім зафіксуємо параметр $a \in (0, 1)$. На відрізку $[0, 1]$ означимо наступним чином по індукції послідовність неперервних числових функцій $(f_n(x))$. Нехай $f_0(x) = x$, а для будь-якого натурального n функція $f_n(x)$ є лінійною на кожному з відрізків виду $\left[\frac{k}{3^n}; \frac{k+1}{3^n}\right]$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, причому мають місце рівності:

- $f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)$

- $f_{n+1}\left(\dfrac{3k+1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\dfrac{k}{3^n}\right) + a\left(f_n\left(\dfrac{k+1}{3^n}\right) - f_n\left(\dfrac{k}{3^n}\right)\right)$
- $f_{n+1}\left(\dfrac{3k+2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\dfrac{k}{3^n}\right) + (1-a)\left(f_n\left(\dfrac{k+1}{3^n}\right) - f_n\left(\dfrac{k}{3^n}\right)\right)$
- $f_{n+1}\left(\dfrac{k+1}{3^n}\right) = f_n\left(\dfrac{k+1}{3^n}\right), \quad$ для $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$.

Нехай

$$F_a(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Нижче ми покажемо, що $F_a(x)$ — неперервна на відрізку $[0,1]$ функція.

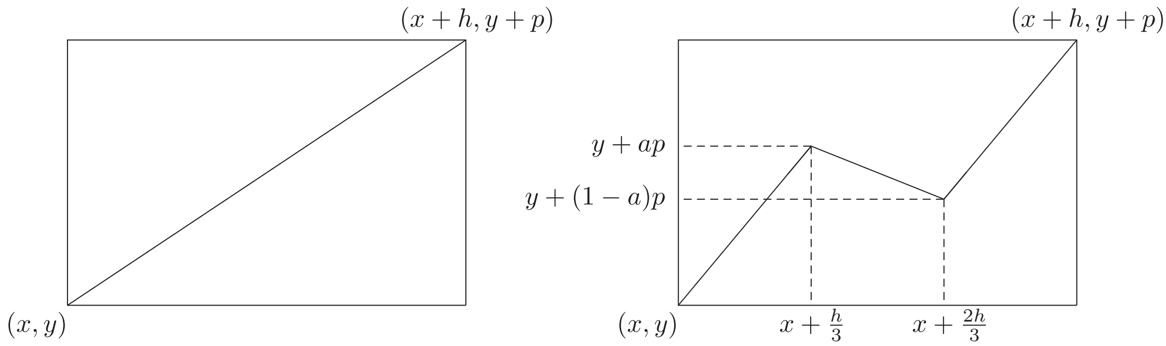

Рис. 1. Операція переходу від функції f_n (ліворуч) до f_{n+1} (праворуч) на кожному з відрізків виду $\left[\frac{k}{3^n}; \frac{k+1}{3^n}\right]$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$

Для деяких конкретних a, $F_a(x)$ набуває вигляд функцій, що вивчались раніше. Наприклад, якщо $a = \frac{5}{6}$, то $F_a(x)$ — це приклад ніде не диференційовної функції Перкінса (Perkins) [**6**]. Якщо $a = \frac{2}{3}$, то $F_a(x)$ є прикладом ніде не диференційовної функції Бурбакі [**7**, с. 28]. Крім Бурбакі, до аналогічного прикладу ніде не диференційовної функції дійшов Катсуура (Katsuura) [**8**], щоправда він використав інший підхід для задання цієї функції. Нехай $X = [0,1] \times [0,1]$. Розглянемо наступні стискуючі відображення $T_i(x)\colon X \to X \quad (i = 1,2,3)$

$$T_1(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}\right)$$

$$T_2(x,y) = \left(\frac{2-x}{3}, \frac{1+y}{3}\right)$$

$$T_3(x,y) = \left(\frac{2+x}{3}, \frac{1+2y}{3}\right).$$

Нехай $D_0 = (x,x) \in X$ — діагональ вихідного одиничного квадрата X, і

$$D_n = \bigcup_{i=1}^{3} T_i(D_{n-1}), \quad n \geqslant 1.$$

Кожне D_n є графіком деякої неперервної функції $f_n(x)$. Гранична функція, як показав Катсуура, є неперервною і ніде не диференційовною. Саме тому функцію $F_{2/3}(x)$ називають ніде не диференційовною функцією Бурбакі або ж функцією Катсуури.

Відмітимо, що $F_{\frac{1}{2}}(x)$ — це знаменита функція Кантора. Граничні випадки параметра a (0 та 1) також можуть бути розглянуті, проте в обох з них функція $F_a(x)$ не є неперервною. Зауважимо також, що $F_{\frac{1}{3}}(x) = x$.

2. Диференціальні властивості досліджуваних функцій

Теорема 1. *Для усіх* $a \in (0,1)$ $F_a(x)$ *є неперервною на відрізку* $[0,1]$.

Доведення. Перш за все відзначимо, що $F_a(x_0) = f_n(x_0)$, якщо $x_0 = \dfrac{k}{3^n}$ для $n = 1, 2, ..., k$, $k = 0, 1, ..., 3^n$. Нехай $A = \max\{a, |2a-1|\}$. Очевидно, що $0 < A < 1$. Зазначимо, що для довільного $n \geqslant 1$:

$$|f_n'(x)| \leqslant (3A)^n$$

в усіх точках, в яких похідна існує. Також відзначимо, що

$$\min\left\{f_n\left(\frac{k}{3^n}\right), f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right\} \leqslant f_{n+p}(x) \leqslant \max\left\{f_n\left(\frac{k}{3^n}\right), f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right\}$$

для усіх $p \in \mathbb{N}$ і $\frac{k}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{3^n}$. Нарешті для кожного $x \in [0,1]$ та довільного $\varepsilon > 0$ існують такі натуральні n і k, що $A^n < \varepsilon$ і $\frac{k}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{3^n}$. Тоді:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant A^n < \varepsilon \quad \text{для усіх } p > 0.$$

Таким чином, оскільки n обирається незалежно від x, то функціональна послідовність $(f_n(x))$ рівномірно-збігається, а врахувавши те, що кожний член послідовності є неперервна функція на відрізку $[0,1]$, стверджуємо, що існує гранична функція $F_a(x)$, яка є неперервною на відрізку $[0,1]$. □

Для дослідження диференціальних властивостей описаного класу функцій використовуватимемо наступну лему, яку легко довести.

Лема 1. *Якщо функція* $f(x)$ — *диференційовна в точці* x_0, *то*

$$\lim_{h\downarrow 0, k\downarrow 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0+k)}{h+k} = f'(x_0),$$

Теорема 2 ([**5**]). *Якщо* $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, *то функція* $F_a(x)$ *диференційовна майже скрізь; якщо* $a \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$, *то функція* $F_a(x)$ *є ніде недиференційовною; якщо ж* $a \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, *то* $F_a(x)$ *диференційовна на одній нескінченній множині точок і недиференційовна на іншій, також нескінченній множині точок.*

Доведення. Доведення цієї теореми проведемо в три етапи.

1. Нехай $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Тоді, очевидно, функція $F_a(x)$ є неспадною. За теоремою Лебега про диференційовність монотонної функції стверджуємо, що вона диференційовна майже скрізь (в смислі міри Лебега).

2. Нехай $a \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$. Зауважимо, що в цьому випадку $A = \max\{a, 2a-1\} = a$. Легко бачити, що:

$$(3(2a-1))^n \leqslant |f_n'(x)| \leqslant (3a)^n$$

в усіх точках, де $f_n'(x)$ існує. Нехай x — довільне число з відрізка $[0,1]$. Для як завгодно великого n завжди існує $k \in \mathbb{N}$, що $\frac{k}{3^n} \leqslant x < \frac{k+1}{3^n}$. Тоді:

$$\left|\frac{F_a\left(\dfrac{k+1}{3^n}\right) - F_a\left(\dfrac{k}{3^n}\right)}{\dfrac{1}{3^n}}\right| = \left|\frac{f_n\left(\dfrac{k+1}{3^n}\right) - f_n\left(\dfrac{k}{3^n}\right)}{\dfrac{1}{3^n}}\right| \geqslant (3(2a-1))^n,$$

тобто прямує до нескінченності, якщо $a > \frac{2}{3}$. Згідно з лемою 1, $F_a(x)$ є недиференційовною в кожній точці.

У випадку, коли $a = \frac{2}{3}$, похідна $f_n'(x)$ може бути обмеженою в деяких точках (наприклад, при $x = \frac{1}{2}$). Але навіть в таких точках, з одного боку, послідовність $(f_n'(x))$ змінює знак нескінченне число разів, тобто може збігатися лише до 0, а з іншого боку, очевидно, що $|f_n'(x)| \geqslant 1$ для кожного n. Ця суперечність і доводить недиференційовність функції $F_{\frac{2}{3}}(x)$ в кожній точці відрізку $[0,1]$.

3. Нехай тепер $a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$. Покажемо, що функція $F_a(x)$ є недиференційовною в усіх трійково-раціональних точках відрізка $[0,1]$, тобто в точках виду $x = \frac{k}{3^n}$, де $n \in N$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n$. Не втрачаючи загальності припустимо, що k не ділиться на 3. Тоді якщо $k \equiv 1 \mod 3$, то тоді $D_- F_a(x) = +\infty$, де через $D_- F_a(x)$ позначена ліва похідна функції $F_a(x)$. Якщо ж $k \equiv 2 \mod 3$, то тоді $D_+ F_a(x) = +\infty$, де через $D_+ F_a(x)$ позначена права похідна функції $F_a(x)$. Крім цього, $D_+ F_a(0) = +\infty$, $D_- F_a(1) = +\infty$.

Диференційовність функції $F_a(x)$ при інших значеннях аргументу залежить від числових властивостей x. Розглянемо трійково-ірраціональне число:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \cdots = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \quad \alpha_i = 0, 1, 2.$$

Позначимо через $i(n)$ кількість одиниць в трійковому представленні числа x до n-го місця включно. Тоді $f_n'(x) = (3(1-2a))^{i(n)} \cdot (3a)^{n-i(n)}$. Якщо $(3(1-2a))^{i(n)} \cdot (3a)^{n-i(n)}$ збігається при $n \to \infty$, то функція F_a диференційовна в точці x, в протилежному випадку — ні.

Якщо $\alpha_j = 1$ для скінченної множини таких j, то $|f_n'(x)|$, очевидно, прямує до нескінченності. Якщо $\alpha_j(x) = 1$ нескінченно часто, то (оскільки $1 - 2a < 0$), послідовність $(f_n'(x))$ змінює знак нескінченно часто. Тому вона може збігатися лише до нуля.

Нехай

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{i(n)}{n}.$$

Тоді послідовність $(f'_n(x))$ збігається до нуля, якщо $|3(1-2a)^\gamma \cdot a^{1-\gamma}| < 1$. Отже, $F'_a(x) = 0$, якщо

$$\gamma > \frac{-\lg(3a)}{\lg(2a-1) - \lg a}.$$

Зокрема, якщо $\alpha_j = 1$ для всіх j, за виключенням скінченного числа, то тоді $\gamma = 1$ і, таким чином, $F_a(x) = 0$. Зауважимо, що усі такі значення x — це середини інтервалів виду $\left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right)$. З іншого боку, якщо $\gamma < \frac{-\lg(3a)}{\lg(2a-1)-\lg a}$, то послідовність $(f'_n(x))$ розбігається і функція $F_a(x)$ в точці x недиференційовна. □

3. Аналітичне задання досліджуваних функцій

Розглянемо функцію $f_1(x)$. Вона складається з трьох відрізків, довжини проекцій яких на вісь абсцис дорівнюють $\frac{1}{3}$, причому два з них своїми проекціями на вісь ординат мають відрізки довжиною a, а один довжину $2a-1$.

Лема 2. *Кожна з функцій $f_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) складається з 3^n відрізків, довжини проекцій кожного з яких на вісь Ox дорівнюють 3^{-n}, а на вісь Oy — число виду $a^k(2a-1)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, причому число відрізків, для яких довжина проекції на вісь Oy рівна $a^k(2a-1)^{n-k}$ дорівнює $C_n^k \cdot 2^k$.*

Доведення. Перша частина теореми слідує безпосередньо з означення послідовності функцій $(f_n(x))$.

Покажемо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ число відрізків довжиною $a^k(2a-1)^{n-k}$, з яких складається функція $f_n(x)$, дорівнює $C_n^k \cdot 2^k$.

Дійсно, розглянемо деяку функцію $f_n(x)$, а також трійкове представлення аргументу $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Тоді лінійний відрізок функції, який має своєю проекцією на вісь Ox $[\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 00\ldots}; \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 22\ldots}]$, своєю проекцією на вісь Oy має відрізок, довжина якого визначається числом одиниць серед цифр α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$, тобто довжини проекцій на вісь Oy двох відрізків будуть однаковими, якщо трійкове представлення лівих кінців кожного з відрізків містить однакову кількість одиниць. Кількість чисел, в трійковому записі яких міститься рівно $n-k$ одиниць, дорівнює $C_n^{n-k} \cdot 2^k$, або, що те ж саме, $C_n^k \cdot 2^k$. □

Нехай $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_2^0$. Дамо геометричну інтерпретацію побудови значення функції $F_a(x)$ за даним значенням аргументі.

Введемо позначення: $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, де $q_0 = a$, $q_1 = 1-2a$, $q_2 = a$. Нехай $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Очевидно, що в цьому випадку усі $q_i > 0$ і $\sum\limits_{i=0}^{2} q_i = 1$. Тоді кожне дійсне число y з відрізка $[0,1]$ має єдине представлення у вигляді

$$y = \beta_{\alpha_1} + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_{\alpha_i} \prod_{k=1}^{i-1} q_{\alpha_k},$$

де $\beta_m = \sum\limits_{j=0}^{m-1} q_j$, $\alpha_k \in N_2^0$ (таке представлення називають Q-представленням дійсного числа [**4, 9**]). Тоді очевидно, що прообразом так поданого значення функції y є трійкове число $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Нехай тепер $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Розділимо відрізок $[0,1]$ на три відрізки Δ^y_i, $i \in \mathbb{N}^0_2$, довжини яких визначаються співвідношенням $|\Delta^y_i| = |q_i|$, причому відрізок Δ^y_1 відкладатимемо в протилежному напрямі. Очевидно, що $\Delta^y_1 \subset \Delta^y_0$ і $\Delta^y_1 \subset \Delta^y_2$. Очевидно, що $F_a(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) \subset \Delta^y_{\alpha_1}$.

Продовживши цей процес, на m-му кроці одержимо відрізки $\Delta^y_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, довжини яких рівні $\left|\Delta^y_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right| = \prod\limits_{k=1}^{m} |q_{\alpha_k}|$. Очевидно, що довжини цих відрізків прямують до нуля, при $m \to \infty$. Також $F_a(\Delta^y_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots}) \subset \Delta^y_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, $\Delta^y_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}} \subset \Delta^y_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$. Отже, нами побудована система вкладених відрізків і за аксіомою Кантора існує єдина точка, що належить нескінченній послідовності відрізків $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots}$. Нашими міркуваннями ми по суті довели теорему:

Теорема 3. *Нехай $x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \ldots$. Тоді значення функції $F_a(x)$ може бути обчислене за формулою:*

$$F_a(x) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_{\alpha_i} \prod_{k=1}^{i-1} q_{\alpha_k},$$

де $q_0 = a$, $q_1 = 1 - 2a$, $q_2 = a$; $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = a$, $\beta_2 = 1 - a$.

4. Фрактальні властивості графіків досліджуваних функцій

Нагадаємо [**2**], що число

$$\alpha^K(E) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg \delta},$$

де $N_\delta(E)$ — найменша кількість прямокутників діаметра δ, необхідних для покриття множини E, називається фрактальною клітинковою розмірністю множини E. У випадку, коли покриття здійснюється однаковими δ-„кубами“ виду

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta],$$

де m_1, $m_2, \ldots,$ m_n — цілі („кубом“ називаємо інтервал в просторі $\mathbb{R}_1$ і квадрат в $\mathbb{R}_2$), число $\alpha^K(E)$ називають фрактальною клітинковою ентропійною розмірністю множини E.

Теорема 4. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича функції $F_a(x)$ при $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ дорівнює 1.*

Доведення. Оскільки при заданих значеннях параметра a функція неспадна, то вона має скінченну довжину, тобто $F_a(x)$ є спрямлюваною кривою, а отже її розмірність Хаусдорфа–Безиковича дорівнює одиниці [**2**, стор. 82]. □

Теорема 5. *Фрактальна клітинкова ентропійна розмірність графіка функції* $F_a(x)$, $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *дорівнює* $\log_3(12a-3)$.

Доведення. Визначимо, якою найменшою кількістю $N_\delta(\Gamma_{F_a})$ квадратів зі стороною $\delta = 3^{-n}$ можна покрити графік функції $F_a(x)$. Зауважимо, що $N_\delta(\Gamma_{f_n}) = N_\delta(\Gamma_{F_a})$, якщо $\delta = 3^{-n}$, тому

$$\alpha^K(F_a) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg N_\delta(f_n)}{-\lg 3^{-n}}.$$

Згідно з лемою 2, $f_n(x)$ складається із відрізків, проекції яких на вісь Ox дорівнюють 3^{-n}, а на вісь Oy — $a^k(2a-1)^{n-k}$. Для того, щоб покрити квадратами зі стороною 3^{-n} один такий відрізок, необхідно:

(1) $p_{n,k} = \dfrac{a^k(2a-1)^{n-k}}{3^{-n}}$, якщо значення цього виразу — ціле;

(2) $p_{n,k} = \left[\dfrac{a^k(2a-1)^{n-k}}{3^{-n}}\right] + 1$, якщо значення виразу $a^k(2a-1)^{n-k}3^{-n}$ — не є цілим (тут $[x]$ — найбільше ціле число, що не перевищує x).

Оцінимо $N_\delta(f_n)$. З одного боку:

$$\begin{aligned} N_\delta(f_n) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^k \cdot p_{n,k} \geqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^k \cdot \frac{a^k(2a-1)^{n-k}}{3^{-n}} = \\ &= 3^n \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (2a)^k (2a-1)^{n-k} = 3^n \cdot (4a-1)^n = (12a-3)^n. \end{aligned}$$

тоді фрактальна клітинкова ентропійна розмірність графіка функції:

$$\alpha^K(\Gamma_{F_a}) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(12a-3)^n}{-\lg 3^{-n}} = \log_3(12a-3). \tag{1}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} N_\delta(f_n) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^k \cdot p_{n,k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^k \cdot \left(\frac{a^k(2a-1)^{n-k}}{3^{-n}} + 1\right) = \\ &= 3^n \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (2a)^k (2a-1)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^k = \\ &= 3^n \cdot (4a-1)^n + 3^n = (12a-3)^n + 3^n. \end{aligned}$$

Врахувавши, що при $a > \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{12a-3}\right)^n = 0$, матимемо:

$$\begin{aligned} \alpha^K(\Gamma_{F_a}) &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\lg((12a-3)^n + 3^n)}{-\lg 3^{-n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(12a-3)^n + \lg\left(1 + \left(\frac{3}{12a-3}\right)^n\right)}{-\lg 3^{-n}} = \log_3(12a-3). \end{aligned} \tag{2}$$

Співставивши (1) і (2) знаходимо:

$$\alpha^K(\Gamma_{F_a}) = \log_3(12a-3).$$

□

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості неперервної, ніде не диференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 3, 2002.— С. 327–338.

[2] *Falconer K.J.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition.— Chichester, Wiley, 2003.— 338 p.

[3] *Allaart P., Kawamura K.* Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 140, № 2.— 2006.— pp. 269–295.

[4] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальный множества, функции, распределения. – К.: Наук. думка, 1992.— 208с.

[5] *Okamoto H.* A remark on continuous, nowhere differentiable functions. // Proc. Japan Acad.— Ser. A 81, № 3.— 2005.— pp. 47–50.

[6] *Perkins F. W.* An elementary example of a continuous non-differentiable functions // Amer. Math. Monthly. — **34**.— 1927.— P. 476–478.

[7] *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного: Элементарная теория.— М.: Наука, 1965.— С. 28.

[8] *Katsuura H.* Continuous nowhere-differentiable functions — an application of contraction mappings // Amer. Math. Monthly.— **98**.— 1991.— P. 411–416.

[9] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.— К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998.— 296 с.