Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 152–159.

УДК 519.21

Фрактальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти цифр

О. В. Котова

(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

Анотація. Вказано алгоритм побудови коренів рівняння $\nu_1(x) = x$, де $\nu_1(x)$ — частота цифри 1 в трійковому розкладі числа x. Обчислено розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини коренів рівняння, які знаходяться за вказаним алгоритмом. Цим самим отримано нижню оцінку розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини всіх розв'язків досліджуваного рівняння.

Abstract. The algorithm of construction of the roots of the equation $\nu_1(x) = x$ is given, here $\nu_1(x)$ is the frequency of the digit 1 in a triadic decomposition of x. The Hausdorff-Besicovitch dimension of the set of the roots of this equation is obtained, the roots are calculated in accordance with this algorithm. This means that the lowest estimation of the Hausdorff-Besicovitch dimension of the set of all decisions of the given equation is obtained.

Нехай $0, c_1c_2 \ldots c_m \ldots$ — формальний (символічний) запис деякого числа $x \in [0; 1]$ в трійковій системі числення, $c_i = c_i(x) \in \{0, 1, 2\}$, тобто

$$x \equiv 0, c_1c_2 \ldots c_m \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} 3^{-m} c_m. \tag{1}$$

Добре відомо, що кожне ірраціональне x має єдиний розклад (1), а деякі раціональні числа мають їх два (такі називаються трійково-раціональними).

Справді $0, c_1 \ldots c_{m-1}c_m 00 \ldots 0 \ldots = 0, c_1 \ldots c_{m-1}(c_m - 1)22 \ldots 2 \ldots$, $c_m \neq 0$.

Нехай $N_i(x, n) = \#\{k : c_k(x) = i, k \leq n\}$ — це кількість цифр „i" в трійковому розкладі числа x до n-го місця включно, $i = 0, 1, 2$. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_i(x, n)}{n}$, то її значення $\nu_i(x)$ називається *частотою цифри „i"* в трійковому зображенні числа x.

Поняття частоти цифр зображення дійсного числа в s-адичному розкладі є продуктивним у різних відношеннях. В термінах частоти формулюються нормальні властивості чисел, формально просто задаються фрактали тощо. Функція частоти цифри є всюди розривною і має непросту локальну поведінку. Ще більш складною є динаміка на числовій прямій породжена цією функцією. В даній роботі ми продовжуємо [**11**] вивчати множину інваріантних точок відображення $y = \nu_1(x)$, де $\nu_1(x)$ — частота цифри 1 у зображенні числа x в трійковій системі числення. Ми вказуємо „масивну" множину інваріантних точок цього відображення і обчислюємо її розмірність Хаусдорфа-Безиковича, тим самим отримуємо нижню оцінку розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини всіх інваріантних точок. Ці дослідження напевно можна вважати продовженням досліджень Безиковича [**12**], Егглстона [**13, 14**], Біллінгслі [**7**], Фолькмана [**15**] в яких отримані результати про розмірність Хаусдорфа-Безиковича різних фрактальних множин, означених в термінах частот цифр.

Теорема 1. *Для довільної нескінченної послідовності нулів та одиниць* $\{\epsilon_n\}$ *існують такі* $\gamma_{5i+1}, \gamma_{5i+2}, \gamma_{5i+3}, \gamma_{5i+4}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, *що число*

$$x = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\epsilon_1\gamma_6\gamma_7\gamma_8\gamma_9\epsilon_2 \ldots \gamma_{5i+1}\gamma_{5i+2}\gamma_{5i+3}\gamma_{5i+4}\epsilon_{i+1} \ldots ,$$

є розв'язком рівняння

$$\nu_1(x) = x. \tag{2}$$

Доведення. Нехай $\{\epsilon_n\}$ — довільна фіксована нескінченна послідовність нулів та одиниць; $s_1 = 1$, $s_{n+1} = 3^{s_n}$, $e_n = s_{n+1} - s_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Розглянемо послідовність трійково-раціональних чисел $x = 0,\gamma_1 \ldots \gamma_{s_k}$, де трійкові цифри γ_i числа x_k обчислюється за наступними правилами:

$$x_1 = \frac{\gamma_1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad x_2 = 0,1\beta_{11}\beta_{21},$$

$$\beta_{11} = [(s_1+1)\,x_1] - [s_1x_1] = [2x_1] - [x_1] = \left[\frac{2}{3}\right] - \left[\frac{1}{3}\right] = 0,$$

$$\beta_{21} = [(s_1+2)\,x_1] - [(s_1+1)\,x_1] = [3x_1] - [2x_1] = \left[\frac{3}{3}\right] - \left[\frac{2}{3}\right] = 1.$$

Тоді

$$\beta_{11} + \beta_{21} = [3x_1] - [x_1] = 3x_1 - [x_1]\,.$$

Нехай $N_1(x_k)$ — кількість одиниць в трійковому розкладі числа x_k, тобто $N_1(x_k) = N_1(x_k, s_k)$. Тоді кількість одиниць в трійковому розкладі числа x_2 обчислюється за формулою:

$$N_1(x_2) = N_1(x_1) + \sum_{j=1}^{e_1} \beta_{j1} = N_1(x_1) + 3x_1 - [x_1]\,.$$

Відносна частота одиниць в трійковому розкладі числа x_2 дорівнює

$$\frac{N_1(x_2)}{s_2} = \frac{N_1(x_1) + 3x_1 - [x_1]}{3} = x_1 + \frac{N_1(x_1)}{3} - \frac{[x_1]}{3}.$$

Для числа $x_3 = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\beta_{12}\beta_{22}\dots\beta_{(24)2}$

$$\beta_{12} = [(s_2+1)\,x_2] - [s_2x_2] = [4x_2] - [3x_2]\,;$$
$$\beta_{22} = [(s_2+2)\,x_2] - [(s_2+1)x_2] = [5x_2] - [4x_2]\,;$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\beta_{e_22} = [(s_2+e_2)\,x_2] - [(s_2+e_2-1)\,x_2] = [3^{s_2}x_2] - [(3^{s_2}-1)\,x_2] =$$
$$= [3^{s_2}x_2] - [3^{s_2}x_2 - x_2] = 3^{s_2}x_2 - (3^{s_2}x_2 - 1) = 1.$$

Покажемо, що серед $\beta_{i2}, \beta_{(i+1)2}, \beta_{(i+2)2}$, де $0 < i < e_2 - 2$, є принаймні один нуль та одна одиниця.

Оскільки $\gamma_1 = 1$, то $x_2 \geq \frac{1}{3}$. Оскільки $\beta_{11} = 0$, то $x_2 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

Оцінимо кількість одиниць S_2 серед серії цифр $\beta_{i2}, \beta_{(i+1)2}, \beta_{(i+2)2}$.

$S_2 = \beta_{i2} + \beta_{(i+1)2} + \beta_{(i+2)2} = [3x_2 + \{(s_2+i+2)x_2\}]$;

$\left[\frac{3\cdot 1 + 0}{3}\right] \leq S_2 \leq \left[\frac{3\cdot 4}{9} + 1\right]$;

$1 \leq S_2 \leq 2$.

Якщо для числа x_3 $\gamma_{5\cdot c} = \beta_{i2} \neq \epsilon_c$ $(0 < i < e_2)$, то:

–при $i < 4$ на місці $\gamma_{5\cdot c}$ записуємо ϵ_c;

–при $i > 4$ міняємо місцями $\gamma_{5\cdot c}$ з найближчим, не рівним йому між $\gamma_{5\cdot c-4}$ та $\gamma_{5\cdot c}$ так, щоб залишитись в серії добудованих β_{i2}.

В результаті ми отримуємо $x_3 = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\epsilon_1\gamma_6\gamma_7\gamma_8\gamma_9\epsilon_2\dots\gamma_{s_3}$.

Кількість одиниць в трійковому розкладі числа x_3 дорівнює

$$N_1(x_3) = N_1(x_2) + \sum_{j=1}^{e_2}\beta_{j2} - \gamma_5 + \epsilon_1 = N_1(x_2) + 3^{s_2}x_2 - [s_2x_2] - \gamma_5 + \epsilon_1 =$$
$$= N_1(x_2) + 27x_2 - [3x_2] - \gamma_5 + \epsilon_1.$$

Тоді відносна частота одиниць в трійковому розкладі числа x_3 дорівнює

$$\frac{N_1(x_3)}{s_3} = \frac{N_1(x_2) + 27x_2 - [3x_2] - \gamma_5 + \epsilon_1}{27} = x_2 + \frac{N_1(x_2)}{27} - \frac{[3x_2] - \epsilon_1 + \gamma_5}{27}.$$

Аналогічно за числом x_3 будується число x_4, за числом x_4 - число x_5, і т.д.

Нехай вже побудоване число $x_k = 0,\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{s_k}$.

Для числа $x_{k+1} = 0,\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{s_k}\beta_{1k}\beta_{2k}\dots\beta_{e_kk}$

$$\beta_{1k} = [(s_k+1)\,x_k] - [s_kx_k] = [s_kx_k] + [\{s_kx_k\} + x_k] - [s_kx_k] =$$
$$= [\{s_kx_k\} + x_k] = \left[0,\gamma_{s_{k-1}+1}\dots\gamma_{s_k} + x_k\right];$$
$$\beta_{2k} = \left[\left\{0,\gamma_{s_{k-1}+1}\dots\gamma_{s_k} + x_k\right\} + x_k\right];$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{jk} = \left[\left\{0,\gamma_{s_{k-1}+1}\ldots\gamma_{s_k} + (j-1)x_k\right\} + x_k\right];$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{e_k k} = [(s_k + e_k)\,x_k] - [(s_k + e_k - 1)\,x_k] = [3^{s_k}x_k] - [(3^{s_k} - 1)\,x_k] =$$
$$= [3^{s_k}x_k] - [3^{s_k}x_k - x_k] = 3^{s_k}x_k - (3^{s_k}x_k - 1) = 1.$$

Покажемо, що серед $\beta_{ik}, \beta_{(i+1)k}, \beta_{(i+2)k}$, де $0 < i < e_k - 2$, є принаймні один нуль та одна одиниця.

Оскільки $\gamma_1 = 1$, то $x_k \geq \dfrac{1}{3}$. Оскільки $\beta_{11} = 0$, то $x_k \leq \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{9}$.

Оцінимо кількість одиниць S_k серед серії цифр $\beta_{ik}, \beta_{(i+1)k}, \beta_{(i+2)k}$.

$S_k = \beta_{ik} + \beta_{(i+1)k} + \beta_{(i+2)k} = [3x_k + \{(s_k + i + 2)x_k\}]$;

$\left[\dfrac{3\cdot 1 + 0}{3}\right] \leq S_k \leq \left[\dfrac{3\cdot 4}{9} + 1\right]$;

$1 \leq S_k \leq 2$.

Якщо при побудові x_{k+1} цифра $\gamma_{5\cdot c} = \beta_{ik} \neq \epsilon_c$ $(0 < i < e_k)$, то

–при $i < 4$ на місці $\gamma_{5\cdot c}$ записуємо ϵ_c ($N_1(x_{k+1})$ зміниться на $(\epsilon_c - \gamma_{5c})$);

–при $i > 4$ міняємо місцями $\gamma_{5\cdot c}$ з найближчим, не рівним йому між $\gamma_{5\cdot c-4}$ та $\gamma_{5\cdot c}$ так, щоб залишитись в серії добудованих β_{ik} (при цьому $N_1(x_{k+1})$ не зміниться).

В результаті ми отримали $x = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\epsilon_1\gamma_6\gamma_7\gamma_8\gamma_9\epsilon_2\ldots\gamma_{s_{k+1}}$.

Кількість одиниць в трійковому розкладі числа x_{k+1} дорівнює

$$N_1(x_{k+1}) = N_1(x_k) + \sum_{j=1}^{e_k}\beta_{jk} - \gamma_{5c} + \epsilon_c.$$

Оскільки $\beta_{1k} + \beta_{2k} + \ldots + \beta_{e_k k} = 3^{s_k}x_k - [s_k x_k]$, то

$$N_1(x_{k+1}) = N_1(x_k) + 3^{s_k}x_k - [s_k x_k] - \gamma_{5c} + \epsilon_c.$$

Відносна частота одиниць в трійковому розкладі числа x_{k+1} дорівнює

$$\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = \frac{N_1(x_k) + 3^{s_k}x_k - [s_k x_k] - \gamma_{5c} + \epsilon_c}{3^{s_k}} = x_k + \frac{N_1(x_k)}{3^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{3^{s_k}} + \frac{\epsilon_c - \gamma_{5c}}{3^{s_k}}.$$

І т.д. Тоді $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ і $\alpha_n(x) = \alpha_n(x_k)$ при $n = \overline{1, s_k}$ для всіх k.

Виразимо та оцінимо різницю $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k$*:*

$$\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k = \frac{N_1(x_k)}{3^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{3^{s_k}} + \frac{\epsilon_c - \gamma_{5c}}{3^{s_k}}.$$

Оскільки $N_1(x_k) \leq s_k$, то $\dfrac{N_1(x_k)}{3^{s_k}} - \dfrac{[s_k x_k]}{3^{s_k}} \leq \dfrac{s_k}{3^{s_k}}$.

Враховуючи, що $x_k < 1$, отримаємо $s_k x_k < s_k$, $[s_k x_k] \leq s_k x_k < s_k$ і

$$-\frac{s_k + 1}{3^{s_k}} < \frac{N_1(x_k)}{3^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{3^{s_k}} \leq \frac{s_k + 1}{3^{s_k}}.$$

Отже,

$$\left|\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k\right| \le \frac{s_k+1}{3^{s_k}}.$$

Якщо $k \to \infty$, то $\dfrac{s_k}{3^{s_k}} \to 0$. Якщо $x_k \to x$, то $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} \to \nu_1(x)$.

Доведемо, що $\nu_1(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = x$.

Нехай $x = 0, \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots$, $u_n = 0, \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$.

Тоді $x_1 = u_{s_1}, x_2 = u_{s_2}, \ldots, x_k = u_{s_k}$, де $s_1 = 1, s_2 = 3^{s_1} = 3, \ldots, s_k = 3^{s_{k-1}}$.

Доведемо, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_1(u_n)}{n}$.

Для довільного n існує таке k, що $x_{k+1} < u_n \le x_{k+2}, (s_{k+1} < n \le s_{k+2})$.

Звідси $u_n > x_{k+1}, n = s_{k+1} + j$, де j - деяке натуральне число, $1 \le j \le 3^{s_{k+1}} - s_{k+1}$.

За означенням числа u_n маємо:

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1}+j)\,x_{k+1}] - [s_{k+1}x_{k+1}] + N_1(x_{k+1}) + \delta,$$

де $|\delta|$— кількість змін $\gamma_{5\cdot c} = \beta_{ik} \ne \epsilon_c$ $(0 < i < e_k)$ на ϵ_c, що вплинули на кількість одиниць в трійковому розкладі числа u_n, $|\delta| \le 2$.

Подамо $N_1(x_{k+1})$ у вигляді: $N_1(x_{k+1}) = s_{k+1}x_k - [s_kx_k] + N_1(x_k)$.

Тоді

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1}+j)\,x_{k+1}] - [s_{k+1}x_{k+1}] + s_{k+1}x_k - [s_kx_k] + N_1(x_k) + \delta.$$

Подамо $[s_{k+1}x_{k+1}]$ у вигляді: $[s_{k+1}x_{k+1}] = s_{k+1}x_k + [s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)]$.

Тоді

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1}+j)\,x_{k+1}] - s_{k+1}x_k - [s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)] + s_{k+1}x_k - [s_kx_k] + N_1(x_k) + \delta =$$

$$= [(s_{k+1}+j)\,x_{k+1}] - [s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)] - [s_kx_k] + \; + N_1(x_k) + \delta.$$

Тому відносна частота одиниць в трійковому розкладі числа u_n дорівнює

$$\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} = \frac{[(s_{k+1}+j)\,x_{k+1}] - [s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)] - [s_kx_k] + N_1(x_k) + \delta}{s_{k+1}+j}.$$

$$\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1} = \frac{[(s_{k+1}+j)\,x_{k+1}] - (s_{k+1}+j)\,x_{k+1}}{s_{k+1}+j} - \frac{[s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)]}{s_{k+1}+j} -$$

$$-\frac{[s_kx_k]}{s_{k+1}+j} + \frac{N_1(x_k)}{s_{k+1}+j} + \frac{\delta}{s_{k+1}+j}.$$

Тоді

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1}\right| \le \left|\frac{[(s_{k+1}+j)\,x_{k+1}] - (s_{k+1}+j)\,x_{k+1}}{s_{k+1}+j}\right| + \left|\frac{[s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)]}{s_{k+1}+j}\right| +$$

$$+\left|\frac{[s_kx_k]}{s_{k+1}+j}\right| + \left|\frac{N_1(x_k)}{s_{k+1}+j}\right| + \left|\frac{\delta}{s_{k+1}+j}\right| \le \frac{1}{s_{k+1}} + (x_{k+1}-x_k) + \frac{s_k}{s_{k+1}} + \frac{s_k}{s_{k+1}} + \frac{2}{s_{k+1}} =$$

$$= (x_{k+1}-x_k) + \frac{2s_k+3}{s_{k+1}} < (x_{k+1}-x_k) + \frac{3s_k}{s_{k+1}}.$$

Нехай ϵ — довільне додатне число. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, то існує таке натуральне число p_1, що при $n > p_1$ виконується нерівність: $|x_n - x| < \dfrac{\epsilon}{10}$.

Тоді, якщо $n > p_1$ і $r > p_1$, то

$$|x_n - x_r| = |x_n - x + x - x_r| \leq |x_n - x| + |x - x_r| < \frac{\epsilon}{10} + \frac{\epsilon}{10} = \frac{\epsilon}{5};$$

$$|x_n - x_r| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Оскільки $s_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує таке натуральне число p_2, що $\dfrac{s_n}{s_{n+1}} < \dfrac{\epsilon}{5}$ при $n > p_2$.

Покладемо $p = max\,\{p_1, p_2\}$.

Припустимо, що n -конкретне натуральне число, яке задовольняє умові $n > s_{p+2}$.

Тоді для такого натурального числа існує число k таке, що $s_{k+1} < n \leq s_{k+2}$.

Доведемо, що $k > p$.

Припустимо, що $k \leq p$, тоді $k + 2 \leq p + 2$. Звідки $n < s_{p+2}$, а це суперечить умові $n > s_{p+2}$.

Тоді

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x_{k+1}\right| < (x_{k+1} - x_k) + \frac{3s_k}{s_{k+1}} < \frac{\epsilon}{5} + \frac{3\epsilon}{5} = \frac{4\epsilon}{5}.$$

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x\right| = \left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x_{k+1} + x_{k+1} - x\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x_{k+1}\right| + |x_{k+1} - x| < \frac{4\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{10} < \epsilon.$$

Отже, $\forall \epsilon > 0\ \exists n \in N\ (n > s_{N+2})\ \left|\dfrac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x\right| < \epsilon$, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j}$ і дорівнює x. $\square$

Теорема 2. *Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини K розв'язків рівняння* (2), *отриманих за алгоритмом, наведеним при доведені теореми* 1, *дорівнює* $\dfrac{1}{5}\log_3 2$.

Доведення. Добре відомо [**8**], що при визначенні розмірності Хаусдорфа-Безиковича можна обходитись трійковими циліндрами. Розглянемо покриття множини K циліндрами однакового рангу m. α-Об'єм такого покриття

$$Ł_m^\alpha = \begin{cases} 2^{k-1}\left(3^{-(5k-j)}\right)^\alpha & \text{при} \quad m = 5k - j, j \in \{4,3,2,1\}, \\ \\ 2^k\left(3^{-(5k)}\right)^\alpha & \text{при} \quad m = 5k, k \in N. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, що $L_{5k-1} < L_{5k-j}$, при $j \in \{2,3,4,5\}$. Тому розглядатимемо α-покриття множини K циліндрами рангу $n = 5k - 1$. Тоді ентропійна α-міра Хаусдорфа [**2**, с.54] множини K виражається

$$\widehat{H}_\alpha(K) = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k-1}}{3^{(5k-1)\alpha}} = \frac{3^\alpha}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{3^{5k\alpha}} = \frac{3^\alpha}{2} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3^{5\alpha}}\right)^k.$$

З останнього виразу видно, що

$$\widehat{H}_\alpha(K) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha > \frac{1}{5}\log_3 2, \\ \infty & \text{при} \quad \alpha < \frac{1}{5}\log_3 2; \end{cases} \tag{4}$$

тобто ентропійна розмірність множини K дорівнює $\alpha = \frac{1}{5}\log_3 2$.

Покажемо, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини K дорівнює $\frac{1}{5}\log_3 2$.

Розглянемо довільне скінченне покриття множини K трійковими циліндрами $\{u_j\}$ $(j = \overline{1,l})$ і покажемо, що при $\alpha = \frac{1}{5}\log_3 2$ попереднє рангове покриття є „непокращуваним“.

Нехай u_j — один з циліндрів покриття. Тоді $|u_j| = 3^{-n}$ для деякого $n \in N$.

Покладемо $n = 5p - r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Тоді α-об'єм покриття тієї частини множини K, що належить Δ_j, тобто множини $K \bigcap \Delta_j$, циліндрами рангу $5p - r + m$ обчислюється за формулою:

$$Ł^\alpha_{5p-r+m}(K \bigcap \Delta_j) = \begin{cases} 2^{k-1}\left(3^{-(5p-r+5k-j)}\right)^\alpha & \text{при} \quad m = 5k + r - j, j \in \{4, 3, 2, 1\}, \\ 2^k \left(3^{-(5p-r+5k)}\right)^\alpha & \text{при} \quad m = 5k + r, k \in N. \end{cases} \tag{5}$$

Покажемо, що $L^\alpha_{5p-r+m}(K \bigcap u_j) \le V_n = \left(3^{-(5p-r)}\right)^\alpha$.

Очевидно, що $L_{5(p+k)-1} < L_{5(p+k)-j}$, при $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Тому розглядатимемо α-покриття множини $K \bigcap \Delta_j$ циліндрами рангу $5(p + k) - 1$. Його α-об'єм дорівнює $2^{k-1}\left(3^{-(5p+5k-1)}\right)^\alpha$.

Оскільки $\left(\frac{2}{3^{5\alpha}}\right)^k = 1$ і $\frac{3^{(1-r)\alpha}}{2} < 1$, то при $\alpha = \frac{1}{5}\log_3 2$

$$2^{k-1}\left(3^{-(5p+5k-1)}\right)^\alpha = \left(3^{-(5p-r)}\right)^\alpha \frac{3^{(1-r)\alpha}}{2} \left(\frac{2}{3^{5\alpha}}\right)^k \le \left(3^{-(5p-r)}\right)^\alpha.$$

Отже, при $\alpha = \frac{1}{5}\log_3 2$ $\quad \widehat{H}^\alpha(K) = H^\alpha(K)$. Таким чином, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини K співпадає з ентропійною розмірністю. □

Теорема 3. *Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини E всіх розв'язків рівняння* (2) *є не меншою, ніж* $\frac{1}{5}\log_3 2$.

Література

[1] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[2] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[3] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n -адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. — 1995. — 47, № 7. — С. 971–975.

[4] *Торбін Г.М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах зображення чисел // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України — НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998, № 1. — С. 53–55.

[5] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal // Bull. Sci. Math. — 2005. — 129, no. 8. — P. 615–630.

[6] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, № 9. — С. 1163–1170.

[7] *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — М.: Мир, 1969. — 238 с.

[8] *Постников А.Г.* Арифметическое моделирование случайних процессов // Тр. Мат. ин-та В.А. Стеклова АН СССР. — 1960. — Т. 57. — 83 с.

[9] *Постников А.Г.* Вероятностная теория чисел. — Москва: Знание, 1974. — 62 с.

[10] *Olsen L.* Applications of multifractal divergence points to sets of numbers defined by their N-adic expansion // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2004. — 136, no. 1. — P. 139–165.

[11] *Котова О. В.* Деякі властивості функції частоти 1 у трійковому розкладі дійсного числа //Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки —Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2005, №6.— С. 255–260.

[12] *Besicovitch A.S.* On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic number system. // Math. Ann. Soc. — 1934. — 110, P. 321–330.

[13] *Eggleston H.G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. Soc. — 1949. — 20, P. 31–36.

[14] *Eggleston H.G.* Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. — 1951. — 54, P. 42–93. On non-normal numbers* By Bodo Volkmann On

[15] *Volkmann B.* On non-normal numbers // Compositio Mathematica. — 1964, 16. — P. 186-190.