Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 143–151.

УДК 519.21

Випадкові величини, G^2_∞-символи яких утворюють ланцюг Маркова

О. Ю. Фещенко

(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. В роботі вивчаються самоподібні і фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини ξ, G^2_∞-символи якої утворюють однорідний ланцюг Маркова. Отримано критерій наявності атомів розподілу та його неперервності, обчислено фрактальну розмірність спектра розподілу випадкової величини ξ в окремих випадках.

Abstract. We study self-similar and fractal properties of the spectrum of a random variable ξ with markovian G^2_∞-symbols. Necessary and sufficient conditions for the continuity resp. discreteness of ξ are found. Fractal dimension of the spectrum of the random variable ξ is calculated for some specaial cases.

1. Вступ

Розподіли випадкових величин, символи деякого фіксованого, наприклад, s-адичного, ланцюгового тощо, зображення яких є незалежними, інтенсивно вивчаються на протязі останніх кількох десятиліть. Дещо менше уваги в дослідженнях було приділено випадковим величинам, символи яких утворюють ланцюг Маркова, хоча бури статті, що стосувалися $\widetilde{Q}$-зображення, ланцюгового зображення, зображення чисел рядами Остроградського.

В даній роботі розглядаються розподіли випадкових величин, символи так званого G^2_∞-зображення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова. Специфічними властивостями цього зображення є залежність від одного параметра φ ("золоте відношення"), нескінченність алфавіту, єдиність зображення і дещо схожі з Q_∞-зображенням метричні співвідношення. В ній ми цікавимось фрактальними властивостями спектра розподілу, які є, власне, наслідком різних типів самоподібних властивостей.

2. G^2_∞-зображення дійсних чисел

Нехай $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — "золоте відношення" (число Фідія). Легко довести, що

$$\frac{1}{\varphi^3} + \frac{2}{\varphi^4} + \frac{2}{\varphi^5} + ... + \frac{2}{\varphi^c} + ... = 1 = \sum_{c=-\infty}^{0} \frac{1}{\varphi^{3-c}} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{3+c}} = \sum_{c=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{3+|c|}}. \qquad (1)$$

Нехай для довільного цілого c

$$g_c := \frac{1}{\varphi^{3+|c|}};$$

$$a_c := \sum_{i=-\infty}^{c-1} g_i = \begin{cases} \varphi^{c-2}, & \text{якщо} \quad c \leq 0, \\ \varphi^{-3} + \varphi^{-2}(2 - \varphi^{1-c}), & \text{якщо} \quad c > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, що

1) $g_{-c} = g_c > 0$;

2) $0 < a_{c-1} < a_c < a_{c+1} < 1$ для довільного $c \in Z$.

В роботі **[6]** доведено, що для довільного $x \in (0;1)$ існує єдина скінченна або нескінченна послідовність цілих чисел (c_k) така, що

$$x = a_{c_1} + \sum_{k>1} \left[a_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\varphi^{3+|c_j|}} \right]. \qquad (3)$$

Подання (представлення) числа $x \in (0;1)$ рядом (3) називається його G^2_∞-*представленням*, що формально записується у вигляді $x = \Delta_{c_1...c_n...}$ і називається G^2_∞-зображення числа x.

Циліндром рангу m *з основою* $c_1c_2...c_m$ називається множина всіх чисел x, що мають G^2_∞-зображення, перші m символів якого співпадають з c_1, c_2, ..., c_m відповідно, що символічно позначається $\Delta_{c_1...c_m}$.

Циліндри мають наступні властивості **[6]**:

1) $|\Delta_{c_1...c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i} = |\Delta_{\bar{c}_1...\bar{c}_m}| \to 0$ $(m \to \infty)$, де $\bar{c}_i = -c_i$.

2) $\Delta_{c_1...c_m c} \subset \Delta_{c_1...c_m}$. Більше того,

$$\max \Delta_{c_1...c_m c} = \min \Delta_{c_1...c_m(c+1)} \qquad (4)$$

і

$$(0;1) = \bigcup_{c=-\infty}^{+\infty} \Delta_c, \qquad \nabla_{c_1...c_m} = \bigcup_{c=-\infty}^{+\infty} \Delta_{c_1...c_m c}. \qquad (5)$$

3) Для довільних $m \in N$, $(c_k) \in L$, $(s_k) \in L$

$$\nabla_{c_1...c_m} \cap \nabla_{s_1...s_m} = \text{O}'$$

якщо існує $c_i \neq s_i$, для деякого $i \leq m$.

3. Структура розподілу випадкової величини ξ, G^2_∞-символи якої утворюють ланцюг Маркова

Розглядається випадкова величина

$$\xi = a_{\eta_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[a_{\eta_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\eta_j} \right] = \Delta_{\eta_1 \ldots \eta_k \ldots}, \tag{6}$$

де $a_0 = 0$, $a_k = \sum\limits_{j=-\infty}^{k-1} g_j$, η_k — випадкові величини, що набувають цілих значень і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_i > 0$, $i \in Z$, і матрицею перехідних ймовірностей $||p_{ik}||$.

Очевидно,що властивості розподілу ξ однозначно визначають нескінченновимірний стохастичний вектор $\vec{p} = (..., p_{-m}, ..., p_0, ..., p_m, ...)$ і нескінченна стохастична матриця $||p_{ik}||$.

Лема 1. *Функція розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ записується у вигляді*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \beta_{\alpha_1(x)} + p_{\alpha_1(x)} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)} \right], & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \tag{7}$$

де $\alpha_k(x)$ — k-ий G^2_∞-символ числа x, $\beta_{\alpha_1(x)} = \sum\limits_{i=-\infty}^{\alpha_1(x)-1} p_i$,
$\beta_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} = \sum\limits_{j=-\infty}^{\alpha_{k+1}(x)-1} p_{\alpha_k(x)j}$.

Доведення. Оскільки $F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\}$, а

$$\begin{aligned} \{\xi < x\} = \{\eta_1 < \alpha_1(x)\} &\bigcup \{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 < \alpha_2(x)\} \bigcup \ldots \\ \ldots &\bigcup \{\eta_j = \alpha_j(x), j = \overline{1, k-1}, \eta_k < \alpha_k(x)\} \bigcup \ldots, \end{aligned}$$

де події в правій частині рівності попарно несумісні і

$$P\{\eta_j = \alpha_j(x),\ j = \overline{1, k-1},\ \eta_k < \alpha_k(x)\} = \beta_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)},$$

то має місце рівність (7). □

Наслідок 1. *Якщо всі елементи матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ додатні, то функція розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ є строго зростаючою на $[0;1]$ і її спектр фрактальними властивостями не володіє. Якщо ж $p_{\tau s} = 0$, то $F(x)$ є постійною на кожному з інтервалів*

$$\nabla_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \tau s} = \left(\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \tau s(0)}; \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \tau (s+1)(0)} \right).$$

Лема 2. *Спектром* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є замикання множини*

$$A = \left\{x : x \in [0;1], \quad p_{\alpha_1(x)} > 0, \quad p_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} > 0 \; \forall\, k \in N\right\}.$$

Легко бачити, що розподіл випадкової величини ξ не завжди чистий.

Лема 3. *Розподіл випадкової величини* ξ *матиме атоми тоді і тільки тоді, коли існує нескінченний набір* G^2_∞*-знаків* $i_1, \ldots, i_m, \ldots$, $(i_j \in Z)$ *такий, що*

$$\prod_{j=1}^{\infty} p_{i_j i_{j+1}} > 0. \tag{8}$$

Доведення. Оскільки для довільної послідовності $\{i_k\}$, $i_k \in Z$, має місце рівність

$$P\{\xi = \Delta_{i_1 \ldots i_m \ldots}\} = \prod_{j=1}^{\infty} p_{i_j i_{j+1}},$$

то точка $\Delta_{i_1 \ldots i_m \ldots}$ є атомом тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{j=1}^{\infty} p_{i_j i_{j+1}} > 0$. □

Наслідок 2. *Якщо існує скінченний набір* G^2_∞*-знаків* $i_1, \ldots, i_m$, $(i_j \in Z)$ *такий, що*

$$p_{i_m i_1} = 1, \quad p_{i_1 i_2} = 1, \; \ldots, \quad p_{i_{m-1} i_m} = 1,$$

то точка $\Delta_{(i_1 i_2 \ldots i_m)}$ *є атомом розподілу випадкової величини* ξ.

4. Фрактальні властивості розподілу випадкової величини ξ

Займемося вивченням самоподібних (а отже, і фрактальних) властивостей спектра розподілу випадкової величини ξ для випадку, коли матриця перехідних ймовірностей має принаймні один нуль.

Далі, використовуватимемо позначення: $\Delta'_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \cap S_\xi$.

Теорема 1. *Якщо матриця перехідних ймовірностей* $||p_{ik}||$ *містить рівно один нуль* $(p_{c_1 c_2} = 0)$, *то випадкова величина* ξ *має сингулярний розподіл канторівського типу (C-типу), а її спектр* S_ξ *є* N*-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якого є розв'язком рівняння:*

(1)

$$\left(1 + g^x_{c_1}\right) \sum_{j \neq c_1} g^x_j = 1, \tag{9}$$

якщо $c_1 = c_2$;

(2)

$$g^x_{c_1} + g^x_{c_2} - g^x_{c_1} g^x_{c_2} + \sum_{c_1 \neq j \neq c_2} g^x_j = 1, \tag{10}$$

якщо $c_1 \neq c_2$.

Доведення. Згідно з лемою 2 з точністю до зчисленної множини має місец рівністьв

$$S_\xi = D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}] \equiv \{x: \ x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}, \quad \alpha_k\alpha_{k+1} \neq c_1c_2 \quad \forall k \in N\}.$$

1. Розглянемо випадок $c_1 = c_2$. Тоді

$$\begin{cases} D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}] = \left[\bigcup\limits_{j\neq c_1} \Delta'_j\right] \bigcup \left[\bigcup\limits_{j\neq c_1} \Delta'_{c_1j}\right], \\ \Delta'_j \overset{g_j}{\sim} D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}], \\ \Delta'_{c_1j} \overset{g_{c_1}g_j}{\sim} D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}], \end{cases} \tag{11}$$

і ”відрізки” правої частини останньої рівності попарно не перекриваються.

З співвідношень (11) випливає, що $D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}]$ є N-самоподібною множиною і її N-самоподібна розмірність є розв’язком рівняння (9). Оскільки ж, в даному випадку, N-самоподібна розмірність співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича, то має місце перше твердження теореми.

Зауважимо, що рівняння (9) завжди має єдиний додатний розв’язок, що належить $(0;1)$. Це випливає з неперервності і монотонності функції

$$f_1(x) = (1 + g^x_{c_1}) \sum_{j\neq c_1} g^x_j - 1 \quad \text{при} \ \ x \in [0;1],$$

оскільки $f_1(0) > 0, \quad f_1(1) < 0$.

Якщо ж $c_1 \neq c_2$, то

$$D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}] = \left[\bigcup_{j\neq c_1} \Delta'_j\right] \bigcup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{c_1\neq j\neq c_2} \Delta'_{\underbrace{c_1\ldots c_1}_{k}j}\right] \bigcup \Delta_{c_1c_1\ldots c_1\ldots},$$

$$\Delta'_j \overset{g_j}{\sim} D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}],$$

$$\Delta'_{\underbrace{c_1\ldots c_1}_{k}j} \overset{g^k_{c_1}g_j}{\sim} D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}].$$

Звідки випливає самоподібність множини $D[G^2_\infty, \overline{c_1c_2}]$ і те, що її самоподібна розмірність, яка співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича, задовольняє рівняння

$$\sum_{j\neq c_1} g^x_j + \frac{g^x_{c_1}}{1 - g^x_{c_1}} \sum_{c_1\neq j\neq c_2} g^x_j = 1.$$

Останнє ж рівносильне рівнянню (10), яке має єдиний додатний розв’язок на інтервалі $(0;1)$, що випливає з неперервності і монотонності функції

$$f_2(x) = g^x_{c_1} + g^x_{c_2} - g^x_{c_1}g^x_{c_2} + \sum_{c_1\neq j\neq c_2} g^x_j - 1,$$

оскільки $f_2(0) > 0, \quad f_2(1) < 0$.

З того, що, при виконанні умов теореми, спектр випадкової величини ξ є фрактальним ($\alpha_0(S_\xi) < 1$), випливає, що міра Лебега $\lambda(S_\xi) = 0$. Отже, розподіл не містить абсолютно неперервної компоненти. Разом з цим, він не має атомів, оскільки нуль в матриці $||p_{ik}||$ лише один. Тому він є сингулярним. $\square$

Теорема 2. *Для того щоб спектр S_ξ розподілу випадкової величини ξ мав нульову міру Лебега, необхідно і достатньо, щоб матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ мала принаймні один нуль.*

Доведення. *Необхідність* випливає з наслідка леми 1.

Достатність. Як легко бачити, досить довести для випадку, коли матриця $\|p_{ik}\|$ має лише один нуль. Тоді за теоремою 1 розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра S_ξ розподілу випадкової величини ξ є дробовим числом, тому $\lambda(S_\xi) = 0$. $\square$

Наслідок 3. *Якщо матриця перехідних ймовірностей $||p_{ik}||$ має принаймні один нуль, то розподіл випадкової величини ξ не містить абсолютно неперервної компоненти, а у випадку відсутності атомів має сингулярний розподіл канторівського типу.*

Наслідок 4. *Якщо розподіл випадкової величини ξ має атоми, то він не містить абсолютно неперервної компоненти.*

Теорема 3. *Якщо матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить нулі виключно в одному рядку ($p_{c\tau} = 0,\ \tau \in T \neq$ O$)$, то спектр S_ξ розподілу випадкової величини ξ є:*

1. N- самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(S_\xi)$ якого задовольняє рівняння

$$\sum_{j\neq c} g_j^x + g_c^x \sum_{\nu\in N\setminus T} g_\nu^x = 1, \quad \text{якщо} \ \ p_{cc} = 0, \tag{12}$$

2. майже N-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(S_\xi)$ якого задовольняє рівняння

$$\sum_{j\neq c} g_j^x + \frac{g_c^x}{1-g_c^x} \sum_{\substack{j\in N\setminus T\\ \nu\neq c}} g_\nu^x = 1, \qquad p_{cc} \neq 0. \tag{13}$$

Доведення. 1. При $p_{cc} = 0$

$$\begin{cases} S_\xi = \left[\bigcup\limits_{j\neq c} \Delta'_j\right] \bigcup \left[\bigcup\limits_{\nu\in N\setminus T} \Delta'_{c\nu}\right], \\ \Delta'_j \overset{g_j}{\sim} S_\xi, \\ \Delta'_{c\nu} \overset{g_c g_\nu}{\sim} S_\xi, \end{cases}$$

Звідки випливає, що S_ξ — N-самоподібна множина (оскільки принаймні одна з множин T або $N\setminus T$ нескінченна) і її самоподібна розмірність задовольняє рівняння (12) і, очевидно, менша 1. Отже, S_ξ — фрактал.

2. Нехай $p_{cc} \neq 0$. Тоді

$$\begin{cases} S_\xi = \left[\bigcup\limits_{j\neq c}\Delta'_j\right] \bigcup \left[\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\substack{\nu\in N\setminus T\\ \nu\neq c}} \Delta'_{\underbrace{c\ldots c}_{m}\nu}\right] \bigcup \Delta_{(c)}, \\ \Delta'_j \overset{g_j}{\sim} S_\xi, \\ \Delta'_{\underbrace{c\ldots c}_{m}\nu} \overset{k}{\sim} S_\xi, \quad k = g_c^m g_\nu. \end{cases}$$

Останнє є свідченням того, що S_ξ є майже N-самоподібною множиною, N-самоподібна розмірність (і розмірність Хаусдорфа-Безиковича) якої задовольняє рівняння

$$\sum_{j\neq c} g_j^x + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\nu\in N\setminus T\\ \nu\neq c}} g_c^{mx} g_\nu^x = 1,$$

яке рівносильне рівнянню (13). Оскільки ж вона співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича і менша 1, то S_ξ — фрактал. □

Теорема 4. *Якщо матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить нулі лише в одному стовпці ($p_{\tau s} = 0,\ \tau \in T$), то спектр S_ξ розподілу випадкової величини ξ є:*

1. кусково N-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(S_\xi)$ якого задовольняє рівняння

$$\sum_{j\neq s} g_j^x = 1, \quad \text{коли } T = N, \tag{14}$$

2. об'єднанням двох множин S'_ξ і S''_ξ, де S'_ξ є N-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(S'_\xi)$ якого задовольняє рівняння

$$\sum_{\substack{\nu\in N\setminus T\\ \nu\neq s}} g_\nu^x \sum_{\tau\in T} g_\tau^x - \left(1 - \sum_{\tau\in T} g_\tau^x\right)\left(1 - \sum_{\substack{\nu\in N\setminus T\\ \nu\neq s}} g_\nu^x\right) = 0, \tag{15}$$

S''_ξ є самоподібним фракталом, якщо T — скінченна множина та N-самоподібним фракталом, якщо T — нескінченна множина. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(S''_\xi)$ задовольняє рівняння $\sum\limits_{\tau\in T} g_\tau^x = 1$;

3. об'єднанням двох множин S'_ξ і S''_ξ, де S'_ξ є N-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(S'_\xi)$ якого задовольняє рівняння

$$\sum_{\nu\in N\setminus T} g_\nu^x \sum_{\tau\in T} g_\tau^x - \left(1 - \sum_{\substack{\tau\in T\\ \tau\neq s}} g_\tau^x\right)\left(1 - \sum_{\nu\in N\setminus T} g_\nu^x\right) = 0, \tag{16}$$

якщо $s \in T \neq N$. S''_ξ є самоподібним (N-самоподібним) фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(S''_\xi)$ якого задовольняє рівняння

$$\sum_{s\neq\tau\in T} g_\tau^x = 1.$$

Доведення. З означення кусково N-самоподібної множини і того, що

$$\begin{cases} S_\xi = \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j\neq s} \Delta'_{ij}\right]; \\ \tilde{\Delta}'_{ij} \overset{g_j}{\sim} \tilde{\Delta}'_i, \ j \neq s, \end{cases}$$

випливає перше твердження теореми.

З означення N-самоподібної множини, N-самоподібної розмірності і того, що

$$\begin{cases} S_\xi = \left[\bigcup_{\nu\in N\setminus T} \Delta'_\nu\right] \bigcup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\nu\neq s \\ (i_1,\ldots,i_m)\in T^m}} \Delta'_{i_1\ldots i_m\nu}\right] \bigcup C(T) = S'_\xi \bigcup C(T); \\ \Delta'_{i_1\ldots i_m\nu} \overset{k}{\sim} S'_\xi, \ k = g_\nu \prod_{c=1}^{m} g_{i_c}; \\ \Delta'_\nu \overset{g_\nu}{\sim} S'_\xi, \end{cases}$$

де $S''_\xi = C(T) = \{x: \ x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k \in T\}$, випливає друге твердження.

Аналогічно, з означення N-самоподібної множини, N-самоподібної розмірності і того, що

$$\begin{cases} S_\xi = \left[\bigcup_{\nu\in N\setminus T} \Delta'_\nu\right] \bigcup \left[\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{\tau\in\tau \\ (i_1,\ldots,i_m)\in A^m}} \Delta'_{\tau i_1\ldots i_m\nu}\right] \bigcup C(A) = S'_\xi \bigcup C(A); \\ \Delta'_{\tau i_1\ldots i_m\nu} \overset{k}{\sim} S'_\xi, \ k = g_\nu g_\tau \prod_{c=1}^{m} g_{i_c}; \\ \Delta'_\nu \overset{g_\nu}{\sim} S'_\xi; \ \text{де } A = T \setminus \{s\}, \end{cases}$$

випливає третє твердження. □

Теорема 5. *Якщо* $\mathrm{O} \neq T \neq Z$ *і матриця перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *має нулі, причому їх місця визначаються умовою*

$$p_{ij} = 0 \Leftrightarrow (i,j) \in T \times T,$$

то спектр S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є* N*-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича* $\alpha_0(S_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\left(1 + \sum_{\tau\in T} g_\tau^x\right) \sum_{\nu\in N\setminus T} g_\nu^x = 1. \tag{17}$$

Доведення. Твердження теореми 5 випливає з означення N-самоподібної множини, N-самоподібної розмірності, з урахуванням того, що

$$\begin{cases} S_\xi = \left[\bigcup_{\nu\in N\setminus T} \Delta'_\nu\right] \bigcup \left[\bigcup_{\nu\in N\setminus T} \bigcup_{\tau\in T} \Delta'_{\tau\nu}\right]; \\ \Delta'_\nu \overset{g_\nu}{\sim} S_\xi; \\ \Delta'_{\tau\nu} \overset{k}{\sim} S_\xi, \ k = g_\tau g_\nu. \end{cases}$$

□

Теорема 6. *Якщо* $\emptyset \neq T \neq N$ *і матриця перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *має нулі, причому їх положення визначається умовою*

$$p_{ij} = 0 \Leftrightarrow (i,j) \in T^2 \ \wedge \ i \neq j,$$

то спектр S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є* N*-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича* $\alpha_0(S_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\sum_{\nu \in N\setminus T} g_\nu^x \left[1 + \sum_{\tau \in T} g_\tau^x \left(1 - g_\tau^x\right)^{-1} \right] = 1. \tag{18}$$

Доведення. Легко бачити, що

$$\begin{cases} S_\xi = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \bigcup\limits_{\nu \in N\setminus T} \bigcup\limits_{\tau \in T} \Delta'_{\underbrace{\tau\ldots\tau}_{m}\nu} \cup \left[\bigcup\limits_{\tau \in T} \Delta_{(\tau)} \right]; \\ \Delta'_{\underbrace{\tau\ldots\tau}_{m}\nu} \overset{g_\tau^m q_\nu}{\sim} S_\xi. \end{cases}$$

Отже, S_ξ — майже N-самоподібна множина і її N-самоподібна розмірність задовольняє рівняння

$$\sum_{\nu \in N\setminus T} g_\nu^x \left[1 + \sum_{\tau \in T} \sum_{m=1}^{\infty} g_\tau^{mx} \right] = 1,$$

яке рівносильне рівнянню (18). Додатний розв'язок останнього рівняння менший 1. Тому, враховуючи, що N-СП-розмірність співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича, S_ξ є фракталом. □

Література

[1] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296с.

[2] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України, 1994. — С.245-254.

[3] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q_∞-знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України - НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998. — № 2. — С.36-48.

[4] *Працьовитий М.В.* Сингулярні і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, цифри поліосновного зображення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Укр. мат. журн. — 2000. — 52, № 3. — С.368-374.

[5] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.— Киев: Наук.думка, 1992.— 208с.

[6] *Фещенко О.Ю.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними символами своїх G^2_∞-кодів // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, $N^{\underline{o}}$ 6. — С.225-234.