Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 126–142.

УДК 519.21

Ергодичний підхід до дослідження сингулярних ймовірнісних мір

Г. В. Іваненко, Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

Анотація. У роботі розвиваються загальні методи доведення сингулярності та абсолютної неперервності (відносно міри Лебега) ймовірнісних мір, які є нелінійними проекціями продакт–мір.

Вводиться в розгляд та досліджується клас ймовірнісних мір з незалежними G–символами. Отримані результати застосовуються для встановлення лебегівської структури згорток Бернуллі з певних класів.

У роботі також розвиваються методи фрактального аналізу сингулярно неперервних ймовірнісних мір. Значну увагу приділено розвитку ергодичної теорії символьних динамічних систем та її застосуванню до вивчення мультифрактальних властивостей розподілів з незалежними Q–символами та розподілів, породжених випадковими ланцюговими дробами. Доведено, що міри з двох вищевказаних класів є мірами внутрішньо точної розмірності Хаусдорфа і обчислено точні значення відповідних розмірностей.

Abstract. We develop general methods for proving of singularity resp. absolute continuity (w.r.t. Lebesgue measure) of probability measures, which are non–linear projections of product–measures. A class of probability measures with independent G–symbols is introduced and studied. We apply the results to study the Lebesgue structure of Bernoulli convolutions from special classes.

We also develop methods of fractal analysis of singularly continuous probability measures. A special attention is paid to the development of ergodic theory of symbolic dynamical systems and its applications to the investigation of multifractal properties of probability distributions with independent Q–symbols and probability distributions generated by random continued fractions.

We prove that measures from the above mentioned two classes are measures of internally exact Hausdorff dimension. Sharp values of the corresponding dimensions are also calculated.

Робота частково підтримана проектами DFG 436 113/78, DFG 436 113/80 та фондом Олександра фон Гумбольдта

1. Вступ

Як відомо, існує лише три типи чистих імовірнісних розподілів: дискретні, сингулярно неперервні та абсолютно неперервні. Дискретні та абсолютно неперервні міри є найбільш вивченими типами розподілів (більш того, в багатьох підручниках з теорії ймовірностей клас неперервних розподілів помилково ототожнюють з класом абсолютно неперервних розподілів). Інтерес до сингулярно неперервних ймовірнісних мір, зародившись на початку XX–го століття відразу після створення теорії міри Лебега, періодично то спалахував, то дещо згасав протягом всього XX–го століття. Серед факторів, які стимулювали розвиток теорії сингулярних мір варто відзначити зв'язок цієї теорії з розв'язанням деяких проблем гармонічного аналізу і, зокрема, загальної теорії тригонометричних рядів, теорії динамічних систем, спектральної теорії сингулярних мір.

Особливо інтенсивно теорія сингулярних мір почала розвиватись в кінці XX–го століття у зв'язку з розвитком теорії фракталів, яка дала новий інструментарій досліджень.

Незважаючи на сторічну історію досліджень проблема доведення сингулярності все ще залишається актуальною для широких класів ймовірнісних розподілів.

Однією з важливих нерозв'язаних задач сучасної теорії ймовірностей була і залишається проблема знаходження необхідних і достатніх умов сингулярності випадкової величини, що є сумою збіжного (з імовірністю 1) ряду з незалежних дискретно розподілених випадкових величин. Ця проблема залишається нерозв'язаною навіть для значно вужчого класу мір: так званих нескінченних симетричних згорток Бернуллі (**[20]**). Зокрема, на сьогодні невідомо, чи існують дійсні числа $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$, для яких $\frac{1}{\lambda}$ не є числом Пізо і для яких випадкова величина $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \lambda^k$ (ξ_k — незалежно набувають значень ± 1 з ймовірностями $\frac{1}{2}$) має сингулярний розподіл.

У випадку ж доведення сингулярності, актуальними питаннями (для мотивації див. [**3, 2**]) є вивчення фрактальних властивостей відповідних мір.

Дана робота присвячена розвитку нових методів доведення сингулярності ймовірнісних розподілів та методів дослідження тонких мультифрактальних властивостей таких мір, які базуються на ергодичній теорії динамічних систем та методах досліджень нелінійних проекцій нескінченних добутків ймовірнісних мір.

Ефективність запропонованих методів ілюструється на прикладах досліджень тонких фрактальних властивостей випадкових величин з незалежними G–символами, спеціальних класів згорток Бернуллі та випадкових ланцюгових дробів.

Розвинені в статті методи фрактального аналізу сингулярних мір можуть бути перенесені на інші класи ймовірнісних мір.

2. Сингулярність та абсолютна неперервність нескінченних добутків ймовірнісних мір та їх проекцій.

2.1. Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$$

та

$$(\Omega, \mathcal{F}, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \nu_k).$$

Якщо існує $k_0 \in N$ таке, що μ_{k_0} і ν_{k_0} взаємно сингулярні, то, очевидно, міри μ і ν будуть також взаємно сингулярними. Якщо існує $k_1 \in N$ таке, що лебегівський розклад міри μ_{k_1} відносно міри ν_{k_1} містить ненульову сингулярну компоненту, то лебегівський розклад міри μ відносно міри ν теж буде містити ненульову сингулярну компоненту. Тому умова $\mu_k \ll \nu_k, \forall k \in N$ є необхідною умовою абсолютної неперервності μ відносно ν. Але ця умова, взагалі кажучи, не є достатньою.

[[**1**]] Нехай $\mu_k \ll \nu_k, \forall k \in N$. Міра μ чисто абсолютно неперервна відносно міри ν тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} \; d\nu_k \right] > 0 \tag{1}$$

Міра μ чисто сингулярна відносно міри ν у всіх інших випадках (тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток 1 розбігається до нуля).

Якщо існує $k_0 \in N$ таке, що міра μ_{k_0} є неперервною, то, очевидно, міра μ буде неперервною. Якщо існує $k_1 \in N$ таке, що лебегівський розклад міри μ_{k_1} містить ненульову неперервну компоненту, то розклад міри μ теж буде містити неперервну компоненту. Тому чиста дискретність всіх мір μ_k є необхідною умовою дискретності μ. Як показує наступна теорема ця умова, взагалі кажучи, не є достатньою.

[[**12**]] Нехай всі міри μ_k є чисто дискретними. Тоді міра μ є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{\omega_k \in \Omega_k} \mu_k(\omega_k) > 0. \tag{2}$$

В усіх інших випадках (коли нескінченний добуток 2 розбігається до нуля) міра μ є чисто неперервною. Комбінуючи дві останні теореми отримуємо критерій сингулярності неперервної міри μ відносно міри ν.

Нехай f — вимірне відображення з $(\Omega, \mathfrak{F})$ на R^1. Означимо міру μ^* на σ–алгебрі борелівських підмножин числової прямої наступним чином:

$$\forall E \in \mathcal{B}(R^1) : \mu^*(E) = \mu(f^{-1}(E)).$$

Міри $\mu^* := \mu(f^{-1})$ та $\nu^* := \nu(f^{-1})$ називаються образами мір μ та ν під дією відображення f. Першою задачею даної роботи є задача знаходження умов, при яких відображення f зберігає відношення сингулярності, абсолютної неперервності, дискретності та чистоти однієї міри відносно іншої.

Розв'яжемо ці задачі в дещо ширшій постановці. Нехай $(\Omega, \mathcal{F})$ — довільний вимірний простір, μ та ν — довільні ймовірнісні міри на цьому просторі, і вимірне відображення f діє з $(\Omega, \mathcal{F})$ в деякий вимірний простір $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$, на якому індукує міри $\mu^* := \mu(f^{-1})$ та $\nu^* := \nu(f^{-1})$.

Можна показати (**[12]**), що:

1) *Якщо* $\mu \ll \nu$, *то* $\mu^* \ll \nu^*$;

2) *Якщо* $\mu^* \perp \nu^*$, *то* $\mu \perp \nu$.

Імплікація $\mu^* \ll \nu^* \quad \Rightarrow \quad \mu \ll \nu$ може не виконуватись навіть у випадку, коли f є взаємно–однозначним вимірним відображенням (див. **[12]**).

Означення 1. Вимірне відображення $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega^*, \mathcal{F}^*)$ називається бівимірним, якщо $f(E) \in \mathcal{F}^*, \quad \forall E \in \mathcal{F}$.

Однієї бівимірності відображення f теж не достатньо для правильності вищенаведеної імплікації (в **[12]** наведено приклад бівимірного відображення, індукованого нескінченними згортками Бернуллі такого, що $\mu^* \ll \nu^*$, але $\mu \perp \nu$.)

Означення 2. Бівимірне відображення f називається T_ν–відображенням , якщо $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu^*(f(A)) = 0, \forall A \in \mathcal{F}$.

Теорема 1. *Якщо f є T_ν–відображенням, то $\mu << \nu \Leftrightarrow \mu^* << \nu^*$.*

Доведення. Оскільки імплікація $\mu << \nu \Rightarrow \mu^* << \nu^*$ правильна для довільного вимірного відображення f, то залишається довести, що для T_ν–відображення f має місце імплікація $\mu^* << \nu^* \Rightarrow \mu << \nu$.

Нехай A — довільна множина з $\mathcal{F}$ така, що $\nu(A) = 0$. Оскільки f є T_ν–відображенням, то $\nu^*(f(A)) = 0$. Так як $\mu^* << \nu^*$, то $\mu^*(f(A)) = 0$. Отже, $\mu(A) \le \mu(f^{-1}(f(A))) =: \mu^*(f(A)) = 0$. Тому $\mu << \nu$. □

Наслідок 1. *Нехай f — бівимірне відображення. Якщо існує вимірна підмножина $\Omega_0 \subset \Omega$ така, що $\nu(\Omega_0) = 0$ і відображення $f : (\Omega \backslash \Omega_0) \to \Omega^*$ є біективним, то f зберігає відношення сингулярності та абсолютної неперервності, тобто*

$$\mu \ll \tau \text{ тоді і тільки тоді, коли } \mu^* \ll \nu^* ,$$

$$\mu \perp \nu \text{ тоді і тільки тоді, коли } \mu^* \perp \nu^*.$$

Доведення. Якщо відображення f задовольняє умови наслідку, то f є T_ν–відображенням. □

Наслідок 2. *Нехай $M_\nu = \{x : x \in \Omega^*, \ \exists y_1(x) \in \Omega, y_2(x) \in \Omega : f(y_1(x)) = f(y_2(x)) = x\}$. Якщо $\nu^*(M_\nu) = 0$, то бівимірне відображення f зберігає відношення сингулярності та абсолютної неперервності.*

Наслідок 3. *Якщо f — бівимірне бієктивне відображення, то f зберігає відношення сингулярності та абсолютної неперервності.*

Застосувавши теорему 1, транзитивність відношення абсолютної неперервності та теорему А, отримуємо наступний результат.

Теорема 2. *Нехай $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ та $(\Omega,\mathcal{F},\nu)$ — ймовірнісні простори, f є T_ν–відображенням з Ω в R^n і міра ν^* еквівалентна n–мірній мірі Лебега λ_n. Тоді $\mu^*\ll\lambda_n$ тоді і тільки тоді, коли $\mu\ll\nu$.*

Зокрема, якщо $(\Omega,\mathcal{F},\mu)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(\Omega_k,\mathcal{F}_k,\mu_k)$ та $(\Omega,\mathcal{F},\nu)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(\Omega_k,\mathcal{F}_k,\nu_k)$, то при виконанні умов теореми $\mu^*<<\lambda_n$ тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[\int_{\Omega_k}\sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}}\ \ d\nu_k\right]>0$.

Застосуємо теорему 2 для знаходження умов абсолютної неперервності та сингулярності деяких класів випадкових величин.

2.2. Клас випадкових величин з незалежними G−символами. Введемо в розгляд G−зображення дійсних чисел з одиничного відрізка, яке є в певній мірі аналогом $\widetilde{Q}$–зображення дійсних чисел, але більш зручне в застосуваннях.

Розглянемо матрицю $G=\|g_{ik}\|$, $i\in N_0=N\bigcup\{0\}$, $k\in N$, елементи якої задовольняють наступні умови:

$$g_{ik}\geq 0\ ,\ i\in N_0,\ k\in N; \tag{3}$$

$$\sum_i g_{ik}=1,\forall k\in N; \tag{4}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{g_{ik}\}=0. \tag{5}$$

Для заданої стохастичної матриці G здійснюємо розбиття $[0,1]$ наступним чином.

Крок 1. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ (зліва направо) на відрізки $\Delta^G_{i_1}$, (без спільних внутрішніх точок) з довжинами $\left|\Delta^G_{i_1}\right|=g_{i_1 1}$,

$$[0,1]=\bigcup_{i_1}\Delta^G_{i_1}.$$

Кожен відрізок $\Delta^G_{i_1}$ називатимемо *циліндром першого рангу G–представлення.*

Крок $k\geq 2$. Розіб'ємо (послідовно зліва направо) кожен циліндр $\Delta^G_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}}$ рангу $(k-1)$ G–представлення на *циліндри k–го рангу* $\Delta^G_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}i_k}$, таким чином, що

$$\left|\Delta^G_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}i}\right|:\left|\Delta^G_{i_1 i_2\ldots i_{k-1}j}\right|=g_{ik}:g_{jk},\forall i,j.$$

Очевидно, що

$$\left|\Delta^G_{i_1 i_2\ldots i_k}\right|=g_{i_1 1}\cdot g_{i_2 2}\cdots g_{i_k k}=\prod_{s=1}^{k}g_{i_s s}, \tag{6}$$

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$ існує послідовність вкладених відрізків

$$\Delta^G_{i_1} \supset \Delta^G_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \Delta^G_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \cdots$$

таких, що $|\Delta^G_{i_1 \ldots i_k}| \to 0$, $k \to \infty$, згідно з (5). Таким чином, існує єдина точка $x \in [0,1]$, що належить всім відрізкам $\Delta^G_{i_1}$, $\Delta^G_{i_1 i_2}$, ..., $\Delta^G_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, ...

І навпаки, для будь–якої точки $x \in [0,1]$ існує послідовність вкладених відрізків $\Delta^G_{i_1} \supset \Delta^G_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta^G_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \ldots$, що містять x, тобто,

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^G_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^G_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} =: \Delta^G_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots}. \tag{7}$$

Позначення (7) будемо називати $G-$*представленням* точки $x \in [0,1]$.

Очевидно, що при $g_{i1} = 0$, відповідний циліндр першого рангу є точкою. Аналогічна ситуація і з циліндрами вищих рангів. Така ситуація може призвести до того, що деякі точки з $[0,1]$ мають континуальну кількість різних G–зображень (наприклад, при $g_{01} = \frac{1}{2}, g_{11} = 0$ точка $x = \frac{1}{2} = \Delta^G_{1\ i_2\ \ldots\ i_k\ \ldots}, i_2 \in N_0, i_3 \in N_0, \ldots)$. Якщо використовувати G–зображення з метою кодування чисел одиничного відрізка, то цей "недолік"(наявність у деяких точок континуальної кількості зображень) легко виправляється простою модифікацією G–зображення.

Нехай $A_k = \{i : i \in N_0, \quad g_{ik} > 0\}$. Впорядкуємо A_k в порядку зростання елементів. $A := \prod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Зображення $x \in [0,1]$ у вигляді

$$x = \Delta^G_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots, \quad \mathbf{i_k(x) \in A_k}} \tag{8}$$

називається G_A- *зображенням* точки x.

Зауваження 1. *Якщо серед множин $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ існує нескінченна кількість множин, що містять нескінченну кількість елементів, то відповідність $[0,1] \in x \Leftrightarrow \{(i_1(x), i_2(x), ..., i_k(x), ...)\}$ в (5) є бієктивною, тобто, G_A-зображення єдине для кожної точки $x \in [0,1]$. В іншому випадку існує зчисленна множина точок $x \in [0,1]$, що мають два різних G_A-зображення.*

Зауваження 2. *G–зображення точок одиничного відрізка індукується наступним бівимірним відображенням f: $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...) \in (N_0)^\infty$*

$$f(\omega) = \sum_{i<\omega_1} g_{i1} + g_{\omega_1 1} \sum_{i<\omega_2} g_{i2} + \ldots + g_{\omega_1 1} \cdot g_{\omega_2 2} \cdot \ldots \cdot g_{\omega_k k} \sum_{i<\omega_{k+1}} g_{i(k+1)} + \ldots \quad , \tag{9}$$

а G_A-зображення індукується відображенням f_A: $\forall a = (a_1, a_2, ..., a_k, ...) \in A$

$$f_A(a) = \sum_{i<a_1} g_{i1} + g_{a_1 1} \sum_{i<a_2} g_{i2} + \ldots + g_{a_1 1} \cdot g_{a_2 2} \cdot \ldots \cdot g_{a_k k} \sum_{i<a_{k+1}} g_{i(k+1)} + \ldots \quad . \tag{10}$$

Зауваження 3. *Якщо матриця G має властивість $g_{ik} = 0 \Rightarrow g_{(i+1)k} = 0$ (тобто всі ненульові елементи матриці G зосереджені на початку відповідних стовпчиків), то G_A–зображення співпадає з $\widetilde{Q}$–представленням. Тому зрозуміло, що G_A–зображення є узагальненням класичного s–адичного розкладу, Q–зображення та Q^*–зображення. Переваги G– та G_A– зображень будуть показані нижче при дослідженні ймовірнісних мір зі складною локальною будовою, зокрема при дослідженні згорток Бернуллі.*

Для фіксованої матриці G, нехай ξ— випадкова величина з незалежними G–символами ξ_k:

$$\xi = \Delta^G_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}, \tag{11}$$

де ξ_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень з множини $0, 1, 2, ..., n, ...$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{nk}, ...$ $\quad (\sum\limits_i p_{ik} = 1)$, причому $p_{ik} = 0, \forall i \notin A_k$.

Нехай $\Omega_k = N_0, \mathcal{F} = 2^{\Omega_k}, \mu_k(i) = p_{ik}, \nu_k(i) = g_{ik}$, де числа p_{ik} та g_{ik} є елементами вище означених матриць $P = \|p_{ik}\|$ та G. Відображення f, задане рівністю (9) індукує вимірний простір $([0, 1], \mathcal{B})$ з ймовірнісними мірами μ^* і ν^*, які є образами продакт–мір μ та ν, причому міра μ^* співпадає з розподілом випадкової величини ξ .

Теорема 3. *Випадкова величина ξ має чистий розподіл, причому*
ξ чисто дискретно розподілена тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0;$$

ξ чисто абсолютно неперервно розподілена тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_i \sqrt{p_{ik} g_{ik}} > 0;$$

ξ чисто сингулярно неперервно розподілена в усіх інших випадках.

Доведення. Оскільки $p_{ik} = 0, \forall i \notin A_k$, то $\mu_k \ll \nu_k, \forall k \in N$. Тому $\mu \ll \nu \quad \Leftrightarrow$ виконується умова (1), що еквівалентно збіжності нескінченного добутку $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_i \sqrt{p_{ik} g_{ik}}$.

Міра ν^* співпадає з мірою Лебега на $[0, 1]$ (за побудовою). Крім того, множина M_ν тих точок одиничного відрізка, які мають не єдине G–зображення, є не більше як зчисленною і тому $\nu^*(M_\nu) = 0$. Оскільки відображення (9) є бівимірним, то безпосереднє застосування наслідку 2 теореми 2 завершує доведення критерію абсолютної неперервності міри μ^* відносно міри Лебега.

Нехай $(A, \mathcal{A}, \mu_A) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} (A_k, 2^{A_k}, \mu_k)$. Для доведення критерію дискретності зауважимо, що міра $\mu^*_A := \mu(f_A^{-1})$ співпадає з мірою μ^*, де відображення f_A задано формулою (10). Оскільки кожна точка одиничного відрізка має не більше двох прообразів в множині A і згідно теореми В міра μ_A є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i p_{ik} > 0$, то міра μ^* є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли останній нескінченний добуток збігається. □

2.3. Нескінченні згортки Бернуллі та випадкові величини з незалежними G–символами.

Розглянемо два класи нескінчених згорток Бернуллі.

2.3. a) Нехай $\eta = \sum\limits_k \eta_k a_k$, де $\{\eta_k\}$— послідовність незалежних випадкових величин, що набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p'_{0k} та p'_{1k} відповідно, $\sum\limits_k a_k = 1$ — збіжний знакододатний ряд, для якого $a_k \geq r_k := a_{k+1} + a_{k+2} + ..., \forall k \in N$.

У цьому випадку ймовірнісна міра μ_η є мірою з незалежними G–символами, причому матриці G і P мають наступну структуру:

$$g_{0k} = \frac{r_k}{r_{k-1}}, \quad g_{1k} = \frac{a_k - r_k}{r_{k-1}}, \quad g_{2k} = \frac{r_k}{r_{k-1}} \quad ;$$

$$p_{0k} = p'_{0k}, \quad p_{1k} = 0, \quad p_{2k} = p'_{1k}.$$

Застосувавши попередню теорему, отримаємо висновок:

випадкова величина η чисто дискретно розподілена тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p'_{ik} > 0;$$

η чисто абсолютно неперервно розподілена тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_i \sqrt{p'_{ik} \frac{r_k}{r_{k-1}}} = \lim_{k \to \infty} \sqrt{r_k} \prod_{j=1}^{k} (\sqrt{p'_{0j}} + \sqrt{p'_{1j}}) > 0;$$

η чисто сингулярно неперервно розподілена в усіх інших випадках.

2.3. b) Нехай $\eta = \sum\limits_k \eta_k a_k$, де $\{\eta_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, що набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p'_{0k} та p'_{1k} відповідно, $\sum\limits_k a_k = 1$ — збіжний знакододатний ряд, для якого виконуються умови

$$\begin{cases} a_{3k-2} = a_{3k-1} + a_{3k}, \\ r_{3k-1} \leq a_{3k-1}, \\ r_{3k} \leq a_{3k}, \quad k \in N. \end{cases} \tag{12}$$

Дослідженню даної випадкової величини була присвячена робота [**13**]. Можна показати, що у цьому випадку ймовірнісна міра μ_η є мірою з незалежними G–символами, причому матриця G має наступну структуру:

$$g_{0k} = g_{2k} = g_{4k} = g_{6k} = g_{8k} = g_{10,k} = g_{12,k} = \frac{r_{3k}}{r_{3k-3}},$$

$$g_{1k} = g_{5k} = g_{7k} = g_{11,k} = \frac{a_{3k} - r_{3k}}{r_{3k-3}},$$

$$g_{3k}=g_{9k}=\frac{a_{3k-1}-r_{3k-1}}{r_{3k-3}};$$

а матриця P наступну:

$$p_{1k}=p_{3k}=p_{5k}=p_{7k}=p_{9k}=p_{11,k}=p_{13,k}=0,$$

$$p_{0k}=p'_{0,3k-2}p'_{0,3k-1}p'_{0,3k},\; p_{2k}=p'_{0,3k-2}p'_{0,3k-1}p'_{1,3k},\; p_{4k}=p'_{0,3k-2}p'_{1,3k-1}p'_{0,3k},$$

$$p_{6k}=p'_{0,3k-2}p'_{1,3k-1}p'_{1,3k}+p'_{1,3k-2}p'_{0,3k-1}p'_{0,3k},$$

$$p_{8k}=p'_{1,3k-2}p'_{0,3k-1}p'_{1,3k},\; p_{10,k}=p'_{1,3k-2}p'_{1,3k-1}p'_{0,3k},\; p_{12,k}=p'_{1,3k-2}p'_{1,3k-1}p'_{1,3k}.$$

Розподіл випадкової величини η також є мірою з незалежними $\widetilde{Q}$–символами, але процес формального опису відповідних матриць $\widetilde{Q}$ та $\widetilde{P}$ є з технічного боку значно більш громіздкий (див., наприклад [**13**]). Застосувавши попередню теорему, отримуємо необхідні і достатні умови дискретності, абсолютної неперервності та сингулярності. Додатковий аналіз (див. [**13**]) показує, що для вищевказаних матриць G і P нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty}\sum_i\sqrt{p_{ik}g_{ik}}$ буде завжди розбігатися до нуля. Отже, випадкова величина η або чисто дискретно розподілена (тоді і тільки тоді, коли $\prod_{k=1}^{\infty}\max_i p'_{ik}>0$) або сингулярно неперервно розподілена (в усіх інших випадках).

Для застосування теореми 2 необхідно, щоб образ ν^* однієї з продакт–мір був еквівалентним мірі Лебега. Тому в деяких ситуаціях теорема 2 не може бути використана для знаходження умов сингулярності та абсолютної неперервності продакт–мір. Наприклад, ймовірнісна міра μ^*, що відповідає розподілу випадкового елементарного ланцюгового дробу, тобто випадковій величині

$$\eta=\frac{1}{\eta_1+\frac{1}{\eta_2\;+\;\frac{1}{\eta_3+\;\dots}}} \tag{13}$$

(де незалежні випадкові величини η_k набувають значень $1,2,3,\dots$ з ймовірностями $p_{1k},\ p_{2k},p_{3k},\dots$ відповідно), є, очевидно, образом продакт–міри μ з простору $(\Omega,\mathcal{F},\mu)=\prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k,\mathcal{F}_k,\mu_k)$ з $\Omega_k=N,\mu_k(i)=p_{ik}$ при наступному бівимірному відображенні f :

$$\forall\ \ w=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_k,...)\in\Omega:\quad f(\omega)=f(\omega_1,\omega_2,...,\omega_k,...)\ =\ \frac{1}{\omega_1+\frac{1}{\omega_2\;+\;\frac{1}{\omega_3\;\;+\;\;\dots}}}$$

Але серед мір μ^* немає жодної, яка була б абсолютно неперервною до міри Лебега на одиничному відрізку. Для глибшого аналізу (в тому числі і фрактального) таких мір використаємо методи ергодичної теорії динамічних систем, яким і присвячується наступний розділ.

3. Динамічні системи, породжені перетворенням зсуву в нескінченних добутках ймовірнісних просторів та їх проекцій

Розглянемо нескінченний добуток ймовірнісних просторів

$$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega', \mathfrak{F}', \mu_k)$$

і розглянемо перетворення зсуву T :

$$\forall \;\; w = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...) \in \Omega : \quad T(\omega) = (\omega_2, \omega_3, \ldots).$$

Нехай $T^{-1}A = \{\omega : T\omega \in A\}, A \in \mathcal{F}$. Нагадаємо, що множина A називається інваріантною або нерухомою відносно перетворення T, якщо $A = T^{-1}A$. Міра μ називається ергодичною відносно перетворення T, якщо довільна інваріантна множина $A \in \mathfrak{F}$ є множиною або нульової або одиничної міри. Міра μ називається інваріантною відносно перетворення T, якщо для довільної множини $E \in \mathfrak{F}$ виконується рівність $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$.

Теорема 4. *1) Продакт–міра μ є ергодичною відносно перетворення T.*

2) Якщо $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = ...$, то продакт–міра μ буде інваріантною відносно перетворення T.

Доведення. 1) Нехай множина A є нерухомою відносно перетворення T, тобто $T^{-1}A = A, A \in \mathfrak{F}$. Тоді $T(T^{-1}A) = T(A)$ і $A = TA$. Тому $A = T^{-1}A = T^{-1}(TA)$.

Якщо $\omega \in A$, то $T^{-1}(T\omega) = \Omega' \times \omega_2(\omega) \times \omega_3(\omega) \times ... \;\; \in A$.

Тому належність ω до інваріантної множини A не залежить від першої "координати"точки ω. Аналогічно доводиться, що належність ω до нерухомої множини A не залежить від перших n "координат"ω. Тому множина A є залишковою, і за законом нуля і одиниці Колмогорова, $\mu(A) = 0$ або $\mu(A) = 1$. Отже, μ ергодична відносно перетворення T.

2) Оскільки σ-алгебра $\mathcal{F}$ породжується системою циліндрів, тобто множин виду $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n \times \Omega' \times \Omega' \times \Omega' \times ..., K_n \in \mathcal{F}'$, то досить показати інваріантність міри на циліндрах ([**7**]). Очевидно, що $\mu(K) = \mu_1(K_1) \cdot \mu_2(K_2) \cdot ... \cdot \mu_n(K_n)$. Оскільки

$$T^{-1}(K) = \Omega' \times K_1 \times K_2 \times ... \times K_n \times \Omega' \times \Omega' \times \Omega' \times ...,$$

то

$$\mu(T^{-1}(K)) = \mu_1(\Omega') \cdot \mu_2(K_1) \cdot \mu_3(K_2) \cdot ... \cdot \mu_{n+1}(K_n) = \mu(K),$$

що і треба було довести. □

Теорема 5 ([**7**]). *Дві ергодичні інваріантні відносно перетворення T ймовірнісні міри або співпадають або взаємно сингулярні.*

Наслідок 4. *Дві довільні інваріантні (відносно T) продакт–міри μ і ν або співпадають, або взаємно сингулярні.*

Нехай

$$A^1(\omega) = T^{-1}(T(\omega)), \quad A^2(\omega) = T^{-2}(T^2(\omega)), ..., A^n(\omega) = T^{-n}(T^n(\omega)), ... \quad ,$$

$$A(\omega) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n(\omega).$$

За побудовою, множина $A(\omega)$ містить саму точку ω і всі точки з Ω, які відрізняються від ω скінченною кількістю координат. Аналогічно означаємо

$$A(E) = \{y : y \in A(\omega), \omega \in E\}.$$

Множина $A(E)$ є залишковою.

Твердження 1. *Якщо для міри λ виконується імплікація*

$$\lambda(E) = 0 \Rightarrow \lambda(T^{-1}E) = \lambda(T(E)) = 0, \tag{14}$$

то продакт–міра μ є мірою чистого типу відносно міри λ.

Доведення. Якщо існує така точка z, що $\mu(z) > 0$, тоді $\mu(A(z)) = 1$, оскільки $z \in A(z)$ і $A(z)$ є залишковою. У цьому випадку μ є чисто дискретною. Якщо такої точки не існує, то міра μ неперервна.

Якщо для довільної вимірної множини E з умови $\lambda(E) = 0$ випливає рівність $\mu(E) = 0$, то міра μ буде абсолютно неперервною відносно міри λ.

Якщо ж існує множина E така, що $\lambda(E) = 0$ і при цьому $\mu(E) > 0$, то $\mu(A(E)) = 1$, оскільки $E \subset A(E)$.

$$\lambda(A(E)) = \lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n(E)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A^n(E)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(T^{-n}(T^n(E))).$$

З умови (14) і $\lambda(E) = 0$ випливає, що $\lambda(TE) = 0$. Тому $\lambda(T^{-1}(TE)) = 0$.

З того, що $\lambda(TE) = 0$ також слідує $\lambda(T^2E) = 0$. Тому $\lambda(T^{-1}(T^2E)) = 0$ і $\lambda(T^{-2}(T^2E)) = 0$. Аналогічно доводиться, що $\lambda(T^{-n}(T^n(E))) = 0$.

Отже, $\lambda(A(E)) = 0$, і тому міри μ та λ є взаємно сингулярними. □

4. Застосування ергодичної теорії до дослідження фрактальних властивостей сингулярних ймовірнісних мір

Покажемо яким чином методи ергодичної теорії динамічних систем можна використати для встановлення факту сингулярності ймовірнісних мір та дослідження їх фрактальних властивостей.

4.1

Нехай

$$\xi = \Delta^Q_{\xi_1\xi_2...\xi_{...}}$$

— випадкова величина з незалежними однаково розподіленими Q–знаками ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k, ..., які набувають значень $0, 1, \dots, s-1$ з ймовірностями $p_0, p_1, \dots, p_{s-1}$. Дана випадкова величина належить до вищеописаного класу випадкових величин з незалежними G–символами (у цьому випадку $g_{0k} = q_0, g_{1k} = q_1, \dots, g_{s-1,k} = q_{s-1}; g_{ik} = 0, \forall i \geq s, \forall k \in N$). Дивись також **[2]** для огляду деяких властивостей розподілу випадкової величини ξ.

Теорема 6. *1) Якщо $p_0 = q_0, p_1 = q_1, \dots, p_{s-1} = q_{s-1}$, то ξ рівномірно розподілена на $[0, 1]$. В усіх інших випадках ξ сингулярно розподілена.*

2) Міра μ_ξ є мірою точної розмірності Хаусдорфа і для довільної точки x спектра S_ξ має місце рівність:

$$\dim_H(\mu_\xi, x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i}{\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_i \ln q_i}.$$

Доведення. Перше твердження теореми очевидне. Сингулярність μ_ξ у випадку $p_i \neq q_i$ для деякого $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ є прямим наслідком теореми 3. Дослідимо фрактальні властивості міри μ_ξ. Для цього розглянемо поведінку границі

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi\big(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)}\big)}{\ln \lambda\big(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)}\big)},$$

де $\Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)}$ — циліндричний відрізок Q–представлення, що містить точку $x \in [0, 1]$, а λ — міра Лебега.

Нехай $\Omega_k = \{0, 1, \dots, s-1\}$, $\mathfrak{F}_k = 2^{\Omega_k}$, $\mu_k(i) = p_i$, $\nu_k(i) = q_i$, $\forall i \in \Omega_k$. Розглянемо бівимірне відображення $\varphi : (\Omega, \mathfrak{F}) \to ([0, 1], \mathfrak{B})$, яке задане наступним чином

$$\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots) \in \Omega$$

$$\varphi(\omega) = \Delta^Q_{\omega_1\omega_2\dots\dots}.$$

Відображення φ визначає образ–міри $\mu^* = \mu(\varphi^{-1})$ та $\nu^* = \nu(\varphi^{-1})$ та перетворення зсуву T^*

$$T^*(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)\dots}) = \Delta^Q_{\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)\dots}.$$

Міра μ^* співпадає з мірою μ_ξ (за побудовою), а міра ν^* співпадає з мірою Лебега λ (за першою частиною теореми).

Оскільки міри μ_ξ і λ є ергодичними та інваріантними відносно T^*, то, згідно з ергодичною теоремою, для μ_ξ–майже всіх $x \in [0, 1]$ має місце рівність

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^{*i}x) = \int_0^1 f(x)d\mu_\xi$$

для довільної функції f з простору $L_1([0, 1], d\mu_\xi)$.

Виберемо $f(x) = \ln q_{\alpha_1(x)} = \ln q_i$, при $x \in \Delta_i^Q$. Обчислимо $\int\limits_0^1 f(x)d\mu_\xi = \sum\limits_{i=0}^{s-1} \int\limits_{\Delta_i} \ln q_i \; d\mu_\xi(x) = \sum p_i \ln q_i$. З іншого боку,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^{*i}x) = \frac{\ln q_{\alpha_1(x)} + \ln q_{\alpha_2(x)} + \ldots + \ln q_{\alpha_n(x)}}{n} = \frac{\ln \lambda(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)})}{n}.$$

Поклавши $f(x) = \ln p_{\alpha_1(x)}$, отримаємо:

$$\int_0^1 f(x)d\mu_\xi = \sum_{i=0}^{s-1}\int_{\Delta_i} \ln p_i \; d\mu_\xi(x) = \sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i.$$

З іншого боку,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^{*i}x) = \frac{\ln p_{\alpha_1(x)} + \ln p_{\alpha_2(x)} + \ldots + \ln p_{\alpha_n(x)}}{n} = \frac{\ln \mu_\xi(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)})}{n}.$$

Отже, для μ_ξ–майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\ln \mu_\xi(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\frac{1}{k}\ln \lambda(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i}{\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_i \ln q_i} = \alpha_0(\mu_\xi)$$

Тому (див. [**3**]), міра μ_ξ є мірою внутрішньо точної розмірності $\alpha_0(\mu_\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i}{\sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln q_i}$ (тобто існує носій міри μ_ξ, який має розмірність $\alpha_0(\mu_\xi)$ і для довільної вимірної множини E з $\alpha_0(E) < \alpha_0(\mu_\xi)$ має місце рівність $\mu_\xi(E) = 0$).

Теорема доведена. □

Наслідок 5. *Для довільної точки спектра S_ξ випадкової величини ξ локальна розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ є постійною і* $\dim_H(\mu, x) = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i}{\sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln q_i}$.

Доведення. Нагадаємо ([**3**]), що ймовірнісна міра μ називається мірою зовнішньо точної розмірності Хаусдорфа, якщо для довільної точки x спектра міри μ локальна розмірність Хаусдорфа міри μ в точці x співпадає з глобальною розмірністю Хаусдорфа цієї міри, тобто

$$\dim_H(\mu, x) = \dim_H \mu, \;\; \forall x \in S_\mu.$$

В [**3**] доведено, що довільна міра внутрішньо точної розмірності α_0 є мірою зовнішньо точної розмірності α_0.

Твердження доведене. □

4.2

Нехай $\psi = \frac{1}{\psi_1+\frac{1}{\psi_2+\ldots+\frac{1}{\psi_k+\ldots}}} = \Delta^{c.f.}_{\psi_1\psi_2\ldots\psi_k\ldots}$ — випадкова величина з незалежними однаково розподіленими елементами ψ_k, які набувають значень $1, 2, \ldots, k, \ldots$ з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ відповідно. Нехай μ_ψ— ймовірнісна міра, що відповідає випадковій величині ψ.

Теорема 7. *1) При довільному виборі стохастичного вектора $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ ймовірнісна міра μ_ψ є сингулярною відносно міри Лебега (дискретною, якщо $p_i = 1$ для деякого $i \in N$ і сингулярно неперервною в іншому разі).*

2) Якщо випадкова величина ψ_1 має скінченну ентропію, то при довільному виборі вектора p ймовірнісна міра μ_ψ є мірою внутрішньо точної розмірності Хаусдорфа і для довільної точки x спектра S_ψ має місце рівність:

$$\dim_H(\mu_\psi, x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \ln p_i}{2\int\limits_0^1 \ln x \; d\mu_\psi(x)}. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $\Omega_k = N, \mathfrak{F} = 2^{\Omega_k}, \mu_k(i) = p_i, \forall i \in N$;

$$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathfrak{F}, \mu_k).$$

Розглянемо перетворення T: $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots) \quad T(\omega) = (\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k, \ldots)$. Згідно доведеної раніше теореми міра μ є ергодичною і інваріантною відносно T. Розглянемо бівимірне відображення f,

$$\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots): \quad f(\omega) = \Delta^{c.f.}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k,\ldots}.$$

Відображення f породжує образ–міру $\mu^* = \mu(f^{-1})$ та перетворення зсуву T_* на $[0, 1]$:

$$T_*(\Delta^{c.f}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots}) = \Delta^{c.f}_{\omega_2\omega_3\ldots\omega_k\ldots}.$$

Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою μ_ψ (за побудовою), яка є ергодичною та інваріантною відносно перетворення T_*.

Як відомо ([**7**], ст. 43–45) міра Гауса (тобто ймовірнісна міра зі щільністю $\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{1+x}$ на $[0, 1]$) є також інваріантною і ергодичною відносно перетворення T_*. Оскільки дві ймовірнісні інваріантні і ергодичні відносно перетворення T_* міри або співпадають, або є взаємно сингулярними і міра μ_G є еквівалентною мірі Лебега на $[0, 1]$ (тобто $\mu_G \ll \lambda$ і $\lambda \ll \mu_G$), то міра μ_ψ взаємно сингулярна з мірою Лебега при довільному виборі стохастичного вектора $p = (p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots)$.

Згідно з ергодичною теоремою Біркгофа, для довільної функції $g(x)$ з $L_1([0, 1], d\mu_\psi)$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) = \int\limits_0^1 g(x) d\mu_\psi(x)$$

для μ_ψ–майже всіх $x \in [0,1]$. Вибравши $g(x) = g(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \ln p_{\alpha_1(x)}$, маємо

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) = \tfrac{1}{n}(\ln p_{\alpha_1(x)} + \ldots + \ln p_{\alpha_n(x)}) = \tfrac{1}{n}\ln \mu_\psi(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)});$$

$$\int_0^1 g(x)d\mu_\psi(x) = \int_0^1 \ln p_{\alpha_1(x)} d\mu_\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta_i^{c.f.}} \ln p_i d\mu_\psi(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta_i^{c.f.}} \ln p_i d\mu_\psi(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i =: \sum_{i=1}^{\infty} p_i \ln p_i.$$

Отже, для μ_ψ–майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \mu_\psi(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \ln p_i. \tag{16}$$

Для дослідження поведінки границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \lambda(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}),$$

нагадаємо (**[7]**, **[25]**), що для $x = \Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ має місце рівність

$$\lambda(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \frac{1}{q_n(x)\cdot(q_n(x)+q_{n-1}(x))}, \tag{17}$$

де $q_n(x)$—знаменник підхідного дробу n–го порядку числа x.

Відомо (див. **[8]**, ст. 46), що

$$\frac{1}{n}\ln q_n(x) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\ln(T_*^i x) + 4\cdot\frac{\theta}{n}, \tag{18}$$

де $\theta = \theta(x,n)$ за модулем не перевищує одиниці. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln q_n(x) = \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(T_*^i x)).$$

З іншого боку, для функції $g(x) = \ln x$ маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(T_*^i x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x d\mu_\psi(x) =: \int_0^1 \ln x d\mu_\psi(x).$$

для μ_ψ–майже всіх $x \in [0,1]$.

Отже, для μ_ψ–майже всіх $x \in [0,1]$ має місце

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}\ln \lambda(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln q_n(x) + \ln(q_n(x)+q_{n-1}(x)) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln q_n(x) + \ln 2q_n(x)) = 2\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}\sum_{i\to\infty}^{n-1}\ln T_*^i x) = -2\int_0^1 \ln x d\mu_\psi(x).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \mu_\psi(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln \mu_\psi(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\frac{1}{n}\ln \lambda(\Delta^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln p_i}{2\int\limits_{1/n}^{1} \ln x d\mu_\psi(x)} =: \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \ln p_i}{2\int\limits_{0}^{1} \ln x d\mu_\psi(x)},$$

тобто μ_ψ є мірою внутрішньо точної розмірності Хаусдорфа $\frac{\sum_{i=1}^{\infty} p_i \ln p_i}{2\int_0^1 \ln x d\mu_\psi(x)}$. Тоді, з теореми 3 з [**3**] випливає, що

$$\dim_H(\mu_\psi, x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \ln p_i}{2\int\limits_{0}^{1} \ln x d\mu_\psi(x)}, \quad \forall x \in S_\psi.$$

Теорема доведена. □

Література

[1] *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures // Ann. of Math., **49**(1948), P.214-224.

[2] *Торбін Г.М.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними Q^*-знаками // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 3, 2002. — С. 363-375.

[3] *Торбін Г.М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних ймовірнісних мір // Український математичний журнал, **57** (2005), no. 5, P.837–857.

[4] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\widetilde{Q}$-representation of real numbers and fractal probability distributions //submitted to J. Funct. Anal., Preprint SFB-611, Bonn (http://front.math.ucdavis.edu/0308.5007).

[5] *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 248-264.

[6] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math., **129** (2005), no.4, P.356-367.

[7] *P.Billingsley* Ergodic theory and information, John Willey and Sons, New York, 1965.

[8] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II // Ill. J. Math., **5** (1961), P.291-198.

[9] *Cooper M.* Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., **124**(1998), P.135-149.

[10] *Erdös P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions // Amer. J. Math., **61** (1939), P.974-975.

[11] *Falconer K.J.* Fractal geometry, John Wiley & Sons, 1990.

[12] *Garsia A. M.* Arithmetic properties of Bernoulli convolutions // Trans. Amer. Math. Soc., **102** (1962), P.409-432.

[13] *Гончаренко Я., Працьовитий М., Торбін Г.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на них // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки,**6** (2005), С.210-224.

[14] *Kershner R., Wintner A.* On symmetric Bernoulli convolutions // Amer J. Math., **57** (1935), P.541-548.

[15] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans.Amer.Math.Soc., **38** (1935), P.48-88.

[16] *Lévy P.* Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes // Studia Math., **3**(1931), P.119-155.

[17] *Lyons R.* Seventy years of Rajchmann measures // J. Fourier Anal. Appl., Kahane Spesial Issue, (1995), P.363-377.

[18] *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty years of Bernoulli convolutions. In Fractal Geometry and Stochastics II // Progress in Probab., vol.46, (Birkhäuser, 2000), P.39–65.

[19] *Peres Y., Solomyak B.* Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof // Math. Res. Lett., **3** (1996), no. 2, P.231–239.

[20] *Peres Y., Solomyak B.* Self-similar measures and intersections of Cantor sets // Trans.Amer.Math.Soc., **350**(1998), no.10 , P.4065-4087.

[21] *Peres, Y., Simon K., Solomyak B.* Absolute continuity for random iterated function systems with overlaps // J. London Math. Soc., **74** (2006), no. 3, P.739–756.

[22] *Reich J.* Some results on distributions arising from coin tossing // Ann. Probab., **10** (1982), no. 3, P.780–786.

[23] *Reich J.* When do weighted sums of independent random variables have a density—some results and examples // Ann. Probab., **10** (1982), no. 3, P.787–798.

[24] *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem) // Annals of Mathematics, 1995.— **142**.— P.611-625.

[25] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби.— М.: Наука, 1978.

[26] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. —Київ: Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998.