Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 95–104.

УДК 519.21

Про класифікацію одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями

М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

Анотація. У роботі запропоновано нову тонку класифікацію сингулярно неперервних ймовірнісних мір на R^1 на основі аналізу спектральних властивостей таких мір (топологічних та метричних властивостей спектра міри, а також локальної поведінки міри на підмножинах спектра). Доведено теорему про структурне представлення довільної сингулярно неперервної ймовірнісної міри як опуклої комбінації трьох сингулярно неперервних мір, що мають чистий спектральний тип.

Abstract. We introduce a new fine classification of singularly continuous probability measures on R^1 on the basis of the analysis of spectral properties of such measures (topological and metric properties of the spectrum of a measure as well as local behavior of a measure on subsets of the spectrum). The theorem on the structural representation of any one-dimensional singularly continuous probability measure in a form of a convex combination of three singularly continuous probability measures of pure spectral type are proven.

1. Вступ

Як відомо, довільна одновимірна ймовірнісна міра μ може бути єдиним чином представлена у вигляді опуклої комбінації

$$\mu = \alpha_1\mu_d + \alpha_2\mu_{ac} + \alpha_3\mu_{sc},$$

де $\alpha_i \geq 0; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$, μ_d - дискретна ймовірнісна міра, μ_{ac} - ймовірнісна міра, яка є абсолютно неперервною відносно одновимірної міри Лебега λ, а μ_{sc} - ймовірнісна міра, яка є сингулярно неперервною відносно одновимірної міри Лебега (тобто μ_{sc} є неперервною ймовірнісною мірою, для якої існує борелівська множина E така, що $\mu_{sc}(E) = 1$ і $\lambda(E) = 0$).

Робота частково підтримана проектами DFG 436 113/78, DFG 436 113/80 та фондом Олександра фон Гумбольдта

Дослідження властивостей сингулярно неперервних ймовірнісних мір є однією з проблем теорії ймовірностей, актуальність якої вмотивована з одного боку внутрішньою логікою розвитку математики, а з іншого - застосуваннями в теорії чисел, теорії динамічних систем, спектральній теорії самоспряжених операторів (див. [**1, 2, 3, 2, 8**]). Зазвичай сингулярно неперервні міри асоціюються з мірами канторівського типу, тобто неперервними мірами у яких спектр (мінімальна замкнена множина, на якій зосереджена міра) є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Але, як відомо (див. [**3, 5, 7, 8**]), існують сингулярно неперервні ймовірнісні міри, для яких спектр може бути ніде не щільною множиною додатної міри Лебега або може повністю містити цілі відрізки. Очевидно, що нормована сума скінченної кількості сингулярних розподілів канторівського типу є розподілом канторівського типу. Зчисленна ж нормована сума розподілів канторівського може мати спектр, метричні і топологічні властивості якого можуть суттєво відрізнятись від множини, яка є об'єднанням спектрів доданків і має нульову міру Лебега. Тому видається природним той факт, що для адекватної спектральної характеризації сингулярно неперервних ймовірнісних мір необхідно досліджувати не лише топологічні та метричні властивості спектра міри як фіксованої підмножини, а й поведінку міри на певних підмножинах спектра. Результати таких досліджень приводять до спектральної класифікації сингулярних мір, яка пропонується в наступному розділі.

2. Класифікація одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями

Нехай μ - одновимірна ймовірнісна міра. Позначимо через S_μ її спектр - мінімальну замкнену множину повної μ-міри.

Означення 1. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 називається мірою чистого GC-типу (узагальненого канторівського типу), якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \;\; \exists \varepsilon(x) > 0 : \quad [x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)] \cap S_\mu \text{ — множина нульової міри Лебега.} \end{cases}$$

Приклад 1.

а) Нехай

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k},$$

де ξ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, що набувають значень 0 та 2 з імовірностями p і q, $p + q = 1, p \in (0, 1)$. При довільному виборі $p \in (0, 1)$ ймовірнісна міра μ_ξ є сингулярно неперервною мірою GC-типу. Її спектр співпадає з класичною множиною Кантора C_0 і в якості множини E, яка фігурує в означенні, можна вибрати власне спектр C_0. При $p = \frac{1}{2}$ отримуємо "класичну- міру Кантора на одиничному відрізку.

б) Нехай $I = [0,1]$, $\{(a_i, b_i)\}$ - послідовність інтервалів без спільних межових точок, така що $(a_i, b_i) \subset I$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) = a_0 < 1$, і $P = I \setminus \bigcup\limits_i (a_i, b_i)$ - ніде не щільна множина додатної міри Лебега. Позначимо $d_i := b_i - a_i$ і побудуємо міру ν наступним чином:

$$\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{2^i},$$

де міра ν_i співпадає з "класичною"ймовірнісною мірою Кантора на $[a_i + \frac{1}{4}d_i, a_i + \frac{3}{4}d_i]$ (S_{ν_i} подібна множині Кантора з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}d_i, \inf S_{\nu_i} = a_i + \frac{1}{4}d_i, \sup S_{\nu_i} = a_i + \frac{3}{4}d_i$). Міра ν є ймовірнісною (за побудовою), а її спектр складається з об'єднання спектрів S_{ν_i} і точок, які належать замиканню цього об'єднання. Тобто,

$$S_\nu = (\bigcup_i S_{\nu_i}) \bigcup P.$$

Міра ν є мірою чистого GC-типу (в якості множини E, яка фігурує в означенні, можна вибрати $\bigcup\limits_i S_{\nu_i}$). При цьому спектр міри ν має додатну міру Лебега ($\lambda(S_\nu) = 1 - a_0 > 0$), яка може бути як завгодно близькою до 1.

Зауваження 1. *Спектр сингулярно неперервної міри чистого GC-типу може мати як нульову, так і додатну міру Лебега.*

Означення 2. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GP-типу, якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 : \quad [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap S_\mu \text{ — множина додатної міри Лебега.} \end{cases}$$

Приклад 2.

а) Нехай

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k c_k,$$

де $c_k = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{10^k}\right)$, а ψ_k - незалежні однаково розподілені випадкові величини, що набувають значень 0 та 1 з імовірностями p і q, $p + q = 1, p \neq q, p \in (0,1)$.

При довільному виборі $p \in (0, \frac{1}{2}) \bigcup (\frac{1}{2}, 1)$ ймовірнісна міра μ_ψ є сингулярно неперервною ([**5**]). Її спектр є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега, причому перетин зі спектром довільного околу довільної точки спектра теж є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега. Тому μ_ψ є сингулярно неперевною мірою GP-типу (в якості множини E, яка фігурує в означенні, можна вибрати власне спектр). Назвемо цю міру "класичною"мірою GP-типу *на одиничному відрізку.*

б) Нехай $I = [0,1]$, $\{(f_i, g_i)\}$ - послідовність інтервалів без спільних межових точок, така що $(f_i, g_i) \subset I$, і $P_1 = I \setminus \bigcup\limits_i (f_i, g_i)$ - ніде не щільна досконала множина (вона може бути як нульової, так і додатної міри Лебега). Позначимо $g_i - f_i = h_i$ і побудуємо міру μ наступним чином:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i},$$

де міра μ_i співпадає з "класичною"ймовірнісною мірою GP-типу на відрізку $[f_i + \frac{1}{4}h_i, f_i + \frac{3}{4}h_i]$ (при цьому спектр S_{μ_i} подібний спектру раніше побудованої міри μ_ψ з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}h_i$, $\inf S_{\mu_i} = f_i + \frac{1}{4}h_i$, $\sup S_{\mu_i} = f_i + \frac{3}{4}h_i$). Очевидно, що міра μ є ймовірнісною і сингулярно неперервною, а її спектр складається з об'єднання спектрів S_{μ_i} і точок, які належать замиканню цього об'єднання. Тобто,

$$S_\mu = (\bigcup_i S_{\mu_i}) \bigcup P_1.$$

Міра μ є мірою чистого GP-типу (в якості множини E, яка фігурує в означенні, можна вибрати $\bigcup\limits_i S_{\nu_i}$). При цьому $P_1 \subset S_\mu$ і $\mu(P_1) = 0$ незалежно від міри Лебега множини P_1.

Означення 3. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GS-типу, якщо існує послідовність (неперекривних) відрізків $\{[a_i, b_i]\}$ таких, що

$$\begin{cases} [a_i, b_i] \subset S_\mu, \\ \mu\left(\bigcup\limits_i [a_i, b_i]\right) = 1. \end{cases}$$

Лема 1. *Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 є мірою чистого GS-типу тоді і тільки тоді, коли внутрішність спектра є носієм цієї міри, тобто*

$$\mu(int(S_\mu)) = 1.$$

Доведення. Оскільки міра μ неперервна, то у вищенаведеному означенні відрізки $[a_i, b_i]$ можна замінити на інтервали (a_i, b_i), які є підможинами внутрішності $int(S_\mu)$ спектра міри μ. Отже, $S_\mu \supset int(S_\mu) \supset \bigcup\limits_i (a_i, b_i)$ і тому для всякої міри GS-типу має місце рівність $\mu(int(S_\mu)) = 1$.

З іншого боку, за теоремою про структуру відкритих множин в просторі R^1, всяка відкрита підмножина числової осі є об'єднанням скінченної чи зчисленної кількості інтервалів. Отже, якщо $\mu(int(S_\mu)) = 1$, то існує послідовність інтервалів $\{(a_i, b_i)\}$ така, що $\bigcup\limits_i (a_i, b_i) = int(S_\mu) \subset S_\mu$. Тому $\mu(\bigcup\limits_i (a_i, b_i)) = \mu(\bigcup\limits_i [a_i, b_i]) = 1$. Оскільки S_μ-замкнена множина і $(a_i, b_i) \subset S_\mu$, то $[a_i, b_i] \subset S_\mu$, звідки випливає належність міри до GS-типу. □

Приклад 3.

а) Нехай

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{2^k},$$

де η_k - незалежні однаково розподілені випадкові величини, що набувають значень 0 та 1 з імовірностями p і q, $p+q=1, p \neq q, p \in (0,1)$.

При довільному виборі $p \in (0, \frac{1}{2}) \bigcup (\frac{1}{2}, 1)$ ймовірнісна міра μ_η є сингулярно неперервною (**[5, 5]**). Її спектр співпадає з одиничним відрізком. Тому μ_η є сингулярно неперервною мірою GS-типу (в якості відрізків, що фігурують в означенні, можна вибрати один відрізок $[0,1]$). Назвемо цю міру "класичною"мірою GS-типу *на одиничному відрізку.*

б) Нехай $\{(a_i, b_i)\}$ - послідовність інтервалів одиничного відрізка, які є суміжними для множини Кантора C_0. Позначимо $d_i := b_i - a_i$ і побудуємо міру m наступним чином:

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i}{2^i},$$

де міра m_i співпадає з "класичною"ймовірнісною мірою GS-типу на $[a_i + \frac{1}{4}d_i, a_i + \frac{3}{4}d_i]$ (при цьому S_{m_i} співпадає з відрізком $[a_i + \frac{1}{4}d_i, a_i + \frac{3}{4}d_i]$). Міра m є ймовірнісною (за побудовою), а її спектр складається з об'єднання відрізків S_{m_i} і точок, які належать замиканню цього об'єднання. Тобто,

$$S_m = (\bigcup_i S_{m_i}) \bigcup C_0.$$

Міра m є мірою чистого GS-типу (в якості відрізків, що фігурують в означенні, можна вибрати відрізки S_{m_i}).

При цьому $C_0 \subset S_m, C_0 \bigcap (\bigcup_i S_{m_i}) = \emptyset, \lambda(S_m) = \lambda(\bigcup_i S_{m_i})$, і $m(C_0) = 0$.

в) Нехай множина P_2 співпадає зі спектром міри μ_ψ з прикладу 2а), а $\{(a_i, b_i)\}$ - послідовність інтервалів одиничного відрізка, які є суміжними до множини P_2. Позначимо $d_i := b_i - a_i$ і побудуємо міру m^* наступним чином:

$$m^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i^*}{2^i},$$

де міра m_i^* співпадає з "класичною"ймовірнісною мірою GS-типу на $[a_i + \frac{1}{4}d_i, a_i + \frac{3}{4}d_i]$ (при цьому, як і раніше, S_{m_i} співпадає з відрізком $[a_i + \frac{1}{4}d_i, a_i + \frac{3}{4}d_i]$). Міра m^* є ймовірнісною і сингулярно неперервною, а її спектр має вигляд:

$$S_{m^*} = (\bigcup_i S_{m_i^*}) \bigcup P_2.$$

Міра m^* є мірою чистого GS-типу (в якості відрізків, що фігурують в означенні, знову можна вибрати відрізки S_{m_i}), але при цьому $\lambda(S_{m^*}) > \lambda(\bigcup_i S_{m_i^*})$, і $m^*(P_2) = 0$.

Зауваження 2. *Якщо μ має GC- або GP-тип, то існує ніде не щільна множна повної μ-міри. З цього випливає, що існує всюди щільна сукупність інтервалів $\{(c_i, d_i)\}$ нульової міри μ. Отже, S_μ — ніде не щільна множина і μ не може бути мірою GS-типу.*

Зауваження 3. *Міра μ не може одночасно бути GC- і GP-типу.*

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що міра μ є мірою GC- і GP-типу. Тоді

$$\mu \text{ — міра } GP \text{ типу} \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists E_1 \subset S_\mu : \ \mu(E_1) = 1 \ \text{ і } \ \forall x \in E_1 \ \ \forall \varepsilon > 0 : \ [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap S_\mu \text{ — множина додатної міри;}$$

$$\mu \text{ — міра } GC \text{ типу} \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists E_2 \subset S_\mu : \ \mu(E_2) = 1 \ \text{ і } \ \forall x \in E_2 \ \exists \varepsilon(x) > 0 : \ [x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)] \cap S_\mu \text{ — множина нульової міри.}$$

Нехай x — довільна точка з множини $E = E_1 \cap E_2$. Тоді, оскільки $x \in E_2$, існує $\varepsilon(x) > 0$ таке, що $\lambda([x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)] \cap S_\mu) = 0$. Виберемо $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon(x)$. Тоді $[x - \varepsilon', x + \varepsilon'] \subset [x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)]$, але, оскільки $x \in E_1$, $\lambda([x - \varepsilon', x + \varepsilon'] \cap S_\mu) > 0$. Отримане протиріччя показує, що міра μ не може одночасно бути GC- і GP-типу.

Із вищенаведених зауважень випливає, що сингулярно неперервні міри GC-, GP- та GS- типів утворюють неперетинні сімейства. Об'єднання цих сімейств не співпадає з сімейством всіх сингулярно неперервних ймовірнісних мір на R^1, оскільки існують сингулярно неперевні ймовірнісні міри на R^1, які не належать до жодного з вищеназваних класів, але має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Довільна сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 може бути представлена у вигляді*

$$\mu = \alpha_1 \mu^{GS} + \alpha_2 \mu^{GC} + \alpha_3 \mu^{GP}, \tag{1}$$

де $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$; μ^{GS}, μ^{GC} і μ^{GP} — сингулярно неперервні ймовірнісні міри GS, GC та GP-типу відповідно.

Доведення. Доведення теореми природним чином розпадається надоведення двох наступних лем.

Лема 2. *Довільна сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 може бути представлена у вигляді*

$$\mu = \beta_1 \mu^{GS} + \beta_2 \mu^{T^*}, \tag{2}$$

де $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0, \beta_1 + \beta_2 = 1$, μ^{GS} — сингулярно неперервна ймовірнісна міра GS-типу, μ^{T^*} — сингулярно неперервна ймовірнісна міра з ніде не щільним спектром.

Доведення. 1. Якщо міра μ має GS-тип, то $\beta_1 = 1$, $\mu^{GS} = \mu$, $\beta_2 = 0$ і в якості міри μ^{T^*} можна вибрати класичну міру Кантора.

2. Якщо S_μ є ніде не щільною множиною, то $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\mu^{T^*} = \mu$ і в якості міри μ^{GS} можна вибрати довільну міру GS-типу.

3. Нехай μ не є мірою GS-типу і S_μ не є ніде не щільною множиною. Тоді S_μ, будучи замкненою множиною, містить хоча б один відрізок. Відрізок $[a,b] \subset S_\mu$ називатимемо "повним", якщо не існує відрізка $[c,d]$, який би містив $[a,b]$ і повністю містився б в S_μ (тобто, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ інтервали $(a-\varepsilon, a)$ і $(b, b+\varepsilon)$ містять точки, що не належать S_μ).

Нехай $\{[a_i, b_i]\}$ — сімейство всіх неперетинних "повних" відрізків з S_μ і нехай $S = \bigcup\limits_i [a_i, b_i]$. З припущення п.3 випливає, що

$$\mu(S) = \mu\left(\bigcup_i [a_i, b_i]\right) = \mu\left(\bigcup_i (a_i, b_i)\right) \in (0,1).$$

Позначимо $\beta_1 = \mu(S)$ і

$$\mu^{GS}(E) := \frac{1}{\mu(S)} \cdot \mu(E \cap S), \quad \forall E \in \mathcal{B}(R^1).$$

Міра μ^{GS} є ймовірнісною. Її сингулярна неперервність випливає з сингулярної неперервності μ. Міра μ^{GS} має GS-тип за означенням, оскільки множина $S = \bigcup\limits_i [a_i, b_i]$ є підмножиною топологічного носія міри μ^{GS} і $\mu^{GS}(S) = 1$.

Розглянемо множину $T = S_\mu \setminus S$. Очевидно, що T — ніде не щільна множина (оскільки S_μ — досконала, а S містить всі внутрішні точки, які входили до S_μ).

Позначимо $\beta_2 = \mu(T) = 1 - \mu(S) \in (0,1)$ і

$$\mu^{T^*}(E) := \frac{1}{\mu(T)} \cdot \mu(E \cap T), \quad \forall E \in \mathcal{B}(R^1).$$

Міра μ^{T^*} є ймовірнісною. Її сингулярна неперервність випливає з сингулярної неперервності міри μ. Очевидно, що $\mu^{T^*}(T) = 1$. Тому $S_{\mu^{T^*}}$, будучи підмножиною замикання ніде не щільної множини T, сама є ніде не щільною.

Існування розкладу (2) доведено. □

Лема 3. *Нехай μ^{T^*} — довільна сингулярно неперервна ймовірнісна міра на R^1 з ніде не щільним топологічним носієм. Тоді міра μ^{T^*} може бути представлена у вигляді*

$$\mu^{T^*} = \gamma_1 \mu^{GC} + \gamma_2 \mu^{GP}, \tag{3}$$

де $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, μ^{GC} — сингулярно неперервна ймовірнісна міра GC-типу, а μ^{GP} — сингулярно неперервна ймовірнісна міра GP-типу.

Доведення. Нехай $S_{\mu^{T^*}}$ — топологічний носій міри μ^{T^*}. Кожна точка з $S_{\mu^{T^*}}$ належить одній з двох наступних множин

$$T_C = \{x: \quad x \in S_{\mu^{T^*}} \quad \text{і} \quad (\exists \varepsilon(x) > 0: \quad \lambda(S_{\mu^{T^*}} \cap (x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x))) = 0)\},$$

$$T_P = \{x: \quad x \in S_{\mu^{T^*}} \quad \text{і} \quad (\forall \varepsilon > 0: \quad \lambda(S_{\mu^{T^*}} \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)) > 0)\}.$$

Очевидно, що $T_C \cap T_P = \mathrm{O}$ і $T_C \cup T_P = S_{\mu^{T^*}}$.

Покажемо, що T_C — борелівська множина нульової міри Лебега. Для кожної точки $x \in T_C$ означимо

$$\varepsilon_1(x) = \sup\{\varepsilon: \quad \lambda(S_{\mu^{T^*}} \cap (x - \varepsilon, x]) = 0\},$$

$$\varepsilon_2(x) = \sup\{\varepsilon: \quad \lambda(S_{\mu^{T^*}} \cap [x, x + \varepsilon)) = 0\}.$$

Нехай $A_x = (x - \varepsilon_1(x), x + \varepsilon_2(x)) \cap S_{\mu^{T^*}}$. За побудовою, A_x — непорожня ніде не щільна множина нулевої міри Лебега для довільного $x \in T_C$.

Розглянемо множину $C = \bigcup\limits_{x \in T_C} A_x$. Якщо $x \in T_C$ і $y \in T_C$, то або $A_x \equiv A_y$ (якщо між x та y немає точок з множини T_P), або $A_x \cap A_y = \mathrm{O}$ (якщо між x та y є хоча б одна точка з T_P). Отже, останнє об'єднання містить не більш як зчисленну кількість *різних* множин A_x, $x \in T_C$. Оскільки всі A_x борелівські (як переріз двох борелівських множин), то C — борелівська множина (як об'єднання зчисленної кількості борелівських множин). Крім того, $\lambda(C) = 0$ (оскільки C — об'єднання зчисленної кількості нуль-множин).

Якщо $x \in T_C$, то $x \in A_x$. Отже, $T_C \subset C$.

Якщо $x \in C$, то $x \in A_y$ для деякого $y \in T_C$. Тому $x \in (y - \varepsilon_1(y), y + \varepsilon_2(y))$ і $x \in S_{\mu^{T^*}}$.

Отже, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (y - \varepsilon_1(y), y + \varepsilon_2(y))$ і тому $\lambda((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap S_{\mu^{T^*}}) = 0$, звідки випливає належність x до T_C. Отже, $C \subset T_C$. Тому $C = T_C$.

Оскільки T_C — борелівська множина з $\lambda(T_C) = 0$, то $T_P = S_{\mu^{T^*}} \setminus T_C$ — теж борелівська. Зауважимо, що множина T_P є замкненою. Справді, нехай $\{x_n\}$ - деяка послідовність точок з T_P, яка збігається до x_0. Так як множина $S_{\mu^{T^*}}$ замкнена як спектр, то $x_0 \in S_{\mu^{T^*}}$. Отже, x_0 належить або множині T_P або множині T_C. Припустимо, що $x_0 \in T_C$. Тоді існує $\varepsilon(x_0) > 0$ таке, що $\lambda((x_0 - \varepsilon(x_0), x_0 + \varepsilon(x_0)) \bigcap S_{\mu^{T^*}}) = 0$. З іншого боку, існує $N_0 \in N$ таке, що $x_n \in (x_0 - \varepsilon(x_0), x_0 + \varepsilon(x_0))$ для всіх $n > N_0$. Виберемо $n > N_0$ і $\varepsilon_1 > 0$ таким, щоб $(x_n - \varepsilon_1, x_n + \varepsilon_1) \subset (x_0 - \varepsilon(x_0), x_0 + \varepsilon(x_0))$. Оскільки $x_n \in T_P$, то $\lambda((x_0 - \varepsilon(x_0), x_0 + \varepsilon(x_0)) \bigcap S_{\mu^{T^*}}) \geq \lambda((x_n - \varepsilon_1, x_n + \varepsilon_1) \bigcap S_{\mu^{T^*}}) > 0$. Отримане протиріччя показує, шо $x_0 \in T_P$, що й доводить замкненість множини T_P.

Якщо $\mu^{T^*}(T_C) = 1$, то μ^{T^*} має GC-тип (за означенням). У цьому випадку покладемо $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$; $\mu^{GC} = \mu^{T^*}$ (а в якості μ^{GP} можна взяти довільну сингулярну міру чистого GP-типу).

Якщо $\mu^{T^*}(T_P) = 1$, то μ^{T^*} має GP-тип (за означенням). У цьому випадку покладемо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$; $\mu^{GP} = \mu^{T^*}$ (а в якості μ^{GC} можна взяти довільну міру GC-типу, наприклад, класичну міру Кантора на $[0, 1]$).

Якщо $0 < \mu^{T^*}(T_C) < 1$, то означимо міри

$$\mu^{GP}(E) = \frac{1}{\mu^{T^*}(T_P)} \cdot \mu^{T^*}(E \cap T_P),$$

$$\mu^{GC}(E) = \frac{1}{\mu^{T^*}(T_C)} \cdot \mu^{T^*}(E \cap T_C), \quad \forall E \in \mathcal{B}(R^1).$$

μ^{GP} і μ^{GC} — ймовірнісні міри, сингулярність і неперервність яких випливає безпосередньо з сингулярної неперервності міри μ^{T^*}.

Нехай $T_P^* = T_P \bigcap S_{\mu^{GP}}$. Очевидно, що $\mu^{GP}(T_P^*) = 1$. Множина T_P - замкнена, і є підмножиною $S_{\mu^{GP}}$. З іншого боку, спектр $S_{\mu^{GP}}$ є мінімальним замкненим носієм міри μ^{GP}. Тому $T_P^* = S_{\mu^{GP}}$ (сама множина T_P, взагалі кажучи, може не співпадати з множиною $S_{\mu^{GP}}$ і містити останню як власну підмножину). Тому μ^{GP} — міра GP-типу (в якості множини E, яка фігурує в означенні, можна взяти T_P^*).

Нехай $T_C^* = T_C \bigcap S_{\mu^{GC}}$. Очевидно, що $\mu^{GC}(T_C^*) = 1$, і $T_C^* \subset S_{\mu^{GC}}$. Тому μ^{GC}— міра GC-типу (в якості множини E, яка фігурує в означенні, множна взяти T_C^*).

Поклавши $\gamma_1 = \mu^{T^*}(T_C)$ і $\gamma_2 = \mu^{T^*}(T_P)$, маємо $\forall E \in \mathcal{B}(R^1)$:

$$\mu^{T^*}(E) = \mu^{T^*}(E \cap (T_C \cup T_P)) =$$
$$= \gamma_1 \cdot \frac{1}{\mu^{T^*}(T_C)} \cdot \mu(E \cap T_C) + \gamma_2 \cdot \frac{1}{\mu^{T^*}(T_P)} \cdot \mu(E \cap T_P) =$$
$$= \gamma_1 \mu^{GC}(E) + \gamma_2 \mu^{GP}(E),$$

що й треба було довести. □

Теорема є безпосереднім наслідком двох щойно доведених лем. □

Приклад 4. Нехай міра η співпадає з сингулярно неперервною мірою, яка розглядалась в прикладі 2а) і $P_2 = I \setminus \bigcup\limits_i (a_i, b_i)$ - її спектр ($[a_i, b_i] \bigcap [a_j, b_j] = \emptyset, i \neq j$). Позначимо $\lambda(a_i, b_i) = d_i$.

Побудуємо міри ν_i та μ_i наступним чином. Нехай міра ν_i співпадає з "класичною"мірою GC-типу на відрізку $S_{\nu_i} = [a_i + \frac{1}{7}d_i, a_i + \frac{2}{7}d_i]$ (приклад 1а)), а міра μ_i - з "класичною"мірою GS-типу на відрізку $S_{\mu_i} = [a_i + \frac{5}{7}d_i, a_i + \frac{6}{7}d_i]$ (приклад 3а)).

Означимо $\nu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{2^i}, \quad \mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i}$. Тоді міра

$$\mu^* = \frac{1}{3}(\eta + \nu + \mu)$$

є сингулярно неперервною ймовірнісною мірою, що є сумішшю мір трьох вищевказаних чистих типів. Її спектр співпадає з об'єднанням спектрів мір ν та μ, оскільки спектр міри η співпадає з перерізом множин S_μ та S_ν.

Зауваження 4. *Доведена теорема допускає очевидне узагальнення для випадку скінченних та σ-скінченних одновимірних мір.*

Зауваження 5. *Проведена класифікація і доведена теорема допускає узагальнення на випадок багатовимірних сингулярно неперервних мір, якому буде присвячена окрема робота.*

Література

[1] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q* -digits // Bull. Sci. Math. — 2005. — **129**, no. 4. — P. 356 – 367.

[2] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Ukrainian Math. J. — 2005. — **57**, no. 9. — P. 1361 – 1370.

[3] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of subsets of real numbers which are not normal // Bull.Sci.Math. — 2005. — **129**, no. 8. — P. 615 – 630.

[4] *Torbin G.* (coauthors: Albeverio S., Pratsiovytyi M.) Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2004. — **24**, no. 1. — P. 1 – 16.

[5] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп. НАН України. — 1998. — № 4. — С. 48 – 54.

[6] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[7] *Торбін Г.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних ймовірнісних мір // Укр. Матем. Журн. — 2005. — **57**, № 5. — С. 837 – 857.

[8] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.