Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 78–88.

УДК 519.41/47

О некоторых типах подгрупп, близких к нормальным

М. М. Пискун
(Национальный университет государственной налоговой службы Украины)

Аннотация. В статье изучаются анти PC-группы.

Abstract. Anty PC-groups are learnt in the article.

Пусть G — группа. Ее подгруппа H называется *приближенно нормальной* в G, если H имеет конечный индекс в своем нормальном замыкании $K = H^G$. В этом случае H включает в себя нормальную в K подгруппу L, для которой фактор-группа K/L — конечна. Подгруппы такого рода начал рассматривать Б. Нейман [**8**]. Он показал, что если всякая подгруппа группы является приближенно нормальной, то группа имеет конечный коммутант. В частности, такая группа является FC-группой. Напомним здесь некоторые определения, которые понадобятся для дальнейшего изложения (см. [2, глава 3]).

Пусть $\mathbf{X}$ — класс групп. Будем говорить, что группа G *имеет* $\mathbf{X}$*-классы сопряженных элементов или, что G является* $\mathbf{X}C$*-группой,* если фактор-группа $G/C_G(g^G)$ принадлежит классу $\mathbf{X}$ для каждого элемента $g \in G$. Здесь через g^G обозначается класс всех элементов, сопряженных с g, т.е. подмножество

$$\{g^x = x^{-1}gx | x \in G\}.$$

Если $\mathbf{X} = \mathbf{I}$ — это класс всех единичных групп, то класс всех $\mathbf{I}C$-групп — это в точности класс $\mathbf{A}$ всех абелевых групп. Поэтому, при подходящем выборе класса $\mathbf{X}$, класс $\mathbf{X}C$-групп можно рассматривать как естественное обобщение класса абелевых групп.

Например, если $\mathbf{X} = F$ — класс всех конечных групп, то класс всех FC-групп — это в точности класс всех *FC-групп или групп с конечными классами сопряженных элементов.* Этот класс является очень удачным расширением как класса абелевых групп, так и класса конечных групп, наследующим многие хорошие свойства этих двух классов. Поэтому теория FC является одной из наиболее развитых среди теорий бесконечных групп.

Естественными обобщениями класса конечных групп являются класс $\mathbf{C}$ всех черниковских групп и класс $\mathbf{P}$ всех почти полициклических групп. Поэтому если $\mathbf{X} = \mathbf{C}$, то класс всех $\mathbf{C}C$-групп — это в точности класс всех *групп с черниковскими классами сопряженных элементов,* который был введен Я.Д. Половицким [**10**]. Этот класс не является настолько изученным как класс FC-групп, но, тем не менее, теория этих групп имеет много интересных и важных результатов. Если $\mathbf{X} = \mathbf{P}$, то приходим к классу PC-групп или классу всех *групп с почти полициклическими классами сопряженности.* Изучение этого класса только начинается [**11, 5**]. В данной работе будет рассмотрен подкласс класса PC-групп, который возникает из следующего расширения понятия приближенно нормальных подгрупп.

Подгруппа H группы G называется *почти полициклически приближенной к нормальной (в G)*, если H включает в себя нормальную в H^G подгруппу L, для которой фактор-группа H^G/L будет почти полициклической. Эти подгруппы являются естественным обобщением приближенно нормальных подгрупп. В работе (7) было предложено другое обобщение приближенно нормальных подгрупп. Это были подгруппы H, для которых упорядоченное по включению семейство подгрупп $\{L | H \leq L \leq H^G\}$ удовлетворяет условию максимальности. Если G — PC-группа, то всякая такая подгруппа будет почти полициклически приближенной к нормальной, и наоборот. В общем же случае группы с условием максимальности и почти полициклические группы могут разниться очень сильно, как показывают серии примеров А.Ю. Ольшанского [**6**]. Поэтому введенное выше понятие представляется более рабочим и эффективным. Первой естественной задачей здесь является описание групп, все подгруппы которых почти полициклически приближены к нормальным. Из теоремы 5.5 работы [**11**] можно получить, что такие группы имеют почти полициклический коммутант. Если G — PC-группа, то из теоремы 2.2 работы [**11**] получаем, что для любого элемента $g \in G$ подгруппа $H_g =< g >^G$ является почти полициклической. Отсюда получаем, что и для любой почти полициклической подгруппы F группы G ее нормальное замыкание F^G является почти полициклической подгруппой. Другими словами, всякая почти полициклическая подгруппа F группы G почти полициклически приближена к нормальной. Более того, это свойство является характеристическим для PC-групп, как показывает та же теорема 2.2 работы [**11**]. Поэтому естественно возникает вопрос о том, что будет в двойственной ситуации. Именно, что можно сказать о строении группы G, в которой все подгруппы, кроме почти полициклических, почти полициклически приближены к нормальным. Такие группы будем называть *анти PC-группами.* Задаче изучения таких групп и посвящена данная статья.

1. Некоторые предварительные результаты

Отметим сначала элементарные свойства подгрупп, полициклически приближенных к нормальным.

Лемма 1. *Пусть G — группа, всякая подгруппа которой почти полициклически приближена к нормальной.*

(1) Если H — подгруппа группы G, то всякая подгруппа H почти полициклически приближена к нормальной.

(2) Если L — нормальная подгруппа G, то всякая подгруппа G/L почти полициклически приближена к нормальной.

(3) Если U, V — подгруппы G, причем U — нормальна в V, то всякая подгруппа которой V/U почти полициклически приближенна к нормальной.

Эти утверждения почти очевидны.

Следствие 1. *Пусть G — анти PC-группа.*

(1) Если H — подгруппа группы G, то H также будет анти PC-группой.

(2) Если L — нормальная подгруппа G, то G/L является анти PC-группой.

(3) Если U, V — подгруппы G, причем U — нормальна в V, то всекция V/U будет анти PC-группой.

Лемма 2. *Пусть G — группа. Предположим, что K, H — подгруппы G, почти полициклически приближенные к нормальным. Тогда и $H \cap K$ будет почти полициклически приближенной к нормальной.*

Доказательство. В самом деле, подгруппа H (соответственно K) включает в себя такую нормальную в H^G (соответственно в K^G) подгруппу U (соответственно V), что H^G/U (соответственно K^G/V) будет почти полициклической. Подгруппа $H^G \cap K^G \cap U = K^G \cap U$ нормальна в $H^G \cap K^G$, и соответственно $H^G \cap K^G \cap V = H^G \cap V$ нормальна в $H^G \cap K^G$. Из равенства

$$U \cap V = H^G \cap U \cap V \cap K^G = (K^G \cap U) \cap (H^G \cap V)$$

получаем, что подгруппа $U \cap V$ нормальна в $H^G \cap K^G$. Имеют место следующие соотношения

$$(H^G \cap K^G)/(K^G \cap U) = (H^G \cap K^G)/(H^G \cap K^G \cap U) \cong (H^G \cap K^G)U/U \leq H^G/U$$

и

$$(K^G \cap U)/(U \cap V) = (K^G \cap U)/(K^G \cap U \cap V) \cong (K^G \cap U)V/V \leq K^G/V,$$

которые показывают, что обе фактор-группы $(H^G \cap K^G)/(K^G \cap U)$ и $(K^G \cap U)/(U \cap V)$ являются почти полициклическими. Отсюда вытекает, что почти полициклической будет и фактор-группа $(H^G \cap K^G)/(U \cap V)$. Включение $U \cap V \leq H \cap K$ показывает теперь, что $H \cap K$ — почти полициклически приближенная к нормальной подгруппа.

Группу G назовем *обобщенно радикальной,* если она обладает возрастающим рядом подгрупп, факторы которого либо локально нильпотентны, либо локально конечны. Нетрудно убедиться в том, что обобщенно радикальная группа обладает возрастающим рядом нормальных (и даже характеристических) подгрупп, факторы которого либо локально нильпотентны, либо локально конечны. Также отметим, что периодическая обобщенно радикальная группа локально конечна. Отсюда следует, что и периодическая локально обобщенно радикальная группа локально конечна.

Лемма 3. *Пусть G — группа автоморфизмов почти полициклической группы K. Если G — локально обобщенно радикальна, то она является почти полициклической.*

Доказательство. Из леммы 2.3 и теоремы 2.5 книги [**7**] пролучаем, что G изоморфна подгруппе $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$ для некоторого натурального числа n. Пусть H — разрешимая подгруппа G. Ввиду теоремы Цассенхауза (см., например, [**7**, теорема 3.7]) найдется такое число k, зависящее только от n, что ступень разрешимости H не превосходит k. Отсюда нетрудно получить, что всякая радикальная подгруппа G разрешима и ее ступень разрешимости не превосходит числа k. В свою очередь, отсюда вытекает, что всякая локально радикальная подгруппа G разрешима и ее ступень разрешимости не превосходит числа k. Но тогда группа G включает в себя наибольшую нормальную разрешимую подгруппу S. Будучи подгруппой $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$, S — полициклическая (см., например, [**8**, глава 2 следствие 1]). Поскольку локально обобщенно радикальная группа не включает свободных подгрупп, теорема Титса (см., например, [**7**, следствие 10.17]) показывает, что G/S — локально конечна. Далее, фактор-группа $G/C_G(S)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов полициклической группы S, а потому, как мы видели выше, $G/C_G(S)$ изоморфна некоторой подгруппе $\mathbf{GL}(m, \mathbf{Z})$ для подходящего натурального числа m. Отметим теперь, что локально конечные подгруппы $\mathbf{GL}(m, \mathbf{Z})$ конечны (см., например, [**7**, теорема 9.33]), так что и $G/C_G(S)$ будет конечной. Покажем, наконец, что и фактор-группа $C_G(S)/S$ является конечной. Используем для этого индукцию по ступени разрешимости S. Положим $K = C_G(S)$. Пусть сначала S — абелева. Используя классическую теорему Шура (см., например, [**9**, теорема 1.2]), нетрудно получить, что коммутант $D = [K, K]$ будет периодической подгруппой. Но тогда она конечна, как мы уже видели это выше. Поэтому и фактор-группа $K/C_K(D)$ будет конечной. В свою очередь, подгруппа $C_K(D)$, будучи нильпотентной, полициклическая. Итак, K — почти полициклическая подгруппа.

Рассмотрим теперь общий случай. Подгруппа K имеет ряд нормальных подгрупп

$$< 1 >= L_0 \leq L_1 \leq ... \leq L_t \leq L_{t+1} = K,$$

факторы L_{j+1}/L_j которого — конечно порожденные абелевы группы, $0 \leq j \leq t-1$, а последний фактор L_{t+1}/L_t — локально конечная группа. Используя приводимые выше рассуждения, получим, что K включает в себя нормальную периодическую подгруппу T, для которой K/T — разрешима. Подгруппа T конечна (см., например, [**7**, теорема 9.33]), так что и $K/C_K(T)$ также конечна, а подгруппа $C_K(T)$, будучи нильпотентной, полициклическая. Итак, K — почти полициклическая подгруппа, а с ней почти полициклической будет и вся группа G.

Пусть G — группа и $\mathbf{X}$ — класс групп. Положим

$$\mathbf{X}C(G) = \{x \in G | G/C_G(g^G) \in \mathbf{X}\}.$$

В общем случае $\mathbf{X}C(G)$ не является подгруппой G. Однако, если класс групп $\mathbf{X}$ является формацией, то $\mathbf{X}C(G)$ будет характеристической подгруппой. В этом случае подгруппа $\mathbf{X}C(G)$ называется *$\mathbf{X}C$-центром группы G*. Если $\mathbf{X} = P$ — класс всех почти полициклических групп, то будем говорить о PC-центре группы и обозначать его через $PC(G)$. Поскольку, очевидно, что класс всех почти полициклических групп составляет формацию, то $PC(G)$ является характеристической подгруппой группы G.

Следствие 2. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа. Если g — такой ее элемент, что $< g >^G$ — почти полициклическая подгруппа, то $g \in PC(G)$.*

Доказательство. Положим $H_g =< g >^G$. Из леммы 3 получаем, что фактор-группа $G/C_G(H_g)$ будет почти полициклической. Но это и означает, что $g \in PC$.

Следствие 3. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа. Если H — почти полициклическая нормальная подгруппа G, то для любого элемента $g \in H$ имеет место включение $g \in PC(G)$.*

Доказательство. В самом деле, $< g >^G \leq H$, а значит, $< g >^G$ — почти полициклическая подгруппа. Теперь необходимо применить следствие 3.

Следствие 4. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа. Если ее почти полициклическая подгруппа H является почти полициклически приближенной к нормальной, то $H \leq PC(G)$.*

Доказательство. Подгруппа H включает в себя нормальную в H^G подгруппу L, для которой фактор-группа H^G/L будет почти полициклической. Но в этом случае и сама подгруппа H^G является почти полициклической. Из следствия 3 теперь получим, что $H \leq PC(G)$.

Следствие 5. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа. Если ее циклическая подгруппа $< g >$ почти полициклически приближенна к нормальной, то $g \in PC(G)$.*

Лемма 4. *Пусть G — анти PC-группа. Предположим, что L, K, H — подгруппы G, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) L — нормальная подгруппа K;

(ii) $H \cap K \leq L$;

(iii) $K/L = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda/L$, *где* $K_\lambda \neq L$, K_λ *— H-инвариинтная подгруппа для всех* $\lambda \in \Lambda$, *в частности, подгруппы* K, L *— H-инвариинтны;*

(iv) множество индексов Λ *— бесконечно.*

Тогда подгруппа HL *— почти полициклически приближенна к нормальной в* G.

Доказательство. Бесконечность множества Λ влечет существование таких бесконечных подмножеств Δ, Σ из Λ, что $\cap\Sigma = \text{O}$, $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Положим

$$U/L = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda/L, \quad V/L = \times_{\lambda\in\Sigma} K_\lambda/L.$$

Бесконечность подмножеств Δ, Σ показывает, что обе подгруппы U/L и V/L не являются почти полициклическими. По своему выбору U и V будут H-инвариантными подгруппами. Тогда и обе подгруппы UH и VH не являются почти полициклическими, а значит, они почти полициклически приближенны к нормальным. Из леммы 2 вытекает, что $UH \cap VH$ также почти полициклически приближена к нормальной. Включения $L \leq U$ и $L \leq V$ показывают, что $L \leq UH \leq VH$. С другой стороны, пусть $x \in UH \cap VH$, тогда $x = uh = vy$ для некоторых элементов $u \in U$, $v \in V$, $h, y \in H$. Отсюда $h = u^{-1}x \in K$, так что $h \in K \cap H \leq L$. По аналогичной причине $y \in K \cap H \leq L$. Имеем теперь

$$uL = uhL = xL = vyL = vL \in (U/L \cap V/L) =< 1 > .$$

Иначе говоря, $uL = vL = L$, т.е. $u, v \in L$. Это влечет за собой включение $x \in HL$. Таким образом, приходим к включениям $LH \leq UH \cap VH \leq LH$, которые влекут равенство $UH \cap VH = HL$, которое показывает, что подгруппа HL будет почти полициклически приближена к нормальной.

Следствие 6. *Пусть* G *— анти PC-группа. Предположим, что* L, K, H *— подгруппы* G, *удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) L *— нормальная подгруппа* K;

(ii) $K/L = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda/L$, *где* $K_\lambda \neq L$, K_λ *— H-инвариинтная подгруппа для всех* $\lambda \in \Lambda$, *в частности, подгруппы* K, L *— h-инвариинтны;*

(iii) подмножество $\Lambda \setminus \mathrm{Supp}(HL/L \cap K/L)$ *— бесконечно.*

Тогда подгруппа HL *— почти полициклически приближенна к нормальной в* G.

Доказательство. Положим

$$M = \Lambda \setminus \mathrm{Supp}(HL/L \cap K/L) \quad \text{и} \quad T/L = \times_{\lambda\in M} L_\lambda/L.$$

Применяя теперь лемму 4 к подгруппам H, T, L, получим требуемый результат.

Следствие 7. *Пусть* G *— анти PC-группа. Предположим, что* L, K, H *— подгруппы* G, *удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) L *— нормальная подгруппа* K;

(ii) $K/L = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda/L$, *где* $K_\lambda \neq L$, K_λ *— H-инвариинтная подгруппа для всех* $\lambda \in \Lambda$, *в частности, подгруппы* K, L *— H-инвариантны;*

(iii) множество индексов Λ *— бесконечно.*

Тогда для любого элемента $h \in H$ *подгруппа* $< h > L$ *— почти полициклически приближенна к нормальной в* G.

Доказательство. Поскольку K_λ — H-инвариантна, то она и $< h >$-инвариантна. Очевидно подмножество $\mathrm{Supp}(< h > L/L \cap K/L)$ — конечно, а потому

$$M = \Lambda \setminus \mathrm{Supp}(< h > L/L \cap K/L)$$

будет бесконечным и можно теперь применить следствие 6.

Следствие 8. *Пусть* G *— анти* PC*-группа. Предположим, что* K, H *— подгруппы* G*, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) $K = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *, где* K_λ *— неединичная* H*-инваринтная подгруппа для всех* $\lambda \in \Lambda$*;*

(ii) множество индексов Λ *— бесконечно.*

Если G *— локально обобщенно радикальная группа, то* $H \leq PC(G)$.

Доказательство. В самом деле, из следствия 7 получаем, что для любого элемента $h \in H$ подгруппа $< h >$ — почти полициклически приближенна к нормальной в G. Из следствия 5 вытекает теперь, что $h \in PC(G)$.

Следствие 9. *Пусть* G *— локально обобщенно радикальная анти* PC*-группа. Если* K *— такая подгруппа группы* G*, что* $K = \times_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$*, где подгруппы* K_λ *— неединичны для всех* $\lambda \in \Lambda$ *и множество индексов* Λ *— бесконечно, то* $K \leq PC(G)$.

2. Строение некоторых классов анти PC-групп

Лемма 5. *Пусть* G *— локально обобщенно радикальная анти* PC*-группа,* A *— ее абелева подгруппа. Если* PC*-центр* G *не включает в себя* A*, то* A *включает в себя такую конечно порожденную подгруппу* B*, что* A/B *— квазициклическая группа.*

Доказательство. Выберем в подгруппе A такую свободную абелеву подгруппу C, для которой A/C — периодическая группа. Допустим, что подгруппа C не имеет конечной системы порождающих элементов. Другими словами, C — прямое произведение бесконечного множества бесконечных циклических подгрупп. Используя следствие 8, получаем включение $A \leq PC(G)$. Это противоречие доказывает конечную порожденность подгруппы C. Так как A/C является периодической, то

$$A/C = \times_{p\in\Pi(A/C)} T_p/C,$$

где T_p/C — силовская p-подгруппа фактор-группы A/C, $p \in \Pi(A)$. Если множество $\Pi(A/C)$ — бесконечно, то из следствия 7 получаем, что подгруппа $< a > C$ будет почти полициклически приближенна к нормальной в G для любого элемента $a \in A$. Очевидно, $< a > C$ является полициклической, поэтому из следствия 4 получаем включение $< a > C \leq PC(G)$. В частности, $a \in PC(G)$. Ввиду произвольности элемента a, это означает, что $A \leq PC(G)$. Полученное противоречие доказывает конечность множества $\Pi(A/C)$. Допустим теперь, что для некоторого простого числа нижний слой

$$\Omega_1(T_p/C) = \{xC \in T_p/C | (xC)^p = 1\}$$

силовской p-подгруппы T_p/C бесконечен. Иначе говоря, $\Omega_1(T_p/C)$ — бесконечная элементарная абелева p-подгруппа. Снова используя следствие 8, получаем, что подгруппа $< a > C$ будет почти полициклически приближенна к нормальной в G для любого элемента $a \in A$, а отсюда, как и выше, вытекает включение $A \leq PC(G)$. Это противоречие доказывает конечность $\Omega_1(T_p/C)$ для любого простого $p \in \Pi(A/C)$. В свою очередь, это означает, что T_p/C — черниковская подгруппа для любого простого $p \in \Pi(A/C)$. Имеем теперь $T_p/C = K_p/C \times D_p/C$, где K_p/C — конечная подгруппа, D_p/C — делимая подгруппа, $p \in \Pi(A/C)$. Допустим, что A/C включает в себя две такие квазициклические подгруппы P_1/C и P_2/C, что $P_1/C \cap P_2/C =< 1 >$. Для любого элемента $a \in A$ обе подгруппы $< a > P_1$ и $< a > P_2$ не являются почти полициклическими, а потому будут почти полициклически приближены к нормальным в группе G. Из выбора подгрупп P_1, P_2 получаем, что пересечение $< a > P_1/C \cap < a > P_2/C$ будет конечным. Но это означает, что $< a > P_1 \cap < a > P_2$ — конечно порожденная абелева подгруппа, в частности, она являются полициклической. Из леммы 2 получаем, что $< a > P_1 \cap < a > P_2$ — почти полициклически приближена к нормальной в группе G. Из следствия 5 вытекает теперь включение $< a > P_1 \cap < a > P_2 \leq PC(G)$, в частности, $a \in PC(G)$, а потому и $A \leq PC(G)$. Это последнее противоречие показывает, что $A/C = B/C \times D/C$, где B/C — конечная подгруппа, D/C — квазициклическая подгруппа. Но тогда B — конечно порожденная абелева подгруппа, а фактор-группа A/C будет квазициклической, что и требовалось.

Напомним, что группа G называется *минимаксной,* если она обладает конечным рядом нормальных подгрупп, каждый фактор которого либо удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, либо условию максимальности для подгрупп. Нетрудно убедиться в том, что локально обобщенно радикальная группа тогда и только тогда минимаксна, когда она обладает конечным рядом нормальных подгрупп, каждый фактор которого будет либо черниковской группой, либо абелевой конечно порожденной группой. Отметим также, что абелева минимаксная группа является расширением конечно порожденной подгруппы с помощью делимой черниковской.

Лемма 6. *Пусть G — локально обобщенно радикальная анти PC-группа. Если включает в себя абелеву подгруппу A, которая не является минимаксной, то G имеет почти полициклический коммутант.*

Доказательство. Из леммы 5 получаем включение $A \leq PC(G)$. В частности, отсюда видно, что PC-центр не является минимаксной подгруппой. Из теоремы 2.2 работы cite4 вытекает, что для всякой почти полициклической подгруппы

$H \leq PC(G)$ ее нормальное замыкание H^G будет почти полициклической подгруппой. Отсюда вытекает, что всякая почти полициклическая подгруппа $PC(G)$ почти полициклически приближена к нормальной. С другой стороны, всякая подгруппа $PC(G)$, которая не является почти полициклической, также почти полициклически приближена к нормальной. Из теоремы 5.5 работы **[11]** можно получить теперь, что PC-центр имеет почти полициклический коммутант K. Пусть $xK \in PC(G/K)$, положим $X/K =< xK >^{G/K} =< x >^G K/K$. Из теоремы 2.2 статьи **[11]** вытекает, что подгруппа X/K — почти полициклическая. Поскольку такой же является K, то и вся подгруппа X, а вместе с ней и $< x >^G$, также будет почти полициклической. Из следствия 2 получаем включение $x \in PC(G)$, которое доказывает равенство $PC(G/K) = PC(G)/K$. Все последующие рассуждения будут проводиться в фактор-группе G/K, поэтому, чтобы не вводить новых обозначений, положим $K =< 1 >$. Из последующего доказательства будет видно, что это допущение не ограничит общности рассуждений. Итак, будем считать подгруппу $PC(G)$ абелевой. Покажем, что $G = PC(G)$. Предположим противное. Тогда можно найти элемент $g \in G(G)$. Выберем в подгруппе $PC(G)$ свободную абелеву подгруппу C, для которой $PC(G)/C$ — периодическая группа. Допустим, что подгруппа C не имеет конечной системы порождающих элементов. Другими словами, C — прямое произведение бесконечного множества бесконечных циклических подгрупп. В этом случае C почти полициклически приближена к нормальной. Так как A/C — периодическая группа, то C^G/C, будучи полициклической и периодической, конечна. Отсюда вытекает, что C^G также будет свободной абелевой. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать подгруппу C нормальной. Для подгруппы C возможно получить разложение $C = C_1 \times C_2$, где обе подгруппы C_1 и C_2 будут свободными абелевыми бесконечного ранга. В частности, они не могут быть полициклическими, а потому C_1^G/C_1 и C_2^G/C_2 — полициклические. Из равенства $C_1 \cap C_2 =< 1 >$ получаем, что пересечение $< g > C_1^G \cap < g > C_2^G$ является полициклической подгруппой. Каждая из подгрупп $< g > C_1^G$ и $< g > C_2^G$ не является полициклической, а потому обе они полициклически приближены к нормальным. Из леммы 2 получаем, что и $< g > C_1^G \cap < g > C_2^G$ — полициклически приближенная к нормальной подгруппа. Используя теперь следствие 4, получаем включение $< g > C_1^G \cap < g > C_2^G \leq PC(G)$, в частности и $g \in PC(G)$. Полученное противоречие доказывает тот факт, что подгруппа C является конечно порожденной.

Так как A/C является периодической, то $PC(G)/C \times_{p \in \Pi(A/C)} T_p/C$, где T_p/C — силовская p-подгруппа фактор-группы $PC(G)/C$, $p \in \Pi(PC(G))$. Если множество $\Pi(PC(G)/C)$ — бесконечно, то из следствия 7 получаем, что подгруппа $< g > C$ будет почти полициклически приближенна к нормальной в G. Очевидно, $< g > C$ является полициклической, поэтому из следствия 4 получаем включение $< g > C \leq PC(G)$. В частности, $g \in PC(G)$, а это противоречит допущению о g. Полученное противоречие доказывает конечность множества $\Pi(PC(G)/C)$. Как уже отмечалось выше, подгруппа $PC(G)$ не является минимаксной. Если допустить теперь, что для некоторого простого числа $p \in \Pi(PC(G))$ нижний слой

$$\Omega_1(T_p/C) = \{xC \in T_p/C | (xC)^p = 1\}$$

силовской p-подгруппы T_p/C конечен, то T_p/C будет черниковской группой. Вместе с конечностью множества $\Pi(PC(G)/C)$ это влечет тот факт, что $PC(G)/C$ — черниковская группа, а значит, $PC(G)$ — минимаксная подгруппа. Полученное противоречие доказывает существование такого простого числа p, что $\Omega_1(T_p/C) = L/C$ — бесконечная подгруппа. Иначе говоря, $\Omega_1(T_p/C)$ — бесконечая элементарная абелева p-подгруппа. Для подгруппы L/C возможно получить разложение $L/C = L_1/C \times L_2/C$, где обе подгруппы L_1/C и L_1/C будут бесконечными элементарными абелевыми. В частности, они не могут быть полициклическими. Следствие 1 показывает тогда, что обе секции L_1^G/L_1 и L_2^G/L_2 должны быть полициклическими, а значит, конечными. Из равенства $L_1 \cap L_2 =< 1 >$ получаем, что пересечение $< g > L_1^G \cap < g > L_2^G$ является полициклической подгруппой. Каждая из подгрупп $< g > L_1^G$ и $< g > L_2^G$ не является полициклической, а потому обе они полициклически приближены к нормальным. Из леммы 2 получаем, что и $< g > L_1^G \cap < g > L_2^G$ — полициклически приближенная к нормальной подгруппа. Используя теперь следствие 4, получаем включение $< g > L_1^G \cap < g > L_2^G \leq PC(G)$, в частности и $g \in PC(G)$. Полученное финальное противоречие доказывает равенство $G = PC(G)$. Как мы уже выше отмечали, в этом случае, коммутан группы G будет почти полициклическим, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть G — обобщенно радикальная анти PC-группа. Тогда либо группа G имеет почти полициклический коммутант, либо G — почти разрешимая минимаксная группа.*

Доказательство. Из леммы 6 получаем, что если среди абелевых подгрупп G имеется подгруппа, не являющаяся минимаксной, то коммутант группы G будет почти полициклическим. Поэтому рассмотрим случай, когда все абелевы подгруппы G являются минимаксными.

Пусть R — максимальная нормальная радикальная подгруппа G. Из основного результата работ [10] и [11] получаем, что R — разрешимая минимаксная группа. Пусть L/R — максимальная нормальная локально конечная подгруппа G/R. Если L/R включает в себя абелеву подгруппу, не являющуюся черниковской, то из следствия 1 и леммы 6 получаем, что G/R имеет конечный коммутант D/R. Его централизатор $C_{G/R}(D/R)$ имеет тогда конечный индекс в G/R. Если допустить, что G/R — бесконечна, то, принимая во внимание включение $D/R \cap C_{G/R}(D/R) \leq \zeta(C_{G/R}(D/R))$, получим, что $C_{G/R}(D/R)$ — неединичная нильпотентная нормальная подгруппа G/R. Однако это противоречит выбору подгруппы R. Таким образом, в этом случае G/R

должна быть конечной, и все доказано. Поэтому рассмотрим случай, когда все абелевы подгруппы L/R будут черниковскими. В этом случае L/R также является черниковской [**12**, теорема 5.8]. Опять ввиду выбора подгрупп L, R, L/R — конечна. Предположим, что G/R — бесконечна и обозначим через U/L локально нильпотентный радикал G/L. Это означает, что U/L — локально нильпотентная подгруппа без кручения. Конечность L/R влечет конечность индекса $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Отсюда вытекает, что $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R \neq < 1 >$. Так как G/R не включает в себя нормальных локально нильпотентных подгрупп, то $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) =< 1 >$. Однако в этом случае

$$V/R \cong (V/R)/(V/R \cap L/R) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L.$$

Это показывает, что V/R — нееденичная нормальная локально нильпотентная подгруппа G/R, что противоречит выбору подгруппы R. Полученное противоречие доказывает конечность G/R, а с этим и всю теорему.

Случай почти разрешимых минимаксных групп требует отдельного рассмотрения.

Список литературы

[1] *Neumann B.H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. — 1955. — 63, № 1. — P. 76 - 96.

[2] *Kurdachenko L.A., Otal J. and Subbotin I.Ya.* Artinian modules over group rings. — Basel: Birkhauser, 2007. —245 p.

[3] *Половицкий Я.Д.* Группы с экстремальными классами сопряженных элементов // Сиб. мат. журн. — 1964. — 5. — С. 891 - 895.

[4] *Franciosi S., de Giovanni F. and Tomkinson M.J.* Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes // Bolletino Unione Mat.Italiana. — 1990. — 4B, №7. — P. 35 - 55.

[5] *Kurdachenko L.A., Otal J. and Soules P.* Groups with polycyclic-by-finite conjugate classes of subgroups // Communications in Algebra. — 2004. — 32, №12. — P. 4769 - 4784.

[6] *Ольшанский А.Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989. — 447 с.

[7] *Wehrfritz B.A.F.* Infinite linear groups. — Berlin:Springer, 1973. — 229 p.

[8] *Segal D.* Polycyclic groups. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. — 289 p.

[9] *Tomkinson M.J.* *FC*-groups. — Boston: Pitman, 1984. — 171 p.

[10] *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Annalen. — 1968. — 175, № 1. — P. 1 - 43.

[11] *Зайцев Д.И.* О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности // Мат. сб. — 1969. — 78, № 3. — С. 323 - 331.

[12] *Kegel O.H. and Wehrfritz B.A.F.* Locally finite groups. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. — 210 p.