Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 72–77.

Про норму циклічних підгруп непростих порядків у неперіодичних групах

Т. Д. Лукашова, М. Г. Друшляк
(Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка)

Анотація. Вивчаються неперіодичні групи, що мають недедекіндову норму циклічних підгруп непростих порядків. Встановлено, що такі групи є майже дедекіндовими і збігаються з вказаною нормою.

Abstract. Non-periodic groups, which norm of cyclic subgroups of non-prime order is non-Dedekind, are studied. Such groups are almost Dedekind and coincide with given norm.

У сучасній теорії груп важливе місце займають результати, пов'язані з вивченням груп залежно від властивостей різних систем їх підгруп. До цього напрямку відносяться також дослідження, в яких обмеження накладаються не власне на підгрупи, а на відповідні норми. Σ-нормою прийнято називати максимальну підгрупу, що нормалізує кожну підгрупу системи $\Sigma \neq \oslash$ всіх підгруп групи G з певною теоретико-груповою властивістю.

Поштовхом до розв'язування цієї проблеми стала низка досліджень щодо вивчення будови груп, які збігаються зі своїми Σ-нормами для заданої системи підгруп Σ, тобто груп, в яких кожна підгрупа системи Σ є інваріантною.

Уперше ситуацію, коли Σ-норма є власною підгрупою групи, було розглянуто Р.Бером [**8**] для системи Σ, що складалася з усіх підгруп даної групи. Ці дослідження було продовжено у роботах [**9**]-[**12**] для різних систем підгруп Σ та при різних обмеженнях, що накладалися на відповідні Σ-норми.

Авторами продовжується вивчення властивостей груп за заданими властивостями їх Σ-норм і розглядаються неперіодичні групи, в яких норма циклічних підгруп непростих порядків є недедекіндовою.

Нормою циклічних підгруп непростих порядків групи G будемо називати перетин нормалізаторів усіх циклічних підгруп групи G, що мають складений або нескінченний порядок, та позначатимемо її $N_G(C_{\bar{p}})$.

Зрозуміло, що в неперіодичній групі G, яка збігається зі своєю нормою $N_G(C_{\bar{p}})$, інваріантними є всі циклічні підгрупи складеного чи нескінченного порядку. Такі групи за умови їх недедекіндовості вивчалися в **[13]** і були названі майже дедекіндовими групами. Будову неперіодичних майже дедекіндових груп описує наступне твердження.

Твердження 1 ([**13**]). *Неперіодична група G є майже дедекіндовою тоді і тільки тоді, коли $G = C\lambda\langle b\rangle$, де C — неперіодична абелева група, $|b| = 2$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ для будь-якого елемента $c \in C$.*

Безпосередньо з твердження 1 випливає, що в довільній неперіодичній групі без інволюцій норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева.

Оскільки норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неперіодичної групи нормалізує кожну нескінченну циклічну підгрупу групи G, то $N_G(C_{\bar{p}}) \subseteq N_G(C_\infty)$, де $N_G(C_\infty)$ — норма нескінченних циклічних підгруп групи (див. [**9**]). Окрім того, в групах без скруту $N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_\infty)$, тому, враховуючи результати роботи [**9**], встановлені для норми $N_G(C_\infty)$, мають місце твердження.

Теорема 1. *Якщо G — група без скруту, то її норма $N_G(C_{\bar{p}})$ є центральною підгрупою і збігається з нормою $N_G(C_\infty)$.*

Доведення. Нехай G — група без скруту, тоді вона не містить циклічних підгруп складеного порядку, а значить $N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_\infty)$. За теоремою 1 [**9**] $N_G(C_\infty) = Z(G)$. Отже, й $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G)$. $\square$

Наслідок 1. *Довільна група G без скруту, що є скінченним розширенням норми $N_G(C_{\bar{p}})$, абелева.*

Доведення. Нехай $[G : N_G(C_{\bar{p}})] < \infty$. Тоді $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G)$, $[G : Z(G)] < \infty$ і за лемою Шура $\left|G^/\right| < \infty$. Оскільки G - група без скруту, це можливо лише за умови $G^/ = E$. Отже, група G абелева. $\square$

Перейдемо до вивчення мішаних неперіодичних груп. Наступні приклади підтверджують, що норма $N_G(C_{\bar{p}})$, яка є власною підгрупою мішаної неперіодичної групи G, може як співпадати з нормою $N_G(C_\infty)$, так і бути відмінною від неї.

Приклад 1. $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle$, $|a| = |b| = \infty$, $|c| = 3$, $c^{-1}ac = b$, $c^{-1}bc = a^{-1}b^{-1}$.

У цій групі і $N_G(C_{\bar{p}}) = N_G(C_\infty) = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ і $N_G(C_{\bar{p}})$ породжується всіма елементами нескінченного порядку групи.

Приклад 2. $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle$, $|a| = |b| = \infty$, $|c| = 6$, $c^{-1}ac = ab$, $c^{-1}bc = a^{-1}$.

У цьому випадку $N_G(C_\infty) = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\lambda\langle c^3\rangle$, а $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G) = E$. Отже, $N_G(C_{\bar{p}}) \neq N_G(C_\infty)$.

Лема 1. *Якщо центр $Z(G)$ неперіодичної групи G містить елементи нескінченного порядку, то норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева і збігається з центром $Z(G)$.*

Доведення. Нехай у центрі $Z(G)$ групи міститься елемент нескінченного порядку. Тоді за лемою 2 роботи **[9]** норма $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп групи G абелева і збігається з центром групи. Враховуючи включення $N_G(C_\infty) \supseteq N_G(C_{\bar{p}})$, одержимо, що $N_G(C_{\bar{p}}) = Z(G)$. □

Наслідок 2. *Будь-яка неперіодична група G, що є скінченним розширенням центра $Z(G)$, має абелеву норму $N_G(C_{\bar{p}})$.*

Лема 2. *Якщо норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неперіодичної групи G не містить елементів нескінченного порядку, то вона абелева.*

Доведення. Нехай норма $N_G(C_{\bar{p}})$ періодична. Тоді для довільного елемента $x \in G$ нескінченного порядку $\langle x\rangle \cap N_G(C_{\bar{p}}) = E$. Оскільки у групі $G_1 = \langle x\rangle\, N_G(C_{\bar{p}})$ підгрупи $\langle x\rangle$ та $N_G(C_{\bar{p}})$ є інваріантними, то $G_1 = \langle x\rangle \times N_G(C_{\bar{p}})$ і $x \in Z(G_1)$. За лемою 1 норма $N_{G_1}(C_{\bar{p}})$ групи G_1 абелева, отже й норма $N_G(C_{\bar{p}}) \subseteq N_{G_1}(C_{\bar{p}})$ також буде абелевою. □

Наслідок 3. *Якщо G — мішана неперіодична група, то її норма $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп непростих порядків є або абелевою (періодичною чи неперіодичною), або неперіодичною неабелевою групою.*

Лема 3. *Якщо центр $Z(G)$ неперіодичної групи G містить елементи складеного порядку, то її норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева.*

Доведення. Враховуючи лему 2, достатньо розглянути випадок, коли норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неперіодична.

Припустимо, що підгрупа $N_G(C_{\bar{p}})$ неабелева. Тоді $N_G(C_{\bar{p}})$ - неперіодична майже дедекіндова група (див. твердження 1). Оскільки центр такої групи не містить елементів складеного порядку, припущення невірне і норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева. □

Наслідок 4. *Якщо в неперіодичній групі G існує така циклічна підгрупа $\langle x\rangle$ нескінченного чи складеного порядку, що $\langle x\rangle \cap N_G(C_{\bar{p}}) = E$, то норма $N_G(C_{\bar{p}})$ абелева.*

Доведення. Нехай підгрупа $\langle x\rangle$ задовольняє умови наслідку. Тоді підгрупи $\langle x\rangle$ та $N_G(C_{\bar{p}})$ є інваріантними в групі $G_1 = \langle x\rangle\, N_G(C_{\bar{p}}) = \langle x\rangle \times N_G(C_{\bar{p}})$ і $x \in Z(G_1)$. За лемами 1 та 3 норма $N_{G_1}(C_{\bar{p}})$ групи G_1 абелева, тому абелевою буде й норма $N_G(C_{\bar{p}})$ групи G. □

Наслідок 5. *У неперіодичній групі G з неабелевою нормою $N_G(C_{\bar{p}})$, довільна циклічна підгрупа $\langle x\rangle$ нескінченного чи складеного порядку має неодиничний перетин з нормою $N_G(C_{\bar{p}})$.*

Далі будемо розглядати лише мішані неперіодичні групи, в яких норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неабелева, тобто є неперіодичною майже дедекіндовою групою. За твердженням 1 $N_G(C_{\bar{p}}) = C\lambda\langle b\rangle$, де C — неперіодична абелева група, $|b| = 2$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ для будь-якого елемента $c \in C$.

Позначимо A — підгрупу, породжену всіма елементами нескінченного порядку групи G.

Лема 4. *Якщо неперіодична група G має неабелеву норму $N_G(C_{\bar{p}})$, то підгрупа A, породжена всіма елементами нескінченного порядку групи G, абелева і містить усі елементи складеного порядку даної групи.*

Доведення. Доведемо спочатку, що $C \subseteq Z(A)$. Візьмемо довільні елементи $c \in C$ та $a \in A$ такі, що $[c, a] \neq 1$. Без порушень загальності можна вважати $|a| = |c| = \infty$. Оскільки $\langle a\rangle \lhd G_1 = \langle a\rangle N_G(C_{\bar{p}})$, то $c^{-1}ac = a^{-1}$, звідки $\langle a\rangle \cap \langle c\rangle = E$. Отже, $[c^2, a] = 1$, $|c^2a| = \infty$ і $\langle c^2a\rangle$ є c-інваріантною підгрупою. Але тоді $c^{-1}(c^2a)c = c^{-2}a^{-1} = c^2a^{-1}$ і $c^4 = 1$, всупереч вибору елемента c. Отже, $C \subseteq Z(A)$.

Покажемо, що підгрупа A містить також всі елементи складеного порядку групи G. Нехай $y \in G$ - довільний елемент складеного порядку. Тоді $\langle y\rangle \lhd G_1 = \langle y\rangle N_G(C_{\bar{p}})$ і $[G_1 : C_{G_1}(y)] < \infty$. Отже, знайдеться елемент $c \in C$, $|c| = \infty$ такий, що $[c, y] = 1$. Тоді $|cy| = \infty$, $cy \in A$ і $y \in A$, що й треба було довести. □

З'ясуємо тепер, як діє елемент b на елементи підгрупи A. Для будь-якого елемента $a \in A$, $|a| = \infty$ маємо $\langle a\rangle \lhd G_1 = \langle a\rangle N_G(C_{\bar{p}})$. Тому якщо $[a, b] = 1$, то $|ba| = \infty$, звідки $ba \in A$ і за доведеним $[c, ab] = 1$ для довільного елемента $c \in C$, $|c| = \infty$, що неможливо. Отже, $b^{-1}ab = a^{-1}$, де $a \in A$ — довільний елемент нескінченного порядку.

Нехай тепер a — елемент скінченного порядку з A. Тоді $|ca| = \infty$, де $c \in C$, $|c| = \infty$ і

$$b^{-1}(ca)b = (ca)^{-1} = c^{-1}a^{-1} = c^{-1}b^{-1}ab,$$

тобто і в цьому випадку $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Позначимо x та y — довільні елементи групи A такі, що $[x, y] \neq 1$. Тоді

$$b^{-1}(xy)b = y^{-1}x^{-1} = b^{-1}xbb^{-1}yb = x^{-1}y^{-1},$$

звідки $[x, y] = 1$, всупереч їх вибору. Таким чином, підгрупа A абелева.

Теорема 2. *Неперіодична група G має неабелеву норму $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп непростих порядків тоді і тільки тоді, коли всі елементи нескінченного порядку групи породжують інваріантну абелеву підгрупу A, яка містить усі елементи непростих порядків групи G, і існує елемент b порядку 2 такий, що $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$. При цьому $N_G(C_{\bar{p}}) = A\lambda\langle b\rangle$.*

Доведення. Достатність умов теореми очевидна. Їх необхідність випливає з доведення леми 4. □

Наслідок 6. *Якщо норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неперіодичної групи G неабелева, то фактор-група $G/N_G(C_{\bar{p}})$ періодична і не містить елементів непростих порядків.*

Наслідок 7. *Якщо в неперіодичній групі G норма $N_G(C_{\bar{p}})$ неабелева і існує нескінченна циклічна підгрупа $\langle x\rangle$, інваріантна в G, то $N_G(C_{\bar{p}}) = G$.*

Доведення. За умовою $N_G(C_{\bar{p}}) = A\lambda\langle b\rangle$, де A — неперіодична абелева група, $|b| = 2$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для довільного елемента $a \in A$ і $\langle x\rangle \lhd G$, $|x| = \infty$. Тоді за теоремою 2, $x \in A$, $b^{-1}xb = x^{-1}$, $[G : C_G(\langle x\rangle)] = 2$ і $G = C_G(\langle x\rangle)\lambda\langle b\rangle$.

Нехай y — довільний елемент непростого порядку з $C_G(\langle x\rangle)$. Тоді за лемою 4 $y \in A$. Якщо ж $y \in C_G(\langle x\rangle)$, $|y| = p$, де p - просте число, то враховуючи, що $[x, y] = 1$, одержимо $|xy| = \infty$. Отже, $xy \in A$ і $y \in A$. Таким чином, $C_G(\langle x\rangle) = A$ і $N_G(C_{\bar{p}}) = G$, що й треба було довести. □

Теорема 3. *Будь-яка неперіодична група G, що має неабелеву норму $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп непростих порядків, є майже дедекіндовою групою і збігається з нормою $N_G(C_{\bar{p}})$.*

Доведення. Нехай норма $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп непростих порядків неперіодичної групи G неабелева. Тоді $N_G(C_{\bar{p}}) = A\lambda\langle b\rangle$, причому за теоремою 2 підгрупа A містить усі елементи нескінченного та складеного порядку групи G, $|b| = 2$ і $b^{-1}ab = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$.

Припустимо, що $N_G(C_{\bar{p}}) \neq G$ і x - довільний елемент групи G, що не належить нормі $N_G(C_{\bar{p}})$. Тоді $|x| = p$, де p - деяке просте число.

Нехай $p \neq 2$. У фактор-групі $\overline{G} = G/A$, $|\overline{b}| = 2$, $\overline{b} \in Z(\overline{G})$ і тому елемент $\overline{xb}$ матиме порядок, рівний $2p$. З цього випливає, що xb також є елементом непростого порядку. За теоремою 2 $xb \in N_G(C_{\bar{p}})$, звідки $x \in N_G(C_{\bar{p}})$, що суперечить його вибору.

Нехай тепер $p = 2$, тобто $|x| = 2$. Тоді $|xb| = 2$ і $[x, b] = 1$. За лемою 4 для довільного елемента $a \in A$, $|a| = \infty$, $[x, a] \neq 1$. Тому, враховуючи умови $A \lhd G$ та $[A, \langle x\rangle] \subseteq A$, покладемо $x^{-1}ax = ac$, $c \in A$. Оскільки $|x| = 2$, то $[x^2, a] = 1$, $a = x^{-2}ax^2 = acx^{-1}cx$ і $x^{-1}cx = c^{-1}$. Якщо $|c| > 2$, то $[xb, c] = 1$, $|xbc| > 2$ і за лемою 4 $xbc \in A$, звідки $x \in N_G(C_{\bar{p}})$, що неможливо. Отже, $|c| = 2$. Але тоді $[a^2, x] = 1$, $|a^2x| = \infty$ і знову $a^2x \in A$, $x \in A$. Отже, припущення невірне, $G = N_G(C_{\bar{p}})$ і теорему доведено. □

Наслідок 8. *Якщо норма $N_G(C_{\bar{p}})$ циклічних підгруп непростих порядків неперіодичної групи G неабелева, то вона збігається з нормою $N_G(C_\infty)$ нескінченних циклічних підгруп цієї групи.*

Література

[1] *Baer R.* Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // Comp. Math. — 1934. — 1. — P. 254 - 283.

[2] *Kappe W.* Die A-Norm einer Gruppe // Ill. J. Math. — 1961. — 5, №2. — P. 187 -197.

[3] *Wielandt H.* Uber der Normalisator der Subnormalen Untergruppen // Mat. Z. — 1958. — 69, №5. — P. 463-465.

[4] *Лиман Ф.Н.* О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс // Укр. мат. журн. — 1997. — 49, №5. — С. 678 - 684.

[5] *Лукашова Т.Д.* Локально скінченні p-групи ($p \neq 2$) з неабелевою нормою нециклічних підгруп // Вісник Київського університету, серія фіз-мат. науки. — 2001. — №1. — С. 43-53.

[6] *Лукашова Т.Д.* Про нециклічну норму нескінченних локально скінченних груп // Укр. мат. журн. — 2002. — 54, №3. — С.342-348.

[7] *Лукашова Т.Д.* Конечные 2-группы с недедекиндовой нормой нециклических подгрупп // Известия Гомельского гос-го ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. — 2001. — №3(6). — С. 139-150.

[8] *Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д.* Про норму нескінченних абелевих підгруп неперіодичних груп // Матеріали III Міжнар. алгебр. конф. в Україні, Суми, 2-8 липня 2001 р. — Суми: Сумський держав. пед. ун-т ім. А.С. Макаренка. — 2001. — С.205-207.

[9] *Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д.* О норме бесконечных циклических подгрупп непериодических групп // Вестник ВГУ имени П.М.Машерова. — Витебск. — 2006. — №4. — С. 108-111.

[10] *Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д.* Про нескінченні групи з заданими властивостями норми нескінченних підгруп // Укр. мат. журн. — 2001. — 53, №5. — С. 625-630.

[11] *Лукашова Т.Д.* Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних p-груп // Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки". — 2004. — №3. — С. 35-39.

[12] *Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д.* Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп // Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки". — 2005. — №1. — С.56-64.

[13] *Лелеченко Т.Г., Лиман Ф.Н.* Группы с инвариантными максимальными абелевыми подгруппами ранга 1 непростых порядков // Подгрупповая характеризация групп. — К.: Институт математики. — 1982. — С.85-92.