Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 46–53.

Факторкільця нетерових напівдосконалих кілець

В. М. Дармосюк
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Анотація. Нехай R радикал Джекобсона черепичного порядку A. Ми доводимо, що черепичний порядок A є спадковим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/R^2 є праворядним. Побудовано приклад черепичного порядку A, такого що A/I є праворядним нерозкладним кільцем, але A не є напівланцюговим.

Abstract. Let R be the Jacobson radical of a tiled order A. We prove that a tiled order A is hereditary if and only if the quotient ring A/R^2 is right serial. We construct the example of the tiled order A such that A/I is right serial indecomposable ring, but A is not serial.

1. Вступ

Метою данної статті є вивчення факторкілець напівланцюгових кілець, які завжди є напівдосконалими і також нетерових з двох сторін напівдосконалих напівдистрибутивних первинних кілець з ненульовим радикалом Джекобсона. Такі кільця згідно з [**9**, с.263] називаються черепичними порядками.

2. Сагайдаки напівдосконалих кілець

Скрізь в цій статті ми вважаємо, що A асоціативне кільце з $1 \neq 0$, R його радикал Джекобсона, всі модулі над кільцем A є правими і унітарними. Якщо модуль є лівим, то це зазначається окремо.

Нагадаємо, що модуль називається ланцюговим, якщо гратка його підмодулів є ланцюгом, тобто множина всіх його підмодулів є лінійно впорядкованою відносно включення. Модуль називається напівланцюговим, якщо він розкладається в скінчену пряму суму ланцюгових підмодулів. Кільце називається напівланцюговим справа (напівлвнцюговим зліва) або праворядним (ліворядним), якщо воно є напівланцюговим справа (зліва) модулем над собою. Напівланцюгове справа та напівланцюгове зліва кільце називається напівланцюговим.

В роботі [**8**] Накаяма довів наступну теорему.

Теорема 1. *(**Теорема Накаями**) Артінове кільце A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли A/R^2 є напівланцюговим артіновим кільцем.*

В.В. Кириченко переніс цю теорему на випадок нетерових напівдосконалих кілець.

Теорема 2. [**9**, с.313] *Напівдосконале нетерове кільце A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли A/R^2 є напівланцюговим артіновим кільцем.*

Наведемо приклад побудований Кириченком В.В., який показує, що ця теорема не переноситься на випадок нетерових тільки з однієї сторони кілець.

Приклад 1. Нехай ϑ дискретно нормоване кільце з класичним кільцем часток D, яке в цьому випадку є тілом. Розглянемо наступне кільце

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha \in \vartheta, \beta \in D \times D, \gamma \in D \right\}.$$

Неважко первірити, що A є нетеровим справа кільцем, яке не є нетеровим зліва. Позначимо через M єдиний максимальний ідеал в ϑ. Тоді

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_1 \in M, \beta_1 \in D \times D \right\}$$

і

$$R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_2 \in M^2, \beta_2 \in D \times D \right\}.$$

Зрозуміло, що $A/R^2 \simeq \vartheta/M^2 \times D$, тобто A/R^2 є прямим добутком двох ланцюгових кілець, а тому напівланцюговим кільцем. Покажемо, що кільце A не є напівланцюговим. Дійсно,

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |\alpha \in \vartheta, \beta \in D \times D \right\}$$

є нерозкладним проективним модулем, який містить підмодуль

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |\beta \in D \times D \right\}.$$

Зрозуміло, що X є прямою сумою двох простих підмодулів. З цього випливає, що модуль P_1 не є ланцюговим, а тому кільце A не є напівланцюговим.

Нагадаємо означення сагайдака нетерового справа напівдосконалого кільця.

Нехай A напівдосконале нетерове справа кільце, $P_1, ..., P_s$ всі попарно неізоморфні нерозкладні проективні праві A-модулі. Розглянемо проективне накриття $R_i = P_i R$ $(i = 1, ..., s)$, яке позначимо через $P(R_i)$. Нехай $P(R_i) = \overset{s}{\underset{j=1}{\oplus}} P_j^{t_{ij}}$. Поставимо у відповідність головним модулям $P_1, ..., P_s$ точки $1, ..., s$ в площині і з'єднаємо стрілкою t_{ij}

точки i та j. Побудований граф називається правим сагайдаком (або просто сагайдаком) напівдосконалого нетерового справа кільця A і позначається $Q(A)$.

Нехай $A_A = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_s^{n_s}$ розклад напівдосконалого кільця A в пряму суму головних правих A-модулів, і нехай $P = P_1 \oplus ... \oplus P_s$, $B = End_A(A)$. Згідно теореми Моріта категорія правих A-модулів є еквівалентною категорії правих B-модулів. Очевидно, $B/radB$ є прямою сумою тіл. Кільце B називається базовим кільцем кільця A.

Означення 1. [**9**, с.263] Нехай A напівдосконале кільце таке, що A/R^2 є артіновим справа кільцем. Сагайдак кільця A/R^2 називається сагайдаком кільця A і позначається $Q(A)$.

Теорема 3. [**9**]*Наступні умови еквівалентні для напівдосконалого нетерового справа та зліва кільця A:*

(1) кільце A нерозкладне;

(2) кільце A/R^2 нерозкладне;

(3) сагайдак кільця A зв'язний.

З прикладу 1 випливає, що сагайдак $Q(A)$ кільця A має наступний вигляд:

$$Q(A) = \left\{ \bullet\!\circlearrowleft \quad \bullet \right\},$$

тобто є незв'язним, а кільце A нерозкладне. З цього отримуємо, що теорема 3 не переноситься на випадок нетерових з однієї сторони напівдосконалих кілець.

Приклад 2. Нехай A - напівланцюгове кільце, $A \simeq T_n(D)$. Кільце A є нерозкладним. Розглянемо ідеал кільця A:

$$I = \begin{array}{c} k\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} D & \dots & \dots & D \\ 0 & & \ddots & \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & D \end{array} \right) . \qquad \underbrace{\qquad}_{n-k}$$

Зрозуміло, що $I \not\subset R^2$. Тоді факторкільце A/I можна розкласти наступним чином $A/I = T_k(D) \times T_{n-k}(D)$. Кільце $T_n(D)$ є артіновим з двох сторін, а тому нетеровим з двох сторін. Ми бачимо, що якщо $I \not\subset R^2$, то факторкільце A/I може бути розкладним.

Наступні твердження дають можливість будувати сагайдак напівдосконалого кільця.

Твердження 1. [**9**, с.265] *Нехай* $A = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_s^{n_s}$ *розклад напівдосконалого кільця* A *в пряму суму головних правих* A *- модулів і нехай* $1 = f_1 + ... + f_s$ *розклад одиниці кільця* A *в суму попарно ортогональних ідемпотентів, тобто* $f_i A = P_i^{n_i}$. *Тоді радикал Джекобсона* R *кільця* A *має двосторонній пірсовський розклад наступного вигляду:*

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & A_{12} & ... & A_{1s} \\ A_{21} & R_{22} & ... & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & ... & R_{ss} \end{pmatrix},$$

де $R_{ii} = rad(f_i A f_i)$, $A_{ij} = f_i A f_j$ *для* $i, j = 1, ..., s$.

Кільце $f_i A f_i$ є ізоморфним $End_A(P_i^{n_i}) \simeq M_{n_i}(End(P_i))$, де $End_A(P_i) = \vartheta$ - локальне кільце, згідно теореми 10.3.8 [**9**]. Згідно твердження 3.4.10 [**9**], $radM_{n_i}(\vartheta) = M_{n_i}(rad\vartheta_i)$.

Покладемо $U_i = P_i / P_i R$. Оскільки, $\bar{A} = A/R = U_1^{n_1} \oplus ... \oplus U_s^{n_s}$, ідемпотенти $f_1, ..., f_s$ є центральними по модулю радикала і всі прості праві A - модулі вичерпуються модулями $U_1, ..., U_s$. Аналогічно, нехай $V_i = Q_i / RQ_i$, тоді всі прості праві A - модулі вичерпуються модулями $V_1, ..., V_s$.

Лема 1. *(ануляторна лема)*[**9**, с.265] *Нехай* $1 = f_1 + ... + f_s$ *канонічний розклад* $1 \in A$. *Для кожного простого правого* A*-модуля* U_i *та для кожного* f_j *маємо* $U_i f_j = \delta_{ij} U_i$, $i, j = 1, ..., s$. *Подібно для кожного простого лівого* A*-модуля* V_i *та для кожного* f_j *маємо* $f_j V_i = \delta_{ij} V_i$, $i, j = 1, ..., s$.

Нехай A зведене напівдосконале кільце, $1 = e_1 + ... + e_s$ розклад $1 \in A$ в суму взаємно ортогональних локальних ідемпотентів.

Покладемо $U_i = e_i A / e_i R$ та $V_i = A e_i / R e_i$.

Лема 2. *(Q-лема)*[**9**, с.266] *Простий модуль* U_k *(відп.* V_k*) з'являється в прямій сумі розкладу модулів* $e_i R / e_i R^2$ *(відп.* $Re_i / R^2 e_i$*) тоді і тільки тоді, коли* $e_i R^2 e_k$ *(відп.* $e_k R^2 e_i$*) строго міститься в* $e_i R e_k$ *(відп.* $e_k R e_i$*).*

3. Факторкільця черепичних порядків

Теорема 4. *(Айзенбуд – Гріффітс* [**5**] *, Айзенбуд – Робсон* [**6**]*, Фейс* [**11**]*) Якщо* A *— нетерове спадкове первинне кільце, то* A/I *— артінове напівланцюгове кільце для кожного ненульового ідеала* I.

Насправді це справедливо для будь-якого спадкового зліва кільця A з плоскою ін'єктивною оболонкою і для будь-якого його ідеала I, такого, що A/I артінове зліва.

Теорема 5. *Якщо* I *— ненульовий двосторонній ідеал черепичного порядка* A*, то факторкільце* A/I *є артіновим напівдистрибутивним кільцем.*

Теорема 6. *Наступні умови є еквівалентними для черепичного порядка A:*

(1) A спадкове справа і зліва кільце;

(2) A — напівланцюгове кільце;

(3) A/R^2 — напівланцюгове кільце;

(4) A/R^2 — праворядне кільце.

Доведення. (1)⇔(2). Згідно теоремі 12.3.4 [**9**] будь-яке нетерове первинне зведене кільце A є або тілом, або кільцем $s \times s$ матриць вигляду

$$H_s(\vartheta) = \begin{pmatrix} \vartheta & \vartheta & \dots & \vartheta \\ M & \vartheta & \dots & \vartheta \\ M & M & \dots & \vartheta \end{pmatrix},$$

де ϑ дискретно нормоване кільце. Кільце $H_s(\vartheta)$ є нетеровим напівланцюговим первинним спадковим кільцем. Кільце A не може бути тілом тому, що його радикал Джекобсона відмінний від нуля. Оскільки кільце $H_s(\vartheta)$ є спадковим, а спадковість зберігається при Моріта еквівалентності, то теорема 12.3.4 [**9**] описує черепичні спадкові порядки: будь-який спадковий черепичний порядок еквівалентний в сенсі Моріти кільцю $H_s(\vartheta)$. Зауважемо також, що такі властивості кільця, як нетеровість, первинність, напівланцюговість та наявність ненульового радикала Джекобсона залишаються незмінними при переході до кілець еквівалентних в сенсі Моріти. Тому ми можемо розглядати лише зведені напівланцюгові черепичні порядки. З теореми 12.3.8 [**9**] випливає, що такі кільця збігаються з кільцями вигляду $H_s(\vartheta)$. Еквівалентність (1) ⇔ (2) доведено.

Доведення імплікації (2)⇒(3) та (3)⇒(4) випливає з того, що довільне факторкільце напівланцюгового кільця напівланцюгове, а, крім того, будь-яке напівланцюгове кільце є праворядним кільцем.

(4)⇔(2). За означенням сагайдака напівдосконалого нетерового кільця A маємо: $Q(A) = Q(A/R^2)$. Теорема 14.6.1 [**9**] стверджує, що $Q(A)$ є сильнозв'язним сагайдаком, тобто з кожної його вершини в іншу є шлях. З іншого боку сагайдак $Q(A/R^2)$ є праворядним сагайдаком, тобто з кожної його вершини виходить не більше однієї стрілки. Опис таких сагайдаків дано в наслідку 10.2.3 [**10**, с.178]. З нього випливає, що єдиним сильнозв'язним праворядним сагайдаком є простий цикл. Кільце A є напівдистрибутивним, а тому Q - симетричним [**9**, с.247]. Тому лівий сагайдак кільця A є простим циклом. З теореми 12.3.11 [**9**] випливає, що кільце A напівланцюгове.

Теорему доведено. □

Квазіфробеніусові кільця характеризуються наступною теоремою:

Теорема 7. [**8**, с.170] *Для двостороннього артінового кільця A наступні умови є еквівалентними:*

(1) A — квазіфробеніусове;

(2) кожен головний A - модуль має єдиний максимальний підмодуль, і якщо два таких мінімальних підмодуля є ізоморфними, тоді вони є відповідними головним A - модулям. Таке ж твердження справедливе для головних лівих A - модулів.

Твердження 2. [**8**, с.173] *Якщо A квазіфробеніусове кільце, радикал якого в квадраті дорівнює нулю, то A є напівланцюговим кільцем.*

Доведення. Кожен головний A - модуль (кожен лівий чи правий) має єдиний композиційний ряд. Згідно теореми 5.4.11 [**10**], кожен головний модуль має єдиний максимальний підмодуль. який за гіпотезою є напівпростим. Але тоді з теореми 4 випливає, що такий модуль є простим і тоді A є напівланцюговим кільцем. □

Теорема 8. *Черепичний порядок A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/R^2 є квазіфробеніусовим.*

Доведення. Нехай A черепичний порядок і факторкільце A/R^2 квазіфробеніусове, тоді по твердженню 2 факторкільце A/R^2 є напівланцюговим. Кільце A є нерозкладним кільцем, тоді за теоремою 11.1.9 [**9**, с.268] факторкільце A/R^2 також є нерозкладним. За теоремою 12.1.2 [**9**, с.301] та наслідком 12.1.3 [**9**, с.301] сагайдак черепичного порядку є простим циклом. Оскільки черепичний порядок є напівдистрибутивним кільцем, то за теоремою 14.3.3 [**9**, с.346] лівий сагайдак кільця A отримується з правого поворотом всіх стрілок, тому лівий сагайдак кільця A також є простим циклом. Тоді за теоремою 12.3.1 [**9**, с.313] кільце A є напівланцюговим кільцем.

Навпаки, якщо черепичний порядок A є напівланцюговим кільцем, то його лівий та правий сагайдаки є простими циклами. В такому випадку факторкільце A/R^2 є квазіфробеніусовим. □

Теорема 9. *Черепичний порядок A є спадковим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/R^2 є квазіфробеніусовим.*

Теорема 10. *Кільце A є спадковим тоді і тільки тоді, коли існує допустимий ідеал I такий, що A/I є квазіфробеніусовим кільцем скінченого типу.*

З теореми 6 та теореми Накаями випиває наступне твердження.

Теорема 11. *Нехай I - двосторонній ідеал черепичного порядку A, який лежить в R^2. Кільце A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/I є напівланцюговим артіновим кільцем.*

Побудуємо приклад черепичного порядку такого, що A/I праворядне кільце, а черепичний порядок A не є напівланцюговим.

Приклад 3. Розглянемо черепичний порядок A з матрицею показників

$$\varepsilon(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\varepsilon(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \varepsilon\left(R^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо двосторонній ідеал I з матрицею показників

$$\varepsilon(I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

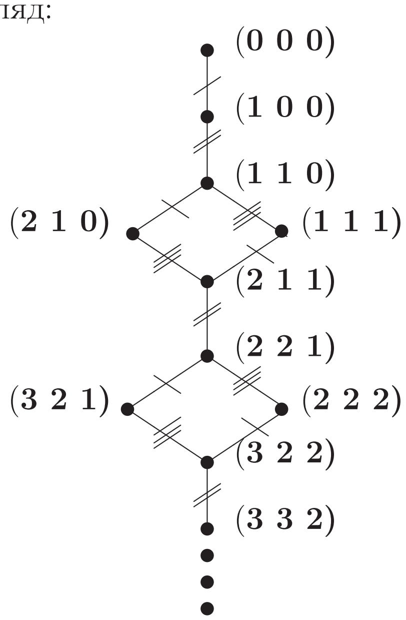
Кільце A містить наступний ланцюг ідеалів $A \supset R \supset I \supset R^2$ з такими матрицями показників:

$$\varepsilon(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon(I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon\left(R^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що $I/R^2 = U_3$, де $U_3 = P_3/P_3R$.

Нехай L — гратка всіх підмодулів модуля $(0,0,0)$. Очевидно, вона має наступний вигляд:



Тому $B = A/I = \bar{P}_1 \oplus \bar{P}_2 \oplus \bar{P}_3$. Очевидно, $l\left(\bar{P}_1\right) = l\left(\bar{P}_2\right) = l\left(\bar{P}_3\right) = 2$ і всі модулі $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ ланцюгові, де $l(M)$ - довжина артінового та нетерового модуля M.

Звідси випливає, що кільце B праворядне. Зрозуміло, що фактормодуль $I/R^2 = U_3$, де $U_3 \backsimeq P_3/P_3R$ - простий модуль. Тобто навіть при таких сильних припущеннях на ідеал I з того, що A/I є праворядним та фактормодуль $I/R^2 = U_3$ - простий не випливає, що черепичний порядок A є напівланцюговим.

4. Висновки

В статті розглянуто приклад розкладності факторкільця A/I нерозкладного напівланцюгового кільця A, за умови, що $I \not\subset R^2$. Доведено теорему згідно якої факторкільце A/R^2 спадкового справа і зліва черепичного порядку A є праворядним. Побудовано приклад черепичного порядку A такого, що A/I праворядне нерозкладне кільце, а черепичний порядок не є напівланцюговим.

Література

[1] *Каш Ф.* Модули и кольца. — М.: Мир, 1981. — 368с.

[2] *Фейс К.* Алгебра: кольца, молули и категории II. — М.: Мир, 1979.— 464 с.

[3] *Charles W.* Curtis and Irving Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras. — Interscience, New York, 1962.

[4] *Drozd Yu.A., Kirichenko V.V.* Finite Dimension Algebras. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.— 249 p.

[5] *Eisenbud D., Griffith P.* Serial rings // J. Algebra, 17 (1971). — P. 389-400.

[6] *Eisenbud D., Robson J. C.* Modules over Dedekind prime rings // J. Algebra, 16 (1970).

[7] *Gubareni N., Kirichenko V.V.* Rings and Modules. — Wydawnictwo Politechniki Czestochowskiej, Czestochowa, 2001. — 306 p.

[8] *Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V.* Algebras, Rings and Modules. — Kluwer Academic Publishers, vol.1, 2004. — 380p.

[9] *Kirichenko V.V.* On quasi-frobenius rings and gorenstein orders // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, 1980, Issue 4. — P. 171-177.

[10] *Nakayama T.* Note on uniserial and generalized uniserial rings // Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16(1940). — P. 285-289.