Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 165–175

Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах

Л. М. Тимошкевич

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Анотація. Робота присвячена спектральній теорії реберно-зважених графів. Доведені узагальнені формули Швенка, розв'язані обернені спектральні задачі для ланцюжка A_n, графу-зірочки $K_{1,n}$ та наведена точна верхня оцінка спектрального відновлюючого числа для дерев.

Inverse spectral problems on edge-weighted graphs

L. Tymoshkevych,

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Abstract. The paper is devoted to spectral theory of edge-weighted graphs. We prove generalized Schwenk's formulas and solve inverse spectral problems for graphs A_n and $K_{1,n}$. We also give the sharp upper bound for spectral reconstruction number of trees.

Вступ

Спектральна теорія графів — сучасна розвинена область математики з чисельними результатами та широкими можливостями застосувань. Вона викладена в багатьох статтях та книгах, зокрема в класичних монографіях [**1**], [**2**], [**3**], [**4**], а також в літературі [**5**], [**6**]. Додатковим імпульсом до вивчення задач спектральної теорії графів та її узагальнень стали зв'язки з задачами класифікації конфігурацій підпросторів, вивчення зображень інволютивних алгебр типу Темперлі–Ліба, а також перспективою застосування до теорії квантових графів [**7**].

Робота присвячена спектральним задачам для реберно-зважених графів, тобто графів з заданою додатною функцією на множині ребер.

В першій частині наданий огляд спектральної теорії зважених графів та доведені узагальнені формули Швенка [**12**], які є зручним інструментом при розв'язуванні обернених спектральних задач.

E-mail: larysatymosh@gmail.com

В другій частині вивчаються обернені задачі — відновлення ваги на множині ребер графа за спектральними даними графа та його підграфів. Для конкретних класів графів з'ясовано, спектри якої кількості підграфів однозначно визначають ваги.

1. Основні означення спектральної теорії реберно-зважених графів

Ми вважаємо, що читач знайомий з термінологією теорії графів. Зокрема з термінами: вершини та ребра графа, суміжні вершини, інцидентні вершина та ребро, степінь вершини, порядок графа, шлях, зв'язний граф, компоненти зв'язності графа, цикл, дерево, тощо. Детально ознайомитися з загальною теорією графів читач може за книгами [**8**], [**9**], [**10**].

Надалі в цій статті під терміном **"граф"** ми розуміємо впорядковану пару $G = (V, E)$, в якій V — деяка непорожня скінченна множина і E — множина, що складається з невпорядкованих пар різних елементів V. Множина V при цьому називається *множиною вершин графа* G, множина E називається *множиною ребер графа* G. У випадку, коли необхідно підкреслити, про вершини та ребра якого графа йде мова, ми будемо писати $V(G)$ та $E(G)$. Ребро, що з'єднує вершини u та v будемо коротко позначати (u, v) або uv.

Означення 1. **Реберно-зваженим графом G** називаємо пару (G, w), в якій G — граф і w — *вагова функція*, тобто відображення множини ребер E цього графа G в множину додатних дійсних чисел $w : E \to (0, +\infty)$. Через w_e будемо позначати число $w(e)$, яке називатимемо вагою ребра e. Будемо казати, що G — граф, підпорядкований зваженому графу $\mathbf{G} = (G, w)$.

В літературі можна також знайти такі графи і під назвою "зважений граф", без уточнення "реберно", для зручності викладу подальшого матеріалу ми будемо використовувати і такий термін.

Оскільки ми зазвичай будемо працювати зі зваженими графами, то часто будемо опускати слово "зважений", якщо з контексту зрозуміло про що йде мова.

Зафіксуємо порядок, в якому будемо розглядати вершини зваженого графа, таким чином, якщо кількість вершин графа дорівнює n, то ототожнимо множину вершин з множиною натуральних чисел від 1 до n.

Для простоти сприйняття зважений граф почасти представляють схемою, що зображує підпорядкований граф, приписуючи ще над кожним ребром e його вагу w_e.

Означення 2. Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ — реберно-зважений граф. Граф $\mathbf{G_1} = (G_1, w_1)$ називається *підграфом* графа $\mathbf{G} = (G, w)$, якщо G_1 підграф G, і для довільного ребра e графа G_1 має місце нерівність $w_1(e) \leqslant w(e)$. Граф $\mathbf{G_1} = (G_1, w_1)$ називається *індукованим підграфом* графа $\mathbf{G} = (G, w)$, якщо G_1 власний підграф G (тобто одержується з G видаленням певних вершин), і для довільного ребра e графа G_1 має місце рівність $w_1(e) = w(e)$.

Для позначення того, що $\mathbf{G_1}$ є підграфом $\mathbf{G}$, будемо використовувати включення: $\mathbf{G_1} \subset \mathbf{G}$.

З кожним графом $\mathbf{G} = (G, w)$ та порядком вершин пов'язують **матрицю суміжності** $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, де $n = |\mathbf{G}|$ — кількість вершин графа, а елементи матриці $a_{ij} = a_{ji} = w_{ij} > 0$, якщо вершини i та j сполучені ребром і $a_{ij} = 0$ в іншому випадку.

Таким чином, матриця $A(\mathbf{G})$ — це симетрична невід'ємна матриця з нулями на головній діагоналі. Вигляд матриці суміжності залежить від порядку, в якому розглядаються вершини. Проте матриці суміжності одного й того ж графа для різних порядків пов'язані між собою відношенням подібності. Останнє твердження залишається читачам як вправа.

Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ — симетрична ($a_{ij} = a_{ji}$), то її спектр дійсний. Позначимо точки спектра (власні значення матриці) через λ_i ($i = 1, \ldots, n$) та розташуємо їх в незростаючому порядку $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Максимальне власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ називають **індексом графа** та позначають також символом $ind_{\mathbf{G}}$. Спектр матриці суміжності будемо позначати $\sigma(\mathbf{G})$ та називати спектром графа. Спектр графа не залежить від способу нумерації його вершин і є інваріантом графа. Для характеристичного многочлена матриці суміжності скористаємося позначенням $P_{\mathbf{G}}(x) = |xI - A(\mathbf{G})|$.

2. Обчислення характеристичного многочлена реберно-зваженого графа

Формула визначника матриці суміжності $\mathbf{G} = (G, w)$. Нехай кількість вершин графа G дорівнює n. Позначимо через H_k підграф G з k вершинами, компонентами зв'язності якого є лише цикли та ребра. Будемо називати такі підграфи лінійними. Якщо підграф лінійний та містить всі вершини вихідного графа, то будемо називати його каркасним. Для лінійного підграфа H_k позначимо через $p(H_k)$ кількість компонент зв'язності, що містять парну кількість вершин, через $r(H_k)$ загальну кількість компонент зв'язності та через $c(H_k)$ множину компонент зв'язності, що є циклами. Через $w(H_k)$ позначимо вагу H_k, яка дорівнює добутку ваг його компонент зв'язності: вага компоненти зв'язності, що є ребром (i, j) дорівнює w_{ij}^2, а вага компоненти зв'язності, що є циклом дорівнює добутку значень w_{ij} по всім його ребрам (i, j).

Теорема 1 (Харарі [8]). *Визначник матриці суміжності довільного зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ може бути обчислений за наступною формулою*

$det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{H_n\}} (-1)^{p(H_n)} 2^{c(H_n)} w(H_n)$.

Доведення. За означенням, визначник матриці $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ дорівнює сумі $n!$ доданків, кожний з яких є добутком вигляду
$\operatorname{sign}(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}$, де π — відповідна підстановка індексів. Множник $a_{i\pi(i)}$ не дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вершини i та $\pi(i)$ з'єднані ребром у графі $\mathbf{G}$. Оскільки в простих графах, які ми розглядаємо, немає петель, то доданки $\operatorname{sign}(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}$, де π має нерухому точку, дорівнюють нулеві. Отже, кожен ненульовий доданок відповідає існуванню в графі каркасного підграфа, кількість компонент зв'язності якого дорівнює кількості незалежних циклів підстановки π, а підлеглі графи самих компонент зв'язності є ребрами для транспозицій та циклами довжини l для незалежних циклів підстановки π довжини l, $l \geq 3$. Тепер ненульові доданки потрібно просумувати. На $sign(\pi)$ (знак дорівнює $(-1)^k$, де k — кількість транспозицій в розкладі підстановки в добуток транспозицій) впливають тільки незалежні цикли π парної довжини, а це якраз компоненти зв'язності G вигляду A_2 (граф з двох вершин та ребра між ними) та C_n при парному n (C_n — простий цикл довжини n). Ще потрібно врахувати, що кожній компоненті зв'язності вигляду C_n відповідають два незалежних цикла (обхід за годинниковою стрілкою та проти неї). □

Теорема 2 (Захса)**.** *Якщо* $P_{\mathbf{G}}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_n,$ — *характеристичний многочлен графа* $\mathbf{G} = (G, w)$, *то*

(1) $c_1 = 0$*;*

(2) $c_2 = -\sum_{e\in E(G)} w(e)^2$

(3) $c_k = \sum_{\{H_k\}} (-1)^{r(H_k)} 2^{c(H_k)} w(H_k)$ *для* $k = 1, \ldots, n$.

Доведення. З курсу лінійної алгебри відомо, що добуток $(-1)^i c_i$ дорівнює сумі головних мінорів матриці суміжності $A_{\mathbf{G}}$ розміру $i \times i$. Кожен головний мінор матриці суміжності — це визначник матриці суміжності підграфа, породженого відповідними i вершинами. А тоді це твердження випливає з попереднього з урахуванням того, що $(-1)^{r(H(k))} = (-1)^k (-1)^{p(H(k))}$. □

3. Формули Швенка для реберно-зважених графів

В цьому розділі ми розглянемо теореми, що пов'язують спектр графа з спектрами його підграфів та узагальнюють відомі формули Швенка для звичайних графів ([**12**]).

Наступні дві теореми показують зв'язок між характеристичним многочленом графа $\mathbf{G}$ та многочленами підграфів вигляду $\mathbf{G} - v$ та $\mathbf{G} - e$.

Для зручності характеристичний многочлен порожнього графа A_0 визначимо так: $P_{A_0}(x) = 1$.

Теорема 3. *Нехай v — вершина графа G, через $C(v)$ позначимо множину циклів, що мостять v. Тоді*
$P_{\mathbf{G}}(x) = xP_{\mathbf{G}-v}(x) - \sum_{u\sim v} w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(x) - 2\sum_{Z\in C(v)} w(Z)P_{\mathbf{G}-V(Z)}(x).$

Доведення. Нагадаємо, що $P_{\mathbf{G}}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k}$ — характеристичний многочлен графа $\mathbf{G} = (G, w)$ та за теоремою Захса ми можемо виразити c_k в термінах певних характеристик H_k — k-вершинних лінійних підграфів $\mathbf{G}$. Ми встановимо бієкцію між внесками таких підграфів до лівої частини та внесками лінійних підграфів $\mathbf{G}-v$ до одного з доданків правої частини рівності.

Нехай H — деякий k-лінійний підграф G і його внесок дорівнює ax^{n-k}, тоді маємо три можливості:

(1) Якщо $v \notin V(H)$, тоді позначимо через H' той самий лінійний граф, тільки зараз розглядуваний як підграф $G - v$. В цьому випадку $H = H'$, а тому H' робить такий самий внесок як і H відповідно до многочленів $xP_{\mathbf{G}-v}$ та $P_{\mathbf{G}}(x)$

(2) Якщо $v \in K_2 \subset H$, то позначимо через $H' = H - V(K_2)$ — підграф $G - V(K_2)$. Тоді H' робить внесок

$$(-1)^{r(H')}2^{c(H'_k)}w(H') = -(-1)^{r(H)}2^{c(H)}w(H)/w_{uv}^2 = -a/w_{uv}^2$$

до $x^{n-2-(k-2)} = x^{n-k}$, а отже ax^{n-k} до $-w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(x)$

(3) Якщо $v \in C_m \subset H$, то позначимо $H' = H - V(C_m)$ — підграф $G - V(C_m)$. Тоді H' робить внесок

$$(-1)^{r(H')}2^{c(H')}w(H') = \frac{-1}{2w(C_m)}(-1)^{r(H)}2^{c(H)}w(H) = \frac{-a}{2w(C_m)}$$

до $x^{n-m-(k-m)} = x^{n-k}$, а отже ax^{n-k} до $-2w(C_m)P_{\mathbf{G}-V(C_m)}(x)$.

Отже, внесок кожного лінійного підграфа H до лівої частини рівний внеску відповідного лінійного підграфа H' до правої частини. Доведення завершене. □

Наслідок 1 (Розклад за висячою вершиною)**.** *Якщо v — вершина графа G та u — вершина суміжна з v, то*
$P_{\mathbf{G}}(x) = xP_{\mathbf{G}-v}(x) - w(uv)^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(x).$

Застосовуючи наслідок 1 до ланцюжка $\mathbf{A_n}$, маємо наступне співвідношення, в якому $\mathbf{A_{n-1}} = \mathbf{A_n} - \{n\}, \mathbf{A_{n-2}} = \mathbf{A_{n-1}} - \{n-1\}$:
$P_{\mathbf{A_n}}(x) = xP_{\mathbf{A_{n-1}}}(x) - {a_{n-1}}^2 P_{\mathbf{A_{n-2}}}(x).$

Наступна теорема є схожим результатом до теореми 1 з аналогічним методом доведення, тому воно опускається.

Теорема 4. *Нехай uv — ребро графа G, через $C(uv)$ позначимо множину циклів, що містять uv. Тоді*

$P_{\mathbf{G}}(x) = P_{\mathbf{G}-uv}(x) - w(uv)^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(x) - 2\sum_{Z\in C(uv)} w(Z) P_{\mathbf{G}-V(Z)}(x).$

Наслідок 2. *(Розклад за мостом). Нехай ребро $e = (v_1, v_2)$ — міст графа $\boldsymbol{G}$, який при видаленні ребра e розпадається на графи $\boldsymbol{G}_1$ та $\boldsymbol{G}_2$, при цьому вважатимемо, що $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$. Характеристичний многочлен графа $\boldsymbol{G}$ можна знайти за наступною формулою:*

$P_{\mathbf{G}}(x) = P_{\mathbf{G_1}}(x) P_{\mathbf{G_2}}(x) - w(e)^2 P_{\mathbf{G_1}-v_1}(x) P_{\mathbf{G_2}-v_2}(x).$

З оцінками індексу графа в залежності від значень ваг на ребрах можна ознайомитися у роботі [**13**].

4. Обернені спектральні задачі

Різноманітні задачі відновлення для звичайних графів посідають значне місце в спектральній теорії графів, з оглядом деяких задач такого типу читач може ознайомитися в літературі [**14**], [**15**], [**16**].

Постановка задачі. Розглянемо наступну задачу відновлення для зважених графів: нехай нам відомий граф G, ми хочемо однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих підграфів. Тобто потрібно аби за значеннями спектрів данних підграфів ваги на ребрах вихідного графа знаходилися однозначно. Спектр підграфа будемо називати *підспектром.* Мінімальну кількість таких підспектрів будемо називати *відновлюючим спектральним числом* графа G, позначення: $Srn(G)$. Для кожного графа G виникає дві задачі: навести приклад підспектрів, за якими можна здійснити відновлення та знайти відновлююче спектральне число.

В усіх наступних твердженнях ми припускаємо, що розглядувані алгебраїчні та чисельні задачі мають розв'язки.

Лема 1. *Задача відновлення ваг за спектрами підграфів еквівалентна задачі відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів.*

Доведення. За спектром зваженого графа $\mathbf{G}$ однозначно відновлюється характеристичний многочлен $P_{\mathbf{G}}$ і навпаки, оскільки многочлен зі старшим коефіцієнтом 1 однозначно відновлюється за своїми коренями. □

4.1. Приклади.

$\mathbf{A_n}$

Спочатку розглянемо поставлену задачу для зваженого ланцюжка $\mathbf{A_n} = (A_n, w)$. Для зручності вважатимемо, що $V(A_n) = 1, 2, ..., n$. Вершина $2 \leq k \leq n-1$ суміжна з вершинами $k-1$ та $k+1$. Введемо для зручності наступні позначення:

$a_{k-1} \equiv w(\{k-1, k\})$, числа a_i будемо називати *вагами*, $\mathbf{A_k} = \mathbf{A_n} - \{k+1, ..., n\}$, $P_{\mathbf{k}} \equiv P_{\mathbf{A_k}}$.

Теорема 5. *Для відновлення ваг графа $\mathbf{A_2}$ достатньо одного спектру $\sigma(\mathbf{A_2})$ та двох підспектрів для $\mathbf{A_n}$, $n \geq 3$, а саме $\sigma(\mathbf{A_n}), \sigma(\mathbf{A_{n-1}})$. $Srn(A_n) = 2$ при $n \geq 2$.*

Доведення. Твердження для $\mathbf{A_2}$ очевидне, адже $P_{\mathbf{2}}(x) = x^2 - {a_1}^2$, $\sigma(\mathbf{A_2})$=$\{-a_1, a_1\}$.

Доведемо індукцією за n, що для відновлення ваг графа $\mathbf{A_n}, n \geq 3$ достатньо двох підспектрів: $\sigma(\mathbf{A_n}), \sigma(\mathbf{A_{n-1}})$.

База індукції: $n = 3$. Маємо за формулою Швенка $P_{\mathbf{3}}(x) = xP_{\mathbf{2}}(x) - {a_2}^2 x$, оскільки старший коефіцієнт $P_{\mathbf{2}}$ дорівнює 1, то за його коренями однозначно відновлюється і многочлен, отже однозначно знаходиться a_2, а знаючи спектр $\mathbf{A_2}$, ми можемо відновити і a_1.

Індукційний перехід: $n-1 \to n$. За формулою Швенка

$$P_{\mathbf{n}}(x) = xP_{\mathbf{n-1}}(x) - {a_{n-1}}^2 P_{\mathbf{n-2}}(x),$$

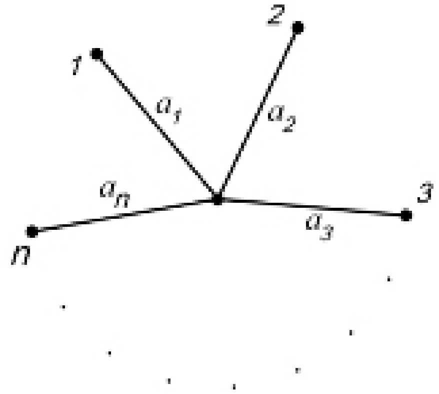
прирівнюючи коефіцієнти при x^{n-2} в обох частинах, знаходимо a_{n-1}, далі можемо виразити многочлен

$$P_{\mathbf{n-2}}(x) = \frac{1}{{a_{n-1}}^2}(xP_{\mathbf{n-1}}(x) - P_{\mathbf{n}}(x)).$$

Отже, нам відомі $P_{\mathbf{n-1}}$ та $P_{\mathbf{n-2}}$, за індукційним припущенням, ми можемо відновити решту ваг $a_1, ..., a_{n-2}$. Легко зрозуміти, що при $n \geq 2$ одного спектру недостатньо, адже, щоб відновити всі ваги, обраний підграф має містити всі ребра, тобто бути самим A_n, але в цьому випадку симетричною заміною всіх ваг на ребрах відносно центру графа, тобто $w(k, k+1) \leftrightarrow w(n-k, n+1-k)$ одержимо граф з тим самим спектром, але іншими вагами. □

$\mathbf{K_{1,n}}$

Теорема 6. $Srn(K_{1,n}) = n$.



Доведення. Введемо позначення, що зображені на рисунку. Очевидно, що достатньо розглядати лише зв'язні підграфи $\mathbf{K_{1,n}}$. Довільний зв'язний підграф $\mathbf{K_{1,n}}$ з множиною вершин $V(H) = \{i_1, i_2, ..., i_m, n+1\}$ будемо позначати через $\mathbf{K_{1,m}^{i_1...i_m}}$, характеристичний многочлен якого — це $P_{\mathbf{K_{1,m}^{i_1...i_m}}}(x) = x^{m+1} - \sum_{l=1}^{m} a_{i_l}^2 x^{m-1}$. Отже, інформація про спектр такого підграфа рівносильна заданню суми квадратів ваг по його ребрам. Оскільки всі ваги $a_i > 0$, то за набором $b_i = a_i^2$ відновлюється набір a_i та навпаки. Тоді задання спектрів зв'язних підграфів $\mathbf{K_{1,n}}$ рівносильно заданню лінійної системи відносно $b_i, i = 1, ..., n$, оскільки спектр підграфу $\mathbf{K_{1,m}^{i_1...i_m}}$ задає рівняння $b_{i_1} + b_{i_2} + ... + b_{i_m} = c_{i_1...i_m}$. Для того, щоб ця система мала єдиний розв'язок у додатних числах необхідно, щоб її ранг дорівнював n, а тоді кількість рівнянь, тобто підспектрів має бути не менша за n. З іншого боку нескладно навести навести приклад n підспектрів, які однозначно визначають ваги, наприклад, спектри набору підграфів $\mathbf{K_{1,1}^{i}}$, $i = 1, ..., n$ або набору $\mathbf{K_{1,n}} - i$, $i = 1, ..., n$. З написанного вище випливає, що необхідно вибирати такі n підграфів, відповідні вектори-рядочки яких утворюють базу в $\mathbb{R}^n$ (підграфу $\mathbf{K_{1,m}^{i_1...i_m}}$ ставиться у відповідність вектор-рядок $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$, у якого $x_j = 1$, якщо $j = i_l$ для якогось $l = 1, ..., m$, та $x_j = 0$ в іншому випадку, тобто $x_j = \max \delta_{i_l j}$). □

4.2. Верхня оцінка спектрального відновлюючого числа для дерев. Наведемо верхню оцінку для Srn для дерев. Позначимо через $cv(G)$ кількість висячих вершин дерева G. Назвемо одну з висячих вершин коренем, позначимо її kG. Через $CV(G)$ позначимо множину висячих вершин відмінних від кореня.

Теорема 7 (оцінка Srn для дерев)**.** *Нехай* $\mathbf{G} = (G, w)$ *і граф* G *— дерево, тоді* $Srn(G) \leq cv(G)$ *та для відновлення вагової функції* w *достатньо знати спектри таких підграфів:* $\mathbf{G}$ *та всіх підграфів вигляду* $\mathbf{G} - v$*, де* v *пробігає множину* $CV(G)$*.*

Доведення. Будемо доводити індукцією за n — кількістю вершин графа G. *База індукції*: $n = 2$ — очевидна.

Індукційний перехід: $n-1 \to n$. Будемо називати вершину *вершиною розгалуження*, якщо її степінь не менша 3. Якщо граф $\mathbf{G}$ не має вершин розгалужень, то це граф $\mathbf{A_n}$, для якого ми вже довели твердження 1.

Інакше, розглянемо два випадки:

1) Існує висяча вершина з $CV(G)$, відстань від якої до найближчої вершини розгалуження не менша за 2. Позначимо цю вершину через v, а суміжну з нею через v'. Тоді з розкладу за висячою вершиною маємо

$$P_{\mathbf{G}}(x) = xP_{\mathbf{G}-v}(x) - w(vv')^2 P_{\mathbf{G}-v-v'}(x),$$

оскільки $P_{\mathbf{G}}(x)$ та $P_{\mathbf{G}-v}(x)$ — відомі, то ми можемо знайти $w(vv')$ та $P_{\mathbf{G}-v-v'}(x)$.

Для довільної вершини $u \in CV(G)$ аналогічно через u' позначаємо суміжну до u вершину та записуємо такі співвідношення (користуємося розкладом за висячою вершиною):

$\diamond$ $P_{\mathbf{G}}(x) = xP_{\mathbf{G}-u}(x) - w(uu')^2 P_{\mathbf{G}-u-u'}(x)$,

оскільки $P_{\mathbf{G}}(x)$ та $P_{\mathbf{G}-u}(x)$ — відомі, то ми можемо знайти $w(uu')$ та $P_{\mathbf{G}-u-u'}(x)$

$\diamond$ $P_{\mathbf{G}-u}(x) = xP_{\mathbf{G}-v-u}(x) - w(vv')^2 P_{\mathbf{G}-u-v-v'}(x)$ (1)

$\diamond$ $P_{\mathbf{G}-v}(x) = xP_{\mathbf{G}-v-u}(x) - w(uu')^2 P_{\mathbf{G}-v-u-u'}(x)$ (2)

$\diamond P_{\mathbf{G}-v-v'}(x) = xP_{\mathbf{G}-u-v-v'}(x) - w(uu')^2 P_{\mathbf{G}-v-v'-u-u'}(x)$ (3)

$\diamond P_{\mathbf{G}-u-u'}(x) = xP_{\mathbf{G}-v-u-u'}(x) - w(vv')^2 P_{\mathbf{G}-u-u'-v-v'}(x)$ (4)

Зробимо певні перетворення зі співвідношеннями (1) та (2) (додамо відповідні частини), одержимо:

$2xP_{\mathbf{G}-v-u}(x) = P_{\mathbf{G}-u}(x) + P_{\mathbf{G}-v}(x) + w(vv')^2 P_{\mathbf{G}-u-v-v'}(x) + w(uu')^2 P_{\mathbf{G}-v-u-u'}(x)$ (5)

Домноживши співвідношення (3) та (4) на $w(vv')^2$ та $w(uu')^2$ відповідно та додавши одержані рівняння, маємо:

$w(vv')^2 P_{\mathbf{G}-v-v'}(x) + w(uu')^2 P_{\mathbf{G}-u-u'}(x) =$

$= w(vv')^2 xP_{\mathbf{G}-u-v-v'}(x) + w(uu')^2 xP_{\mathbf{G}-v-u-u'}(x)$(6)

Віднявши відповідні частини рівнянь (5) та (6), одержимо:

$2xP_{\mathbf{G}-v-u}(x) = P_{\mathbf{G}-u}(x) + P_{\mathbf{G}-v}(x) + w(vv')^2 P_{\mathbf{G}-v-v'}(x) + w(uu')^2 P_{\mathbf{G}-u-u'}(x)$ (7).

Права частина рівняння (7) відома з попередніх міркувань, а отже, ми можемо знайти $P_{\mathbf{G}-v-u}(x)$ і відповідно спектр $\mathbf{G}-v-u$ для кожної вершини $u \in CV(G)$, а за спектрами $\mathbf{G}-v$, $\mathbf{G}-v-v'$, $\mathbf{G}-v-u$, де $u \in CV(G-v)$ ми за припущенням індукції можемо відновити всі ваги графа $\mathbf{G}-v$, враховуючи ще знайдену раніше вагу $w(vv')$, ми повністю відновили вагову функцію графа $\mathbf{G}$.

2) Відстань від довільної висячої вершини до найближчої вершини розгалуження дорівнює 1. Виберемо довільну вершину v_1 з $CV(G)$, а суміжну з нею через v', також позначимо через $v_2, ..., v_k$ — висячі вершини, які суміжні з v'.

Аналогічно до попереднього пункту за відомими спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів вигляду $\mathbf{G}-v$, де v пробігає множину $CV(G)$, ми можемо знайти вагу $w(v_1, v')$, а також спектри всіх підграфів вигляду $\mathbf{G} - v_i - u$, де $u \in CV(G) - \{v_1, ..., v_k\}$, щоб зробити крок індукції залишилось знайти спектри підграфів $\mathbf{G} - v_1 - v_i$ для $i = 2, ..., k$.

Маємо з розкладу за висячою вершиною

$$P_{\mathbf{G}}(x) = xP_{\mathbf{G}-v_1}(x) - w(v_1v')^2 P_{\mathbf{G}-\sum v_i - v'}(x)x^{k-1},$$

з якого можна знайти $w(v_1v')^2$ та $P_{\mathbf{G}-\sum v_i - v'}(x)$.

Далі маємо для $i = 2, ..., k$: $P_{\mathbf{G}-v_i} = xP_{\mathbf{G}-v_1-v_i} - w(v_1v')^2 P_{\mathbf{G}-v_1-\sum v_i - v'}(x)x^{k-2}$, з цього співвідношення можна також знайти $P_{\mathbf{G}-v_1-v_i}$, а отже, і спектр графа $\mathbf{G} - v_1 - v_i$.

Враховуючи все вищенаписане, ми можемо застосувати індукційний перехід, зводячи задачу відновлення від графа $\mathbf{G}$ до графа $\mathbf{G} - v_1$.

Зауважимо, що дана оцінка є точною, як показує приклад графу–зірочки $K_{1,n}$. $\square$

Висновки

Наведені в статті результати дають явні набори підграфів, за спектрами яких відновлюються всі ваги у випадку дерев, а також знайдені точні значення відновлюючого спектрального числа для графів A_n та $K_{1,n}$. Доведені узагальнені формули Швенка є основним інструментом при розв'язанні обернених спектральних задач і підхід у даній роботі може бути перенесений на дослідження інших зважених графів.

До перспектив подальшого дослідження відносяться наступні задачі: знайти точне значення спектрального відновлюючого числа для всіх графів Динкіна, в тому числі розширених, описати клас графів G, для яких $Srn(G) = 2$ та інші.

Література

[1] Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. *Спектры графов, теория и применение.* — Киев: Наукова думка. — 1984.

[2] Cvetkovic D., Doob M., Gutman I., Torgasev A., Recent Results in the Theory of Graph Spectra// Annals of Discrete Mathematics. — 1988. — vol. 36.

[3] Cvetkovic D., Rowlinson M., Simic S. *Eigenspaces of graphs.* — Cambridge University Press. — 1997.

[4] *Chung F. R. K.* Spectral *Graph Theory.* — AMS. — 1994.

[5] Goodman F. M., P. de la Harpe, Jones V. F. R. *Coxeter Graphs and Towers of Algebras.* — Springer: Verlag New York.— 1989.

[6] Москалева Ю., Самойленко Ю. *Введение в спектральную теорию графов.* — К.: Центр учебной литературы.— 2007.

[7] *Самойленко Ю. С., Стрелец А. В.* О простых n-ках подпространств в гильбертовом пространстве // Український математичний журнал. — 2009. — 61, №12. — с. 1668–1703.

[8] Харари Ф. *Теория графов.* — М.: Мир.— 1973.

[9] Оре О. *Теория графов.* — Москва: Наука. — 1980.

[10] Bondy J. A., Murty U. S. R. *Graph Theory with Applications.* — New York: American Elsevier Publishing Company. — 1976.

[11] *Harary F.* The determinant of the adjacency matrix of a graph // SIAM Review. — 1962. — vol. 4, no. 3. — pp. 202–210.

[12] *Schwenk A. J.* Computing the characteristic polynomial of a graph // Graphs and Combinatorics, Lecture Notes in Mathematics. — 1974. — vol. 406. — pp. 153–172.

[13] *Kinkar Ch. Das, Bapat R. B.* A sharp upper bound on spectral radius of weighted graphs // Discrete Mathematics.—2008. — vol. 308. — pp. 3180–3184.

[14] *Gutman I., Cvetkovic D. M.* The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. — 1975. — vol. 406. — pp. 153–172.

[15] *Hogben L.* Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Problem of a Graph // Chamchuri Journal of Mathematics. — 2009. — vol. 1. — pp. 51–72.

[16] *van Dam E. R., Haemers W. H.* Which graphs are determined by their spectrum? // Linear Algebra and its Applications. — 2003. — vol. 373 — pp. 241–272.