Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 146–157.

УДК 511.72

Канонічне трійково-п'ятіркове зображення числа

Ю. Ю. Сухоліт

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Анотація. Серед трійково-п'ятіркових зображень чисел виділимо найбільш економне і зручне в застосуваннях — канонічне зображення. З його допомогою вичерпно вивчається питання про кількість трійково-п'ятіркових зображень.

Canonical ternary-quinary representaion of numbers

Yu. Suholit

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. The canonical expansion is the most economical and easy to use ternary-quinary expansion of the number. Using this expansion we exhaustively study the issue of the number of ternary-quinary expansions.

Вступ

Відомо, що для довільного дійсного числа x мають місце розклади

$$x = [x] + \{x\} = \pm a + \{x\},$$

де $a = |[x]| = a_{-n}3^n + a_{-n+1}3^{n-1} + \ldots + a_{-1}3^1 + a_0$, $a_{-i} \in \{0, 1, 2\}$, $i = \overline{o, n}$, $a_{-n} \neq 0$;

$$\{x\} = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \ldots, \ \ \alpha_k \in \{0, 1, 2\}, \ \ k \in N.$$

Подання дійсного числа x у формі

$$\pm(a_{-n}3^n + a_{-n+1}3^{n-1} + \ldots + a_{-1}3^1 + a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}$$

називають (класичним) трійковим представленням або його представленням у трійковій системі числення.

Дробова частина числа є більш цікавою і важливою для неперервної математики, ніж ціла. При побудові арифметики дійсних чисел у їх класичному трійковому зображенні, які співпадають зі своєю дробовою частиною, виникають зображення чисел

E-mail: freeeidea@ukr.net

з надлишковим набором двох цифр. Справді,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i+\beta_i}{3^i}\equiv\Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m\ldots},$$

де $\gamma_i=\alpha_i+\beta_i\in\{0,1,2,3,4\}$.

Такі зображення «цікаві» і для теорії сингулярних розподілів ймовірностей, а саме: при вивченні згорток сингулярних мір (наприклад, розподілів сум незалежних випадкових величин). Досі невідомі необхідні і достатні умови сингулярності та абсолютної неперервності згортки двох сингулярних розподілів.

Зауважимо, що дослідження s-ових зображень з надлишковим алфавітом та їх застосування зустрічались в роботах різних авторів, зокрема у роботах Винничина Я. Ф., Гончаренко Я. В. [**2**], [**3**], Микитюк І. О. [**4**], Працьовитого М.В. [**5**]. Особливо вичерпно таке дослідження було проведено для двійкової системи з надлишковою цифрою $\{2\}$ Працьовитим М. В. [**6**]– [**5**] та Гончаренко Я.В. [**1**]. Перший з цих авторів вивчав також систему з двома надлишковими цифрами. Дисертаційне дослідження Микитюк І. О. було присвячено s-ій системі числення з надлишковим набором цифр $\{0,1,\ldots,m\}$, але лише для деяких пар (s,m), де $m>s$, автору вдалося далеко просунутись у вивченні геометрії цього зображення.

Ці та інші аргументи породжують самостійний інтерес до розкладів чисел у ряди за степенями 3 і коефіцієнтами з множини $\{0,1,2,3,4\}$, які ми називаємо представленням чисел у трійково-п'ятірковій системі.

1. Трійково-п'ятіркове зображення

Нехай $A=\{0,1,2,3,4\}$ — алфавіт (множина цифр) трійкової системи числення з двома надлишковими цифрами, $L=A\times A\times\ldots\times A\times\ldots$ — простір послідовностей цифр.

Лема 1. *Для будь-якого числа $x\in[0;2]$ існує послідовність (β_k), $\beta_k\in A$, така, що*

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}\beta_k\equiv \tag{1}$$

$$\equiv\Delta_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}. \tag{2}$$

Доведення. Якщо $x\in[0;2]$, то $x=2u$, де $u\in[0;1]$. Тоді $u=\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{3^n}+\ldots$, де $\alpha_i\in\{0,1,2\}$. $2u=\frac{2\alpha_1}{3}+\frac{2\alpha_2}{3^2}+\ldots+\frac{2\alpha_n}{3^n}+\ldots$ позначимо $2\alpha_1=\beta_1$, $2\alpha_2=\beta_2$, …, $2\alpha_n=\beta_n$, …, де $\beta_i\in\{0,2,4\}$. Отже, існує послідовність (β_k), $\beta_k\in A$ така, що $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}3^{-k}\beta_k$. □

Вираз (1) числа x називається *трійково-п'ятірковим представленням*, а символічний запис (2) — *трійково-п'ятірковим зображенням* x (5_3-*зображенням*).

Взагалі кажучи, майже всі числа $x \in [0;2]$ мають далеко не єдине 5_3-представлення (формально різне). Очевидними є рівності:

$$
\begin{gathered}
0 = 3\cdot 0 + 0; \quad 3 = 3\cdot 1 + 0 = 3\cdot 0 + 3; \quad 10 = 3\cdot 2 + 4 = 3\cdot 3 + 1;\\
1 = 3\cdot 0 + 1; \quad 4 = 3\cdot 1 + 1 = 3\cdot 0 + 4; \quad 12 = 3\cdot 4 + 0 = 3\cdot 3 + 3;\\
2 = 3\cdot 0 + 2; \quad 6 = 3\cdot 1 + 3 = 3\cdot 2 + 0; \quad 13 = 3\cdot 3 + 4 = 3\cdot 4 + 1;\\
5 = 3\cdot 1 + 2; \quad 7 = 3\cdot 1 + 4 = 3\cdot 2 + 1; \quad 11 = 3\cdot 3 + 2; \quad 14 = 3\cdot 4 + 2;\\
8 = 3\cdot 2 + 2; \quad 9 = 3\cdot 2 + 3 = 3\cdot 3 + 0; \quad 15 = 3\cdot 4 + 3; \quad 16 = 3\cdot 4 + 4.
\end{gathered}
$$

З них випливає наступне твердження.

Лема 2. *Не змінює числа взаємозаміна пар двох послідовних цифр у його* 5_3-*зображенні:* $\overline{10}$ *на* $\overline{03}$, $\overline{11}$ *на* $\overline{04}$, $\overline{20}$ *на* $\overline{13}$, $\overline{21}$ *на* $\overline{14}$, $\overline{30}$ *на* $\overline{23}$, $\overline{31}$ *на* $\overline{24}$, $\overline{33}$ *на* $\overline{40}$, $\overline{34}$ *на* $\overline{41}$.

Дане твердження є очевидним в силу рівності

$$\frac{a}{3^m} + \frac{b}{3^{m+1}} = \frac{3a+b}{3^{m+1}}.$$

Питання кількості 5_3-зображень числа $x \in [0;2]$ детально вивчено в роботі [**9**]. Виходячи з цього, k-у цифру 5_3-зображення неможливо означити коректно.

Означення 1. Множина $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : x = \Delta_{c_1c_2\ldots c_m\beta_{m+1}\beta_{m+2}\ldots}, (\beta_{m+n}) \in L\}$ називається 5_3-*циліндром рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$.

Наступні твердження розкривають геометричний зміст «трійково-п'ятіркових цифр» числа.

Лема 3. *Циліндри мають наступні властивості:*

(1) $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \bigcup\limits_{i=0}^{4} \Delta_{c_1c_2\ldots c_k i} \quad \forall\{c_m\},\ c_m \in A;$

(2) Кожна циліндрична множина є відрізком, причому

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = [a_k; a_k + \frac{2}{3^k}],\ \text{де } a_k = \sum_{i=1}^{k} 3^{-i}c_i;$$

(3) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} \in [0;2] \quad \forall\{c_m\},\ c_m \in A;$

(4) $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = \Delta_{\beta_1\ldots\beta_m} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} 3^{-i}(\alpha_i - \beta_i) = 0;$

(5) $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m 00\ldots} \oplus \Delta_{\beta_1\ldots\beta_m}$, *де* $\alpha_i + \beta_i = c_i \in A$;

(6) *Мають місце наступні рівності:* $\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}s} \cap \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}(s+1)} =$

$$= [a_k + \frac{s+1}{3^k}; a_k + \frac{s+2}{3^k}], \text{ де } \; a = \sum_{i=1}^{k} c_i 3^{-i}$$

$$= \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}(s+1)0} \cup [\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}(s+1)\underbrace{2\ldots 2}_{m}0}] =$$

$$= [\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}s\underbrace{2\ldots 2}_{m}4}] \cup \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}s4};$$

(7) *Циліндри* $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ *і* $\Delta_{\beta_1\ldots\beta_k}$ *співпадають тоді і тільки тоді, коли* $\sum\limits_{i=1}^{k}(\alpha_i - \beta_i)3^{k-i} = 0$;

(8) *Два циліндри* $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ *і* $\Delta_{\beta_1\ldots\beta_k}$ *такі, що* $\min \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k} < \min \Delta_{\beta_1\ldots\beta_k}$, *перекриваються тоді і тільки тоді, коли* $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{3^i} < \frac{2}{3^k} + \sum\limits_{i=1}^{k} 3^{-i}\alpha_i$.

Майже всі (у розумінні міри Лебега) числа з $[0;2]$ мають континуальну множину формально різних 5_3-зображень. Розглянемо одне «економне» і зручне 5_3-зображення числа, яке є корисним при розв'язанні задач метричної та ймовірнісної теорії чисел.

2. Канонічне трійково-п'ятіркове зображення числа

Означення 2. Трійково-п'ятіркове зображення (5_3-зображення) числа

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\alpha_k = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$$

називається *канонічним*, якщо одночасно виконуються умови:

(1) воно не містить періоду 2;

(2) існує ціле невід'ємне число k таке, що
   - (a) $\alpha_{k+j} \in \{0,1,2\}$ для будь-якого $j \in N$;
   - (b) $\alpha_i \in \{3,4\}$, $i \in \overline{1,k}$, причому $\alpha_i = 4$ для всіх $i < k$.

З означення ясно, що канонічне 5_3-ове зображення числа або не містить цифри 3 взагалі, або ж містить лише одну, яка стоїть на k-тому місці. Прикладами канонічного 5_3-зображення чисел x є: $x = \Delta_{4444302010020\ldots}$, $y = \Delta_{4444\ldots}$, $z = \Delta_{311211\ldots}$.

Зауваження 1. *Далі канонічне 5_3-зображення x позначимо через*

$$\overline{\Delta}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

Теорема 1. *Кожне число $x \in [0;2)$ має єдине канонічне 5_3-зображення, його можна отримати з довільного 5_3-зображення ланцюжком замін пар $\overline{\alpha_i 3}$ на $\overline{(\alpha_i+1)0}$ і $\overline{\alpha_i 4}$ на $\overline{(\alpha_i+1)1}$, $\alpha_i \in \{0,1,2\}$.*

Доведення. *Існування.* Очевидно, що процедурою заміни пар двох послідовних цифр:

$$\frac{\alpha_i}{3^m}+\frac{4}{3^{m+1}}=\frac{\alpha_i+1}{3^m}+\frac{1}{3^{m+1}},\quad \frac{\alpha_i}{3^m}+\frac{3}{3^{m+1}}=\frac{\alpha_i+1}{3^m}+\frac{0}{3^{m+1}},$$

можно домогтися того, що, починаючи з деякого місця k, у 5_3-зображенні числа не існуватиме «переповнених» розрядів, тобто $\alpha_{k+j}(x)\in\{0,1,2\}, j=1,2,3$. А потім домогтися того, щоб набір цифр $\alpha_1(x),\alpha_2(x),\ldots\alpha_{k-1}(x)$ задовольняв вимоги означення канонічного зображення.

Єдиність. Нехай $\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$ і $\overline{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}$ — два канонічні 5_3-зображення числа x. Доведемо, що $\alpha_k=\beta_k$ для всіх $k\in N$.

Нехай числа k і n визначаються умовами:

$$\begin{cases}\alpha_i=4, i=\overline{1,k-1};\\ \alpha_{k+j}\in\{0,1,2\}, j\in N;\\ \beta_i=4, i=\overline{1,n-1};\\ \beta_{n+j}\in\{0,1,2\}, j\in N.\end{cases}$$

Припустимо, що $k\neq n$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $k>n$. Тоді

$$\overline{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}<\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{3^i}+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{2}{3^i}=2(1-\frac{1}{3^n})+\frac{1}{3^n},$$

знак строгої нерівності має місце, оскільки принаймні одна цифра $\beta_{n+j}\neq 2$.

$$\overline{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}<2(1-\frac{1}{3^n})+\frac{1}{3^n}\leq 2(1-\frac{1}{3^{k-1}})+\frac{1}{3^{k-1}}=$$
$$=2(1-\frac{1}{3^{k-1}})+\frac{3}{3^k}\leq\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots},$$

що суперечить рівності чисел. Отже, кількість цифр, що не належить множині $\{0,1,2\}$ у обох зображеннях однакова, нехай n.

Доведемо, що $\alpha_n=\beta_n$. Не порушуючи загальності, припустимо, що $\alpha_n>\beta_n$, отримаємо

$$\overline{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}<2(1-\frac{1}{3^n})+\frac{\beta_n}{3^n}+\frac{1}{3^n}\leq 2(1-\frac{1}{3^n})+\frac{\alpha_n}{3^n}\leq\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots},$$

що суперечить рівності чисел. Отже, $\alpha_n=\beta_n$. Тепер, враховуючи, що

$$\begin{cases}\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}=\overline{\Delta}_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots};\\ \alpha_i=\beta_i, i=\overline{1,n};\\ \alpha_{n+j}\in\{0,1,2\}, j\in N;\\ \beta_{n+j}\in\{0,1,2\}, j\in N.\end{cases}$$

те, що канонічне зображення не містить періоду 2, робимо висновок:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 3^{-k}(\alpha_k - \beta_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_{n+j} = \beta_{n+j}, \quad \forall j \in N.$$

Отже, $\alpha_n = \beta_n$ для будь-якого $k \in N$. $\square$

Зауваження 2. *Канонічне* 5_3*-зображення дозволяє (допомагає) формально просто порівнювати числа.*

3. Трійково-п'ятірково-раціональні та трійково-п'ятірково-ірраціональні числа

Означення 3. Число $x \in (0;2)$ називається 5_3*-раціональним*, якщо для нього існує трійково-п'ятіркове зображення, яке містить період (0), всі інші числа називаються 5_3*-ірраціональними.*

Очевидно, що кожне трійково-раціональне число $x \in [0,1]$ є 5_3-раціональним.

Лема 4. *Кожне число* $x \in (0,2)$, *яке має періодичне зображення* $x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n(a)}$, *де* $a \in \{2,4\}$ *є* 5_3*-раціональним.*

Доведення. Справді, $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n(a)} = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \frac{a}{3^{n+1}} + \frac{a}{3^{n+2}} + \ldots = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \frac{a}{2\cdot 3^n} = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \frac{k}{3^n} = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_n + k}{3^n} = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n+k](0)}$, якщо $\alpha_n + k \leq 4$.

Якщо $\alpha_n + k > 4$, тобто $\alpha_n + k \in \{5,6\}$, то при $5 = \alpha_n + k = 4+1$, маємо $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}43(0)}$.

Розглянемо випадок $\alpha_n + k = 6$, тобто $k = 2$ і $a = 4$. Оскільки $x < 2$, то серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ є принаймні одне менше 4, тоді існує набір $\acute{\alpha_1}, \acute{\alpha_2}, \ldots, \acute{\alpha_n}$, такий, що $\frac{\acute{\alpha_1}}{3} + \frac{\acute{\alpha_2}}{3^2} + \ldots + \frac{\acute{\alpha_{n-1}}}{3^{n-1}} = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{3}{3^n}$, тоді $x = \Delta_{\acute{\alpha_1}\acute{\alpha_2}\ldots\acute{\alpha_{n-1}}3(0)}$. $\square$

Лема 5. *Кожне число* $x \in (0,2)$, *яке має періодичне зображення* $x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n(a)}$, *де* $a \in \{1,3\}$, *є* 5_3*-ірраціональним.*

Доведення. Розглянемо число $x \in (0,2)$, яке має періодичне зображення

$$x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n(1)} = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \frac{1}{2\cdot 3^n} = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{2\alpha_n + 1}{2\cdot 3^n}.$$

Припустимо, що дане число x є 5_3-раціональним, тоді воно має періодичне зображення $x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n(a)}$, де $a \in \{0,2,4\}$. В нашому випадку вираз $2\alpha_n + 1$ має скоротитися на 2, але у випадку коли $a \in \{1,3\}$ це не можливо, тому припущення хибне. $\square$

Оскільки існує нескінченна кількість 5_3-раціональних чисел і кожне 5_3-раціональне число є раціональним, то очевидно, що має місце наступне твердження: *множина* Q^{5_3} 5_3*-раціональних чисел є зліченною.*

Лема 6. *Кожне 5_3-раціональне число $x \in (0;2)$ має зліченну множину різних 5_3-зображень.*

Оскільки існує скінченна кількість циліндрів, рівних циліндру $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}$, то твердження досить довести для $k = 2$.

$$x = \Delta_{\alpha_1(0)} = \Delta_{[\alpha_1 - 1](2)},$$

або

$$x = \Delta_{\alpha_1(0)} = \Delta_{[\alpha_1 - 2](4)}.$$

Лема 7. *Кожне 5_3-ірраціональне число $x \in (0;2)$ має континуальну множину різних 5_3-зображень.*

Доведення. Зауважимо, що множина всіх підмножин зліченної множини є континуальною, то для доведення континуальності множини різних 5_3-зображень числа x досить вказати нескінченну множину незалежних місць в даному зображенні x, на яких одну пару цифр можна замінити іншою.

Нехай x — 5_3-ірраціональне число, $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$ — довільне фіксоване його 5_3-зображення. З означення 3 і леми 5 випливає, що воно не містить періодів $(0), (2), (4)$. Тоді серед його цифр $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ існує нескінченна кількість цифр відмінних від 0, нескінченна кількість цифр відмінних від 2, нескінченна кількість цифр відмінних від 4. Можливі випадки:

(1) Існує k_0 таке, що для всіх $k > k_0$ $\alpha_k \in \{0, 2, 4\}$. Нехай d — одна з цифр, що зустрічається нескінченну кількість разів у зображенні числа x. Між двома послідовними серіями цифр d міститься одна або набір цифр відмінних від d.

Тоді згідно з припущенням існують пари послідовних цифр $\overline{de}$ і $\overline{fd}$, які зустрічаються нескінченну кількість разів (e і f можуть збігатися).

$$\overline{\ldots d \ldots de \ldots fd \ldots d\square \ldots \square d \ldots}$$

Розглянемо окремо пару $\overline{de}$, яка може набувати значень $\overline{04}$, $\overline{24}$, $\overline{20}$, $\overline{40}$, які можна замінити відповідно на $\overline{11}$, $\overline{31}$, $\overline{13}$, $\overline{33}$. До пар $\overline{02}$, $\overline{42}$ не існує заміни, але після них може продовжитися серія цифри d, тобто $\overline{\ldots 02\square \ldots \square 20 \ldots}$ і $\overline{\ldots 42\square \ldots \square 24 \ldots}$, тоді можна розглядати пару цифр fd, які в даному випадку можна замінити відповідно на $\overline{13}$ і $\overline{31}$.

(2) Нескінченну кількість разів зустрічається одна з цифр 1 і 3. Нехай це цифра b.

(a) Зустрічається нескінченна кількість пар послідовних цифр, що збігається з $\overline{bb}$, $b \in \{1, 3\}$. Тоді можлива заміна $\overline{11} = \overline{04}$ і $\overline{33} = \overline{40}$.

(b) Можливий випадок, коли між двома послідовними серіями цифр b міститься одна або набір цифр відмінних від b, тоді для пари $\overline{be}$ можливі випадки:

$\overline{10} = \overline{03}$,	$\overline{01}$,	$\overline{30} = \overline{23}$,	$\overline{03} = \overline{10}$,
$\overline{12}$,	$\overline{21} = \overline{14}$,	$\overline{31} = \overline{24}$,	$\overline{13} = \overline{20}$,
$\overline{13} = \overline{20}$,	$\overline{31} = \overline{24}$,	$\overline{32}$,	$\overline{23} = \overline{30}$,
$\overline{14} = \overline{21}$,	$\overline{41} = \overline{34}$,	$\overline{34} = \overline{41}$,	$\overline{43}$.

Пари $\overline{12}, \overline{01}$ і $\overline{32}, \overline{43}$ не мають еквівалентної заміни, але може трапитись так, що вони стоятимуть поряд, тобто $\overline{1201}$ і $\overline{3243}$ тоді можлива заміна пари $\overline{20}$ на $\overline{13}$ і $\overline{24}$ на $\overline{31}$, якщо ж між ними стоятиме якась цифра e, то пару $\overline{2e}$ завжди можна замінити на еквівалентну ($\overline{20} = \overline{13}$, $\overline{21} = \overline{14}$, $\overline{23} = \overline{30}$, $\overline{24} = \overline{31}$).

$\square$

Теорема 2. *Число $x \in (0;2)$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його канонічне 5_3-зображення періодичне.*

Доведення. Нехай $\Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k}\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\ldots}$ — канонічне 5_3-зображення числа x.

Оскільки
$$x = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{4}{3^i} + \frac{\alpha_{k+1}}{3^{k+1}}\right) + B = A + B,$$
де A — число раціональне, а $B = \frac{1}{3^{k+1}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k+1+j}}{3^j} = \frac{1}{3^{k+1}} C$, $C \in [0,1]$, то x є раціональним тоді і тільки тоді, коли C є раціональним.

Оскільки зображення числа $C = \Delta^3_{\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\alpha_{k+4}\ldots}$ є класичним трійковим, а критерій раціональності числа у його трійковому зображенні, як відомо, полягає у періодичності, то необхідною і достатньою умовою раціональності x є його періодичність у канонічному зображенні. $\square$

Наслідок 1. *Дійсне число $x \in (0,2)$ є ірраціональним тоді і тільки тоді, коли його 5_3-канонічне зображення є неперіодичним.*

4. Канонічні 5_3-циліндри та їх властивості

Означення 4. Множина $\overline{\Delta}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : x = \overline{\Delta}_{c_1c_2\ldots c_m\beta_{m+1}\beta_{m+2}\ldots}, \beta_{m+n} \in \{0,1,2\}\}$ називається *канонічним 5_3-циліндром рангу m з основою* $c_1c_2\ldots c_m$, якщо існує ціле невід'ємне число k таке, що $c_i \in \{3,4\}$, $i \in \overline{1,k}$, причому $c_i = 4$ для всіх $i < k$.

Канонічні 5_3-циліндри мають наступні властивості.

Лема 8. *Мають місце рівності*

$$\overline{\Delta}_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \bigcup\limits_{i=0}^{2} \overline{\Delta}_{c_1\ldots c_m i}, & \textit{якщо } c_k \in \{0,1,2,3\}; \\ \bigcup\limits_{i=0}^{4} \overline{\Delta}_{c_1\ldots c_m i}, & \textit{якщо } c_k \in \{4\}. \end{cases}$$

Доведення. Справді, якщо $c_k = 4$, то $\overline{\Delta}_{c_1\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{4} \overline{\Delta}_{c_1\ldots c_m i}$, якщо ж $c_k \in \{0,1,2,3\}$, то $\overline{\Delta}_{c_1\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{2} \overline{\Delta}_{c_1\ldots c_m i}$. □

Лема 9. *Кожна циліндрична множина виду* $\overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}}$ *є відрізком, причому* $\overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}} = [2(1-\frac{1}{3^k}); 2(1-\frac{1}{3^{k+1}})), k \in N$.

Доведення. $\overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}} = [\min \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}}, \sup \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}})$

Справді,

$$\min \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}} = \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}(0)} = \frac{4}{3} + \ldots + \frac{4}{3^k} + \frac{0}{3^{k+1}} + \frac{0}{3^{k+2}} + \ldots =$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^k)}{1-\frac{1}{3}} = 2(1-\frac{1}{3^k}).$$

$$\sup \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}} = \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}3(2)} = \frac{4}{3} + \ldots + \frac{4}{3^k} + \frac{3}{3^{k+1}} + \frac{2}{3^{k+2}} + \frac{2}{3^{k+3}} + \ldots =$$

$$= 2 - \frac{2}{3^k} + \frac{1}{3^k} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{3^{k+2}}}{1-\frac{1}{3}} = 2(1-\frac{1}{3^{k+1}}).$$

□

Наслідок 2. $\overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}} \cap \Delta_{(4)} = \max \Delta_4$.

Лема 10. *При* $c \in \{0,1,2\}$ *має місце рівність* $\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n} \cup \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n+1]} = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$.

Доведення. $\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \cup \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)} = [\inf \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \sup \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)}$.

$\inf \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)} = 2 - \frac{2}{3^k} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \alpha_i 3^{-i}$, $\alpha_i \in \{0,1,2,3\}$.

$\max \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)} = \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)(2)} = 2 - \frac{2}{3^k} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \alpha_i 3^{-i} + \frac{2}{3^{k+1}}$, $\alpha_i \in \{0,1,2,3\}$.

$\min \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 3^{-i}$, $\alpha_i \in A$.

$\max \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n(4)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 3^{-i} + \frac{2}{3^{k+1}}$, $\alpha_i \in A$.

Якщо $\alpha_i \in \{0,1,2,3\}, i=\overline{1,n}$, то $2-\frac{2}{3^k}=0$ і

$$\inf \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \min \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \tag{3}$$

$$\sup \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)} = \sup \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{4}$$

Якщо $\alpha_i=4, i=\overline{1,k}$, то $\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ є канонічним представленням $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ згідно з теоремою 1, а отже будуть вірні рівності (3) і (4). □

Лема 11. *Має місце рівність* $\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)} = \Delta_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}\alpha_n} \cap \Delta_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}(\alpha_n+1)}$, *де* $\alpha_n \in \{0,1,2\}, \alpha_i, \beta_i \in A, i<n$;

Доведення.

$$\Delta_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}\alpha_n} \cap \Delta_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}(\alpha_n+1)} =$$
$$= [\inf \Delta_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}(\alpha_n+1)}; \sup \Delta_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}\alpha_n}] =$$
$$= [\Delta_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}(\alpha_n+1)(0)}; \Delta_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}\alpha_n(4)}] = [\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i 3^{-i} + \tfrac{\alpha_n+1}{3^n}; \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i 3^{-i} + \tfrac{\alpha_n}{3^n} + 4\cdot \tfrac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}] =$$
$$= [\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i 3^{-i} + \tfrac{\alpha_n}{3^n} + \tfrac{1}{3^n}; \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i 3^{-i} + \tfrac{\alpha_n}{3^n} + \tfrac{2}{3^n}].$$
$$\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)} = [\inf \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)}; \sup \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)}) = [\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)(0)}; \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)(2)}) =$$
$$= [\underbrace{4\ldots4}_{k} + \tfrac{3}{3^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{n-1}\alpha_i 3^{-i} + \tfrac{\alpha_n+1}{3^n}; \underbrace{4\ldots4}_{k} + \tfrac{3}{3^{k+1}} + \sum_{i=k+2}^{n-1}\alpha_i 3^{-i} + \tfrac{\alpha_n+1}{3^n} + \tfrac{2}{3^{n+1}} + \ldots) =$$
$$= [2-\frac{2}{3^k}+\frac{3}{3^{k+1}}+\sum_{i=k+2}^{n-1}\alpha_i 3^{-i}+\frac{\alpha_n}{3^n}+\frac{1}{3^n}; 2-\frac{2}{3^k}+\frac{3}{3^{k+1}}+\sum_{i=k+2}^{n-1}\alpha_i 3^{-i}+\frac{\alpha_n}{3^n}+\frac{2}{3^n}).$$

Згідно з теоремою 1 $2-\frac{2}{3^k}+\frac{3}{3^{k+1}}+\sum\limits_{i=k+2}^{n-1}\alpha_i 3^{-i}$ є канонічним зображенням $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\beta_i 3^{-i}$, а отже, початки циліндрів співпадають і вони мають однакову довжину. □

Лема 12. *Має місце рівність* $\bigcup\limits_{i=0}^{2}\overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}i} = \Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k-1}3} \cap \Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k}}$.

Доведення.

$$\bigcup_{i=0}^{2}\overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}i} = \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}0} \cup \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}1} \cup \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}2} =$$
$$= [\inf \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}0}; \sup \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}2}) = [\overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}0(0)}; \overline{\Delta}_{\underbrace{4\ldots4}_{k}2(2)}) = [2-\frac{2}{3^k}; 2-\frac{2}{3^k}+\frac{1}{3^k}).$$

$$\Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k-1}3} \cap \Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k}} = [\inf \Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k}}; \sup \Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k-1}3}] = [\Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k}(0)}; \Delta_{\underbrace{4\ldots4}_{k-1}3(4)}] =$$
$$= [2-\frac{2}{3^{k-1}}+\frac{4}{3^k}; 2-\frac{2}{3^{k-1}}+\frac{3}{3^k}+\frac{2}{3^k}) = [2-\frac{2}{3^k}; 2-\frac{2}{3^k}+\frac{1}{3^k}).$$

Далі міркування проводяться аналогічно, як і в лемі 11. □

Лема 13. *Має місце рівність* $\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \oplus \overline{\Delta}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}} = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$.

Доведення. $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = [\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i 3^{-i}; \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i 3^{-i} + \frac{2}{3^n}], \alpha_i \in A$.

$\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \oplus \overline{\Delta}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}} = [\inf\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} + \inf\overline{\Delta}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}}; \sup\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} + \sup\overline{\Delta}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}}) =$

$= [\overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)} + 0; \overline{\Delta}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(2)} + \overline{\Delta}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}(2)}) = [\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i 3^{-i}; \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i 3^{-i} + \frac{1}{3^n} + 0 + \frac{1}{3^n}) =$

$= [\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i 3^{-i}; \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i 3^{-i} + \frac{2}{3^n})$. □

Лема 14. *Існує* $2 \cdot 3^k - 1$ *різних канонічних* 5_3*-циліндрів рангу* k.

Доведення. Якщо $k = 1$, то згідно з твердженням кількість канонічних 5_3 має бути $2 \cdot 3^1 - 1 = 5$. Справді,

$$\overline{\Delta}_0 = \Delta_0 \setminus \Delta_1,$$
$$\overline{\Delta}_1 = \Delta_0 \cap \Delta_1,$$
$$\overline{\Delta}_2 = \Delta_1 \cap \Delta_2,$$
$$\overline{\Delta}_3 = \Delta_2 \cap \Delta_3 = \Delta_{30} \cup \Delta_{31} \cup \Delta_{32},$$
$$\overline{\Delta}_4 = \Delta_4.$$

Оскільки за означенням 4, якщо $c_i \in \{0, 1, 2\}$, то $(\beta_{m+n}) \in \{0, 1, 2\}$, слід відмітити, що в канонічному 5_3-му циліндрі після цифри 3 також можливі лише цифри з множини $\{0, 1, 2\}$. Це означає, що для даних циліндрів на k-му кроці їх кількість можна обчислити наступним чином $4 \cdot 3^k$. Якщо ж $c_i = 4, i = \overline{1, k}$ то циліндрична множина $\Delta_{4\ldots4} = \{x : x = \Delta_{4\ldots4\beta_{m+1}\beta_{m+2}\ldots}, (\beta_{m+n}) \in \{0, 1, 2\}\}$, є генетично самоподібною до вихідної множини, то кількість канонічних 5_3-их циліндрів на k-му кроці можна обчислити так $3(2 \cdot 3^k - 2) + 5 = 2 \cdot 3^k - 1$. □

Література

[1] *Гончаренко Я. В.* Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — №4, 2003. — С. 216–232

[2] *Гончаренко Я. В., Микитюк І. О.* Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, — 2004, №5. — С.242–254

[3] *Гончаренко Я.В., Микитюк І. О.* Про фрактальну оцінку кількості циліндричних двійкових зображень числа з допомогою одного спеціального ряду // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, — 2006, №7. — С.230–244

[4] *Микитюк І. О.* Геометрія двійково-п'ятіркового зображення числа // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, — 2005, №6. — С.301–310

[5] *Микитюк І. О., Працьовитий М. В.* Двійкова система числення з надлишковими цифрами і її відповідна метрична теорія чисел // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — №4, 2003. — С. 270–290

[6] *Працьовитий М. В.* Згортки сингулярних розподілів // Доповіді Національної академії наук України, 1997, №9. — С.36–44

[7] *Працьовитий М. В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Доповіді Національної академії наук України, 1996, №5. — С.32–37

[8] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[9] *Працьовитий М.В., Сухоліт Ю. Ю.* Трійкова система числення з двома надлишковими цифрами // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, — 2011, №12. — С.121–134

[10] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. *Фрактальный множества, функции, распределения.* — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.