Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 97–119.

УДК 512.544

Группы, в которых нормальные замыкания циклических подгрупп имеют ограниченные конечные ранги Хирша–Зайцева

Л. А. Курдаченко, Н. Н. Семко

Днепропетровский национальный университет, Национальный университет государственной налоговой службы Украины

Аннотация. В статье изучаются обобщенно разрешимые группы с ограничениями на нормальные замыкания циклических подгрупп. Будем говорить, что группа G имеет конечный ранг Хирша–Зайцева, если G имеет восходящий ряд, факторы которого либо бесконечные циклические, либо периодические и число бесконечных циклических факторов конечно. Нетрудно усмотреть, что число бесконечных циклических факторов в каждом из таких рядов будет инвариантом группы. Этот инвариант называется рангом Хирша–Зайцева группы G и обозначается через $r_{hz}(G)$. Изучаются группы, в которых нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева, не превосходящий b (b – некоторое натуральное число). При наличии некоторых естественных ограничений найдена такая функция $k_1(b)$, что $r_{hz}([G/Tor(G), G/Tor(G)]) \leq k_1(b)$.

Groups in which the normal closures of cyclic subgroups have bounded finite Hirsch-Zaitsev rank

L. Kurdachenko, M. Semko

Dnipropetrovsk National University, National state tax service university of Ukraine

Abstract. In this paper we study generalized soluble groups with restriction on normal closures of cyclic subgroups. We say that a group G is said to have finite Hirsch–Zaitsev rank if G has an ascending series whose factors are either infinite cyclic or periodic and if the number of infinite cyclic factors are finite. It is not hard to see that the number of infinite cyclic factors is every of such series is an invariant of a group G. This invariant is called the Hirsch–Zaitsev rank of G and will denoted by $r_{hz}(G)$. We study the groups, in which normal closure of every cyclic subgroup has the Hirsch–Zaitsev rank at most b (**b** is some positive integer). For some natural restriction we find the function $k_1(b)$ such that $r_{hz}([G/Tor(G),\ G/Tor(G)]) \leq k_1(b)$.

E-mail: lkurdachenko@i.ua, n_semko@mail.ru

Если G — группа и x — ее элемент, то **класс сопряженности элемента** x в G будем обозначать через x^G, т. е. $x^G = \{x^g | g \in G\}$. Группы с разнообразными ограничениями на классы сопряженных элементов изучались уже достаточно долго. Первое ограничение, которое здесь возникает, это ограничение на порядок класса сопряженных элементов. Например, если $|x^G| = 1$ для каждого элемента $x \in G$, то группа G — абелева. Это показывает, что группы, в которых порядки классов сопряженных элементов конечны и ограничены (т. е. существует такое натуральное число $\mathbf{b}$, что $|x^G| \leq \mathbf{b}$ для каждого $x \in G$), должны быть близки к абелевым. Группы с таким свойством называются **BFC-группами**. Б. Нейман доказал [1], что коммутатор всякой BFC-группы конечен. Более того, существует такая функция ν, что $|[G, G]| \leq \nu(\mathbf{b})$. Имеется большая серия статей, посвященных нахождению наилучшего значения для функции $\nu(\mathbf{b})$. Последней в этой серии была статья Р. Гуральника и А. Мароти [2], которые показали, что $\nu(\mathbf{b}) = (7 + \mathbf{log_2 b})/2$.

Приведенный выше результат Б. Неймана стал исходной точкой для многих интересных обобщений. Если x^G конечен, то либо $< x >^G$ конечна, либо $< x >^G$ включает в себя такую конечную нормальную подгруппу T_x, что $< x >^G /T_x$ — конечно порожденная свободная абелева группа. В частности, $< x >^G$ будет почти полициклической. Поэтому естественно возникает вопрос о структуре групп, в которых $< x >^G$ будет почти полициклической. Если предположить, что $< x > G$ является бесконечной циклической для каждого элемента $x \in G$, то нетрудно показать, что G — абелева. Если предположить, что $< x > G$ не циклическая, но свободная абелева, то коммутант может и не быть свободной абелевой подгруппы. В этом можно убедиться на следующем примере. Пусть $D_n = (< a_n > x < b_n >)\lambda < c_n >$, где a_n, b_n, c_n имеют бесконечный порядок и $c_n^{-1} b_n c_n = a_n b_n, n \in \mathbf{N}$. Положим $K = Dr_{n \in \mathbf{N}}$, $H =< a_n a_{n+1}^{-2} | n \in \mathbf{N} >$ и $G = K/H$. Нетрудно убедиться в том, что $< x >^G$ — свободная абелева подгруппа 0-ранга не выше 2, но $[G, G] \cong \mathbf{Q}_2$, в частности, коммутант не является свободной абелевой подгруппой. Вся почти полициклическая группа G имеет конечный субнормальный ряд

$$< 1 >= G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \ldots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G,$$

факторы $G_j/G_{j-1}, 1 \leq j \leq n-1$, которого — бесконечные циклические, а фактор G_n/G_{n-1} — конечен. Число бесконечных циклических факторов этого ряда является инвариантом группы G, который называется **числом Хирша** группы G.

А. И. Мальцев [3] ввел в рассмотрение следующий класс групп. Напомним некоторые определения. Если G — группа, то через $\mathbf{Tor}(G)$ будем обозначать максимальную нормальную периодическую подгруппу G. Отметим, что если группа G локально нильпотентна, то $\mathbf{Tor}(G)$ будет (характеристической) подгруппой G, причем $G/\mathbf{Tor}(G)$ не имеет кручения.

Пусть G — абелева группа без кручения. Число элементов в максимальном независимом подмножестве G называется **0-рангом** G, и обозначается через $\mathbf{r}_0(G)$. Если G — произвольная абелева группа, то положим $\mathbf{r}_0(G) = \mathbf{r}_0(G/\mathbf{Tor}(G))$.

Будем говорить, что G — **разрешимая** A_1**-группа**, если G обладает конечным субнормальным рядом, факторы которого абелевы и имеют конечный 0-ранг. Нетрудно увидеть, что если G — разрешимая $\mathbf{A}_1$-группа, то G имеет конечный субнормальный ряд, факторы которого либо бесконечные циклические, либо периодические группы, причем число бесконечных циклических факторов будет инвариантом G. В случае полирациональной группы этот инвариант был назван рациональным рангом [4]. Это понятие было расширено на класс локально почти полициклических групп [5], а в работе [6] этот инвариант уже рассматривался для произвольных групп. Этот инвариант был назван **рангом без кручения** или **0-рангом**. Но термин ранг без кручения не совсем точный. Например, не каждая группа без кручения имеет ранг без кручения (конечный или бесконечный). Для неабелевых групп существует понятие секционного 0-ранга, который также обозначается через $\mathbf{r}_0(G)$. Поэтому было бы лучше использовать другой термин. Более того, рассмотрим следующее обобщение.

Будем говорить, что группа G имеет **конечный ранг Хирша–Зайцева**, если G имеет возрастающий ряд, факторы которого либо бесконечные циклические, либо периодические, и число бесконечных циклических факторов конечно. Нетрудно увидеть, что число бесконечных циклических факторов в каждом таком ряду является инвариантом G. Этот инвариант называется **рангом Хирша–Зайцева** группы G и будет обозначаться через $\mathbf{r}_{hz}(G)$.

Напомним, следуя А. И. Мальцеву [7], что группа G имеет **конечный специальный ранг** r, если каждая конечно порожденная подгруппа G может быть порождена $\mathbf{r}$ элементами, и $\mathbf{r}$ — наименьшее натуральное число с этим свойством.

Отметим сейчас связи между группами конечного ранга Хирша–Зайцева и группами конечного специального ранга.

Группа G называется **обобщенно радикальной**, если G имеет возрастающий ряд, факторы которого локально нильпотентны или локально конечны. Обобщенно радикальная группа G имеет восходящую локально нильпотентную или восходящую локально конечную подгруппу. В первом случае ее локально нильпотентный радикал $\mathbf{Lnr}(G)$ неединичен. Во втором случае нетрудно увидеть, что G включает в себя неединичную нормальную локально конечную подгруппу. Нетрудно показать, что в каждой группе G подгруппа $\mathbf{Lfr}(G)$, порожденная всеми нормальными локально конечными подгруппами будет наибольшей нормальной локально конечной подгруппой (**локально конечным радикалом**). Таким образом, всякая обобщенно радикальная группа имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп с локально нильпотентными или локально конечными факторами.

Отметим также, что периодическая обобщенно радикальная группа локально конечна, а потому и периодическая локально обобщенная радикальная группа также локально конечна.

Если G — группа конечного ранга Хирша–Зайцева, то $\mathbf{r_{hz}}(\mathbf{Tor}(G)) = 0$ и $\mathbf{r_{hz}}(G) = \mathbf{r_{hz}}(G/\mathbf{Tor}(G))$. Другими словами, мы можем говорить только о структуре фактор-группы $G/\mathbf{Tor}(G)$. Следующий результат описывает локально обобщенно радикальные группы конечного ранга Хирша–Зайцева.

Теорема HZ [8]. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа конечного ранга Хирша–Зайцева и предположим, что $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$. Тогда G — почти разрешима и имеет такие нормальные подгруппы $L \leq K \leq S \leq G$, что*

(i) L — нильпотентная подгруппа без кручения,

(ii) K/L — конечно порожденная абелева группа без кручения,

(iii) G/K — конечна и S/K — разрешимый радикал G/K.

Более того, если $\mathbf{r}_{hz}(G) = \mathbf{r}$, то существуют такие функции $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, что $|G/K| \leq \mathbf{f}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{scl}(S/T) \leq \mathbf{f}_2(\mathbf{r})$.

Если G — разрешимая группа, то $\mathbf{scl}(G)$ будет обозначать ее класс разрешимости. Если $n \in \mathbf{N}$, то положим $\mathbf{a}(\mathbf{n}) = \max\{|\mathbf{Aut}(G)||G$ — конечная группа, порядок которой не выше $\mathbf{n}\}$. Очевидно $\mathbf{a}(\mathbf{n}) \leq \mathbf{n}!$.

Пусть A — подгруппа $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_j \cong \mathbf{Q}, 1 \leq j \leq n$, и T — периодическая группа автоморфизмов A. Тогда T — конечна (см., например, [9, теорема 9.33]). Более того, существует такая функция τ, что $|T| \leq \tau(n)$.

Отметим, что $\mathbf{f}_1(\mathbf{r}) = ((\mathbf{a}(\mathbf{r})\mathbf{r}^{2r+2})^r \cdot \mathbf{a}(\tau(\mathbf{r}))^r)!$.

Ввиду классической теоремы Цассенхауза (см., например, [9, теорема 3.7]) существует такая функция ζ, что $\mathbf{scl}(G) \leq \zeta(r)$ для каждой разрешимой подгруппы G из $\mathbf{GL}_r(F)$.

Имеем $\mathbf{f}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \zeta(\mathbf{r})$.

Мы можем видеть, что структура G существенно определяется заданием числа $\mathbf{r}$.

Теорема HZ показывает, что если G — локально обобщенно радикальная группа конечного ранга Хирша–Зайцева и $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$, то G имеет конечный специальный ранг. Отметим также, что если G — локально обобщенно радикальная группа конечного специального ранга, то $G/\mathbf{Tor}(G)$ имеет конечный ранг Хирша–Зайцева.

В статьях [10, 11] были рассмотрены группы, в которых нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет конечный специальный ранг, не превышающий $\mathbf{b}$. Было доказано, что коммутант таких групп имеет конечный специальный ранг. Пусть теперь G — локально обобщенно радикальная группа и предположим, что существует такое натуральное число $\mathbf{b}$, что $\mathbf{r}_{hz}(< x >^G) \leq \mathbf{b}$ для каждого элемента $x \in G$. Используя приведенный выше результат и взаимосвязи между специальным рангом и рангом Хирша–Зайцева, можно получить, что коммутант $G/\mathbf{Tor}(G)$ имеет конечный ранг Хирша–Зайцева. Но Х. Смит не получил функцию, ограничивающую специальный ранг $[G, G]$. Поэтому цель данной работы — получить функцию от $\mathbf{b}$, которая ограничивает ранг Хирша–Зайцева $[G/\mathbf{Tor}(G), G/\mathbf{Tor}(G)]$. Основным результатом работы является

Теорема A. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет конечный ранг Хирша–Зайцева, не превышающий $\mathbf{b}$. Если $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$, то G включает в себя такую нормальную подгруппу K конечного ранга Хирша–Зайцева, что G/K — абелева группа без кручения. Более того, существует такая функция $\mathbf{k}_1$, что $\mathbf{r}_{hz}(K) \leq \mathbf{k}_1(\mathbf{b})$.*

В данной работе получена более или менее оптимальная форма для функции $\mathbf{k}_1$.

1. Локально нильпотентные группы, в которых нормальные замыкания циклических подгрупп имеют конечные и ограниченные ранги Хирша–Зайцева

Важной частью данной работы является рассмотрение случая локально нильпотентных групп.

Пусть L — нормальная подгруппа локально нильпотентной группы G без кручения и предположим, что $\mathbf{r}_{hz}(L) = k$. Из результатов работы [12] получим, что гиперцентр группы G, имеющий номер не больше $\mathbf{k}$, включает L. Таким образом, получаем

Лемма 1. *Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$. Тогда G — нильпотентна и $\mathbf{ncl}(G) \leq \mathbf{b}$.*

Доказательство. В самом деле, гиперцентр G с номером $\mathbf{b}$ включает в себя нормальное замыкание любой циклической подгруппы.

Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения. Напомним, что ее подгруппа называется **сервантной (или изолированной)**, если из включения $x^k \in H$ вытекает, что $x \in H$ для любого натурального k. Отметим, что пересечение любого семейства сервантных подгрупп будет сервантной подгруппой. Поэтому для любой подгруппы K группы G можно определить **сервантную оболочку (изолятор)** как пересечение всех сервантных подгрупп, включающих в себя K. Если K нормальна в G, то ее сервантная оболочка L может быть определена следующим образом: $L/K = \mathbf{Tor}(G/K)$, в частности, L также нормальна. Если $K \le \zeta(G)$, то $L \le \zeta(G)$, если K — абелева, то и L — абелева, если K — нильпотентна, то и L — нильпотентна и $\mathbf{ncl}(K) = \mathbf{ncl}(L)$ (см, например, [13, § 66, 67]). Также отметим, что централизатор любого подмножества G будет сервантной подгруппой [13, § 66, 67]. $\square$

Лемма 2. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, и $\mathbf{ncl}(G) = 2$. Пусть d — элемент G, для которого $\mathbf{r}_{hz}(< d >^G) = k$ — максимален. Обозначим через D сервантную оболочку $< d >^G$ и пусть $H = C_G(D)$. Тогда $\mathbf{r}_{hz}(< x >^H)D/D < k$ для каждого элемента $x \in H$.*

Доказательство. Отметим, что D — нормальная, а G/D не имеет кручения. Более того, $\mathbf{r}_{hz}(D) = \mathbf{r}_{hz}(< d >^G) = k$.

Если допустить, что $\mathbf{k} = 1$, то нормальное замыкание каждой циклической подгруппы G будет локально циклическим. Тогда, как отмечалось выше, $\zeta(G)$ включает в себя нормальное замыкание каждой циклической подгруппы, так что $G = \zeta(G)$, что противоречит условию. Это противоречие показывает, что $\mathbf{k} > 1$.

Предположим противное, пусть H содержит такой элемент h, что $\mathbf{r}_{hz}(< h >^H D/D) = k$. Поскольку $\mathbf{r}_{hz}(< h >^G) \le \mathbf{k}$, то $\mathbf{r}_{hz}(< h >^G D/D) \le k$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{r}_{hz}(< h >^G D/D) = \mathbf{r}_{hz}(< h >^H D/D) \le \mathbf{k}$, а потому сервантные оболочки $< h >^G D/D$ и $< h >^H D/D$ совпадают. Сервантность D влечет тогда, что

$$\mathbf{r}_{hz}(< h >^G D) = \mathbf{r}_{hz}(< h >^G) + \mathbf{r}_{hz}(D) = 2\mathbf{k}.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{r}_{hz}(< h >^G D) = \mathbf{r}_{hz}(< h >^G) + \mathbf{r}_{hz}(D) - \mathbf{r}_{hz}(< h >^G \cap D).$$

Отсюда вытекает, что $< h >^G \cap D =< 1 >$.

Пусть $x \in C_G(< h >^G D/D)$. Тогда $[x, y] \in D$ для любого элемента $y \in< h >^G$. Поскольку $[x, y] \in< h >^G$, то $[x, y] \in< h >^G \cap D =< 1 >$. Следовательно $x \in C_G(< h >^G)$, так что $C_G(< h >^G D/D) \le C_G(< h >^G)$. Очевидное включение $C_G(< h >^G) \le C_G(< h >^G D/D)$ доказывает теперь равенство $C_G(< h >^G) = C_G(< h >^G D/D)$.

Пусть $z \in C_G(hd)$. Тогда $hd = (hd)^z = h^z d^z$. Так как $d^z \in D$, то имеем

$$hD = hdD = h^z d^z D = h^z D = (hD)^z.$$

Из доказанного выше получаем $z \in C_G(< h >^G)$. В частности, $h^z = h$ и $d^z = (hd)((h)^z)^{-1} = hdh^{-1} = d$.

Итак $z \in C_G(d) \cap C_G(< h >^G)$ или $C_G(hd) \le C_G(d) \cap C_G(< h >^G)$.

Обозначим через C сервантную оболочку $< h >^H$. Положим $u = hd, U =< u >^G$. Тогда

$$UC/C =< u >^G C/C =< uC >^{G/C}=< dC >^{G/C}=< d >^G C/C.$$

Равенство $< h >^G \cap D =< 1 >$ влечет за собой $C \cap D =< 1 >$. В частности, $< d >^G \cap C =< 1 >$. Отсюда вытекает, что

$$UC/C =< d >^G C/C \cong< d >^{G/C} (C\cap < d >^G) \cong< d >^G .$$

В частности, $\mathbf{r}_{hz}(< u >^G C/C) = k$. Как и выше отсюда вытекает, что $< u >^G \cap C =< 1 >$. Используя приводимые ранее аргументы, получим, что $C_G(< u >^G) = C_G(< u >^G C/C)$. Однако $uC = hdC = dhC = dC$. Снова обращаясь к равенству $D \cap C =< 1 >$, получаем

$$C_G(< d >^G) = C_G(< d >^G C/C) = C_G(< u >^G C/C) = C_G(< u >^G).$$

Поскольку централизатор каждого подмножества будет сервантной подгруппой, то $C_G(< d >^G) = C_G(D) = H$. Тогда $H = C_G(< u >^G) \leq C_G(u)$. Поэтому $u^\nu = u$ для любого элемента $\nu \in H$ и $< u >^H=< u >$. Но в этом случае

$$< hD >=< uD >=< u > D/D =< u >^H D/D =$$
$$=< uD >^{H/D}=< hD >^{H/C}=< h >^H D/D.$$

В частности, $\mathbf{r}_{hz}(< h >^H D/D) = 1$. Достигнутым противоречием и доказывается данный результат. $\square$

Следствие 1. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, и $\mathbf{ncl}(G) = 2$. Тогда G включает в себя такую нормальную сервантную подгруппу K, имеющую конечный ранг Хирша–Зайцева, что G/K — абелева. Более того $\mathbf{r}_{hz}(K) \leq \mathbf{b}(\mathbf{b} + 1)(\mathbf{b} + 2)/3$.*

Доказательство. Выберем такой элемент d_1, что $\mathbf{r}_{hz}(< d_1 >^G) = \mathbf{k}$ будет максимальным из возможных. Очевидно $\mathbf{k} \leq \mathbf{b}$. Пусть D_1 — сервантная оболочка $< d_1 >^G$ и $H_1 = C_G(D_1)$. Как и выше, H_1 является сервантной и $H_1 = C_G(< d_1 >^G)$.

Пусть g — произвольный элемент G. Так как $G/\zeta(G)$ — абелева, то отображение $\chi_g : x \longrightarrow [x, g],\ x \in G$, является эндоморфизмом G, кроме того $\mathbf{Ker}\ \chi_g = C_G(g), \mathbf{Im}\ \chi_g = [G, g]$ и имеем изоморфизм

$$[G, g] = \mathbf{Im}\ \mathbf{k}_g \cong G/\mathbf{Ker}\ \mathbf{k}_g = G/C_G(g).$$

Поскольку $\mathbf{r}_{hz}(< g >^G) \leq \mathbf{b}$, то $\mathbf{r}_{hz}([G, g]) \leq \mathbf{b}$. Ввиду указанного изоморфизма $G/C_G(g)$ — абелева группа без кручения, 0-ранг которой не выше $\mathbf{b}$.

Положим $U = G/D_1$ и $L = H_1/D_1$. Тогда лемма 2 показывает, что $\mathbf{r}_{hz}(< y >^L) \leq \mathbf{k} - 1$ для любого элемента $y \in L$.

Выберем в G/H_1 свободную абелеву подгруппу C_1/H_1 максимального 0-ранга. Тогда G/C_1 будет периодической. Изоморфизм $[G, d_1] \cong G/H_1(g)$ показывает, что $\mathbf{r}_0(C_1/H_1) \leq \mathbf{k}$. Тогда существует такая конечно порожденная подгруппа E_1, имеющая не более $\mathbf{k}$ образующих, что $C_1 = E_1H_1$. Ввиду наших условий E_1^G имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{kb} \leq \mathbf{b}^2$. Тогда $\mathbf{r}_{hz}(D_1E_1^G) \leq \mathbf{k} + \mathbf{b}^2 \leq \mathbf{b} + \mathbf{b}^2$.

Обозначим через K_1 сервантную оболочку $D_1E_1^G$, тогда $\mathbf{r}_{hz}(D_1E_1^G) = \mathbf{r}_{hz}(K_1)$ и G/H_1K_1 — периодическая. Отсюда вытекает, что $\mathbf{r}_{hz}(< gK_1 >^{G/K}\ 1) \leq \mathbf{k} - 1$ для любого $g \in G$.

Теперь повторим для G/K_1 все предыдущие аргументы и т.д. После конечного числа шагов найдем такую нормальную сервантную подгруппу K, имеющую конечный ранг Хирша–Зайцева, что G/K — абелева. Более того, доказанное выше показывает также, что

$$\mathbf{r}_{hz}(K) \leq 1+\ldots+\mathbf{b}+1+2^2+\ldots+\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)/2+\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(2\mathbf{b}+1)/6 = \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)/3.$$

□

Следствие 2. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, и $\mathbf{ncl}(G) = c$. Тогда G включает в себя такую нормальную сервантную подгруппу K конечного ранга Хирша–Зайцева, что G/K — абелева. Кроме того, $\mathbf{r}_{hz}(K) \leq \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{c-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$.*

Доказательство. Пусть

$$< 1 >= Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_c = G$$

— верхний центральный ряд G. Каждый его является сервантной подгруппой (см, например, [13, § 66, 67]). Воспользуемся индукцией по $\mathbf{c}$. Если $\mathbf{c} = 2$, утверждение вытекает из следствия 1. Предположим теперь, что $\mathbf{c} > 2$ и рассмотрим фактор-группу G/Z_1. Ввиду индуктивного допущения G/Z_1 включает в себя нормальную сервантную подгруппу K_1/Z_1, для которой $\mathbf{r}_{hz}(K_1/Z_1)$ — конечен и $(G/Z_1)(K_1/Z_1) \cong G/K_1$ — абелева. Поскольку $\mathbf{r}_{hz}(K_1/Z_1)$ — конечен, K_1 имеет конечный субнормальный ряд

$$< 1 >= Z_0 \leq Z_1 = U_1 \lhd \ldots \lhd U_r = K_1,$$

факторы U_{j+1}/U_j которого — локально циклические и без кручения, $1 \leq j \leq r-1$. Выберем в каждой из подгрупп U_{j+1} элемент $u_{j+1} \in U_{j+1} \backslash U_j$, $1 \leq j \leq r-1$, и обозначим через K_2 сервантную оболочку $< u_1 >^G \ldots < u_r >^G$. Так как $\mathbf{r}_{hz}(K_2) = \mathbf{r}_{hz}(< u_1 >^G \ldots < u_r >^G)$, то $\mathbf{r}_{hz}(K_2) \leq r\mathbf{b}$. G/K_2 не имеет кручения, а фактор

$(K_1/K_2)(Z_1K_2/K_2)$ будет периодическим. Из включения $Z_1K_2/K_2 \leq (G/K_2)$ вытекает, что $(G/K2)$ включает в себя сервантную оболочку Z_1K_2/K_2. Тот факт, что G/K_1 не имеет кручения, показывает, что сервантная оболочка Z_1K_2/K_2 совпадает с K_1/K_2. Таким образом, $K_1/K_2 \leq \zeta(G/K_2)$ и $\mathbf{ncl}(G/K_2) = 2$. Теперь можно использовать следствие 1. Из данного доказательства и доказательства следствие 1 получим следующую границу для $\mathbf{r}_{hz}(K)$:

$$\mathbf{r}_{hz}(K) \leq d + d\mathbf{b} + d\mathbf{b}^2 + \ldots + d\mathbf{b}^{c-2}, \text{ где } d = \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)/3.$$

Теперь имеем

$$d + d\mathbf{b} + d\mathbf{b}^2 + \ldots + d\mathbf{b}^{c-2} = d(1 + \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 + \ldots + \mathbf{b}^{c-2}) = d(\mathbf{b}^{c-1} - 1)/(\mathbf{b} - 1).$$

□

Непосредственно из следствия 2 и леммы 1 получим

Предложение 1. *Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$. Тогда G включает в себя такую нормальную сервантную подгруппу K конечного ранга Хирша–Зайцева, что G/K — абелева. Кроме того, $\mathbf{r}_{hz}(K) \leq \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{b-1} - 1)/3(\mathbf{b} - 1)$.*

2. Свойства локально обобщенно радикальных групп, в которых нормальные замыкания циклических подгрупп имеют конечные ограниченные ранги Хирша–Зайцева

Из результатов статьи [14] вытекает следующий результат:

Если фактор-группа $G/\zeta(G)$ — конечна, то ее коммутант $[G, G]$ также конечен.

Как следствие отсюда получается следующее небольшое обобщение:

Если фактор-группа $G/\zeta(G)$ — локально конечна, то и [G, G] — локально конечен.

Используя обычную индукцию, из последнего результата получаем следующее

Предложение 2. *Пусть G — группа и предположим, что $G/\zeta_j(G)$ — локально конечна. Тогда $\gamma_{j+1}(G)$ — локально конечна.*

Далее мы будем использовать функцию τ, о которой уже говорилось во введении. Для τ можно указать следующую границу. Ввиду теоремы Жордана (см., например, [9, теорема 9.2]) существует функция β, обладающая следующим свойством:

если G — конечная подгруппа $\mathbf{GL}_n(F)$, где F — поле характеристики 0, то G включает в себя абелеву нормальную подгруппу, индекс которой конечен и не превосходит $\beta(n)$.

В книге [15, теорема 36.14] для β была получена следующая граница

$$\beta(n) \leq ((8n)^{1/2}+1)^u - ((8n)^{1/2}-1)^u,$$

где $u = 2n^2$. Другая граница для β была получена в книге [16]:

$$\beta(n) \leq (n!)12^{n(\pi(n+1)+1)},$$

где $\pi(n+1)$ — число простых чисел, меньших $n+1$. Если G — разрешима, то в статье [17] было показано, что

$$\beta(n) \leq 2^{((4n-3)/3)+1)}3^{((10n-3)/9)}.$$

Кроме того, если $n = 3 \cdot 4^m$, то $\beta(n)$ достигает этого значения. Используя функцию β, можно получить следующее ограничение для $\tau(n)$:

$$\tau(n) \leq \beta(n)(\mathbf{k_n})^n,$$

где $\mathbf{k_n}$ — произведение всех $\varphi(m)$, для которых $\varphi(m) \leq n, n \in N$ (см., например, [9, теорема 9.33]). Однако функция, данная здесь, растет очень быстро. В статье [8] был предложен метод нахождения значений функции τ на компьютере.

Предложение 3. *Пусть G — группа, K — ее нормальная подгруппа, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) K — нильпотентна и не имеет кручения;

(ii) $\mathbf{r}_{hz}(K) = \mathbf{r}$ — конечен;

(iii) G/K — локально конечна.

Если $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$, то G включает в себя такую нормальную нильпотентную подгруппу без кручения $L \geq K$, что $\mathbf{ncl}(L) = \mathbf{ncl}(K), \mathbf{r}_{hz}(L) = \mathbf{r}_{hz}(K), G/L$ — конечна и $|G/L| \leq \mathbf{ncl}(K)\tau(\mathbf{r})$.

Доказательство. Подгруппа K имеет конечный центральный ряд

$$< 1 >= Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_n = K,$$

факторы которого не имеют кручения. Положим $C_{j+1} = C_G(Z_{j+1}/Z_j),\ 0 \leq j \leq n-1$. Как было отмечено выше, R/C_{j+1} — конечна и $|R/C_{j+1}| \leq \tau(\mathbf{r}_{hz}(Z_{j+1}/Z_j)) \leq \tau(\mathbf{r}),\ 0 \leq j \leq n-1$. Пусть $L = \cap_{0 \leq j \leq n-1} C_{j+1}$, тогда ввиду теоремы Ремака, G/L вкладывается в прямое произведение $G/C_1 \times \ldots \times G/C_n$. Отсюда вытекает, что $|G/L| \leq n\ \tau(\mathbf{r})$. Далее, Z_n — гиперцентр подгруппы L с номером n и L/Z_n — периодическая. Предложение 2 показывает, что $\gamma_{n+1}(C)$ — локально конечна. Так как $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$, то $\gamma_{n+1}(L) =< 1 >$, так что L — нильпотентна и $\mathbf{ncl}(L) = \mathbf{ncl}(K)$. Наконец, из периодичности L/K получаем, что $\mathbf{r}_{hz}(L) = \mathbf{r}_{hz}(K)$. □

Лемма 3. *Пусть G — группа и L — ее локально нильпотентный радикал. Предположим, что* $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$. *Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$, *то G включает в себя нормальные подгруппы K, R, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) K — нильпотентная подгруппа, имеющая конечный ранг Хирша–Зайцева;

(ii) $R \cap L = K$;

(iii) L/K — абелева и не имеет кручения;

(iv) $R/K = \mathbf{Tor}(G/K)$ — конечна;

(v) $\mathbf{r}_{hz}(K) \leq \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{c-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$.

(vi) $|R/K| \leq \mathbf{b}\tau(\mathbf{b})$.

Доказательство. Равенство $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ обеспечивает тот факт, что L — локально нильпотентная подгруппа без кручения. Ввиду предложение 1 L включает в себя такую нормальную сервантную подгруппу K конечного ранга Хирша–Зайцева, что L/K — абелева. Из доказательства предыдущего результата видно, что K – G-инвариантна. Положим $R/K = \mathbf{Tor}(G/K)$. Так как L/K не имеет кручения, то $L/K \cap R/K =< 1 >$. Как отмечалось выше, K имеет верхний центральный ряд

$$< 1 >= Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_n = K,$$

факторы которого не имеют кручения и $n \leq \mathbf{b}$. Ввиду предложение 3 R включает в себя такую нормальную подгруппу C, что C — нильпотентна и не имеет кручения, более того $\mathbf{ncl}(C) = \mathbf{ncl}(K)$ и $|R/C| \leq n\ \tau(\mathbf{b}) \leq \mathbf{b}\ \tau(\mathbf{b})$. Из доказательства предложение 3 можно увидеть, что C — нормальна в G. В частности, $C \leq L$. Поскольку C/K — периодическая, то сервантная оболочка K в L включает в себя C. Но K — сервантная подгруппа L, а потому $K = C$. □

Лемма 4. *Пусть G — группа и L — ее локально нильпотентный радикал. Предположим, что* $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ *и пусть* $T/L = \mathbf{Tor}(G/L)$. *Также предположим, что T/L — локально конечна. Пусть $x \in T \backslash L$ и $X =< x >^G$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$, *то XL/L — конечна и* $|XL/L| \leq \mathbf{b}\tau(\mathbf{b})$.

Доказательство. Равенство $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ обеспечивает тот факт, что L не имеет кручения. Лемма 1 показывает, что L — нильпотентна и $\mathbf{ncl}(L) \leq \mathbf{b}$. Пусть $V = X \cap L$, тогда X/V — локально конечна. Ввиду предложение 3 X/V будет конечной, более того $|X/V| \leq \mathbf{b}\ \tau(\mathbf{b})$. □

Следствие 3. *Пусть G — группа и L — локально нильпотентный радикал G. Предположим, что* $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ *и пусть* $T/L = \mathbf{Tor}(G/L)$. *Также предположим, что T/L — локально конечна. Если нормальное замыкание каждой циклической* *подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$*, то подгруппа* $[T/L, T/L]$ *— конечна и* $|[T/L, T/L]| \le \nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}))$.

Доказательство. Ввиду леммы 4 нормальное замыкание $< xA >^{G/A}$ каждого элемента $xA \in T/A$ имеет порядок, не превосходящий $\mathbf{b}\tau(\mathbf{b})$. В частности, xA имеет не более $\mathbf{b}\tau(\mathbf{b})$ сопряженных в G/A. Поэтому можно применить результат Б. Неймана [1]. □

Лемма 5. *Пусть* G *— локально обобщенно радикальная группа, для которой* $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$*. Пусть, далее,* A, L *— такие нормальные подгруппы* G*, что* A *— абелева,* $A \le L$ *и* L/A *— конечна и имеет порядок* k*. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$*, то* G *включает в себя такие нормальные подгруппы* K, D*, что выполняются следующие условия:*

(i) K *— нормальная абелева подгруппа без кручения;*

(ii) ранг Хирша–Зайцева подгруппы K *конечен и не превосходит* $k\mathbf{b}$*;*

(iii) $K \le D$ *и* D/K *— конечны, более того* $|D/K| \le \tau(k\mathbf{b})$*;*

(iv) $\mathbf{Tor}(G/D) =< 1 >$*;*

(v) LD/D *— абелева и не имеет кручения.*

Доказательство. Для каждого элемента $g \in L$ отображение $k_g : a \longrightarrow [a, g]$, $a \in A$, будет эндоморфизмом A, для которого $\mathbf{Ker}k_g = C_A(g)$ и $\mathbf{Im}k_g = [A, g]$. В частности, получим изоморфизм $[A, g] = \mathbf{Im}k_g = A/\mathbf{Ker}k_g = A/C_A(g)$. Из включений $[A, g] \le [G, g] \le< g >^G$ вытекает, что $\mathbf{r}_{hz}([A, g]) \le \mathbf{b}$. Пусть $\{g_1, \ldots, g_k\}$ — полный набор представителей смежных классов L по A. Тогда $[A, L] = [A, g_1] \ldots [A, g_k]$, откуда вытекает соотношение $\mathbf{r}_{hz}([A, L]) \le k\mathbf{b}$. Так как L — нормальна, то $[A, L]$ также нормальна. Из равенства $< 1 >= \mathbf{Tor}(G)$ следует, что A не имеет кручения, а потому и $[A, L]$ не имеет кручения. Положим $D/[A, L] = \mathbf{Tor}(G/[A, L])$ и $K = C_D([A, L])$. Выше отмечалось, что D/K — конечна и $|D/K| \le \tau(k\mathbf{b})$. Подгруппа K будет центральным расширением $[A, L]$ с помощью локально конечной группы. Предложение 2 показывает тогда, что $[K, K]$ — локально конечна. Равенство $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ обеспечивает тот факт, что K — абелева и не имеет кручения. Из выбора K получаем равенство $\mathbf{r}_{hz}([A, L]) = \mathbf{r}_{hz}(K)$. Наконец, поскольку $[A, L] \le D$, то $AD/D \le \zeta(LD/D)$. Применение теоремы Шура доказывает конечность $[LD/D, LD/D]$. Однако, $\mathbf{Tor}(G/D) =< 1 >$, а потому $[LD/D, LD/D] =< 1 >$, так что LD/D — абелева и не имеет кручения. □

Следствие 4. *Пусть* G *— локально обобщенно радикальная группа и* L *— ее локально нильпотентный радикал. Предположим, что* $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ *и пусть* T *—*

нормальная подгруппа G, включающая в себя L, для которой T/L — конечна и имеет порядок k. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет ряд нормальных подгрупп $C_1 \leq R_1 \leq C_2 \leq R_2$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $\mathbf{Tor}(G/R_2) =< 1 >$;

(ii) $|R_2/C_2| \leq \tau(k\mathbf{b})$;

(iii) C_2/R_1 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(C_2/R_1) \leq k\mathbf{b}$;

(iv) $|R_1/C_1| \leq \mathbf{b}\tau(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1))$;

(v) C_1 — нильпотентна, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(C) \leq \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)$ $(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$;

(vi) TR_2/R_2 — абелева и не имеет кручения.

Доказательство. Так как $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$, то L не имеет кручения. Лемма 1 показывает, что L — нильпотентна и $\mathbf{ncl}(A) \leq \mathbf{b}$. Ввиду предложение 1 L включает в себя такую нормальную подгруппу K, что $\mathbf{r}_{hz}(K) \leq (\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$, а L/K — абелева и без кручения. Будучи сервантной оболочкой (в L) коммутанта L, K — G-инвариантна. Пусть $R_1/K = \mathbf{Tor}(G/K)$. Ввиду предложение 3 R включает в себя такую нормальную подгруппу C_1, что $\mathbf{ncl}(C_1) = \mathbf{ncl}(K), \mathbf{r}_{hz}(C_1) = \mathbf{r}_{hz}(K), R_1/C_1$ — конечна и $R_1/C_1 \leq \mathbf{b}\tau(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1))$. Из доказательства предложения 3 видно, что подгруппа $C_1 - G$-инвариантна.

Так как L/K не имеет кручения, $R_1 \cap A = K$. Тогда $AR_1/R_1 \cong A/(R_1 \cap A) = A/K$. Поэтому AR_1/R_1 не имеет кручения и абелева, так что можно применить лемму 5. Ввиду этой леммы G включает в себя такие нормальные подгруппы $R_2 \geq C_2 \geq R_1$, что $\mathbf{Tor}(G/R_2) =< 1 >, |R_2/C_2| \leq \tau(k\mathbf{b}), C_2/R_1$ не имеет кручения и абелева и $\mathbf{r}_{hz}(C_2/R_1) \leq k\mathbf{b}$. TR_2/R_2 также не имеет кручения и абелева. □

Следствие 5. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа и L — ее локально нильпотентный радикал. Предположим, что $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ и положим $T/L = \mathbf{Tor}(G/L)$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет ряд нормальных подгрупп $C_1 \leq R_1 \leq C_2 \leq R_2 \leq D \leq T$, удовлетворяющих следующим условиям:*

(i) $\mathbf{Tor}(G/R_2) =< 1 >$;

(ii) $|R_2/C_2| \leq \tau(\mathbf{b}\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b})))$;

(iii) C_2/R_1 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(C_2/R_1) \leq \mathbf{b}\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}))$;

(iv) $|R_1/C_1| \leq \mathbf{b}\tau(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1))$.

(v) C_1 — нильпотентна, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(C) \leq \mathbf{b}^2+\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1))$;

(vi) DR_2/R_2 — абелева, не имеет кручения;

(vii) T/D — абелева и периодическая.

Доказательство. Так как G — локально обобщенно радикальная группа, то T/L — локально конечна. Положим $D/L = [T/L, T/L]$. Тогда следствие 3 показывает, что D/L — конечна и $|D/L| \leq \nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}))$. Теперь можно применить следствие 4. $\square$

Пусть G — группа, R — кольцо и A — RG-модуль. Построим **верхний RG-центральный ряд**

$$< 0 >= A_0 \leq A_1 \leq \ldots A_\alpha \leq A_{\alpha+1} \leq \ldots A_\gamma,$$

следующим образом: $A_1 = \zeta_{RG}(A) = \{a \in A | a(g-1) = 0\}, A_{\alpha+1}/A_\alpha = \zeta_{RG}(A/A\alpha)$ для всех порядковых чисел $\alpha < \gamma, a\zeta_{RG}(A/A_\gamma) =< 0 >$.

Последний член A_γ этого ряда называется **верхним RG-гиперцентром** A и будем обозначать его через ${\zeta_{RG}}^\infty(A)$.

Если $A = A_\alpha$, то A называется **RG-гиперцентральным**; если γ еще и конечно, то A называется **RG-нильпотентным**.

Пусть B, C — RG-подмодули A, причем $B \leq C$. Фактор C/B называется **G-эксцентральным**, если $C_G(C/B) \neq G$. RG-подмодуль C модуля A называется *RG-гиперэксцентральным*, если он имеет возрастающий ряд

$$< 0 >\leq C_0 \leq C_1 \leq \ldots C_\alpha \leq C_{\alpha+1} \leq \ldots C_\gamma = C$$

таких RG-подмодулей A, что каждый фактор $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ — G-эксцентральный простой RG-модуль для любого $\alpha < \gamma$.

Следуя Д. И. Зайцеву [18], будем говорить, что RG-модуль A **имеет Z-разложение**, если

$$A = {\zeta_{RG}}^\infty(A) \oplus {\mathbf{E}_{RG}}^\infty(A),$$

где ${\mathbf{E}_{RG}}^\infty(A)$ — максимальный RG-гиперэксцентральный RG-подмодуль A.

Отметим, что в этом случае ${\mathbf{E}_{RG}}^\infty(A)$ включает каждый RG-гиперэксцентральный RG-подмодуль, в частности, он единственен.

В самом деле, пусть B — RG-гиперэксцентральный RG-подмодуль A и положим $E = {\mathbf{E}_{RG}}^\infty(A)$. Если $(B+E)/E \neq< 0 >$, то он включает в себя ненулевой простой RG-подмодуль U/E. Так как $(B+E)/E \cong B/(B \cap E)$, то U/E — изоморфен некоторому простому RG-фактору B, а это влечет неравенство $G/C_G(U/E) \neq G$. С другой стороны, $(B+E)/E \leq A/E \cong {\zeta_{RG}}^\infty(A)$, так что $G/C_G(U/E) = G$. Это противоречие показывает, что $B \leq E$. Следовательно, ${\mathbf{E}_{RG}}^\infty(A)$ включает в себя каждый RG-гиперэксцентральный RG-подмодуль и потому ${\mathbf{E}_{RG}}^\infty(A)$ единственен.

Пусть G — группа и A — нормальная абелева подгруппа без кручения. Будем говорить, что A — **рационально G-неприводима** (в G), если для каждой неединичной G-инвариантной подгруппы B из A соответствующая фактор-группа A/B будет периодической.

Лемма 6. *Пусть G — группа и A — нормальная абелева подгруппа без кручения, для которой G/A — абелева. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$, *то A имеет ряд таких сервантных G-инвариантных подгрупп*

$$< 1 >= A_0 \leq A_1 \leq \ldots A_\alpha \leq A_{\alpha+1} \leq \ldots \leq A_\gamma,$$

что факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ — рационально G-неприводимы и не G-центральны,
$0 \leq \alpha < \gamma, aG/A_\gamma$ *— гиперцентральна.*

Доказательство. Будем рассматривать A как $\mathbf{Z}L$-модуль, где $L = G/A$. Пусть D – делимая оболочка A. Можно расширить естественным образом действие L на A до действия L на D, тогда D становится $\mathbf{Z}L$-модулем. В свою очередь, так как D – делима и не имеет кручения, то можно продолжить действие $\mathbf{Z}L$ на A естественным образом до действия $\mathbf{Q}L$ на D, так что D становится $\mathbf{Q}L$-модулем. Пусть $d \in D$. Тогда $d^k = b \in A$ для некоторого $k \in N$. Положим $B =< b >^G$, тогда B имеет конечный 0-ранг. Пусть U — сервантная оболочка B в D, отметим, что U — делима и $\mathbf{r}_0(U) = \mathbf{r}_0(B)$. Другими словами, $\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{U})$ — конечна. Очевидно $d \in U$, так что $\mathbf{Q}L$-подмодуль D, порожденный d, будет конечномерным. В свою очередь, отсюда вытекает, что каждый конечно порожденный $\mathbf{Q}L$-подмодуль V из D имеет конечную размерность над $\mathbf{Q}$. В частности, он артинов. Но тогда V имеет Z-разложение [19, следствие 10.22], $V = \zeta_{QL}{}^\infty(V) \oplus \mathbf{E}_{QL}{}^\infty(V)$.

Пусть $\mathbf{L}$ — семейство всех конечно порожденных $\mathbf{Q}L$-подмодулей D. Пусть $V, W \in L, V \leq W$. Имеем $V = \zeta_{QL}{}^\infty(V) \oplus \mathbf{E}_{QL}{}^\infty(V)$ и $W = \zeta_{QL}{}^\infty(W) \oplus \mathbf{E}_{QL}{}^\infty(W)$. Очевидно, $\zeta_{QL}{}^\infty(V) \leq \zeta_{QL}{}^\infty(W)$. Ввиду приведенного выше замечания $\mathbf{E}_{QL}{}^\infty(V) \leq \mathbf{E}_{QL}{}^\infty(W)$, так что $V \cap \zeta_{QL}{}^\infty(W) = \zeta_{QL}{}^\infty(V)$ и $V \cap \mathbf{E}_{QL}{}^\infty(W) = \mathbf{E}_{QL}{}^\infty(V)$. Поскольку $D = \cup_{V \in L} V$, то

$$D = (\cup_{V\in L}\ \zeta_{QL}{}^\infty(V)) \oplus (\cup_{V\in L}\ \mathbf{E}_{QL}{}^\infty(V)) = \zeta_{QL}{}^\infty(D) \oplus \mathbf{E}_{QL}{}^\infty(D).$$

Другими словами, D имеет Z-разложение. Пусть

$$< 0 >= D_0 \leq D_1 \leq \ldots D_\alpha \leq D_{\alpha+1} \leq \ldots \leq D_\gamma$$

— возрастающий ряд $\mathbf{Q}L$ — подмодулей D, факторы которого простые и G-эксцентральные. Положим $A_\alpha = A \cap D_\alpha$, $\alpha \leq \gamma$. Тогда A_α — G-инвариантная сервантная подгруппа A для всех $\alpha \leq \gamma$. Поскольку $D_{\alpha+1}/D_\alpha$ — простой $\mathbf{Q}L$-модуль, то $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ рационально G-неприводим. Более того,

$$A_{\alpha+1}/A_\alpha = A_{\alpha+1}/(D_\alpha \cap A) = A_{\alpha+1}/(D_\alpha \cap A_{\alpha+1}) \cong (A_{\alpha+1} + D\alpha)/D_\alpha \leq D_{\alpha+1}/D_\alpha.$$

Отметим, что $D_{\alpha+1}/D_\alpha$ — сервантная оболочка $(A_{\alpha+1} + D_\alpha)/D_\alpha$, а потому

$$C_L(D_{\alpha+1}/D_\alpha) = C_L((A_{\alpha+1} + D_\alpha)/D_\alpha),$$

откуда вытекает, что $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ — G-эксцентрален, $\alpha < \gamma$. Наконец, $A/A_{\gamma+1} = A/(D_\gamma \cap A) \cong (A + D_\gamma)/D_\gamma$, так что $A/A_{\gamma+1}$ — G-гиперцентрален. □

Лемма 7. *Пусть G — группа и A — такая ее нормальная абелева подгруппа без кручения, что G/A — абелева. Предположим, что A имеет такой ряд сервантных G-инвариантных подгрупп*

$$< 1 >= A_0 \leq A_1 \leq \ldots A_\alpha \leq A_{\alpha+1} \leq \ldots \leq A_\gamma = A,$$

что факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ — рационально G-неприводимы и не являются G-центральными, $0 \leq \alpha < \gamma$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, то $\mathbf{r}_0(A)$ — конечен, более того $\mathbf{r}_0(A) \leq \mathbf{b}^2$.

Доказательство. Поскольку G/A — абелева, то отображение $\mathbf{k}_g : a \longrightarrow [a, g]$, $a \in A$, является $\mathbf{Z}G$-эндоморфизмом A, причем $\mathbf{Ker}\ \mathbf{k}_g = C_A(g)$ и $\mathbf{Im}\ \mathbf{k}_g = [A, g]$, и имеет место изоморфизм $[A, g] = \mathbf{Im}\ \mathbf{k}_g = A/\mathbf{Ker}\ \mathbf{k}_g = A/CA(g)$. Из включений $[A, g] \leq [G, g] \leq < g >^G$ вытекает, что $\mathbf{r}_0([A, g]) \leq \mathbf{b}$. Используя отмеченный выше изоморфизм, получаем, что и $\mathbf{r}_0(A/C_A(g)) \leq \mathbf{b}$.

Из наших условий вытекает, что A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу A_1, что A_1 — рационально G-неприводима и $G \neq C_G(A_1)$. Тогда G имеет элемент g_1, а A_1 имеет элемент a_1, для которых $u_{11} = [a_1, g_1] \neq 1$.

Положим $C_1 = C_A(g_1)$, тогда по доказанному выше $\mathbf{r}_0(A/C_1) \leq \mathbf{b}$. Так как G/A — абелева, то $C_A(g_1)$ — G-инвариантна. Если $C_1 =< 1 >$, то $\mathbf{r}_0(A) \leq \mathbf{b}$ и все доказано. Допустим, что $C_1 \neq< 1 >$, тогда C_1 включает такую G-инвариантную подгруппу D_2, что D_2 — рационально G-неприводима и $G \neq C_G(D_2)$. Положим $D_1 = A_1$. Если допустить, что $D_1 \cap C_1 \neq< 1 >$, то $D_1/(D_1 \cap C_1)$ — периодическая. С другой стороны, C_1 — сервантная подгруппа A, так что A/C_1 не имеет кручения. Тогда и $D_1/(D_1 \cap C_1) \cong D_1C_1/C_1$ не имеет кручения. Отсюда вытекает, что $D_1 = D_1 \cap C_1$ или $D_1 \leq C_1$. Но в этом случае $[a_1, g_1] = 1$. Это противоречие показывает, что $D_1 \cap C_1 =< 1 >$. Снова имеются такие элементы $g_2 \in G$ и $a_2 \in D_2$, что $[a_2, g_2] = u_{22} \neq 1$. Имеем $g_2^{-1}a_1g_2 = a_1u_{12}$, где $u_{12} = [a_1, g_2]$. Заметим, что $u_{12} \in D_1$. Рассмотрим элемент a_1a_2. Имеем

$$g_1^{-1}(a_1a_2)g_1 = (g_1^{-1}a_1g_1)(g_1^{-1}a_2g_1) = a_1a_2u_{11};$$
$$g_2^{-1}(a_1a_2)g_2 = (g_2^{-1}a_1g_2)(g_2^{-1}a_2g_2) = a_1a_2u_{12}u_{22}.$$

Если допустить, что u_{11} и $u_{12}u_{22}$ не будут $\mathbf{Z}$-независимыми, то существуют $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$, для которых $u_{11}^{k_1} = (u_{12}u_{22})k^2$. Отсюда следует, что $u_{11}^{k_1}u_{12}^{-k_2} = u_{22}^{k_2}$. Напомним, что $u_{11}, u_{12}D_1, u_{22}D_2$ и $D_1 \cap D_2 =< 1 >$. Из последнего равенства вытекает, что $u_{22}^{k_2} = 1$, т.е. $k_2 = 0$. Тогда $u_{11}^{k_1} = 1$, так что $k_1 = 0$. Это доказывает, что элементы u_{11} и $u_{12}u_{22}$ — будут $\mathbf{Z}$-независимыми, а потому $\mathbf{r}_0(< a_1a_2 >^G) \geq 2$.

Положим $C_2 = C_1 \cap C_A(g_2)$, тогда C_2 — такая G-инвариантная подгруппа A, что $\mathbf{r}_0(A/C_2) \leq 2\mathbf{b}$. Если $C_2 =< 1 >$, то $\mathbf{r}_0(A) \leq 2\mathbf{b}$ и все доказано. Предположим, что $C_2 \neq< 1 >$, тогда C_2 включает в себя такую G-инвариантную подгруппу D_3, что D_3 — рационально G-неприводима и $G \neq C_G(D_3)$. Как и выше $D_1D_2 \cap C_2 =< 1 >$. Снова найдутся элементы $g_3 \in G$ и $a_3 \in D_3$, для которых $[a_3, g_3] = u_{33} \neq 1$.

Допустим, что уже выбраны элементы $\{g_j |\ 1 \leq j \leq n\}$ и $\{a_j |\ 1 \leq j \leq n\}$ и семейства G-инвариантных подгрупп $\{C_j |\ 1 \leq j \leq n\}$ и $\{D_j |\ 1 \leq j \leq n\}$ из A, удовлетворяющие следующим условиям:

D_j — рационально G-неприводима и $G \neq C_G(D_j)$;

$D_1 \dots D_n = D_1 \times \dots \times D_n$;

$a_j \in D_j$;

$[a_j, g_k] = u_{jk}$ и $u_{jj} \neq 1$

$a_j \in C_A(g_1, \dots, g_{j-1}) = C_{j-1}$;

$\mathbf{r}_0(A/C_j) \leq j\ \mathbf{b},\ 1 \leq j \leq n$.

Рассмотрим элементы $g_j^{-1}(a_1 \dots a_n)g_j,\ 1 \leq j \leq n$. Имеем

$$g_j^{-1}(a_1 \dots a_n)g_j = (g_j^{-1}a_1g_j) \dots (g_j^{-1}a_{j-1}g_j)(g_j^{-1}a_jg_j)(g_j^{-1}a_{j+1}g_j) \dots (g_j^{-1}a_ng_j) =$$
$$= a_1 \dots a_n u_{1j} \dots u_{j-1j}u_{jj},\ 1 \leq j \leq n.$$

Покажем, что элементы $u_{11}, u_{12}u_{22}, u_{13}u_{23}u_{33}, \dots, u_{1n} \dots, u_{n-1}nu_{nn}$ — $\mathbf{Z}$-независимы. Используем для этого индукцию по n. Уже было доказано, что $u_{11}, u_{12}u_{22}$ — $\mathbf{Z}$-независимы. Предположим, что $u_{11}, u_{12}u_{22}, u_{13}u_{23}u_{33}, \dots, u_{1n-1} \dots u_{n-2n-1}u_{n-1n-1}$ также $\mathbf{Z}$-независимы и следующие линейные комбинации

$$u_{11}^{t1}(u_{12}u_{22})_2^t \dots (u_{1n-1} \dots u_{n-2n-1}u_{n-1n-1})_{n-1}^t(u_{1n-1} \dots u_{n-1n}u_{nn})_n^t = 1,$$

где $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{Z}$. Отсюда вытекает, что

$$u_{11}^{t1}(u_{12}u_{22})_2^t \dots (u_{1n-1} \dots u_{n-2n-1}u_{n-1n-1})_{n-1}^t = (u_{1n-1} \dots u_{n-1n}u_{nn})_n^t.$$

Так как $D_1 \dots D_{n-1} \cap D_n =< 1 >$, то $(u_{1n-1} \dots u_{n-1n}u_{nn})_n^{-t} = 1$ и $t_n = 0$. Таким образом приходим к равенству

$$u_{11}^{t_1}(u_{12}u_{22})_2^t \dots (u_{1n-1} \dots u_{n-2n-1}u_{n-1n-1})_{n-1}^t = 1.$$

Ввиду индуктивного допущения $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 0$, что доказывает $\mathbf{Z}$-независимость $u_{11}, u_{12}u_{22}, u_{13}u_{23}u_{33}, \dots, u_{1n} \dots u_{n-1n}u_{nn}$. В свою очередь, отсюда вытекает, что $\mathbf{r}_0(< a_1 \dots a_n >^G) \geq n$. Это означает, что $n \leq \mathbf{b}$. Другими словами, процесс выбора элементов $\{g_j |\ 1 \leq j \leq n\}$, $\{a_j |\ 1 \leq j \leq n\}$ и подгрупп $\{C_j |\ 1 \leq j \leq n\}$, $\{D_j |\ 1 \leq j \leq n\}$ должен остановиться после $\mathbf{b}$ шагов. Но процесс останавливает на j-м шаге в случае, если $C_j =< 1 >$. Таким образом, $C_b =< 1 >$ и $\mathbf{r}_0(A) \leq \mathbf{b}^2$. □

Лемма 8. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа и A — ее нормальная абелева подгруппа без кручения. Предположим, что* $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ *и пусть T — такая нормальная подгруппа G, что TA и T/A — периодическая и абелева. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$*, то G включает в себя нормальные подгруппы $U \leq C$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) $\mathbf{Tor}(G/U) =< 1 >$;

(ii) $|U/C| \leq \tau(\mathbf{b}^2)$;

(iii) C — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_0(C) \leq \mathbf{b}^2$;

(iv) TU/U — абелева и не имеет кручения.

Доказательство. Ввиду леммы 6 A имеет ряд таких сервантных T-инвариантных подгрупп

$$< 1 >= A_0 \leq A_1 \leq A_\alpha \leq A_{\alpha+1} \leq \ldots A_\gamma,$$

что факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ — рационально T-неприводимы и не T-центральны, $0 \leq \alpha < \gamma$, а T/A_γ — гиперцентральна. Положим $B = A_\gamma$. Ввиду леммы 7 $\mathbf{r}_0(B) \leq \mathbf{b}^2$. Так как T/B — гиперцентральна, то совокупность R/B всех элементов T/B, имеющих конечный порядок, будет характеристической подгруппой T/B. Гиперцентральная группа без кручения T/R является расширением абелевой подгруппы AR/R с помощью периодической группы. Отсюда вытекает, что T/R — абелева. Положим $U/B = \mathbf{Tor}(G/B)$, тогда $R/B \leq U/B$ и $T/B \cap U/B = R/B$. Будучи периодической и локально обобщенно радикальной, U/B — локально конечна. Предложение 3 показывает, что U включает в себя такую нормальную абелеву подгруппу без кручения $C \geq B$, что $\mathbf{r}_0(C) = \mathbf{r}_0(B)$ и $|U/C| \leq \tau(\mathbf{b}^2)$. Из доказательства предложения 3 можно усмотреть, что C — нормальна в G. Имеем

$$TU/U \cong (TU/B)/(U/B) = (T/B)(U/B)/(U/B) \cong (T/B)/(T/B \cap U/B) =$$

$$= (T/B)/(R/B) \cong T/R,$$

а это показывает, что TU/U — абелева и без кручения. □

Следствие 6. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа и L — локально нильпотентный радикал G. Предположим, что* $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ *и пусть* $T/L = \mathbf{Tor}(G/L)$*. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$*, то G имеет ряд нормальных подгрупп $C_1 \leq R_1 \leq C_2 \leq R_2 \leq C_3 \leq R_3$, удовлетворяющих следующим условиям:*

(i) $\mathbf{Tor}(G/R_3) =< 1 >$;

(ii) $|R_3/C_3| \leq \tau(\mathbf{b}^2)$;

(iii) C_3/R_2 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_0(C_3/R_2) \leq \mathbf{b}^2$;

(iv) $|R_2/C_2| \leq \tau(\mathbf{b}\nu(\mathbf{b}(\mathbf{b})))$*;*

(v) C_2/R_1 *— абелева, не имеет кручения и* $\mathbf{r}_{hz}(C_2/R_1) \leq \mathbf{b}\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}))$*;*

(vi) $|R_1/C_1| \leq \mathbf{b}\tau(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1))$*;*

(vii) C_1 *— нильпотентна, не имеет кручения и* $hz(C) \leq \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$*;*

(viii) TR_3/R_3 *— абелева и не имеет кручения.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из леммы 8 и следствия 5. □

Лемма 9. *Пусть G — группа и L — ее нормальная подгруппа. Предположим, что L включает в себя такую нормальную абелеву подгруппу без кручения A, что L/A не имеет кручения и локально циклическая. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$*, то A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу K, что* $\mathbf{r}_0(K) \leq \mathbf{b}$*, а L/K — абелева и не имеет кручения.*

Доказательство. Из включения $[A,g] \leq [G,g] \leq < g >^G$ следует, что

$$\mathbf{r}_0([A,g]) \leq \mathbf{b}.$$

Так как L/A — локально циклическая, то L имеет возрастающий ряд

$$A =< g_0, A > \leq < g_1, A > \leq \ldots \leq < g_n, A > \leq \ldots \cup_{n\in\mathbf{N}} < g_n, A >= L.$$

Из включения $< g_n, A > \leq < g_{n+1}, A >$ вытекает, что

$$[A, g_n] = [A, < g_n >] \leq [A, < g_{n+1} >] = [A, < g_{n+1} >]$$

для всех $n \in \mathbf{N}$. Отсюда следует равенство $[A,L] = \cup_{n\in\mathbf{N}}[A,g_n]$. Так как $\mathbf{r}_0([A,g_n]) \leq \mathbf{b}$ для всех $n \in \mathbf{N}$, то $\mathbf{r}_0([A,L]) \leq \mathbf{b}$. Положим $K/[A,L] = \mathbf{Tor}(A/[A,L])$, тогда K — L-инвариантна и $\mathbf{r}_0(K) = \mathbf{r}_0([A,L]) \leq \mathbf{b}$.

Кроме того, из $A/K \leq \zeta(L/K)$ вытекает, что L/K — абелева, поскольку L/A — локально циклическая. Отметим, что $[L,L] \leq A$, так что K – сервантная оболочка подгруппы $[L,L]$ в A. Отсюда вытекает, что K – G-инвариантна. □

Следствие 7. *Пусть G — группа и L, A — ее нормальные подгруппы. Предположим, что $L \geq A$ и L/A — абелева группа без кручения 0-ранга* $\mathbf{r}$*. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий* $\mathbf{b}$*, то A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу K, что* $\mathbf{r}_0(K) \leq \mathbf{rb}$ *и L/K — абелева и без кручения.*

Доказательство. Так как $\mathbf{r}_0(L/A) = \mathbf{r}$, то L имеет ряд $A = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_r = L$, факторы которого A_{j+1}/A_j — локально циклические и без кручения, $0 \leq j \leq \mathbf{r}-1$. Ввиду леммы 9 A_1 включает в себя такую A_2-инвариантную подгруппу K_1, что

A_1/K_1 не имеет кручения и абелева, а $\mathbf{r}_0(K_1) \leq \mathbf{b}$. Теперь можно применить те же аргументы к A_2/K_1 и т.д. После конечного числа шагов придем к такой нормальной в L подгруппе K, что L/K — абелева и не имеет кручения, а $\mathbf{r}_0(K) \leq \mathbf{rb}$. Заметим, что $[L, L] \leq A$, так что K будет сервантной оболочкой в A коммутанта $[L, L]$. Отсюда следует, что $K - G$-инвариантна. □

Следствие 8. *Пусть G — группа и L, A — ее нормальные подгруппы. Предположим, что $L \geq A$ и L/A — абелева группа без кручения 0-ранга $\mathbf{r}$. Если $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ и нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет нормальные подгруппы K, R, для которых $\mathbf{r}_0(K) \leq \mathbf{rb}, K \leq L, L/K$ — абелева и без кручения, $|R/K| \leq \tau(\mathbf{rb})$ и $\mathbf{Tor}(G/R) =< 1 >$.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 7 и предложения 3. □

Следствие 9. *Пусть G — группа, L, A — ее нормальные подгруппы. Предположим, что $L \geq A$ и L/A имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп*

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_k = L,$$

факторы которого абелевы и не имеют кручения. Предположим также, что $\mathbf{r}_{hz}(L/A) = \mathbf{r}$. Если $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ и нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет такую нормальную подгруппу R, что $\mathbf{r}_{hz}(R) \leq k\mathbf{rb}, LR/R$ — абелева, без кручения и $\mathbf{Tor}(G/R) =< 1 >$.

Лемма 10. *Пусть G — группа и A — такая ее нормальная подгруппа, что A и G/A — абелевы и не имеют кручения. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева не превосходящий $\mathbf{b}$, то A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу K, что G/K — абелева, без кручения и $\mathbf{r}_{hz}(K) \leq \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1} - 1)/3(\mathbf{b}-1)$.*

Доказательство. Ввиду леммы 6 L имеет ряд таких сервантных G-инвариантных подгрупп $< 1 >= A_0 \leq A_1 \leq \ldots A_\alpha \leq A_{\alpha+1} \leq \ldots \leq A_\gamma$, что факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ — рационально G-неприводимы и не G-центральны, $0 \leq \alpha < \gamma$, а G/A_γ -гиперцентральна. Положим $B = A_\gamma$. Ввиду леммы 7 $\mathbf{r}_0(A_\gamma) \leq \mathbf{b}^2$. Фактор-группа G/B — гиперцентральна и без кручения. Используя предложение 1 получим, что G/B включает в себя такую нормальную подгруппу K/B конечного ранга Хирша–Зайцева, что G/K — абелева и не имеет кручения. Более того, $\mathbf{r}_{hz}(K/B) \leq \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{b-1} - 1)/3(\mathbf{b}-1)$. Тогда

$$\mathbf{r}_{hz}(K) \leq \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1} - 1)/3(\mathbf{b}-1).$$

□

3. Доказательство теоремы A

Так как $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$, то G имеет такой элемент x, что xT имеет бесконечный порядок. Положим $X =< x >^G$. Из теоремы HZ получаем, что $\mathbf{Ln}(X) \neq< 1 >$. Пусть L — локально нильпотентный радикал G. Ввиду отмеченного выше $L \neq< 1 >$. Поскольку $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$, то L не имеет кручения. Из леммы 1 получаем, что L — нильпотентна и $\mathbf{ncl}(L) \leq \mathbf{b}$. Из теоремы HZ получаем также, что $X/(X \cap L) \cong XL/L$ включает в себя нормальную конечно порожденную абелеву подгруппу без кручения, индекс которой не превосходит $\mathbf{f}_1(\mathbf{b})$. Пусть L_1/L — локально нильпотентный радикал G/L. Мы видели уже, что G/L_1 — периодическая. Положим $T/L = \mathbf{Tor}(G/L)$. Имеем $T/L \cap L_1/L = \mathbf{Tor}(L_1/L)$, так что

$$L_1T/T \cong (L_1T/L)/(T/L) =$$

$$= (L_1/L)(T/L)/(T/L) \cong (L_1/L)(T/L \cap L_1/L) \cong (L_1/L)/\mathbf{Tor}(L_1/L).$$

Отсюда вытекает, что L_1T/T — локально нильпотентна и не имеет кручения. Заметим, что G/L_1T — периодическая.

Ввиду следствия 6 G имеет такую нормальную подгруппу R_0, что $\mathbf{Tor}(G/R_0) = \langle 1 \rangle$, TR_0/R_0 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(R_0) \leq \mathbf{b}\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b})) + 2\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1} - 1)/3(\mathbf{b} - 1)$.

Следующий шаг состоит в рассмотрении фактор-группы G/R_0. Чтобы не усложнять обозначения, положим $R_0 =< 1 >$. Другими словами, будем предполагать, что $\mathbf{Tor}(G) =< 1 >$ и T — нормальная в G абелева подгруппа без кручения.

Используя следствие 6 для фактор-группы G/T, получим, что G имеет ряд таких нормальных подгрупп $T \leq C_1 \leq R_1 \leq C_2 \leq R_2 \leq C_3 \leq R_3$, что C_1/T — нильпотентна, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(C_1/T) \leq \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b} + 1)(\mathbf{b} + 2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1} - 1)/3(\mathbf{b} - 1)$; $|R_1/C_1|$ — конечна и ее порядок не выше $\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}(\mathbf{b} + 1)(\mathbf{b} + 2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1} - 1)/3(\mathbf{b} - 1))$; C_2/R_1 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(C_2/R_1) \leq \mathbf{b}\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}))$; $|R_2/C_2| \leq \tau(\mathbf{b}\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b})))$; C_3/R_2 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_0(C_3/R_2) \leq \mathbf{b}^2; |R_3/C_3| \leq \tau(\mathbf{b}^2); G/R_3$ — абелева и не имеет кручения. Ввиду леммы 1 $\mathbf{ncl}(C_1/T) \leq b$. Ввиду следствия 9 G имеет такую нормальную подгруппу R_4, что $\mathbf{Tor}(G/R_4) =< 1 >$, C_1R_4/R_4 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(R_4) \leq \mathbf{b}^2(\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1} - 1)/3(\mathbf{b} - 1))$. К нормальной подгруппе R_1 можно применить леммы 5. Ввиду этой леммы G имеет такую нормальную подгруппу R_5, что $\mathbf{Tor}(G/R_5) =< 1 >, R_1R_5/R_5$ — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(R_5/R_4) \leq \mathbf{b}^2\tau(\mathbf{b}(\mathbf{b} + 1)(\mathbf{b} + 2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1} - 1)/3(\mathbf{b} - 1))$. Следующий шаг состоит в применении следствия 8 к нормальной подгруппе C_2. Ввиду этого следствия G имеет такую нормальную подгруппу R_6, что $\mathbf{Tor}(G/R_6) =< 1 >$, C_2R_6/R_6 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(R_6/R_5) \le \mathbf{b}^2\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}))$.

Используя снова лемму 5, получим, что G имеет такую нормальную подгруппу R_7, что $\mathbf{Tor}(G/R_7) =< 1 >$, R_2R_7/R_7 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(R_7/R_6) \le \mathbf{b}(\mathbf{b}(\mathbf{b}(\mathbf{b}))$.

Применение следствия 8 обеспечивает существование такой нормальной подгруппы R_8, что $\mathbf{Tor}(G/R_8) =< 1 >$, C_3R_8/R_8 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(R_8/R_7) \le \mathbf{b}^3$.

Применение леммы 5 обеспечивает существование такой нормальной подгруппы R_9, что $\mathbf{Tor}(G/R_9) =< 1 >$, R_3R_9/R_9 — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(R_9/R_8) \le \mathbf{b}\tau(\mathbf{b}^2)$.

Наконец, к G/R_9 можно применить лемму 10 и получить существование такой нормальной подгруппы $K \ge R_9$, что G/K — абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{hz}(K/R_9) \le \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$. Тогда и

$$\mathbf{r}_{hz}(K) \le \mathbf{k}_1(\mathbf{b}) =$$

$$3\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1) + \mathbf{b}\tau(\mathbf{b}^2) + \mathbf{b}^3 + \mathbf{b}\tau(\mathbf{b}\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b})) + \mathbf{b}^2\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b}))+$$
$$\mathbf{b}^2\tau(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)) + \mathbf{b}^2(\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1))+$$
$$\mathbf{b}\nu(\mathbf{b}\tau(\mathbf{b})).$$

Список литературы

[1] *Neumann B. H.* Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Soc. — 1954. — **29**, № 114. — P. 236–248.

[2] *Guralnick R. M., Maroti A.* A verage dimension of fixed point spaces with applications // Adv. Math. — 2001. — **226**. — P. 298–308.

[3] *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. — 1951. — **28**, № 3. — С. 567–588.

[4] *Зайцев Д. И.* О разрешимых группах конечного ранга // Группы с ограничениями для подгрупп. — Киев: Наукова думка, 1971. — С. 115–130.

[5] *Зайцев Д. И.* Группы с дополняемыми нормальными подгруппами // Некоторые проблемы теории групп.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. — С. 30–74.

[6] *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. — 1980. — **19**, № 2. — С. 94–106.

[7] *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. — 1948. — **22**, № 2. — С. 351–352.

[8] *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Polyakov N. V.* On some ranks of infinite groups // Ricerche Mat. — 2007. — **56**, № 1. — P. 43–59.

[9] Wehrfritz B. A. F. *Infinite linear groups.* — Berlin: Springen, 1973. — 229 p.

[10] *Smith H.* A finiteness condition on normal closures of cyclic subgroups // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. — 1999. — 99A. — P. 179–183.

[11] *Longobardi P., Maj M., Smith H.* Groups in which normal closures of elements have boundedly finite rank // Glasgow Math. J. — 2009. — **51.** — P. 341–345.

[12] *Чарин В. С.* О группах, обладающих возрастающими инвариантными рядами // Мат. сб. — 1957. — **41**, № 3. — С. 297–316.

[13] Курош А. Г. *Теория групп.* — М.: Наука, 1967. — 648 с.

[14] *Schur I.* Uber die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen // J. reine angew. Math. — 1904. — **127.** — P. 20–50.

[15] Кэтрис Ч., Райнер И. *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* — М.: Наука, 1969. — 669 с.

[16] Speiser A. *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.* — Berlin: Dover Inc., 1937.

[17] *Dornhoff L.* Jordann's for solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1970. — **24**, № 3. — P. 533–537.

[18] *Зайцев Д. И.* Гиперциклические расширения абелевых групп // Группы, определяемые свойствами подгрупп. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. — С. 16–37.

[19] Kurdachenko L., Otal J., Subbotin I. *Artinian modules over group rings.* — Basel: Birkhauser, 2007. — 245 p.