*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2015, № 17. — С. 18–28.

УДК 517.5

# Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями

М. В. Працьовитий, О. В. Свинчук
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна)

Анотація. Розглядається одна сім'я неперервних функцій, яка залежить від послідовності параметрів. Вивчаються їх варіаційні і функціональні, диференціальні й інтегральні, автомодельні і фрактальні властивості, а також властивості рівнів функції.

**Ключові слова:** сингулярна функція, функція канторівського типу, сингулярна функція канторівського типу, множина несталості функції, варіація функції, рівень функції, автомодельність графіка функції.

Abstract. One family of continuous functions depending on the sequence of parameters is considered in the paper. We study their variational and functional, differential and integral, self-similar and fractal properties as well as properties of the level sets of functions.

**Keywords:** singular function, function of Cantor type, singular function Cantor type, set of non-constancy, variation of function, level set of function, self-similarity of graph of function.

## Вступ

Чимало фізичних, економічних, біологічних, психологічних та соціальних процесів протікають край неоднорідно в часі. І ця неоднорідність має різні функціональні прояви, які знаходять відображення в нелінійності, нестабільності, іррегулярності локальних диференціальних властивостей тощо. Математичною моделлю таких процесів є канторівські функції — неперервні функції з автомодельними властивостями і множиною сталості, що має повну міру. Це є одним з аргументів підвищеного інтересу математиків до функцій цього класу. Їм і присвячена дана робота.

Тривалий час в дослідженнях фігурували в основному монотонні сингулярні функції, які є функціями розподілу випадкових величин. Перші приклади ніде не монотонних сингулярних функцій були побудовані в роботах індійських математиків [1],

[2], [4], але тривалий час нових робіт, їм присвячених, не було. І лише на початку 21 ст. їх дослідження були продовжені [5],[13].

Сингулярні функції викликають не лише теоретичний інтерес (з ними пов'язані складні теоретико-ймовірнісні проблеми [16]), вони адекватно описують перехідні фрактальні випромінювання [6], фігурують у задачах управління розподіленими системами [5] та ін. [7], [8].

## 1. Основний об'єкт

Нехай $A_5 \equiv \{0,1,2,3,4\}$ — алфавіт 5-ової системи числення, $L \equiv A_5 \times \ldots \times A_5 \times \ldots$;

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{5^k} \equiv \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$$

— 5-ове зображення числа $x \in [0,1]$, $(\alpha_k) \in L$.

Нехай $(\varepsilon_n)$ — послідовність додатних дійсних чисел, причому $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$; $(\overline{g_n})$ — послідовність векторів, де $\overline{g_n} = (g_{0n}, g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, g_{4n})$, таких, що: $g_{0n} = g_{4n} = \dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $g_{1n} = g_{3n} = \dfrac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n} = 0$.

Розглядається функція

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{1}$$

де $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \dfrac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \dfrac{2-\varepsilon_n}{4}$, тобто

$$\delta_{[i+1]n} = \delta_{in} + g_{in} = \sum_{j=0}^{i} g_{jn}, n \in N.$$

Оскільки $f$ належить до класу функцій, які вивчалися в роботі [15], де обгрунтовано коректність означення функції, доведено її неперервність та канторовість, то тут ці питання ми залишаємо поза увагою.

Нагадаємо, що *циліндром* рангу $m$ з основою $c_1c_2\ldots c_m$, що відповідає п'ятірковому зображенню чисел, називається множина $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : x = \Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}\}$. Як відомо [12], циліндр є відрізком, причому циліндр рангу $m$ має довжину $5^{-m}$. Більше того, для будь-якої послідовності $(c_n) \in L$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = x \in [0,1].$$

Як слідує з проведених в роботі [15] досліджень, функція $f$ є:

1) сталою на кожному циліндрі виду $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m2}$ і крім цього на циліндрах $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1}$ і $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{n-1}3}$, якщо $\varepsilon_n = 0$; більше того, вона є сталою на $(a,b)$ тоді і тільки тоді, коли існує циліндр із вказаних видів, який повністю містить даний інтервал;

2) монотонною (а точніше: неспадною) тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon_n = 0, n = 1,2,3,\ldots$.

Оскільки сума довжин циліндрів виду $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m2}$ дорівнює 1, то $f(x)$ є сингулярною функцією канторівського типу. Її множиною несталості (множина всіх точок $x$ таких, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ в $\varepsilon$ - околі $O_\varepsilon(x)$ точки $x$ знайдуться $x_1, x_2$ такі, що $f(x_1) \neq f(x_2)$) є множина канторівського типу

$$C[5;\{0,1,3,4\}] = \{x : x \in [0,1], \alpha_n(x) \in \{0,1,3,4\}\},$$

фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_5 4$.

**Лема 1.** *Для того щоб функція $f(x)$ не мала проміжків монотонності, крім проміжків сталості, необхідно і достатньо, щоб нерівність $\varepsilon_n \neq 0$ виконувалась для нескінченної множини значень $n$.*

*Доведення. Необхідність.* Скористаємося методом від супротивного. Для цього припустимо, що $f$ не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості, і при цьому $\varepsilon_m \neq 0$, але $\varepsilon_n = 0$ для всіх $n > m$.

Розглянемо циліндричний інтервал $\nabla^5_{\underbrace{0\ldots0}_{m}}$. Очевидно, що він не є проміжком сталості, оскільки

$$0 = f\left(\Delta^5_{(0)}\right) < f\left(\Delta^5_{\underbrace{0\ldots0}_{m}1(0)}\right) = g_{0[m+1]}\prod_{j=1}^{m} g_{0j} < \prod_{j=1}^{m} g_{0j} = f\left(\Delta^5_{\underbrace{0\ldots0}_{m-1}1(0)}\right).$$

Разом з цим функція $f$ є монотонною на даному циліндрі, оскільки для будь-якого $x \in \Delta^5_{\underbrace{0\ldots0}_{m}}$

$$f(x) = \delta_{01} + \sum_{k=2}^{m}\left(\delta_{0k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{0j}\right) + \left(\prod_{j=1}^{m} g_{0j}\right)\varphi_m(x),$$

де функція $\varphi_m(x) = \delta_{\alpha_{m+1}(x)[m+1]} + \sum\limits_{k=m+2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right)$ є монотонною згідно з наведеним вище зауваженням 2. Отримане протиріччя доводить першу частину твердження.

*Достатність.* Нехай $\varepsilon_{n_k} \neq 0$, $n \in N$. Припустимо, що $(a,b)$ — проміжок монотонності, що не належить жодному з циліндрів сталості. Тоді принаймні один з кінців $a$ або $b$ є внутрішньою точкою циліндра 1 - го рангу, який не є проміжком сталості. Нехай таким є число $a$ і при цьому $a \in \nabla^5_i = (a_i, b_i)$. Тоді існує циліндр $\Delta^5_{i\underbrace{4\ldots4}_{n_k-1}}$ який належить $(a,b)$, причому

$$f\left(\Delta^5_{i\underbrace{4\ldots4}_{n_k-1}(0)}\right) < f\left(\Delta^5_{i\underbrace{4\ldots4}_{n_k-1}1(0)}\right) > f\left(\Delta^5_{i\underbrace{4\ldots4}_{n_k-1}2(0)}\right),$$

що суперечить монотонності функції на $(a,b)$. Аналогічним чином отримується протиріччя у випадку, коли таким числом є $b$. Достатність доведено.

□

Нас цікавлять: варіаційні і функціональні, диференціальні й інтегральні, автомодельні і фрактальні властивості функції $f(x)$, а також тополого-метричні властивості її рівнів.

## 2. Варіаційні властивості

Цікавлячись варіаційними властивостями функції $f(x)$, нагадаємо, що *варіацією* функції на відрізку $[a, b]$ називається число

$$V_a^b(f) = \sup_T V_a^b(T; f),$$

де $V_a^b(T; f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$, $n \in N$ і верхня грань береться за всеможливими $T$ - розбиттями відрізка $[a; b]$.

**Теорема 1.** *Варіація функції $f$ обчислюється за формулою*

$$V_0^1(f) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_i).$$

*Функція $f$ має обмежену варіацію тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty. \tag{2}$$

*Доведення.* Оскільки

$V_1 = \sum\limits_{i=0}^{4} \left| f\left(\Delta^5_{i+1,(0)}\right) - f\left(\Delta^5_{i(0)}\right) \right| = 1 + \varepsilon_1,$

$V_2 = (1 + \varepsilon_1) \cdot \sum\limits_{i=1}^{4} \left| f\left(\Delta^5_{j+1,i+1,(0)}\right) - f\left(\Delta^5_{j,i(0)}\right) \right| = (1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2),$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$V_n = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 + \varepsilon_i)$, то

$$V_n \leq V_0^1(f).$$

Більше того, можна довести, що

$$V_0^1(f) = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

Тоді

$$V_0^1(f) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n}(1 + \varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_i).$$

Враховуючи зв'язок між збіжністю нескінченних добутків та рядів [10], а саме:

$$0 < \prod_{i=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_i) < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty,$$

можемо констатувати, що функція $f(x)$ є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли виконується (2).

Теорему доведено. $\square$

**Наслідок 1.** *Якщо* $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_n$ *або* $0 < \varepsilon_n = const$, *то функція* $f$ *є функцією необмеженої варіації.*

**Наслідок 2.** *Якщо* $\varepsilon_n = q^n$, $0 < q < 1$, *то функція є функцією обмеженої варіації.*

## 3. Інтегральні властивості

**Лема 2.** *Графік функції* $f$, *означеної рівністю* (1), *симетричнй відносно точки* $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

*Доведення.* Центральна симетрія площини з центром $C$ аналітично задається формулами:

$$\varphi : \begin{cases} x' = 1 - x, \\ y' = 1 - y. \end{cases} \tag{3}$$

Тому для доведення твердження досить показати, що

$$f(x) + f(x') = 1.$$

Оскільки

$$x' = 1 - x = \Delta^5_{[4-\alpha_1][4-\alpha_2]\ldots[4-\alpha_k]\ldots},$$

а

$$f(x') = \delta_{[4-\alpha_1]1} + \delta_{[4-\alpha_2]2} g_{[4-\alpha_1]1} + \delta_{[4-\alpha_3]3} g_{[4-\alpha_1]1} g_{[4-\alpha_2]2} + \ldots$$

і

$$g_{\alpha_k k} = g_{[4-\alpha_k]k} \quad \forall k \in N,$$

то

$$f(x) + f(x') = \left(\delta_{\alpha_1 1} + \delta_{[4-\alpha_1]1}\right) + \left(\delta_{\alpha_2 2} + \delta_{[4-\alpha_2]2}\right) g_{\alpha_1 1} + \ldots + \\ + \left(\delta_{\alpha_k+1} + \delta_{[4-\alpha_{k+1}][k+1]}\right) g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} \ldots g_{\alpha_k k} + \ldots.$$

Враховуючи, що $\delta_{0k} + \delta_{5k} = \delta_{1k} + \delta_{4k} = \delta_{2k} + \delta_{3k} = 1$ і $g_{jk} = g_{[4-j]k}$, отримуємо

$$\delta_{\alpha_k k} + \delta_{[4-\alpha_k]k} = 1 - g_{[4-\alpha_k]} = 1 - g_{\alpha_k k}.$$

Тому

$$f(x) + f(x') = [1 - g_{\alpha_1 1}] + [1 - g_{\alpha_2 2}] g_{\alpha_1 1} + [1 - g_{\alpha_3 3}] g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} + \ldots = \\ = 1 - g_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} - g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} + g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} - g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} g_{\alpha_3 3} + \ldots = 1.$$

$\square$

**Наслідок 3.** *Для інтеграла Рімана функції $f(x)$ має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

## 4. Автомодельні властивості

**Теорема 2.** *Якщо $\varepsilon_n = const \neq 0$, $G_i \equiv \{M(x,y) : \alpha_1(x) = i, y = f(x)\}$,*

$$\varphi_i : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{i}{5}, \\ y' = g_{i1}y + \delta_{i1}. \end{cases} \tag{4}$$

*то при $i \neq 2$ маємо*

$$\varphi_i(\Gamma_f) = G_i. \tag{5}$$

*Доведення.* Для доведення рівності (5) покажемо два включення:

1) $\varphi_i(\Gamma_f) \subset G_i$ і 2) $G_i \subset \varphi_i(\Gamma_f)$.

Оскільки $\varepsilon_n = const$, то покладемо, що $g_{ik} = g_i, \delta_{ik} = \delta_i$.

1) Нехай $M(x,y) \in \Gamma_f$, тобто $x \in [0,1]$, $y = f(x) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}\right)$. Тоді

$$\varphi_i(M) = M'\left(\frac{1}{5}x + \frac{i}{5}; g_i y + \delta_i\right).$$

Але $x' = \frac{1}{5}x + \frac{i}{5} = \Delta^5_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots}$. Обчислимо

$$f(x') = f(\Delta^5_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots}) = \delta_i + g_i\left[\delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}\right)\right] = \delta_i + g_i y = y'.$$

Отже, $M' \in G_i$. Тому $\varphi_i(\Gamma_f) \subset G_i$.

2) Нехай $K'(u', v') \in G_i$, тобто $u' = \Delta^5_{i\alpha_2(u')\alpha_3(u')\ldots}$,

$$v' = f(u') = \delta_i + g_i\left[\delta_{\alpha_2(u')} + \sum_{k=3}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(u')}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(u')}\right)\right] = \delta_i + g_i f(u),$$

де $u = \Delta^5_{\alpha_2(u')\alpha_3(u')\ldots}$.

Тоді $K' = \varphi_i(K)$, де $K(u,v) : u = \Delta^5_{\alpha_2(u')\alpha_3(u')\ldots}, v = f(u)$, тобто $K \in \Gamma_i$.

Отже, з 1) і 2) отримуємо рівність (5). □

**Зауваження.** Дана теорема дозволяє спростити обчислення інтеграла $\int\limits_0^1 f(x)dx$ безпосередньо з використанням його адитивної властивості без знання симетрії графіка.

**Наслідок 4.** *Якщо $\varepsilon_n = \varepsilon = const \neq 0$, то частина $W$ графіка $\Gamma_f$ функції $f$, визначена рівністю*

$$W = \{M(x,y) : \alpha_k \neq 2 \quad \forall k \in N, y = f(x)\},$$

*є самоафінною множиною простору $R^2$ з розмірністю, що є розв'язком рівняння*

$$\left(\frac{2+\varepsilon}{20}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{\varepsilon}{20}\right)^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

## 5. Випадок стабільності послідовності $(\varepsilon_n)$: множини рівнів

Зосередимо свою увагу на $\varepsilon_n = \varepsilon = 1$. Дана функція належить до класу функцій, властивості яких частково вивчені в роботах [11], [14]. Вона є визначеною в кожній точці $[0,1]$, обмежена і задовольняє систему з 5 функціональних рівнянь

$$f\left(\frac{i+x}{5}\right) = \delta_i + g_i f(x), g_{ik} = g_i, i \in A_5. \tag{6}$$

Нагадаємо, що *множиною рівня* $y_0$ функції $f$ називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

**Теорема 3.** *Множина всіх рівнів функції $f$, які містять відрізки сталості, є зліченою множиною, причому:*

*1) рівень $y_0 = f\left(\Delta^5_{(2)}\right) = \frac{1}{2}$ містить лише один відрізок сталості;*

*2) кожен з рівнів виду*

$$y_0 = f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m 0(2)}\right) = f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m 3(2)}\right) \text{ і } y_0 = f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m 1(2)}\right) = f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m 4(2)}\right)$$

*містить два відрізка сталості.*

*Доведення.* Очевидно, що проміжки сталості функції вичерпуються циліндрами: $\Delta_2$, $\Delta_{02}$, $\Delta_{12}$, $\Delta_{32}$, $\Delta_{42}$ і т.д., загальний вигляд яких $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m(2)}$, де $c_i \neq 2$, $i = \overline{1,m}$, $m \in N$, тобто рівні, які містять проміжки, мають вигляд $f^{-1}\left(f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right)\right)$. Оскільки ж $f(\Delta^5_{\underbrace{0\ldots0}_{m}(2)}) \neq f(\Delta^5_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(2)})$ при $m \neq k$, то таких рівнів злічення кількість.

1. Доведемо, що рівень $y_0 = \frac{1}{2} = f\left(\Delta^5_{(2)}\right)$ містить лише один відрізок сталості. Припустимо, що знайдеться такий відрізок сталості, для якого теж виконується рівність $f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right) = \frac{1}{2}$. Тоді

$$f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right) - f\left(\Delta^5_{(2)}\right) = 0,$$

$$\delta_{c_1} + \delta_{c_2}g_{c_1} + \ldots + \delta_{c_m}\prod_{j=1}^{m-1} g_{c_j} + \prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\left(\delta_2 + \delta_2 g_2 + \ldots\right) - \left(\delta_2 + \delta_2 g_2 + \ldots\right) = 0,$$

$$\delta_{c_1} + \delta_{c_2} g_{c_1} + \ldots + \delta_{c_m} \prod_{j=1}^{m-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{2} = 0.$$

Значення функції у внутрішніх точках циліндра $\Delta_1$ більші за $\frac{1}{2}$, а на $\Delta_3$ — менші. Тому далі дослідження будемо проводити лише на циліндрах $\Delta_0$ і $\Delta_4$. Оскільки графік функції $f$ симетричний відносно точки $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, то зосередимось на дослідженні циліндра $\Delta_0$. Отже,

$$\frac{3}{4}\left(\delta_{c_2} + \delta_{c_3} g_{c_2} + \ldots + \delta_{c_m} \prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = \frac{1}{2},$$

$$3\left(\delta_{c_2} + \delta_{c_3} g_{c_2} + \ldots + \delta_{c_m} \prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = 2.$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=2}^{m-1} g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом зі знаменником $4^{m-2}$, а $\delta_{c_i}$ — зі знаменником 4, то домноживши останню рівність на $4^{m-1}$, бачимо, що ліва частина буде цілим числом, тобто

$$3 \cdot \left(4^{m-1}\delta_{c_2} + 4^{m-1}\delta_{c_3} g_{c_2} + \ldots + 4^{m-1}\delta_{c_m} \prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + 4^{m-1}\frac{1}{2} \prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = 2 \cdot 4^{m-1}.$$

Ліва частина рівності ділиться на 3, а права - ні. Отримане протиріччя доводить, що рівень $\frac{1}{2}$ містить лише один відрізок сталості.

2. Доведемо, що всі інші рівні містять два проміжки сталості. Нехай $\varphi_m(x) \equiv \delta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\left(\delta_{c_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{c_j}\right)$. Розглянемо різницю значень функції:

$$f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m 0(2)}) - f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m 3(2)}) = \varphi_m + g_0 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} - \varphi_m - \delta_3 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} - g_3 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} + \frac{1}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = 0,$$

$$f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m 1(2)}) - f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m 4(2)}) = \varphi_m + \delta_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} + g_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} - \varphi_m - \delta_4 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} -$$

$$- g_4 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{4} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{3}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = 0.$$

Відповідні значення збігаються. Отже, рівні містять два відрізки сталості. Доведемо, що інших відрізків немає.

Розглянемо випадки.

1) Припустимо, що знайдеться такий відрізок сталості, для якого виконується рівність

$$f(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m 0(2)}) = f(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m \ldots c_{m+k}(2)})$$

або

$$f(\Delta_{c_1c_2\ldots c_{m-k}\ldots c_m 0(2)}) = f(\Delta_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}),\ k < m,\ k \in N.$$

1.1.

$$f(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m 0(2)}) - f(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m c_{m+1}\ldots c_{m+k}(2)}) = 0.$$

$$\frac{3}{8}\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}\right) = 0,$$

$$\frac{3}{8} = \delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j},$$

$$3 = 8\left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}\right).$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом із знаменником $4^{k-1}$, а $\delta_{c_i}$ — зі знаменником 4, то домноживши останню рівність на $4^k$, бачимо, що ліва частина буде цілим числом, тобто

$$3\cdot 4^k = 8\left(4^k\delta_{c_{m+1}} + \ldots + 4^k\delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + 4^k\frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}\right).$$

Ліва частина рівності ділиться на 3, а права - ні. Прийшли до суперечності.

1.2.

$$f(\Delta_{c_1c_2\ldots c_{m-k}c_{m-k+1}\ldots c_m 0(2)}) - f(\Delta_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}) = 0.$$

$$\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j}\left(\delta_{c_{m-k+1}} + \ldots + \delta_0\prod_{j=m-k+1}^{m} g_{c_j} + \frac{3}{8}\prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j}\right) - \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j} = 0,$$

$$\delta_{c_{m-k+1}} + \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + \frac{3}{8}\prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = \frac{1}{2},$$

$$8\delta_{c_{m-k+1}} + 8\delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 3\prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 4.$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j}$ є звичайним правильним дробом із знаменником $4^k$, а $\delta_{c_i}$ — зі знаменником 4, то домноживши останню рівність на $4^k$, бачимо, що значення лівої частини буде цілим числом, тобто

$$8 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+1}} + 8 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 3 \cdot 4^k \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 4 \cdot 4^k.$$

Права частина рівності ділиться на 2, а ліва - ні, оскільки останній доданок виразу не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

2) Припустимо, що знайдеться такий відрізок сталості, для якого виконується рівність

$$f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m 4(2)}) = f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots c_{m+k}(2)})$$

або

$$f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-k} \ldots c_m 4(2)}) = f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-k}(2)}), \; k < m, \; k \in N.$$

2.1.

$$f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m 4(2)}) - f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m c_{m+1} \ldots c_{m+k}(2)}) = 0.$$

$$\frac{5}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \left( \delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right) = 0.$$

Проводячи аналогічні міркування, отримуємо

$$5 \cdot 4^k = 8 \left( 4^k \delta_{c_{m+1}} + \ldots + 4^k \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + 4^k \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Ліва частина рівності ділиться на 5, а права - ні. Прийшли до суперечності.

2.2.

$$f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-k} c_{m-k+1} \ldots c_m 4(2)}) - f(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{m-k}(2)}) = 0.$$

$$\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j} \left( \delta_{c_{m-k+1}} + \ldots + \delta_0 \prod_{j=m-k+1}^{m} g_{c_j} + \frac{5}{8} \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} \right) - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j} = 0,$$

Проводячи аналогічні міркування, отримуємо

$$8 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+1}} + 8 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 5 \cdot 4^k \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 4 \cdot 4^k.$$

Права частина рівності ділиться на 2, а ліва - ні, оскільки останній доданок виразу не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

Отже, дані рівні містять не більше двох відрізків сталості. $\square$

## Література


[1] *Garg K. M.* On singular functions // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 14. — 1969. — P. 1441 - 1452.

[2] *Garg K. M.* Construction of absolutely continuous and singular functions that are nowhere of monotonic type // Contemp. Math. 42, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. — 1985. — P. 61 - 79.

[3] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // International Journal of Math. Analysis, Vol.7, 2013. no. 61 – 67. — P. 3155 – 3169.

[4] *Shukla U. K.* On points of non-symmetrical differentiability of continuous function III // Ganita 8. — 1957. — P. 81 - 104.

[5] *Агаджанов А.Н.* Сингулярные функции, не имеющие интервалов монотонности, в задачах финитного управления распределенными системами // Доклады Академии наук. — 2014. — Том 454, № 5. — С. 503 - 506.

[6] *Болотов В.Н.* Переходное фрактальное излучение // Журнал технической физики. — 2000. — Том 70, вып. 12. — С. 98 - 101.

[7] *Крупенин С.В.* Моделирование фрактальных антенн // Нелинейный мир. — 2006. — № 6, Т. 4. — С. 297 - 302.

[8] *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радилокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перероб. и доп. — М.: Университетская книга, 2005. — 848 с.

[9] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

[10] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Москва: Наука, 1964. — Т.2. — 800 с.

[11] *Калашніков А. В.* Деякі функціональні співвідношення, які задовляняє сингулярна функція Салема // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2008, № 9. — С. 192 - 199.

[12] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Видавництво НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[13] *Працьовитий М.В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2011. — №12. — С. 24 - 36.

[14] *Працьовитий М.В., Калашніков А.В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з $Q$-зображенням чисел. // Укр. мат. журнал. — 2013. — Т.65, №3. — С. 381 - 393.

[15] *Працьовитий М.В., Свинчук О.В.* Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2014, № 16 (2). — С.81 - 93.

[16] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М., Гончаренко Я.В.* Сучасні задачі та проблеми сингулярних розподілів ймовірностей // Наукові записки: Зб. наукових статей НПУ імені М.П.Драгоманова. — К.: НПУ, 2001. — Вип. 42. — С. 18 - 20.