МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

В. Е. ШЕВЧЕНКО

ОПЫТ ИЗУЧЕНИЯ ОСНОВАНИЙ ГЕОМЕТРИИ
(аксиоматического метода, общих вопросов аксиоматики и геометрии ЛОБАЧЕВСКОГО) В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук
(по специальности № 13.731—методика преподавания математики)

КИЕВ—1970

Работа выполнена на кафедре геометрии Киевского ордена Ленина государственного университета им. Т. Г. Шевченко.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Н. И. КОВАНЦОВ.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,
профессор В. Л. РВАЧЕВ.

Кандидат педагогических наук,
доцент О. П. СЕРГУНОВА.

Внешний отзыв — кафедры математики Кировоградского государственного педагогического института.

Автореферат разослан 19 г.

Защита диссертации состоится 19 г. на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького (Киев-30, Бульвар Шевченко, 22/24).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета.

1. Повышение уровня преподаваемой в школе математики и приближение его к уровню науки всегда представляло важнейшую задачу методики преподавания. Пути решения этих вопросов различны.

Многого можно достигнуть совершенствованием методов преподавания, обновлением прикладного материала и другими улучшениями, при которых основное содержание учебной программы остается неприкосновенным.

Наряду с этим можно прибегнуть и к радикальным изменениям содержания изучаемого материала. Такие изменения, как правило, проходят болезненно, со значительными трудностями и на первых порах, по выражению Э. Бореля, приносят вред, пока не будут выработаны приемлемые методы изложения нового материала. Но они неизбежны. В науке периодически происходит пересмотр ценностей, добытых ею: отмирают или изолируются одни теории, оказавшиеся мало перспективными, и выдвигаются на передний план другие, более общие и более действенные теории.

В конце концов изменения в науке начинают влиять и на школьное преподавание.

В наше время повышение математической подготовки учащихся в школе особенно важно, так как математические методы становятся важнейшими методами исследования не только в точных науках о природе, но и в таких областях знания, которые еще недавно казались далекими от математики. Школа призвана знакомить учащихся с этими методами.

Выступая 4 июля 1968 г. на Всесоюзном съезде учителей, Л. И. Брежнев говорил:

«Естественно, что в обстановке бурного научно-технического прогресса школа призвана вооружать учащихся такими знаниями, которые отражают самый современный уровень науки. В наш век объем знаний растет стремительно — по оценкам ученых, он удваивается каждые восемь лет. А это требует постоянного совершенствования методов обучения, внедрения в педагогический процесс новых технических средств. Нарастающий поток научной информации надо уметь систематизировать, обработать и передать учащимся так, чтобы подготовить их к новой технике, к новым технологическим процессам, с которыми они будут иметь дело, вступив в жизнь» *).

Поэтому столь актуальными являются работы, посвященные повышению научного уровня преподавания математики в школе и методике введения в школу новых современных идей.

2. Для математики характерна чрезвычайная абстрактность и отвлеченность ее теорий. Дедуктивный метод является единственным признанным методом развития математики, а аксиоматическое построение — идеалом построения всякой математической теории. Ни одна другая наука не тяготеет так к аксиоматическому методу, как математика.

В историческом процессе развития математики эта ее особенность была осознана уже древними греками; а аксиоматическое построение геометрии, данное Евклидом в его знаменитых «Началах», в течение многих веков было образцом научного построения всех разделов математики. Но истинно аксиоматическое построение геометрии было найдено лишь в конце XIX — начале XX века. Настойчивые поиски такого построения родились под влиянием открытой в первой четверти прошлого века Н. И. Лобачевским (и независимо от него, в то же, примерно, время Я. Бойяи и К. Ф. Гауссом) неевклидовой геометрии. В это время находят решение и важнейшие общие вопросы аксиоматики: доказательство непротиворечивости системы аксиом, установление полноты, независимости.

3. Работы Н. И. Лобачевского оказали влияние не только на математику и связанные с нею науки естественного цикла, но и на философию и на педагогику.

В 60-е годы прошлого века, после уяснения сущности и важности открытия неевклидовой геометрии, педагогическая мысль начинает работать над проблемой, каким образом гениальные идеи неевклидовой геометрии сделать достоянием учащихся средней школы.

Прежде всего, попытки доказать пятый постулат в средней школе оказались несостоятельными. Но наряду с этим возникают желания продвинуть в школу и идеи неевклидовой геометрии.

В России такие начинания исходят от А. В. Летникова, который, дабы приобщить учителя математики гимназии к

---

*) Газета «Комсомольская правда», № 155 (13229), 5 июля 1968 г.

идеям геометрии Лобачевского, осуществил перевод с немецкого лучшей работы Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Этот перевод, вместе со статьей переводчика «О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского» и извлечениями из писем Гаусса к Шумахеру, был помещен в третьем томе «Математического сборника» за 1868 г., активным читателем которого был учитель.

В сопроводительной статье Летников разъясняет читателю значение для науки выдающегося открытия Лобачевского и подчеркивает важность его для преподавания геометрии в школе.

«Труды Лобачевского, — говорит Летников, — должны оказать влияние на усовершенствование методов преподавания и уничтожить несбыточную надежду доказать аксиому Евклида a priori, надежду, однородную с той, которую питают изобретатели вечного движения, квадратуры круга и прочее» (9, стр. 81) *).

В развитии школьного преподавания геометрии и школьных учебников в течение XVIII и XIX веков ярко выражена тенденция отхода от «Начал» Евклида как учебной книги и стремление к созданию более простой и доступной учебной книги по геометрии, отвечающей дидактическим требованиям, хотя заметного влияния «Начал» не избежала ни одна из них. Теперь же, в связи с желанием внедрить в школу идеи неевклидовой геометрии, стали выдвигаться требования возврата к Евклиду. Такие требования ставились во многих странах. В России за их осуществление взялся профессор М. Е. Ващенко-Захарченко.

4. В пропаганде идей геометрии Лобачевского среди преподавателей математики и во введении их в школу Ващенко-Захарченко сыграл значительную роль. Его перу принадлежат две большие работы, связанные с преподаванием геометрии в школе и с внедрением в школу геометрии Лобачевского: «Начала Евклида с пояснительным введением и толкованием» (2) и «Элементарная геометрия в объеме гимназического курса» (3), вышедшие в 80-е годы одна вслед за другой.

В первой работе Ващенко-Захарченко желает положить в основу изучения геометрии в школе «Начала» Евклида как более строгую (в аксиоматическом смысле) книгу, а затем добавлением статьи, содержащей идеи геометрии Лобачевского, познакомить учащихся с неевклидовой геометрией.

---

*) Числа в скобках указывают литературный источник и страницу из списка, приведенного в конце.

Во второй работе вторая глава посвящена выяснению причин разделения учения о пространстве «на различные геометрии».

В конце прошлого века широко отмечался столетний юбилей со дня рождения Н. И. Лобачевского. Популярное изложение идей геометрии Лобачевского в публичных докладах и в научной литературе способствовало их распространению среди учителей математики.

Интересную работу в это время издал профессор Московского универститета П. А. Некрасов «Алгебраический метод решения геометрических задач на построение» (10), которая во втором издании (1897 г.) дополнена новой (VII) главой, посвященной геометрическому истолкованию комплексных чисел и их приложению к задачам на построение. Используя геометрическое истолкование конформных преобразований, автор рассматривает задачи на построение треугольников, сторонами которых являются дуги окружностей. В предисловии автор говорит: «Эти задачи... обнимают различные конкретные факты, аналогичные неевклидовой геометрии Лобачевского. При посредстве этих фактов я пытаюсь ознакомить любознательных учеников гимназий и реальных училищ с замечательною геометрическою системою знаменитого русского математика» (10, стр. V).

Вводя понятие эквивалентных фигур, переходящих одна в другую конформным преобразованием $Z'=(\beta Z+\gamma):(Z-\alpha)$, где $\alpha\beta+\gamma<0$, Некрасов отмечает, что «...теория эквивалентных фигур применяется к решению ряда задач на построение, которые... могут быть приведены в примечательную систему, служащую для наглядного объяснения геометрии Лобачевского» (10, стр. 218).

В конце XIX и в начале XX века выходят работы В. Ф. Кагана, посвященные обоснованию геометрии Евклида и геометрии Лобачевского. Их публикация на страницах популярного среди учителей математики журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» способствовала просвещению учителей математики в области неевклидовой геометрии, а также оказала влияние на проникновение и даже на характер проникновения неевклидовых геометрий в школу.

Первые опыты по изучению неевклидовых геометрий в школе приходятся на начало XX в. На Первом Всероссийском съезде преподавателей математики П. А. Долгушин уже выступил с докладом «Неевклидовы геометрии в средней школе» (5), в котором поделился опытом ознакомления старшеклассиков с неевклидовыми геометриями, используя для этого интерпретации Пуанкаре, почерпнутые из работ В. Ф. Кагана.

Опыт Долгушина — это, видимо, первое в России опробованное на практике предложение о методах введения в среднюю школу неевклидовых геометрий. Существенным в опыте Долгушина было воспитание у учащихся современного взгляда на предмет геометрии, заключающегося в том, что «...евклидова геометрия — логическая система, которую можно применять к любой совокупности образов, удовлетворяющих основным определениям и аксиомам» (5, стр. 229).

В 1930 г. проф. Н. Н. Иовлев издал небольшую книгу (всего 67 стр. малого формата), посвященную введению в элементарную геометрию и тригонометрию Лобачевского (6). Эта книга была допущена в качестве пособия для старших классов средней школы.

Книга Иовлева вышла небольшим тиражом и вряд ли имела значительное влияние на проникновение геометрии Лобачевского в школу. Но построение ее интересное.

Автор дает нестрогое изложение основных фактов геометрии Лобачевского и доводит их до тригонометрических формул прямоугольного треугольника. Сущность метода состоит в том, что Иовлев полагает наличие на прямой в плоскости Лобачевского двух бесконечно удаленных точек (в плоскости Евклида они сливаются в одну точку). Оперируя бесконечно удаленными точками так же, как и удаленными на конечное расстояние, автор простыми рассуждениями устанавливает существование двух параллельных прямых и многие другие свойства этой геометрии.

Нам не удалось выяснить, был ли испробован в школьной практике метод изучения геометрии Лобачевского, разработанный проф. Иовлевым.

5. Интерес к аксиоматическому методу и неевклидовым геометриям среди методистов-исследователей вновь появляется в 40—50-е годы. В это время были подготовлены диссертации (А. И. Фетисовым, А. А. Столяром, Х. Б. Ливерцом и др.), в которых авторы в какой-то мере касаются и вопросов оснований геометрии. Появлению подобных работ способствовали и появившиеся в объяснительной записке к школьной программе на 1951 год указания о необходимости сообщать учащимся сведения о Лобачевском и его геометрии.

В 1952 г. в журнале «Математика в школе» была опубликована статья И. Ф. Тесленко «О неевклидовых геометриях в средней школе» (12), в которой автор наметил интересную программу решения указаний объяснительной записки, рассчитанную на учащихся старших классов.

Сущность методики, предложенной Тесленко, состоит в том, чтобы при изучении геометрии Евклида было обращено должное внимание учащихся на особую роль аксиомы о параллельных прямых. При этом следует изучаемый материал насытить достаточным количеством утверждений, равносильных аксиоме параллельности.

Так как аксиома Лобачевского по содержанию представляет собой простое отрицание утверждения, содержащегося в аксиоме параллельности Евклида, то к геометрии Лобачевского будут относиться все утверждения, каждое из которых представляет собой отрицание некоторого эквивалента аксиомы параллельности Евклида. Остается только распределить материал по классам, что превосходно сделано в упомянутой статье Тесленко.

Заканчивается вековой период работы педагогов и математиков над проблемой внедрения в школу идей неевклидовой геометрии. Однако окончательного решения эта проблема еще не получила. Геометрия Лобачевского по-прежнему остается за порогом школы.

6. Предлагаемая работа «Опыт изучения оснований геометрии (аксиоматического метода, общих вопросов аксиоматики и геометрии Лобачевского) в средней школе» преследует цель — внести посильный вклад в решение указанной проблемы.

Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения и библиографии.

Во введении показана актуальность исследуемой темы, особенно теперь, когда школа ищет новую программу и новые формы работы, позволяющие обновить содержание школьного материала свежими идеями современной математики.

Вопросы, перечисленные в заглавии темы нашего исследования, следует рассматривать в тесной взаимосвязи. Важность их в математическом образовании учащихся не вызывает сомнений. С. А. Яновская следующим образом охарактеризовала положительные стороны аксиоматического метода: «Быть может, одним из наиболее поучительных явлений в истории математики XX века является история аксиоматического метода. После выхода в свет «Оснований геометрии» Гильберта аксиоматический метод быстро стал не только основным инструментом, используемым в целях обоснования математики, но **сделался важнейшим орудием развития самой математики** (выделено мной — В. Ш.): топологии, алгебры, теории вероятностей и многих других областей» (13, стр. 63).

С повышением значения математического образования в школе важно, чтобы учащиеся знакомились с этим орудием, умели бы им пользоваться и сознательно выбирали себе профессии, в которых математические методы играют важную роль.

Важно то, что аксиоматически построенная теория, несмотря на ее абстрактность и отвлеченность, теснее связана с реальной действительностью, чем теория интуитивно-индуктивная.

«...Можно утверждать, — говорит академик А. Н. Колмогоров, — что система аксиом, лежащих в основе геометрии, является замечательным, концентрированным выражением результата наших усилий, направленных к познанию действительности. Успех, заключающийся в ее создании, тем более замечателен, что она не только отражает с очень большой точностью свойства окружающего нас пространства при обычной интерпретации ее основных понятий (точек, прямых, плоскостей и т. д.), но также хорошо приспособлена и для выражения совсем других закономерностей внешнего мира при других ее интерпретациях. Таким образом, абстрактная (аксиоматизированная) геометрия больше связана с действительностью, чем геометрия в ее традиционной форме» (8, стр. 11—12).

Не менее важно и то, что, изучая аксиоматически построенный раздел математики, учащиеся оттачивают свое логическое мышление.

Аксиоматическое построение планиметрии Евклида можно окружить другими не менее важными вопросами, такими, как общие вопросы аксиоматики и элементы геометрии Лобачевского. В результате создается весьма важный, содержательный и в то же время доступный для учащихся 9—10 классов курс, который кратко может быть назван: «Аксиоматический метод и элементы геометрии Лобачевского».

7. Первый раздел — исторический очерк — посвящен истории развития ведущих идей в преподавании геометрии в школах Англии, Франции и Италии, развитию русской учебной литературы по геометрии в XVIII—XIX вв. и внедрению неевклидовых геометрий и аксиоматического метода в средние школы России. Кое-что из содержания этого раздела уже изложено выше.

Изучая обширную литературу исторического характера, автор нашел в ней доказательства того, что в развитии народного образования и, прежде всего, в развитии преподавания геометрии эпоха Возрождения сыграла исключительную роль.

Подражая древнегреческой культуре, деятели просвещения этой эпохи многое заимствовали из древнегреческого наследия. Что касается преподавания геометрии, то в этот период

«Начала» Евклида становятся основным школьным учебником, хотя составлены они были автором не для учебных, а для научных целей.

История дальнейшего развития преподавания геометрии характеризуется двумя тенденциями: а) стремлением приспособить для школьного дела «Начала» Евклида (путем сокращения и упрощения их содержания, но сохранением основного их достоинства — логически стройного построения), что особенно характерно для школ Англии, а в некоторые периоды — и для Италии и России; б) стремлением к созданию более простого и доступного учебника для школы — что прежде всего характерно для школ Франции (начиная с учебников Рамуса, а затем Арно, Клеро, через основополагающие установки Д'Аламбера, к учебникам Безу, Лежандра, Лакруа).

Сторонники первой тенденции исходили из того, что для развивающегося интеллекта важнее всего научиться искусству логически мыслить. «Начала» Евклида представлялись им лучшей школой обучения этому.

Сторонники второй тенденции исходили из того, что человека нужно готовить к жизни, а в жизни ему больше всего понадобится практическая математика.

Между этими двумя направлениями велась борьба, порой довольно напряженная, которой не избежала даже такая консервативная страна в области постановки народного образования, как Англия (движение, возглавляемое Перри).

8. В России с развитием торгово-экономических связей с другими странами, которыми особенно ознаменована деятельность Петра I, с ростом военно-промышленного потенциала резко повышаются потребности в инженерно-технических кадрах, да и просто в грамотных людях. В это время быстрыми темпами развивается народное образование: открываются школы, преимущественно с реальным образованием, широко привлекаются иностранные ученые для ведения учебной и научной работы, практикуются откомандирования способной молодежи за границу для совершенствования образования, открывается доступ в средние учебные заведения детям недворянского происхождения.

Число школ и число учащихся в них резко увеличивается.

С особой остротой встал вопрос об учебной книге.

На первых порах, если речь шла о материале, выходящем за пределы самых элементарных сведений, приходилось обходиться переводной, а то и просто иностранной учебной книгой.

Но уже в 70-е годы XVIII в. появляются оригинальные отечественные учебные руководства, не уступающие по своим научным и методическим качествам лучшим зарубежным учебникам.

Автор прослеживает изменение характера учебной книги по геометрии с точки зрения освещения в них оснований геометрии, начиная с учебного руководства Д. Аничкова, вышедшего в 1780 г. (1), и кончая популярными учебниками конца прошлого и начала настоящего столетия А. Ю. Давидова (4) и А. П. Киселева (7).

Изучая русскую учебную литературу, автор пришел к выводу, что наибольшее внимание уяснению учащимися исходных понятий и исходных положений в геометрии, с чем, прежде всего, связан аксиоматический метод, уделял выдающийся русский математик М. В. Остроградский (см. «Руководство начальной геометрии для воспитанников военных заведений. Курс второго общего класса») (11). Многое, проделанное Остроградским, достойно подражания и современными учебниками, но, к сожалению, находится в незаслуженном забвении.

Наибольший интерес в первом разделе представляет материал третьего параграфа, посвященный истории внедрения неевклидовых геометрий и аксиоматического метода в средние школы России. История эта продолжительная. Она начинается с того периода, когда интерпретации Бельтрами пролили свет на реальный смысл геометрии Лобачевского и когда необычайно ясной стала недоказуемость пятого постулата.

Наиболее значительный вклад в дело продвижения неевклидовых геометрий в среднюю школу внесли М. Е. Ващенко-Захарченко, П. А. Некрасов, В. Ф. Каган, С. А. Богомолов, П. А. Долгушин и, уже в период советской школы — Н. Н. Иовлев, И. Ф. Тесленко, А. И. Фетисов и др.

Неразрешенность проблемы позволяет автору утверждать, что избранная им тема исследования является актуальной.

Работу над темой автор начал с разработки программы и учебного пособия, которые послужили основой для экспериментального исследования в школе.

9. Второй раздел диссертации посвящен изложению разработанной нами программы и содержания учебного пособия, предназначенного для учащихся и для учителя.

Понимая, что выдвигаемые вопросы на факультативное занятие в школе не принадлежат к числу легких, особенно для учителя, обремененного солидной традицией и привычками, автор предвидел, что успех экспериментального исследования в школе в значительной мере будет зависеть от наличия учебного пособия. Для экспериментатора же это необходимо было еще и для того, чтобы создать для учащихся естественные условия проведения эксперимента, состоящие, прежде всего, в том, чтобы учащиеся не только слушали рассказ учителя, но и могли бы, при желании, прочитать материал в книге. Автор нашел удачный выход из создавшегося положения: он подготовил машинописный текст пособия, заснял его на фотопленку, а затем изготовил фотокопии пособия. Кропотливый труд был предпринят не напрасно.

Содержанию учебного пособия мы уделяем особое внимание, так как для опытного учителя оно является самым важным, часто проливающим свет и на методику изложения материала.

Перейдем к изложению содержания пособия.

Материал пособия разделен на четыре главы: гл. I, сущность аксиоматического метода, гл. 2, аксиоматическое построение планиметрии, гл. 3, общие вопросы аксиоматики, гл. 4, элементы геометрии Лобачевского.

Первая глава дает учащимся понятие об аксиоматическом методе. Раскрытие его сущности проводится на фоне исторического материала о развитии геометрии и о создании Евклидом первого аксиоматизированного трактата геометрии. В этой главе объясняется необходимость аксиом и неопределяемых понятий и отношений и обращается внимание учащихся на то, что основные понятия и основные отношения могут иметь различное содержание, к которому предъявляется единственное косвенное требование — удовлетворять всем аксиомам.

Автор заостряет внимание на строении аксиомы и теоремы, на видах теорем и связи между ними, на необходимых и достаточных условиях и т. п. Заканчивается материал первой главы достаточным количеством упражнений.

Вторая глава посвящена аксиоматическому построению планиметрии Евклида. Система аксиом, положенная в основу построения, по примеру Д. Гильберта разбита на пять групп: аксиомы принадлежности, порядка, равенства, непрерывности, параллельности. Общее число аксиом (16 акс.) невелико, их содержание доступно учащимся, и они свободно их выучивают, что очень важно при аксиоматическом построении курса.

В последние годы среди педагогической общественности формируется мнение о том, чтобы содержанием школьного курса геометрии сделать изучение геометрических преобразований: движений, гомотетий, подобий и т. д. (наиболее активно поддерживают эту идею методисты и математики А. И. Фетисов, И. М. Яглом, В. Г. Болтянский и др.).

Целесообразность принятия геометрического преобразования в качестве ведущего при систематическом изложении геометрии в школе понятна. Но при рассмотрении аксиоматического построения геометрии, которое можно предложить учащимся 9—10 классов, следует в третьей группе аксиом отдать предпочтение аксиомам равенства (конгруэнтности) перед аксиомами движения, ибо «равенство» легче аксиоматизировать, нежели «движение», аксиомы равенства имеют более простую словесную формулировку и более доступны учащимся.

Непрерывность прямой линии лучше описывать аксиомой Дедекинда, нежели аксиомами Архимеда и Кантора. Две последние аксиомы предпочтительнее в том случае, когда рассматривается задача измерения величин (например, длин отрезков). Так как эти вопросы мы не включаем в свою программу, а также в силу того, что в нашем курсе важное место занимают построения моделей систем аксиом, на многих из которых проще проверяется выполнимость аксиомы Дедекинда, мы и положили ее в основу небольшого аксиоматически построенного курса планиметрии.

Важнейшей методической особенностью изложения разработанного нами курса является насыщение материала идеей моделирования и раннее введение моделей. Так, уже после изучения аксиом принадлежности (первая группа) рассматриваются четыре модели, на которых проверяется их выполнимость. Затем на них проверяется выполнимость аксиом и остальных групп.

Благодаря насыщению материала идеей моделирования, у учащихся вырабатывается широкий взгляд на предмет геометрии (точки и прямые — элементы произвольной природы, удовлетворяющие аксиомам), что особенно важно для успешного изучения геометрии Лобачевского.

Большое внимание уделяется изучению арифметической модели планиметрии Евклида, в которой проверяется выполнимость всех аксиом. Правда, проверки аксиом равенства в этой модели громоздки. Поэтому учащимся можно показать проверку выполнимости только некоторых аксиом. В нашей же работе читатель найдет проверку выполнимости всех аксиом.

Общее число теорем, рассмотренных в аксиоматически построенной планиметрии Евклида, невелико, оно не превышает трех десятков, и это понятно, так как преследуется цель — дать понятие об аксиоматическом построении курса, к тому же, доказательство большого числа теорем — довольно скучная работа. Но эту скучную работу стоит проделать ради тех общих идей, которые затем удается раскрыть.

После введения аксиомы параллельности вводится понятие равносильных утверждений и доказываются две теоремы, устанавливающие равносильность аскиомы параллельности пятому постулату, а также утверждению о том, что сумма внутренних углов треугольника равна 2d. Другие эквиваленты аксиомы параллельности можно найти среди упражнений.

Третья глава пособия посвящена общим вопросам аксиоматики и включает рассмотрение двух вопросов: о непротиворечивости системы аксиом и о независимости аксиом. Непротиворечивая система аксиом определяется как такая система, которая имеет реально существующую модель. Из этого определения следует вывод: если удается построить модель системы аксиом из образов теории, непротиворечивость которой сама нуждается в доказательстве, то вопрос о непротиворечивости системы аксиом сводится к доказательству непротиворечивости системы этих образов, т. е. решается условно.

Так как изложение геометрии насыщено рассмотрением ее моделей, то, как итог всей работы, получается вывод: геометрия Евклида непротиворечива, если непротиворечива арифметика.

Вопрос о полноте системы аксиом автор предпочитает не рассматривать в школе, чтобы не вводить слишком много новых понятий.

Заканчивается материал третьей главы рассмотрением понятия о независимости одной аксиомы от остальных аксиом системы.

Такой порядок расположения материала как в отдельных главах, так и самих глав, выгоден тем, что дает возможность простыми рассуждениями подойти к необходимости рассмотреть геометрию Лобачевского. К ней приводит проблема независимости аксиомы параллельности и ее решение.

Последняя (четвертая) глава второго раздела посвящена изложению простейших сведений из геометрии Лобачевского.

Разработанное автором изложение геометрии Лобачевского отличается от известного в литературе ранним введением модели планиметрии Лобачевского (рассматривается модель Бельтрами—Клейна).

Введение модели планиметрии Лобачевского не только доказывает непротиворечивость этой теории (при условии непротиворечивости планиметрии Евклида), но и позволяет учащимся проводить самостоятельные работы по исследованию свойств планиметрии Лобачевского путем изучения модели, подобно тому, как узнают особенности местности, изучая ее карту. Благодаря этому создаются условия для активного участия учащихся в изучении геометрии Лобачевского. Это устраняет тот психологический барьер, который воздвигается в сознании учащихся на первых порах изучения геометрии Лобачевского и вызывается несовпадением логических выводов, получаемых в геометрии Лобачевского, с привычным опытом.

Модель планиметрии Лобачевского воспринимается учащимися легко, так как к этому они подготовлены изучением моделей планиметрии Евклида. Очень важно то, что, внимательно изучая модель, учащиеся самостоятельно находят многие свойства геометрии Лобачевского, такие, как взаимное расположение прямых, свойства параллельных прямых, свойства расходящихся прямых, убывание функции Лобачевского и многие другие. Правда, перпендикулярность прямых на модели Бельтрами—Клейна приходится постулировать, ибо обоснование слишком громоздко и требует новых дополнительных знаний.

Замечательно то, что на модели Бельтрами—Клейна получает простое истолкование равенство отрезков. Не истолкованным остается только равенство двух углов, но это уже небольшая беда.

Весь материал насыщен упражнениями, благодаря чему не только изучение геометрии Евклида, но и изучение геометрии Лобачевского можно сопровождать выполнением упражнений, что очень существенно содействует глубокому и сознательному изучению материала.

В качестве того, как изучением модели устанавливаются некоторые свойства геометрии Лобачевского, рассмотрим установление того факта, что большому расстоянию соответствует меньший угол параллельности (убывание функции Лобачевского).

Напомним сначала, что на модели Бельтрами—Клейна перпендикулярные прямые изображаются такими хордами, каждая из которых при продолжении проходит через точку пересечения касательных, проведенных в концах другой хорды (рис. 1). Теперь легко установить и убывание функции Лобачевского.

Пусть $AB < AC$ (рис. 2). Через точки B и C проведем прямые BB' и CC', перпендикулярные прямой AB. Теперь одного взгляда на рисунок достаточно, чтобы установить, что прямая AB′, параллельная прямой BB′, составляет с прямой AB больший угол, нежели прямая AC′, параллельная прямой CC′.

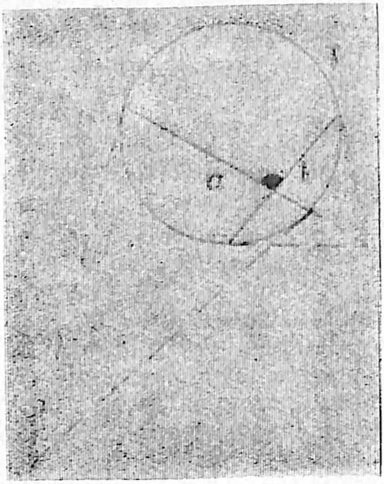

Рис. 1.

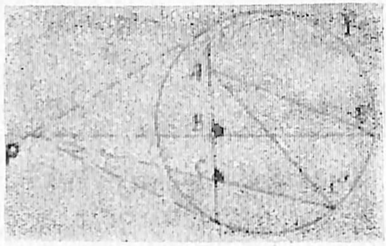

Рис. 2.

10. В третьем разделе — методика — излагаются методические рекомендации по изучению вопросов из оснований геометрии.

Основным методом изложения материала является лекционный метод, при котором предполагается активное участие учащихся в работе на уроке и систематический контроль учителя за качеством усвоения материала. Этот контроль может осуществляться по-разному. Значительное место в нем могут занимать кратковременные контрольные работы, которые можно проводить, по существу, в любой момент урока. Этим достигается систематическая работа учащихся над материалом. В этом разделе приведены свыше десяти таблиц, которые могут служить наглядным пособием при изучении предлагаемого материала из оснований геометрии. На их основе автором были созданы диафильмы, использованные при изучении моделей геометрии Евклида и при изучении геометрии Лобачевского.

Учитель должен серьезное внимание уделить аксиоматическому построению планиметрии Евклида. Принципы, которыми мы руководствовались при выборе системы аксиом, пригодной для аксиоматического построения геометрии в школе, следующие: 1) система аксиом не может быть минимальной; 2) она должна быть возможно ближе к той, которая признана наукой одной из лучших; 3) каждая аксиома должна быть понятной по содержанию и простой в словесной формулировке; 4) аксиомы следует избирать такого содержания, чтобы их легко было моделировать; 5) аксиомы должны быть так разбиты на группы, чтобы легко осуществлялся переход от геометрии Евклида к геометрии Лобачевского; 6) число аксиом не должно быть слишком большим, чтобы их выучивание не обременяло память учащихся.

Всем этим требованиям удовлетворяет система аксиом, положенная нами в основу аксиоматического курса геометрии. Приводим содержание аксиом.

Аксиомы принадлежности.

Точки и прямые могут находиться в некотором известном (т. е. неопределяемом) отношении, обладающем свойством взаимности, которое называют словом «принадлежать» (или синонимами: «проходить через», «лежать на...» и др.). Отношение принадлежности должно удовлетворять следующим аксиомам.

I-1. Через две точки проходит одна и только одна прямая.

I-2. Каждой прямой принадлежит бесчисленное множество точек.

I-3. В плоскости существует бесчисленное множество точек, не все из которых лежат на одной прямой.

Эти аксиомы не минимальны. Например, в аксиоме I-2 достаточно было бы утверждать наличие двух точек, а в аксиоме I-3 — наличие трех точек, не лежащих на одной прямой. Утверждение о бесчисленности точек легко доказать на основании аксиом порядка. Однако опыт показал, что учащиеся больше всего испытывают затруднения при доказательстве теорем на основании аксиом порядка. Поэтому мы пошли на это усиление аксиом принадлежности.

Аксиомы порядка.

Полагаем, что на каждой прямой имеются два направления (их называют взаимно противоположными). Мы можем по своему желанию избирать любое из этих направлений.

Две точки A и B прямой могут находиться в известном (т. е. неопределяемом) отношении, о котором будем говорить, что точка A «предшествует» точке B в избранном на прямой направлении.

Отношение «предшествования» точек на прямой должно удовлетворять аксиомам.

II-1. Если в некотором направлении на прямой точка A предшествует точке B, то точка B не предшествует точке A в этом же направлении, но точка B предшествует точке A в противоположном направлении. (Аксиома II-1 утверждает, по существу, тот факт, что прямая незамкнута).

II-2. Если в одном и том же направлении на прямой точка А предшествует точке В, а точка В предшествует точке С, то точка А предшествует точке С.

II-3. Каждый отрезок имеет бесчисленное множество внутренних и бесчисленное множество внешних точек.

II-4. Каждая прямая разбивает все точки плоскости, не лежащие на прямой, на две полуплоскости так, что она пересекает всякий отрезок, соединяющий две точки разных полуплоскостей, но не пересекает отрезок, соединяющий две точки одной полуплоскости.

В этой группе аксиом усиленной является третья аксиома.

Аксиомы р а в е н с т в а.

Два отрезка, а также два угла могут находиться в известном (т. е. неопределяемом) отношении, которое будем называть, соответственно, «равенством отрезков» и «равенством углов».

Равенство отрезков и равенство углов должны удовлетворять аксиомам.

III-1. Если задан отрезок АВ и луч h с вершиной в точке С, то на этом луче существует единственная точка Д такая, что АВ = СД.

III-2. Равенство отрезков обладает свойствами рефлексивности, взаимности и транзитивности.

III-3. Если точка В лежит между точками А и С , а точка В′ лежит между точками А′ и С′ и если: а) АВ = А′В′, ВС = =В′С′, то АС=А′С′; б) АВ=А′В′, АС=А′С′, то ВС=В′С′ (Эту аксиому называют аксиомой о равенстве сумм и разностей отрезков).

III-4. Если задан угол (h, к) и задана полуплоскость, выходящая из луча h′ с вершиной в точке О′, то в этой полуплоскости существует единственный луч к′ с вершиной в точке О′ такой, что $<$ (h, к) = $<$ (h′, к′).

III-5. Равенство углов обладает свойствами рефлексивности, взаимности и транзитивности.

III-6. (Аксиома о сумме и разности углов, аналогичная акс. III-3).

III-7. Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Аксиомы непрерывности.

IV-1 (аксиома Дедекинда). Если точки отрезка разбиты на два класса так, что каждая точка отрезка этим разбиением отнесена к одному и только к одному из классов; конечные точки отрезка отнесены к разным классам; в некотором направлении на прямой каждая точка первого класса предшествует всякой точке второго класса, то существует или последняя точка в первом классе (второй класс не имеет первой точки) или первая точка во втором классе (первый класс не имеет последней точки).

Аксиомы параллельности.

V-1. Через точку, не лежащую на прямой, проходит не более чем одна прямая, параллельная данной прямой.

Указанная система аксиом удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Особо следует отметить удобство разбиения аксиом на пять групп, так как переход к геометрии Лобачевского осуществляется заменой только аксиомы параллельности. Учащиеся с удивлением узнают о том, что они уже давно владеют солидным разделом геометрии Лобачевского в виде так называемой абсолютной геометрии, и с интересом изучают другие ее свойства.

Автор обращает внимание на необходимость подготовки учащихся к изучению избранных вопросов из оснований геометрии, заключающейся прежде всего в воспитании стремления к построению строгих логических рассуждений, а затем в воспитании современного взгляда на основные понятия и отношения геометрии.

11. В четвертом разделе — экспериментальная проверка методических рекомендаций — приведены результаты экспериментальной работы в 9—10 классах школ гг. Славянска и Краматорска, а также результаты работы с учителями и студентами.

В начале изложены результаты некоторых наблюдений за учащимися старших классов, абитуриентами и первокурсниками. Установлено, что при обычном программном изучении геометрии в школе учащиеся не получают надлежащего представления об аксиоматическом методе. Например, учащиеся часто даже не подозревают о существовании неопределяемых понятий и отношений, список аксиом им неизвестен. Ясно, что в таких условиях совершенно выпадают общие вопросы аксиоматики. Очень скудные, а часто просто неверные сведения выносят учащиеся из школы о геометрии Лобачевского.

Автор вскрывает причины этих недостатков и приходит к выводу, что изучение геометрии в школе должно заканчиваться изучением обзорного курса геометрии, который познакомил бы учащихся с сущностью аксиоматического метода, с кратким аксиоматическим построением геометрии Евклида, с общими вопросами аксиоматики и с простейшими сведениями из геометрии Лобачевского.

Далее описываются результаты и неудачного и удачных экспериментов в школе. Неудача первого эксперимента, рассчитанного на то, что работу будут проводить учителя, обусловлена тем, что учитель испытывает определенные трудности в изложении аксиоматического курса геометрии. Дальнейшую экспериментальную работу в школе автор проводил сам и обнаружил, что разработанные им вопросы свободно воспринимаются учащимися и вызывают у них интерес. Экспериментальная работа проводилась в условиях обеспеченности учащихся разработанным нами пособием.

Итогом работы являются следующие выводы.

1. Материал из оснований геометрии, включающий вопросы, перечисленные в заглавии темы исследования, является посильным для учащихся 9—10 классов средней школы и вызывает у них интерес.

2. Этот материал представляет собой важный и содержательный курс, который целесообразно изучать факультативно, выделяя на него 30—35 часов.

3. Основным методом изложения материала должен быть лекционный метод. Значительное место должно занимать также выполнение упражнений на протяжении изучения всего материала.

4. Центральной идеей, объединяющей весь материал предлагаемого курса, должна стать идея моделирования. Модели должны рассматриваться после изучения каждой группы аксиом. Раннее введение модели Бельтрами—Клейна при изуче-

нии геометрии Лобачевского позволяет поставить учащихся в условия активных исследователей этой геометрии. При такой методике изучения материала полностью устраняются психологические трудности, вызываемые расхождением логических выводов геометрии Лобачевского с практическим опытом учащихся.

5. Заслуживают особого внимания упражнения, в которых некоторое множество подвергается исследованию с точки зрения наличия в нем той или другой геометрии. При изучении геометрии Лобачевского эффективными являются задачи на построение, выполняемое на модели Бельтрами—Клейна.

Автор полагает, что введение в школу избранных вопросов из оснований геометрии повысит уровень математической подготовки учащихся, вооружит их современными взглядами на предмет геометрии и покажет сущность и значение аксиоматического метода.

12. Материал исследования неоднократно обсуждался в широкой аудитории учителей: на методобъединениях учителей математики старших классов в гг. Славянске, Краматорске и в Краснолиманском районе, на курсах повышения квалификации учителей.

Основные результаты исследования были изложены на семинаре кафедры геометрии Киевского государственного университета, на семинаре кафедры геометрии Харьковского государственного университета, на итоговых научных конференциях Славянского государственного педагогического института, на межвузовской научной конференции математических кафедр педагогических институтов Центральной зоны РСФСР.

По теме диссертации имеются следующие публикации:

1. К вопросу об изучении логических основ геометрии в школе. — В сб.: «Отчетно-научная конференция института за 1965 г.», тезисы и аннотации (Славянский пединститут), Славянск, 1966 (на укр. яз.).

2. Опыт изучения геометрии Лобачевского в средней школе. — В сб.: «Материалы межвузовской научной конференции математических кафедр педагогических институтов Центральной зоны РСФСР», Тула, 1968.

3. К вопросу об изучении аксиоматического метода, общих вопросов аксиоматики и геометрии Лобачевского в школе. — В сб.: «Методика преподавания математики», Республиканский научно-методический сборник, вып. 5. Киев, 1969, (81—89) (на укр. языке).

4. Методи Н. Н. Иовлева популярного изложения геометрии Лобачевского. — В сб.: «Пятая научная конференция молодых математиков Украины», тезисы докладов, Киев, 1970, (204—205) (на укр. языке).

5. Опыт изучения геометрии Лобачевского в школе.—Журнал «Радянська школа», Киев, 1970, № 3, (99—102) (на укр. языке).

6. Об изучении геометрии Лобачевского в школе. — В сб.: «Методика преподавания математики», Республиканский научно-методический сборник, — принято к печати (на укр. языке).

В этих статьях изложено основное содержание диссертации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Д. Аничков, Теоретическая и практическая геометрия в пользу и употребление не токмо юношества, из разных авторов собранная. М., 1780.

2. М. Е. Ващенко-Захарченко, Начала Евклида с пояснительным введением и толкованием. Киев, изд. Киевского университета, 1880.

3. М. Е. Ващенко-Захарченко, Элементарная геометрия в объеме гимназического курса. Киев, 1883.

4. А. Ю. Давидов, Элементарная геометрия в объеме гимназического курса, М., 1864.

5. П. А. Долгушин, Неевклидова геометрия в средней школе. Доклад. — В кн.: «Труды Первого Всероссийского съезда преподавателей математики», т. I, С-Пб., 1913.

6. Н. Н. Иовлев, Введение в элементарную геометрию и тригонометрию Лобачевского. М.—Л., ГИЗ, 1930.

7. А. П. Киселев, Элементарная геометрия, 1893.

8. А. Н. Колмогоров, Предисловие. В кн.: А. Лебег, «Об измерении величин», изд. 2-е, Учпедгиз, М., 1960.

9. А. В. Летников, О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского. — «Математический сборник», т. 3, М., 1868.

10. П. А. Некрасов, Алгебраический метод решения геометрических задач на построение, изд. 2-е, М., 1897.

11. М. В. Остроградский, Руководство начальной геометрии для воспитанников военных заведений. Курс второго общего класса. С-Пб., 1855.

12. И. Ф. Тесленко, О неевклидовых геометриях в средней школе. — «Математика в школе», 1952, № 4.

13. С. А. Яновская, Из истории аксиоматики. — В сб.: «Историко-математические исследования», вып. XI, ГИФМЛ, 1958.

БП-28456. Подписано к печати 8.IX-1970 г.
Форм. бум. 60x90/16 П. л. 1,5 Зак. № 5916 Тираж 200

Славянская городская типография
Донецкого областного управления по печати, ул. Ленина, 47.