МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

В.И.МЕЛЬНИК

/ C_i /-СВОЙСТВА МЕТОДОВ БОРЕЛЯ И АБЕЛЯ-ПУАССОНА И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА

Автореферат
диссертации, представленной на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук
профессор Н.А.Давыдов

Киев - 1965

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

В.И.МЕЛЬНИК

/ C_i /-СВОЙСТВА МЕТОДОВ БОРЕЛЯ И АБЕЛЯ-ПУАССОНА И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА

А в т о р е ф е р а т

диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук
профессор Н.А.Давыдов

Киев – 1965

Н.А.Давыдов в работах /1-2/ ввел понятие (C)-множества последовательности, доказал (C)-свойства методов Чезаро и Абеля-Пуассона и получил ряд теорем тауберова типа для этих методов. /В настоящей работе (C)-множество обозначается (C_1)-множеством/. В первой главе понятие (C_1)-множества приспосабливается к методу Бореля.

Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости мы называем (C_2)-множеством последовательности A_n, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\lambda(\varepsilon) > 0$ и последовательность отрезков $[n_k, m_k]$ чисел натурального ряда так, что $A_n \in G_\varepsilon$ для $n_k \leq n \leq m_k$, причем $(m_k - n_k)/\sqrt{n_k} \geq \lambda(\varepsilon) > 0$, $n_k \to \infty$ / G_ε есть ε-окрестность множества G /.

(C_2)-множеством может быть, в частности, точка. В этом случае будем называть ее (C_2)-точкой последовательности A_n.

Основной результат первой главы составляет

Т е о р е м а 1. Если ограниченная последовательность A_n суммируема методом Бореля к числу A и G есть (C_2)-множество последовательности A_n, то $A \in G$.

Свойство метода суммирования Бореля, выраженное этой теоремой, названо (C_2)-свойством метода Бореля.

Условие $A_n = O(1)$ представляется в этой теореме весьма стеснительным. Однако оно /в некотором смысле/ не может быть ослаблено. Это показывает

Т е о р е м а 2. Пусть $C(n)$ –произвольная последовательность положительных чисел, стремящаяся сколь угодно медленно к $+\infty$. Можно построить последовательность A_n такую, что: 1/ $|A_n| \leq C(n)$, 2/ $|a_n| = |A_n - A_{n-1}| \leq C(n)/\sqrt{n}$, 3/ последовательность A_n суммируется методом Бореля к числу A и имеет (C_2) –точку, отличную от A.

Из (C_2) –свойства метода Бореля получено ряд следствий. Отметим некоторые из них.

Т е о р е м а 3. Если ограниченная последовательность A_n суммируется методом Бореля, то для сходимости подпоследовательности A_{n_k} достаточно, чтобы каждый ее частичный предел был (C_2) –точкой последовательности A_n.

Т е о р е м а 8. Если A_n –ограниченная действительная последовательность, суммируемая к числу A методом Бореля, n_k – заданная последовательность натуральных чисел, стремящаяся к бесконечности, и если последовательность A_n удовлетворяет условию $\underline{\lim}\,(A_m - A_{n_k}) \geq -\tau_1 > -\infty$ $(\tau_1 \geq 0)$, когда $0 < \frac{m - n_k}{\sqrt{n_k}} \to 0$, а также условию $\underline{\lim}\,(A_{n_k} - A_m) \geq -\tau_2 > -\infty$ $(\tau_2 \geq 0)$, когда $0 < \frac{n_k - m}{\sqrt{m}} \to 0$,

то $A - \tau_2 \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} A_{n_k} \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} A_{n_k} \leq A + \tau_1$.

Т е о р е м а 10. Пусть действительная последовательность A_n удовлетворяет условию $\underline{\lim}\,(A_m - A_n) \geq -\tau > -\infty$ $(\tau \geq 0)$, когда $0 < \frac{m-n}{\sqrt{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$. Если $A_n = O(1)\,(B)$, то $A_n = O(1)$. Если A_n суммируется к числу A методом Бореля, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} |A_n - A| \leq \tau$, т.е. множество всех частичных пределов последовательности A_n содержится в отрезке $[A - \tau, A + \tau]$.

Для комплексных последовательностей справедливо утверждение, аналогичное теоремам 8 и 10. Известная теорема Р.Шмидта получается из теоремы 10 при $\tau = 0$.

Теорема 8 переносит теорему Р.Шмидта на подпоследовательности для случая ограниченных последовательностей.

Теоремы первой главы формулируются, как правило, для ограниченных последовательностей. Во второй главе доказана тауберова теорема для произвольных последовательностей.

Т е о р е м а 11. Пусть последовательность A_n суммируется методом Бореля. Если при каждом $\varepsilon>0$ можно найти числа $\lambda(\varepsilon)>0$ и $n_0(\varepsilon)$, для которых при любом $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ существуют номера $M(n) \leqslant n \leqslant P(n)$ такие, что $|A_k - A_n| < \varepsilon$ для $M(n) \leqslant k \leqslant P(n)$, причем $[P(n)-M(n)]/\sqrt{M(n)} \geqslant \lambda(\varepsilon)>0$, то последовательность A_n сходится.

Отметим частный случай этой теоремы.

Т е о р е м а 12. /Теорема о больших показателях/. Пусть n_k – возрастающая последовательность натуральных чисел, такая, что

$$(n_{k+1}-n_k)/\sqrt{n_k} \geqslant \lambda > 0 \qquad (k=1,2,\ldots),$$

а числа $a_n = A_n - A_{n-1}$ удовлетворяют условию $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ при $n \neq n_k$. Если последовательность A_n суммируема методом Бореля, то она сходится.

При дополнительном ограничении / $A_n = O(q^n)$ для любого $q>1$ / теорема 11 была установлена Питтом. В дальнейшем Мейер-Кениг показал, что это ограничение можно ослабить /достаточно, чтобы $A_n = O(q^n)$ для какого-либо $q>1$ /. Ердеш, рассматривая теорему о больших показателях, вводил новое дополнительное ограничение / $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k+1}-n_k} < \infty$ /. Теоремы 11-12 свободны от подобных ограничений.

В третьей главе рассмотрены методы суммирования Чезаро и Абеля-Пуассона. Здесь доказана

Т е о р е м а 13. Пусть $C(n)$ монотонно и сколь угодно медленно стремится к $+\infty$. Существует последовательность A_n такая, что: а/ $|A_n| \le C(n)$, б/ $|a_n| = |A_n - A_{n-1}| \le C(n)/n$,в/последовательность A_n суммируется к некоторому числу A методом Абеля-Пуассона по всем некасательным путям и имеет в качестве (C_1)-точки число, отличное от A .

Теорема 13 указывает на невозможность ослабления условий в известных теоремах Литтльвуда / [3] , теоремы 90 и 92/, Оффорда [4] ,Давыдова / [2] ,теорема Б/. Используя теорему 13, можно, например, построить степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \equiv f(z)$ такой, что: 1/ $n \cdot a_n \le C(n)$ 2/ $|A_n| = |\sum_{k=0}^{n} a_k| \le C(n)$,

где (C_n) - заданная сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ последовательность, 3/ функция $f(z)$ принадлежит всем классам H_q $(q < +\infty)$ в единичном круге и имеет угловой предел в точке $z = 1$, однако 4/ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ не суммируем (C, α)-методом при любом $\alpha > -1$.

В последней теореме третьей главы идет речь о рядах, разбавленных нулями.

Т е о р е м а 14. Произвольный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ может быть разбавлен нулями так, что разбавленный ряд будет суммироваться методом Абеля-Пуассона к наперед заданному конечному частичному пределу последовательности $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. В то же время существует ряд с ограниченными частными суммами такой, что при любом разбавлении его нулями он не будет суммироваться методом Абеля-Пуассона к числу,отличному от частичных пределов частных сумм этого ряда.

При доказательстве теорем 13-14 существенно использованы работы Н.А.Давыдова /1-2/.

По материалам диссертации автором были сделаны сообщения на 7 Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в г. Ростове-на-Дону в 1963 году и на 1 республиканской конференции молодых исследователей в г. Киеве в 1964 году. Основное содержание диссертации отражено в публикациях /5-8/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.А. Давыдов, Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Матем. сб., т.38/80/:4, 1956, 509–524.

2. Н.А. Давыдов, / C /-свойство методов Чезаро и Абеля–Пуассона и теоремы тауберова типа, Матем. сб., 60/102/, 1963, 185–206.

3. Г.Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.

4. Offord A.C., j. London Math. Soc., 1932, 33/2/, 467–480.

5. В.И. Мельник, Суммирование разбавленых рядов методом Абеля–Пуассона, Укр. матем. журнал, № 2, 1965.

6. В.И. Мельник, / B /-свойство метода Бореля и теоремы тауберова типа, Укр. матем. журнал, № 1, 1965, 67–76.

7. В.И. Мельник, О / C /-свойстве метода суммирования Абеля–Пуассона, Тезисы докладов 1 республиканской научной конференции молодых исследователей, Киев, 1964, 105.

8. В.И. Мельник, Тауберова теорема о больших показателях для метода Бореля, там же, 106.

БФ.20864. 1/IУ-1965. Печ.лист. 0,5. Зак. 70. Тираж 150.
Ротапринт КГПИ., Кловский спуск, 8.