МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

М И С А К В.В.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

/ 003 – дифференциальные и интегральные уравнения/

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

К И Е В – 1968

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

М И С А К В.В.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

/ 003 - дифференциальные и интегральные уравнения/

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

К И Е В - 1968

Работа выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института имени А.М. Горького.

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор Фещенко С.Ф.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Валеев К.Г., кандидат физико-математических наук Фодчук В.И.

Ведущее предприятие Институт математики АН УССР.

Автореферат разослан   1968 г.

Защита диссертации состоится

               1968 г. на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М. Горького / Киев - 30, Бульвар Шевченко, 22/24 /.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке.

Ученый секретарь совета

Одним из важных вопросов теории колебаний является исследование колебательных процессов в нелинейных системах с последействием, которые обычно описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом.

В последнее время для изучения колебаний в системах с запаздыванием стали широко применяться асимптотические методы нелинейной механики. Причем, наиболее доступными для исследований оказались колебательные системы с малой нелинейностью. К ним относятся системы, для которых соответствующие дифференциальные уравнения хотя и являются нелинейными, но содержат "малый" параметр, при нулевом значении которого эти уравнения вырождаются в линейные.

При решении дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, пользуются разложением в ряд по степеням этого параметра, а затем решают поставленную задачу в первом, во втором и т.д. приближениях.

Развитию асимптотических методов для исследования слабо нелинейных колебательных систем с запаздыванием посвящено большое количество работ советских авторов : Л.Э.Эльсгольца [1] ,Н.Н.Красовского [2] , С.Н.Шиманова [3-4] , В.П.Рубаника [5-6] , В.И.Фодчука [7-8] и др., а также ряда зарубежных авторов.

В данной диссертационной работе рассмотрены вопросы построения асимптотических решений для квазилинейных систем с запаздыванием. Работа содержит обобщение метода вспомогательных систем С.Н.Шиманова на квазилинейные неавтономные системы в случае кратных корней разрешающих уравнений.

Рассмотрена задача построения асимптотических приближений для исследования нестационарных колебаний в нелинейных системах с запаздыванием. Основным аппаратом исследования является асимптотический метод Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского. Показано,что для нахождения последовательных приближений функции $u_i(\tau,a,\psi)$ можно освободить от условия отсутствия первой гармоники.

Диссертационная работа состоит из введения и трех глав.

Введение содержит краткий обзор литературы.

В §I главы первой рассматривается квазилинейная автономная система с одной степенью свободы и с запаздыванием.Одним из широко распространенных приближенных методов интегрирования таких систем является метод "медленно меняющихся амплитуд". В данном параграфе последовательные приближения находятся при помощи метода малого параметра Пуанкаре в сочетании с методом Ван дер Поля.

Это является обобщением на системы с запаздыванием результатов А.П.Проскурякова,относящихся к построению периодических решений квазилинейных автономных систем не содержащих запаздывания.

§2 посвящен нахождению периодических решений квазилинейной неавтономной системы.

$$\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_2x(t)+b_1\dot{x}(t-\tau)+b_2x(t-\tau)=$$

$$f(t)+\varepsilon\mathcal{F}[t,x(t),\dot{x}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\varepsilon] \qquad (1)$$

Здесь a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , $\tau>0$ - постоянные величины,функции f и $\mathcal{F}$ периодические по отношению к t с периодом 2π и, кроме того, $\mathcal{F}$ аналитична относительно $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $x(t-\tau)$, $\dot{x}(t-\tau)$, ε . Показывается, как найти периодические решения уравнения (1) в случае кратных корней амплитудных уравнений.

В § 3 решена задача отыскания асимптотических приближений при наличии кратных корней уравнений основных амплитуд для системы дифференциально - разностных уравне - ний вида

$$\dot{x}_s(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{si}x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}b_{si}x_i(t-\tau)+f_s(t)+$$

$$\varepsilon\mathcal{F}_s[t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1(t-\tau),\ldots,x_n(t-\tau),\varepsilon],\ (s=1,\ldots,n),$$

где a_{si} , b_{si} , τ - постоянные величины,причем $\tau>0$, а функции f_s и $\mathcal{F}_s\,(s=1,\ldots,n)$ обладают теми же свойствами, что и функции f и $\mathcal{F}$ в предыдущем параграфе.

Случай простых корней амплитудных уравнений детально изучен в работе С.Н.Шиманова $[3]$.

Глава 11, об"единяющая пять параграфов, посвящена распространению метода вспомогательных систем С.Н.Шиманова на квазилинейные неавтономные системы с запаздыванием для не изучавшегося ранее случая кратных корней разрешающих уравнений.

В § 1 рассмотрена квазилинейная колебательная система с двумя степенями свободы.

$$\ddot{x}_1(t)+k^2x_1(t)=f_1(t)+\varepsilon\mathcal{F}_1[t,x_1(t),x_2(t),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t),$$
$$x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),\dot{x}_1(t-\tau),\dot{x}_2(t-\tau),\varepsilon]$$
$$\ddot{x}_2(t)+\omega_2^2x_2(t)=f_2(t)+\varepsilon\mathcal{F}_2[t,x_1(t),x_2(t),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t), \qquad (2)$$
$$x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),\dot{x}_1(t-\tau),\dot{x}_2(t-\tau),\varepsilon],$$

где $\omega_1=k$ - целое число, ω_2 - нецелое число, а функции f_s и $\mathcal{F}_s$ $(s=1,2)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в § 3 главы 1.

Вспомогательная система для уравнений (2) имеет вид

$$\ddot{x}_1(t)+k^2x_1(t)=f_1(t)+\varepsilon\mathcal{F}_1[t,x_1(t),x_2(t),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t),$$
$$x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),\dot{x}_1(t-\tau),\dot{x}_2(t-\tau),\varepsilon]+W_1\cos kt+W_2\sin kt$$
$$\ddot{x}_2(t)+\omega_2^2x_2(t)=f_2(t)+\varepsilon\mathcal{F}_2[t,x_1(t),x_2(t),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t),$$
$$x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),\dot{x}_1(t-\tau),\dot{x}_2(t-\tau),\varepsilon]$$

Периодические решения вспомогательной системы и постоянные W_1, W_2 ищутся в форме рядов

$$x_s(t)=x_{s0}(t)+\varepsilon x_{s1}(t)+\varepsilon^2x_{s2}(t)+\ldots$$
$$W_s=W_{s0}+\varepsilon W_{s1}+\varepsilon^2W_{s2}+\ldots \qquad (s=1,2)$$

с начальными условиями

$$x_1(0)=x_{10}(0)+\beta_1(\varepsilon),\quad \dot{x}_1(0)=\dot{x}_{10}(0)+\beta_2(\varepsilon),$$
$$x_2(0)=\varphi_2(0),\quad \dot{x}_2(0)=\dot{\varphi}_2(0),$$

где $\beta_1(0)=\beta_2(0)=0.$

Устанавливаются условия существования периодических решений системы уравнений (2), а также способ их построения.

Во втором параграфе исследуется устойчивость периодических колебаний системы (2) методом подсчета характеристических показателей.

§ 3 содержит построение приближенных решений для квазилинейного дифференциально - разностного уравнения третьего порядка.

В § 4 показан процесс определения периодических решений системы (2) в частном случае двукратных корней уравнений основных амплитуд.

Доказывается теорема.

Для того, чтобы система (2) при достаточно малом ε допускала периодическое решение, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее, необходимо, чтобы параметры A_0 и B_0 удовлетворяли амплитудным уравнениям

$$P_1(A_0, B_0) = 0, \quad Q_1(A_0, B_0) = 0 \qquad (3)$$

Если при этом

$$\Delta = \frac{\partial(P_1, Q_1)}{\partial(A_0, B_0)} = 0$$

и корни A_0, B_0 уравнений (3) двукратные, то система (2) имеет два периодических решения, которые разлагаются в ряды по степеням ε или $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Имеет место бифуркация порождающего решения.

В § 5 получены условия существования и способ нахождения асимптотических решений системы (2) в предположении, что корни характеристического уравнения кратные. Вспомогательная система в этом случае имеет вид

$$\ddot{x}_s(t) + k^2 x_s(t) = f_s(t) + \varepsilon \mathcal{F}_s[t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \dot{x}_1(t-\tau), \dot{x}_2(t-\tau), \varepsilon] + W_{s1}\cos kt + W_{s2}\sin kt$$
$$(s = 1, 2),$$

начальные условия для которой удобно выбрать такими

$$x_1(0)=x_{10}(0)+\beta_1(\varepsilon),\ \dot{x}_1(0)=\dot{x}_{10}(0)+\beta_2(\varepsilon),$$
$$x_2(0)=x_{20}(0)+\beta_3(\varepsilon),\ \dot{x}_2(0)=\dot{x}_{20}(0)+\beta_4(\varepsilon),$$

где $\beta_1(0)=\beta_2(0)=\beta_3(0)=\beta_4(0)=0$.

Доказывается, что в случае кратных корней характеристического уравнения и кратных корней уравнений основных амплитуд периодическое решение системы уравнений (2), если оно существует, может быть представлено в виде ряда по целым положительным степеням параметра ε.

Глава III посвящена исследованию нестационарных колебаний в слабо нелинейных системах с запаздыванием асимптотическим методом Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского. Доказывается, что для нахождения последовательных приближений достаточно представить в виде ряда по степеням параметра ε только ψ, задавая a только первым членом ряда. Удается также освободить функции $u_i(\tau,a,\psi)$ от условия отсутствия первой гармоники.

В первом параграфе рассмотрена нелинейная колебательная система с одной степенью свободы с медленно меняющимися параметрами и для нее произведен расчет первого и второго приближения.

В § 2 метод предыдущего параграфа распространяется на квазилинейные системы со многими степенями свободы с запаздыванием.

Последний, третий параграф посвящен применению упомянутого выше метода к системам с медленно меняющимися параметрами, в предположении, что "частоты" и амплитуды внешних сил также медленно изменяются. со временем.

Основные результаты диссертации изложены в работах [9-12] и докладывались на Ш Республиканской научной конференции молодых математиков Украины / Киев, 1966 г./, на Республиканской конференции - симпозиуме по дифференциальным уравнениям и численным методам их решения /Киев, 1967 г./, на научных конференциях кафедр Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького /Киев,1966,1967гг./

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Э.Эльсгольц,Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, М.,1955.

2. Н.Н.Красовский, О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, ДАН СССР,т.114,№2, 1957.

3. С.Н.Шиманов, К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием, ПММ, т.23, вып.5,1959.

4. С.Н.Шиманов, Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием, Изв.высш.уч.завед.,Радиофизика, т.3, №3, 1960.

5. В.П.Рубаник, Применение асимптотического метода Н.М.Крылова и Н.Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям,Укр.матем.журн.,т.XI,№4, 1959.

6. В.П. Рубаник, Многочастотные резонансные колебания в квазилинейных системах с запаздывающими аргументами, Изв. высш. уч. завед., Радиофизика, т. 4, № 4, 1961.

7. В.И.Фодчук, К вопросу о построении стационарных решений для квазилинейных уравнений с запаздывающим аргументом, Докл. АН УССР, № 10,1962. / на укр.яз./

8. В.И.Фодчук, О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с малым параметром,
Укр.матем. журн., т. XIУ, № 4, 1962.

9. В.В.Мисак, Периодические решения дифференциально-разностных автономных систем с одной степенью свободы ,
Укр. матем.журн. т. 18, 5, 1966.

10. В.В.Мисак, Периодические колебания квазилинейных неавтономных систем с запаздыванием ,
Изв.высш.уч. завед., Математика, 8, 1967 .

11. В.В.Мисак, Периодические колебания квазилинейных неавтономных систем с запаздыванием в случае кратных корней амплитудных уравнений,
Третья научная конф.молод. математиков Украины, Тезисы докладов, 1966. / на укр.яз./

12. В.В.Мисак, Периодические решения неавтономных квазилинейных систем с запаздыванием в случае кратных корней амплитудных уравнений, Укр. матем. журн. , /в печати/.

БФ - 16196. Подписано к печати 22.3.68
Заказ № 152/68. Тираж 150.
Учебно-производственный комбинат УСХА