МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

МУРАЧ Михаил Максимович

ОБОБЩЕННЫЕ FC — ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

01. 01. 03. Алгебра и теория чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Киев — 1975

Работа выполнена на кафедре высшей математики Киевского государственного педагогического института им. А.М.Горького.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
профессор В.С.ЧАРИН.

Официальные оппоненты:

член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук,
профессор С.Н.ЧЕРНИКОВ,

кандидат физико-математических наук В.М.ПОЛЕЦКИХ.

Ведущее предприятие - Уральский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им.А.М.Горького/г.Свердловск/.

Автореферат разослан " " ________________ 197 г.

Защита диссертации состоится " " ____________ 197 г.
в часов на заседании Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им.А.М.Горького по присуждению ученых степеней.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Отзывы просим присылать по адресу:
252030, г. Киев-30, ул.Пирогова, 9.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Для решения многих вопросов теории групп, связанных с некоторыми заданными группами, важное, а нередко и определяющее значение имеют знания свойств и строения их групп автоморфизмов. В изучении самих групп автоморфизмов групп существенную роль играют исследования по линейным / матричным / группам - группам линейных преобразований векторных пространств.

Начальный период развития теории линейных групп связан с работами математиков конца прошлого и начала нашего века, в которых исследуются в основном конечные группы линейных преобразований конечномерных векторных пространств.

В середине нашего века начался новый период развития теории линейных групп, обусловленный воздействием главным образом теории бесконечных групп. Успехи теории линейных групп оказывают в свою очередь плодотворное влияние на развитие теории групп автоморфизмов групп и теории бесконечных групп. Это взаимное влияние теорий привело к появлению нового направления в теории групп, сущность которого заключается в установлении естественных связей и взаимодействий между абстрактной теорией групп и теорией групп преобразований. Исходными работами в этом направлении явились фундаментальные работы А.И.Мальцева, Е.Колчина, Д.А.Супруненко и других алгебраистов. В их работах были разработаны новые методы исследования групп, получены многие глубокие результаты по матричным представлениям бесконечных групп, о строении различных классов линейных групп, установлении связей групп автоморфизмов групп с линейными группами и взаимодействий абелевых, нильпотентных, разрешимых групп и их групп автоморфизмов.

Изучению групп автоморфизмов нильпотентных, разрешимых групп, применению полученных результатов в исследовании строения таких групп и их обобщений посвящаются работы Д.М.Смирнова, В.С.Чарина и других. Многие глубокие результаты о различных классах групп линейных преобразований устанавливаются в многочисленных статьях В.П.Платонова,Ю.И.Мерзлякова, Ж.Титса и других советских и зарубежных алгебраистов.

Как уже отмечалось, успешное развитие теории групп преобразований было обусловлено воздействием главным образом теории бесконечных групп, в которой к концу 50-х годов были разработаны многочисленные методы исследования и получены многие важные результаты по теории нильпотентных, разрешимых групп и их обобщений с различными дополнительными условиями ограничительного характера.

Одним из основных направлений в теории бесконечных групп к этому времени становится изучение групп с условиями конечности. Систематическое исследование таких групп было начато в конце 30-х годов С.Н.Черниковым, О.Ю.Шмидтом, А.И.Мальцевым и другими изучением групп с условием минимальности для тех или иных подгрупп, групп с конечными классами сопряженных элементов и групп конечного ранга. Изучение групп с условиями конечности дало много глубоких результатов о строении различных классов групп. В 70-х годах В.П.Шунковым, а также Кегелем и Верфрицем была положительно решена в классе локально конечных групп хорошо известная проблема минимальности Черникова.

Группы с конечными классами сопряженных элементов / FC -группы / являются естественным обобщением конечных и абелевых групп. Изучение FC -групп было начато в 30-х годах в связи с доказательством А.П.Дицманом конечности нормальной подгруппы, порожденной всяким конечным инвариантным множеством элементов конечного порядка. В 40-х годах С.Н.Черников глубоко изучил FC-группы, в которых множество элементов любого порядка конечно. Произвольные FC-группы изучались Р.Бэром, Б.Нейманом и другими алгебраистами. Основные свойства и строение таких групп и их обобщений были установлены С.Н.Черниковым.

Изучению свойств и строения обобщенных FC-групп линейных преобразований конечномерных векторных пространств и обобщенных групп автоморфизмов, которые удовлетворяют тем или иным условиям конечности, разрешимых групп посвящена и настоящая диссертация.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Первый параграф каждой главы посвящен обозначениям, определениям и используемым результатам. Охарактеризуем основное содержание диссертации.

В первой главе изучаются линейные / матричные / обобщенные FC-группы и обобщенные FC-группы автоморфизмов разрешимых групп. Здесь рассматриваются четыре обобщения FC-групп.

Ввиду существования групп, не принадлежащих классу FC-групп, но каждая конечно порожденная подгруппа которых является FC-группой, естественно определяется класс локально FC-групп. Изучению матричных локально FC-групп посвящается §2.

В силу теоремы С.Н.Черникова о строении произвольной FC-группы известно, что всякая непериодическая FC-группа есть центральное расширение абелевой группы без кручения с помощью локально нормальной группы. Матричная FC-группа является конечным расширением центральной подгруппы. С другой стороны, пример группы $G = A \leftthreetimes X$, где G - полупрямое произведение квазициклической p-группы $A = \langle e, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$ и бесконечной циклической группы $X = \langle x \rangle$, образующие которых удовлетворяют соотношению $x^{-1} a_n x = a_n a_{n-1}$ для всех $n = 1, 2, \dots$, показывает, что существуют непериодические локально FC-группы, не имеющие центральных элементов без кручения. В связи с этим естественно возникает вопрос о строении матричных локально FC -групп. Ответом на этот вопрос являются следующие две теоремы.

Теорема I / Теорема 2.I диссертации /. Матричная группа G над полем нулевой характеристики тогда и только тогда является локально FC -группой, когда она обладает периодическим коммутантом.

Пример группы $G=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, где x - некоторое неизвестное, показывает, что в случае поля положительной характеристики необходимые условия теоремы I не являются достаточными. Необходимые и достаточные условия существования матричных локально FC -групп над произвольным полем устанавливает

Теорема 2 / Теорема 2.3 диссертации /. Матричная группа G над произвольным полем тогда и только тогда является локально FC -группой, когда она либо периодическая, либо в ее центре содержится такая подгруппа A без кручения, что фактор-группа G/A локально конечна.

Естественным обобщением разрешимых групп являются FC -разрешимые группы - группы, обладающие конечным субнормальным рядом, факторы которого являются FC -группами. Строение FC -разрешимых матричных групп изучается в §3.

Из результата А.И.Мальцева о возможности изоморфного матричного представления всякой группы, обладающей такой подгруппой конечного индекса, которая допускает изоморфное представление матрицами, и определения FC -разрешимой группы следует, что почти разрешимые группы матриц относятся к классу FC -разрешимых матричных групп. В силу следующей теоремы получаем, что из таких и только из таких групп состоит класс FC -разрешимых матричных групп.

Теорема 3 / Теорема 3.I диссертации /. Всякая FC -разрешимая матричная группа над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики обладает такой нормальной подгруппой конечного индекса, все матрицы которой одновременным трансформированием приводятся к треугольному виду. В частности, если FC -разрешимая группа неприводимая, то она почти абелева.

Эта теорема является естественным перенесением теоремы Колчина-Мальцева на случай FC -разрешимых матричных групп.

Аналогом локально разрешимых групп являются локально FC -разрешимые группы - группы, в которых каждая конечно порожденная подгруппа FC -разрешима. Из теоремы 3 и результата В.П.Платонова о почти разрешимости всякой матричной группы над полем нулевой характеристики, каждая подгруппа с двумя образующими которой почти разрешима, вытекает совпадение класса локально FC -разрешимых групп с классом FC -разрешимых групп в случае матричных групп над такими полями. Однако в случае полей положительной характеристики рассматриваемые классы матричных групп существенно различны, поскольку над такими полями существуют бесконечные локально конечные простые группы. Этот результат следует также из недавно доказанного Ж.Титсом утверждения о том, что всякая матричная группа над полем нулевой характеристики, не содержащая неабелевых свободных подгрупп, является почти разрешимой, а в случае поля положительной характеристики обладает такой разрешимой нормальной подгруппой, фактор-группа по которой локально конечна. Из этого результата и определения локально FC -разрешимых групп вытекает, что класс матричных групп, не содержащих неабелевых свободных подгрупп, и класс локально FC -разрешимых матричных групп совпадают.

Естественным обобщением нильпотентных групп являются FC -нильпотентные группы, а ZA -групп - HFC -группы. Напомним их определение.

Группа G, обладающая верхним FC-рядом $E=G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\gamma$ - рядом, факторы G_{i+1}/G_i которого являются максимальными FC

группами групп G/G_i для всех $i=0,1,2,\dots$, - называется HFC-группой и просто FC-нильпотентной группой в случае, когда ряд конечен.

Строение таких матричных групп изучается в §4.

Ясно, что всякая матричная группа G естественным образом является группой операторов линейного пространства $[G]$ алгебры всех матриц этой группы относительно подобных преобразований ее матрицами. В случае FC-нильпотентной матричной группы G, исходя из того, что группа G индуцирует в пространстве $[G]$ FC-нильпотентную матричную группу, индукцией по степени матриц доказывается теорема, описывающая строение FC-нильпотентных матричных групп.

Теорема 4 / Теорема 4.I диссертации /. Матричная группа G над произвольным полем тогда и только тогда является FC-нильпотентной, когда она обладает нильпотентной подгруппой конечного индекса.

Оказалось, что класс матричных HFC-групп совпадает с классом FC-нильпотентных групп / теорема 4.2 диссертации /, поэтому класс матричных ZA-групп / совпадающий, как установили М.С.Гаращук и Д.А.Супруненко, с классом локально нильпотентных групп, классом нильгрупп и классом групп, удовлетворяющих нормализаторному условию / является подклассом класса почти нильпотентных матричных групп. Более того, из доказательства теоремы 4.2 следует, что FC-нильпотентная / в частности, нильпотентная / матричная группа над произвольным полем обладает такой нильпотентной подгруппой конечного индекса, ступень нильпотентности которой не превышает квадрата степени матриц.

Аналогом локально нильпотентных групп являются локально FC-нильпотентные группы - группы, в которых каждая конечно порожденная подгруппа FC-нильпотентна. Строение локально FC-нильпотентных матричных групп при дополнительном условии FC-разрешимости описывает следующая теорема.

Теорема 5 / Теорема 4.3 диссертации /. FC -разрешимая локально FC -нильпотентная матричная группа над произвольным полем обладает разрешимой подгруппой конечного индекса, являющейся расширением нильпотентной группы с помощью периодической абелевой группы.

Эта теорема обобщает результат Б.Верфрица о том, что всякая локально сверхразрешимая матричная группа является расширением локально нильпотентной группы с помощью периодической абелевой группы.

Пример группы $G=\left\langle\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_i&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, где $x_i\ (i=0,1,2,..)$ - множество всех корней уравнений $x^{q^n}-1=0\ (n=1,2,..)$, q - простое число, над полем нулевой характеристики или характеристики $p\neq q$ показывает, что даже разрешимая локально почти нильпотентная матричная група не обязана быть почти нильпотентной.

В связи с установлением в §2 - §4 строения обобщенных FC -групп автоморфизмов конечномерных векторных пространств естественно возникает вопрос о строении обобщенных FC -групп автоморфизмов в случае неоднородной области действия, например, в случае разрешимых мальцевских групп - разрешимых A_i-групп, $i=1,2,...,5$. Изучению таких групп посвящен §5. Строение обобщенных FC -групп автоморфизмов разрешимых A_i-групп, $i=3,4,5$, определяется в основном такой теоремой.

Теорема 6 / Теорема 5.I диссертации /. Всякая локально FC -разрешимая группа автоморфизмов разрешимой A_3-группы обладает разрешимой подгруппой конечного индекса.

В силу этой теоремы многие хорошо известные результаты Д.М.Смирнова, В.С.Чарина и других о разрешимых группах автоморфизмов разрешимых мальцевских групп переносятся на локально FC -разрешимые группы автоморфизмов. Некоторые из таких результатов приводятся в диссертации в качестве следствий. Построенный пример 5.I бесконечной с тривиальным разрешимым радикалом локально конечной группы автоморфизмов абелевой A_2-группы показывает, что в случае таких групп теорема 6, вообще говоря, не выполняется.

Предметом исследования второй главы диссертации являются FC-разрешимые группы автоморфизмов, удовлетворяющие тем или иным условиям конечности, разрешимых мальцевских групп.

В §2 этой главы изучаются FC-разрешимые группы с условием mn – условием минимальности для нормальных подгрупп.

Условимся краткости ради mn/m-группой называть группу с условием mn, которая не удовлетворяет условию m – условию минимальности для подгрупп.

Понятно, что каждая группа с условием mn является конечным расширением квазиполной группы – группы, не имеющей истинных подгрупп конечного индекса. В классе этих групп содержится и класс полных в смысле Черникова групп. В этом параграфе устанавливается, что в случае FC-разрешимых групп отмеченные классы полных групп совпадают.

Ввиду разрешимой mn/m-группы В.С.Чарина известно, что ослабление условия m до условия mn расширяет класс разрешимых m-групп. Однако, как доказал Р.Бэр, такое расширение не выходит за пределы локально конечных групп. Оказалось, что аналогичный факт имеет место и в случае FC-разрешимых групп.

Теорема 7 / Теорема 2.1 диссертации /. FC-разрешимая mn-группа локально конечна.

mn/m-группа $G = S \wr X$ – прямое сплетение конечной простой неабелевой группы S и квазициклической группы X – показывает, что класс FC-разрешимых mn-групп более широк, чем класс разрешимых mn-групп даже в случае полных групп. Если же в FC-разрешимой группе G всякая характеристическая подгруппа удовлетворяет условию минимальности для своих нормальных подгрупп, то группа G является черниковской / экстремальной /, т.е. является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп / теорема 2.3 диссертации /.

В этом параграфе устанавливается также ряд свойств FC-разрешимых групп с условием максимальности для тех или иных подгрупп.

В §3 изучается строение периодических mn-групп автоморфизмов разрешимых A_2-групп - разрешимых групп конечного ранга.

Ввиду mn/m-группы В.С.Чарина, совпадающей со своей группой внутренних автоморфизмов и являющейся разрешимой группой не менее чем счетного ранга, и теоремы 7 естественно возникает вопрос о строении периодических mn-групп автоморфизмов разрешимых A_2-групп. Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

Теорема 8 / Теорема 3.I диссертации /. Всякая периодическая mn-группа автоморфизмов разрешимой A_2-группы экстремальна.

Эта теорема не переносится на разрешимые матричные группы, поскольку над полями положительной характеристики имеются группы, изоморфные группе В.С.Чарина. Такой группой, например, является группа $G=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, где x_i $(i=0,1,2,\dots)$ - множество всех корней уравнений $x^{q^n}-1=0$ $(n=1,2,\dots)$, q - простое число, отличное от характеристики поля, над которым рассматривается группа G. Необходимые и достаточные условия существования FC-разрешимых матричных mn/m-групп устанавливает следующее утверждение.

Теорема 9 / Теорема 3.5 диссертации /. FC-разрешимая матричная группа G тогда и только тогда является mn/m-группой, когда она обладает такой квазиполной неабелевой подгруппой Q конечного индекса, что фактор-группа Q/Q' по коммутанту Q' удовлетворяет условию m, а каждый фактор центрального ряда коммутанта Q' есть Q-операторно конечно порожденная группа.

Приведем одну из теорем, в которой описывается влияние строения периодической группы автоморфизмов мальцевских групп конечного ранга на строение самой группы.

Теорема I0 / Теорема 3.2 диссертации /. Если всякая периодическая группа автоморфизмов Φ абелевой A_2-группы G удовлетворяет условию mn, то группа G является абелевой A_3-группой.

Вторая глава завершается §4. В нем исследуются в основном FC-разрешимые группы автоморфизмов, абелевы субнормальные или только абелевы нормальные подгруппы которых удовлетворяют условию минимальности / максимальности / для подгрупп, разрешимых мальцевских групп. Основными результатами этого параграфа являются следующие утверждения.

Теорема II / Теорема 4.I диссертации /. Пусть G - FC-разрешимая матричная группа над произвольным полем. Если всякая абелева нормальная подгруппа группы G экстремальна / конечно порождена /, то группа G экстремальна / почти полициклическая соответственно /.

Теорема I2 / Теорема 4.2 диссертации /. Пусть Φ - локально FC-разрешимая группа автоморфизмов разрешимой A_4-группы. Если абелевы нормальные подгруппы группы Φ экстремальны, то группа Φ конечна.

Отметим, что теорема I2 не переносится на группы автоморфизмов разрешимых A_3-групп, поскольку, например, группа внутренних автоморфизмов группы $G = A \leftthreetimes X$, где $A = \langle e, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ - квазициклическая группа, $X = \langle x \rangle$ - бесконечная циклическая группа, образующие которых удовлетворяют соотношению $x^{-1} a_n x = a_n a_{n-1}$, является непериодической A_3-группой, всякая абелева нормальная / более того, всякая абелева субнормальная / подгруппа которой экстремальна.

Теорема I3 / Теорема 4.3 и теорема 4.4 диссертации /. Пусть G - группа, обладающая конечным субнормальным рядом с почти разрешимыми факторами.

а/. Если группа G периодическая и всякая ее абелева субнормальная подгруппа экстремальна, то и сама группа G экстремальна.

б/. Если в непериодической группе G всякая абелева субнормальная подгруппа конечно порождена, то группа G почти полициклическая.

Ввиду теоремы 6 эта теорема выполняется и для локально FC-разрешимых групп автоморфизмов разрешимых A_i-групп, $i = 3,4,5$. В случае A_2-групп приводится пример периодической локально конечной группы автоморфизмов, показывающий, что теорема 13 для таких групп, вообще говоря, не имеет места. Отметим также, что при ослаблении в теореме условия конечной порожденности всякой абелевой субнормальной подгруппы разрешимой группы до условия конечной порожденности всякой абелевой нормальной подгруппы получаем более широкий класс групп. В работе это подтверждается построением примеров непериодической и периодической разрешимых групп, в которых все абелевы нормальные подгруппы конечно порождены, но группы не являются ни экстремальными ни полициклическими.

Приведенные результаты §4 показывают, что по содержанию они примыкают к работам С.Н.Черникова и других, изучавших влияние абелевых нормальных подгрупп с теми или иными условиями конечности на строение нильпотентных, обобщенно нильпотентных и других классов групп.

Основные результаты диссертации докладывались на XII Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме / г. Свердловск, 1973 г./, на алгебраических семинарах Института математики АН УССР и Киевского государственного университета имени Т.Г.Шевченко; на отчетно-научных конференциях в Черниговском пединституте имени Т.Г.Шевченко и опубликованы в работах:

1. М.М.Мурач, Об FC-разрешимых группах автоморфизмов разрешимых групп, XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Свердловск, 1973, 44.

2. М.М.Мурач, FC-разрешимые группы автоморфизмов разрешимых групп, сб. "Группы с заданными свойствами подгрупп", Изд. Института математики АН УССР, Киев, 1973, 309 - 324.

3. М.М.Мурач, Про FC-розв"язні групи автоморфізмів розв"язних груп скінченного рангу, ДАН УРСР, серія А, №8, 1973, 696 - 698.

4. М.М.Мурач, О некоторых обобщенных FC-группах, Всесоюзный алгебраический симпозиум, Гомель, 1975, 142 - 143.

Чернигов, облтипография им. С.М.Кирова. БШ 02022, з. 3683.