МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

О. Н. КОЛЕСНИКОВ

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук,
доцент Н. А. НИКУЛИН

КИЕВ — 1967

Настоящее исследование посвящено плоским кривым четвертого порядка.

В научной литературе имеется значительное число работ, в которых рассматриваются вопросы, связанные с кривыми четвертого порядка, но большинство из них имеет характер небольших заметок, в них рассматриваются отдельные специальные свойства некоторых видов кривых (имеется в виду аналитическое изложение вопроса).

Целью нашего исследования являются вопросы конструирования и классификации плоских кривых четвертого порядка, определяемых уравнением относительно некоторой декартовой (или аффинной) системы координат. Ставится задача построения любой кривой четвертого порядка удобным в практическом отношении способом, используя метод рациональных преобразований, а также вопросы исследования кривой.

Работа содержит 254 страницы машинописного текста, а также 67 чертежей, выполненных фотографическим способом.

В небольшом предисловии ставится цель исследования и указывается план его.

Работа делится на пять глав. В первой главе («Введение») дается сжатое изложение некоторых, известных из теории алгебраических кривых, сведений, которыми автор пользуется в дальнейшем. Рассматривая, в частности, вопрос о кратных точках кривых четвертого порядка, автор доказывает теорему о точке самоприкосновения, не встреченную им в других источниках. Доказано, что всякая точка самоприкосновения кривой четвертого порядка представляет собой две двойные точки, совпавшие по направлению касательной к кривой, построенной в точке самоприкосновения. Найдены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения кривой четвертого порядка, чтобы она имела точку самоприкосновения.

Глава вторая посвящена конструированию кривых четвертого порядка рода нуль. Глава подразделяется на 12 параграфов. В первом из них проводится достаточно полное исследование квадратичных (бирациональных) преобразований и устанавливается их связь с построением уникурсальных кривых. Во втором и последующих параграфах этой главы рассматриваются вопросы конструирования всех возможных типов уникурсальных кривых четвертого порядка. Отдельные параграфы посвящены определенным типам кривых рода нуль. В каждом из них рассматривается каноническое уравнение кривой четвертого порядка данного типа, определяется базисная кривая второго порядка (базис) и такое бирациональное преобразование, которое переводит базис в кривую четвертого порядка, заданную уравнением; рассматривается геометрическое осуществление найденного преобразования, а также находятся соотношения между коэффициентами заданной кривой четвертого порядка и коэффициентами базиса и параметрами преобразования.

Применение большинства из приводимых бирациональных преобразований у других авторов нами не встречено.

В некоторых, наиболее интересных, случаях рассматриваются конкретные примеры конструирования кривых четвертого порядка, заданных уравнениями с числовыми коэффициентами.

Во втором параграфе главы рассматриваются, в частности, вопросы конструирования циркулярных уникурсальных кривых. Доказывается, что каноническое уравнение циркулярной кривой четвертого порядка с тройной точкой имеет вид

$$(x^2+y^2)\cdot(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)+\chi x^3+\lambda x^2 y+\mu xy^2+\nu y^3=0$$

и что коническое сечение, отличное от окружности, и проходящее через начало координат

$$A\,x^2+B\,x'\,y'+C\,y^2+Д\,x'+E\,y'=0,$$

в циссоидальном преобразовании, определяемом уравнениями

$$\begin{cases} x'=x\cdot\varphi; \\ y'=y\cdot\varphi; \end{cases} \quad \text{где} \quad \varphi=-\frac{x^2+y^2+ax+by}{x^2+y^2};$$

своим образом имеет циркулярную кривую четвертого порядка с тройной точкой в начале координат. Рассматриваются свойства преобразования, из которых непосредственно следует такое его геометрическое осуществление: принимаем за ось циссоидального преобразования окружность $x^2+y^2+ax+вy=0$, за полюс — начало координат; тогда проведя через полюс произвольный луч, встречающий ось в точке $M''(x''; y'')$ и базис в точке $M'(x'; y')$, определим на нем точку $M(x; y)$, соответственную точке $M'(x'; y')$, так, чтобы $\overline{OM}=\overline{OM''}-\overline{OM'}=\overline{M'M''}$.

Далее доказывается, что по данному уравнению циркулярной кривой четвертого порядка с тройной точкой в начале координат всегда можно определить базисную кривую второго порядка и такое циссоидальное преобразование, которое переводит базис в кривую четвертого порядка, заданную уравнением. Для этого достаточно выбрать

$$A=\alpha;$$

$$B=\beta;$$

$$C=\gamma;$$

$$Д=\frac{\alpha\beta\cdot(\lambda-\nu)-\chi\cdot(\beta^2+\gamma^2)+\alpha\cdot(\gamma\mu+\gamma\chi-\alpha\mu)}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2};$$

$$E=\frac{\beta\gamma\cdot(\mu-\chi)-\nu\cdot(\alpha^2+\beta^2)+\gamma\cdot(\alpha\nu+\alpha\lambda-\gamma\lambda)}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2};$$

$$a=\frac{(\alpha-\gamma)\cdot(\chi-\mu)+\beta\cdot(\lambda-\nu)}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2};\quad b=\frac{(\alpha-\gamma)\cdot(\lambda-\nu)+\beta\cdot(\mu-\chi)}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}$$

(Для рассматриваемого типа кривых случай $(\alpha-\gamma)^2+\beta^2=0$ невозможен).

Здесь же рассматривается еще один способ конструирования циркулярных кривых четвертого порядка с тройной точкой.

Построение других типов в циркулярных кривых рода нуль мы особо не выделяем.

Третий параграф главы посвящен бициркулярным кривым четвертого порядка рода нуль. Среди названных кривых имеются кривые только одного типа — с конечной двойной точкой. Для конструирования этих кривых предлагаются два способа, одинаково удобные и простые в практическом отношении.

В следующем параграфе рассмотрено конструирование битангенциально-циркулярных кривых рода нуль. Эти кривые выделены особо потому, что наличие двойной касательной дает в ряде случаев возможность упрощения их построения в сравнении с другими кривыми того же рода.

Далее в главе рассмотрены:

§ 5. Кривые с тремя конечными различными двойными точками.

§ 6. Кривые с двумя конечными различными и одной бесконечно удаленной двойной точкой.

§ 7. Кривые с одной конечной и двумя бесконечно удаленными различными двойными точками.

§ 8. Кривые с тремя двойными конечными точками, две из которых совпали.

§ 9. Кривые с двумя конечными совпавшими двойными точками и одной бесконечно удаленной.

§ 10. Кривые с одной конечной и двумя совпавшими бесконечно удаленными двойными точками.

§ 11. Кривые с конечной тройной точкой.

§ 12. Кривые с бесконечно удаленной тройной точкой.

Таким образом задача геометрического построения уникурсальных кривых четвертого порядка решена нами полностью.

В третьей главе работы рассматривается конструирование кривых четвертого порядка рода 1. В этой главе 11 параграфов.

В первом из них приводятся общие сведения об одно-двузначных преобразованиях, используемых автором в дальнейшем для конструирования кривых. С помощью специальным образом подобранных рациональных преобразований автор отображает кривые второго (в некоторых случаях, для упрощения построений, третьего) порядка в кривые четвертого порядка рода 1. Зная свойства базисной кривой и свойства применяемого преобразования, легко установить как очертание конструируемой кривой четвертого порядка, так и ее основные свойства. По свойствам рациональных преобразований легко отыскиваются и способы построения соответственных точек (по заданным точкам базиса отыскиваются точки кривой четвертого порядка).

Значительная часть используемых в главе рациональных преобразований не встречена нами у других авторов.

Второй параграф главы посвящен использованию одно-двузначных преобразований для построения специальных видов уникурсальных кривых четвертого порядка (в их числе — кардиоида, лемниската Бернулли и др.). Преимущество приводимого способа для конструирования кривых указанного рода состоит в том, что базисной кривой является окружность, построение которой, конечно, осуществляется значительно проще, чем любого другого конического сечения.

Далее рассматривается задача геометрического образования специальных типов кривых четвертого порядка рода 1, проходящих через циклические точки плоскости, так как их построение осуществляется, вообще говоря, проще построения остальных кривых того же рода.

Рассмотрены циркулярные кривые с двумя совпавшими двойными конечными точками; циркулярные кривые с одной конечной и одной бесконечно удаленной двойной точкой; бициркулярные кривые общего вида; битангенциально-циркулярные кривые с двумя совпавшими двойными конечными точками. Этому вопросу посвящены §§ 3—6.

Построение циркулярных и битангенциально-циркулярных кривых с двумя двойными конечными различными точками особо не рассматривается, так как более простого способа их конструирования, чем для общих кривых того же типа, нами не найдено.

Названные типы кривых четвертого порядка первого рода, проходящих через циклические точки плоскости, исчерпывают все возможные. Поэтому мы считаем полностью решенной задачу построения кривых четвертого порядка рода 1, проходящих через циклические точки плоскости, удобными и простыми в практическом отношении способами.

В седьмом и следующих параграфах главы рассмотрены способы построения кривых четвертого порядка рода 1, не проходящих через циклические точки плоскости, при этом исследованы все возможные типы кривых первого рода:

§ 7. Кривые с двумя различными конечными двойными точками.

§ 8. Кривые с одной конечной и одной бесконечно удаленной двойной точкой.

§ 9. Кривые с двумя различными бесконечно удаленными двойными точками.

§ 10. Кривые с двумя совпавшими двойными конечными точками.

§ 11. Кривые с двумя совпавшими двойными бесконечно удаленными точками.

Таким образом полностью решена задача построения и кривых четвертого порядка рода 1.

В четвертой главе рассмотрено построение кривых четвертого порядка рода 2 и рода 3. Глава разделена на шесть параграфов, каждый из которых посвящен конструированию кривых определенного типа:

§ 1. Битангенциально-циркулярные кривые рода 2.

§ 2. Циркулярные кривые с конечной двойной точкой.

§ 3. Кривые четвертого порядка с конечной двойной точкой.

Здесь, в частности, доказаны следующие теоремы:

1. Кривые четвертого порядка с конечной двойной точкой, имеющие по меньшей мере два мнимых асимптотических направления, являются кривыми аффинно соответствен-

ными циркулярным кривым четвертого порядка с конечной двойной точкой.

2. Кривые четвертого порядка с конечной двойной точкой являются перспективой циркулярных кривых четвертого порядка с двойной точкой.

Эти выводы послужили основой для конструирования кривых четвертого порядка рода 2 с конечной двойной точкой.

§ 4. Циркулярные кривые с бесконечно удаленной двойной точкой.

§ 5. Кривые четвертого порядка с бесконечно удаленной двойной точкой.

Подводя итог конструированию кривых четвертого порядка рода 0, рода 1 и рода 2, приходим к выводу о том, что любая кривая указанного рода может быть построена с помощью циркуля и линейки при использовании в качестве базиса кривой второго порядка при помощи специального рационального преобразования.

Завершается четвертая глава § 6— о кривых четвертого порядка рода 3, построение которых может быть осуществлено с привлечением более мощных инструментов, например, циркуля, линейки и прямого угла.

Пятая глава работы посвящена вопросу классификации плоских кривых четвертого порядка. Хотя классификация кривых четвертого порядка фактически уже была дана при конструировании кривых, но нам представляется более целесообразным построить классификацию на иной основе, пользуясь лишь одним преобразованием, а именно, центральным рациональным преобразованием.

Хотя общее преобразование не дает столь простого решения задачи конструирования кривых с учетом их геометрических особенностей, тем не менее оно очень удобно для классификации кривых. Это — некоторого частного вида три — однозначное соответствие. Каждую прямую оно переводит в кривую четвертого порядка. Кратные точки этой кривой оказываются связанными с определенной парой кубических уравнений, которая и служит основой для проективной классификации кривых четвертого порядка.

Пользуясь этим, мы приходим к трем типам кривых четвертого порядка, каждый из которых включает в себя несколько классов: в первом типе семь классов, во втором типе пять классов, в третьем типе четыре класса.

Рассмотренной классификацией исчерпываются основные проективные виды плоских кривых четвертого порядка.

По материалам диссертации опубликованы следующие статьи автора:

1. О некоторых замечательных кривых третьего и четвертого порядка. Изв. Крымского педагогического ин-та, т. 21, 1955 г., стр. 135—156.

2. Геометрическое образование плоских кривых четвертого порядка. Изв. Крымского педагогического ин-та, т. 29, 1957 г., стр. 86—154.

3. О классификации плоских кривых четвертого порядка. Изв. Крымского педагогического ин-та, т. 34, 1959 г., стр. 119—126.

4. Об одном рациональном преобразовании. Изв. Крымского педагогического ин-та, т. 35, 1961 г., стр. 259—268.

5. К вопросу о классификации алгебраических кривых четвертого порядка. Тезисы докладов Второй всесоюзной геометрической конференции. Изд. Харьковского университета, 1964 г., стр. 123—124.

6. О некоторых интересных свойствах кривых четвертого порядка. Тезисы докладов итоговой научной конференции профессорско-преподавательского состава Крымского педагогического ин-та, 1965 г., стр. 120—122.

БФ 21202. Подписано к печати 12.I 1967 г. Формат бумаги $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Объем 0,5 печ. л. Зак. 281. Тираж 200.

Киев, тип. № 3, цех 2