КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

В. М. КУХАРЬ

Развитие понятия о числе в средней школе

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата
педагогических наук (по методике математики)

Научный руководитель — Заслуженный деятель
науки УССР, профессор Астряб А. М.

Киев — 1955

Цель диссертационной работы. Одной из центральных идей в школьном курсе математики является идея развития понятия о числе, как «основном стержне всего школьного курса математики, пронизывающем этот курс от первого до последнего класса»[1].

Глубокое понимание большинства вопросов школьного курса математики (и тем более идей современной математической науки) требует прежде всего сознательного усвоения понятия числа.

Кроме *общеобразовательного* значения, проблема развития понятия о числе имеет также большое *идейно-воспитательное* и *практическое* значение и должна быть использована в целях постепенного и неуклонного привития учащимся диалектико-материалистического понимания законов развития общества, науки и техники, понимания связи теории с практикой, роли практики как критерия истинности теории.

До сих пор еще буржуазные философы пытаются использовать эту проблему в идеалистических целях. С одной стороны, ссылаясь на то, что понятие натурального числа, лежащее в основе математической науки, не может быть определено, они утверждают, что это понятие является «врожденным у человека», существующим независимо от опыта, повторяя вслед за Кронеккером: «Бог создал натуральные числа, все прочее — дело рук человеческих»; с другой стороны, используя трудности, связанные с необходимостью введения дополнительных определений прямых действий при каждом новом расширении понятия о числе, они пытаются «доказать», что эти определения представляют собой «произвольные соглашения», «продукт чистой фантазии ученых».

Изучение каждого вида чисел в историческом развитии и взаимосвязи с другими числами должно способствовать:

а) формированию у учащихся понятия о числе как отвлеченном понятии, возникшем в результате трудовой деятельности человека, уяснению того, что это понятие заимствовано из действительного мира;[2]

---

[1] А. Я. Хинчин, Основные понятия и математические определения в средней школе, М., Учпедгиз, 1940, стр. 5.

[2] Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, Госполитиздат, 1948, стр. 37.

б) выработке у учащихся необходимости рассмотрения всех предметов и явлений в их взаимосвязи друг с другом, ибо нельзя уяснить сущность одного вида чисел вне связи с другими числами;

в) привитию учащимся чувства национальной гордости в процессе выяснения борьбы передовых русских ученых за материалистическое понимание природы числа, а также их достижений в развитии данной проблемы;

г) развитию у учащихся обобщающего мышления и повышению идейно-научного уровня их математической подготовки.

Понятие числа является не только одним из важнейших понятий школьного курса математики, но, вместе с тем, и одним из наиболее трудных понятий. Особенность его в том, что оно находится в диалектическом развитии, поэтому речь может идти не о понятии числа вообще, а о понятии числа на каком-то определенном этапе его развития. С этим связано отсутствие логического определения общего понятия числа, из которого определения отдельных видов чисел получались бы указанием видовых признаков. *Общее понятие числа формируется у учащихся постепенно на базе представлений о каждом отдельном виде чисел, путем обобщения этих представлений.*

К сожалению, исключительная важность и сложность идеи развития понятия о числе часто недооценивается. В практике средних школ в данном вопросе существует еще целый ряд недостатков:

1. Далеко не всегда проводится подготовительная работа к введению новых чисел: а) к осознанию необходимости введения новых чисел в связи с требованием практики (в широком смысле слова); б) к осознанию идей, лежащих в основе расширения понятия о числе, путем систематизации основных сведений об известных уже числах. Такая систематизация программой предусмотрена только в X-м классе перед введением мнимых чисел, но на практике и эта возможность не всегда используется.

2. Исторический обзор развития понятия о каждом виде чисел часто или совсем не дается, или же учащимся сообщают ряд оторванных друг от друга сведений, не объединенных одной общей идеей. Внимание их нередко фиксируется на второстепенных фактах, в то время как главные, принципиальные в идейно-теоретическом отношении вопросы остаются невыясненными. Говоря словами революционного демократа Д. И. Писарева, учащимся «дают готовые результаты науки, и они часто не подозревают, какою борьбою куплено то, что достается им так легко, как бы само собою» [1].

---

[1] Д. И. Писарев, Сочинения, т. I, 1900, стр. 159.

3. Отдельные виды чисел рассматриваются разобщенно. После введения новых чисел недостаточно уделяется внимания *обобщению* понятия числа, выяснению взаимосвязи между известными числами и введенными, их общности и особенностей. Нередко понятие о новых числах вводят наспех, стараясь не слишком привлекать к этому внимание учащихся и быстрее перейти к действиям.

4. При изучении действий в расширенной числовой области часто главное внимание обращают на усвоение учащимися техники действий, не выясняя вопросов их обоснования.

5. Не всегда выясняется практическое применение введенных чисел и его роль в дальнейшем развитии понятия числа.

6. Полученные учащимися сведения о тех или иных числах не всегда закрепляются и углубляются в процессе изучения последующих разделов математики.

Все эти недостатки отрицательно сказываются и на знаниях учащихся. Проведенные автором письменные работы среди десятиклассников [1] и выпускников, поступивших на физико-математический факультет Киевского пединститута в 1953—54 уч. г. и в 1954—55 уч. г., а также их устные ответы на выпускных и вступительных экзаменах свидетельствуют о далеко недостаточном еще понимании значительной частью выпускников основных вопросов, связанных с идеей расширения и обобщения понятия о числе.

Часто выпускники отождествляют понятие числа с изображающим его символом, а вследствие этого и на математические определения смотрят как на произвольные соглашения ученых, считают, что «мнимые числа существуют только в нашем воображении» и т. д. На вопрос «Можно ли доказать, что произведение отрицательных чисел есть число положительное?» (или что $i^2=-1$), многие из них отвечают утвердительно, сопровождая ответы различными «доказательствами». Значительная часть выпускников считает возможным кратное сравнение отрицательных чисел, а также сравнение неравных мнимых чисел, утверждая, что «$2a > a$, а потому и $2i > i$», говорят об увеличении множимого «в $^1/_3$ раза», «в -2 раза» и т. д.

Настоящая работа имеет целью проанализировать процесс постепенного формирования у учащихся понятия о числе с 1-го по X-й класс и наметить пути наиболее эффективного, на наш взгляд, руководства этим сложным процессом. При этом мы ограничиваемся рассмотрением, главным образом, тех вопросов, которые не нашли еще достаточного освещения в литературе, но которые

[1] Базовая школа Киевского пединститута.

играют столь же важную роль, как и техника действий над числами. Это, прежде всего, вопросы, идейного характера, выяснение которых, по возможности, содействовало бы устранению отмеченных выше недостатков в школьном преподавании.

Диссертация выполнена на основании:

1) изучения научно-теоретической, исторической и методологической литературы по теме исследования;

2) изучения состояния преподавания различных видов чисел в средней школе путем анализа учебно-методической литературы, программ и изучения опыта работы преподавателей многих школ[1] (посещение уроков и экзаменов, проверка ученических контрольных работ, беседы с преподавателями и учащимися по намеченным вопросам и т. д.);

3) беседы с учителями-заочниками Запорожского и Киевского пединститутов, а также проверка их контрольных и курсовых работ, изучение материалов методкабинетов и педагогических чтений, участие в учительских конференциях — все это дало возможность вскрыть наличие у учителей некоторых методических трудностей в освещении рассматриваемых в работе вопросов.

4) Использован также 13-летний опыт работы автора в средней школе и в педучилище (в Сталинградской, Днепропетровской и Житомирской областях).

5) Психологической основой сделанных в работе выводов является учение И. П. Павлова о высшей нервной деятельности, дающее научное обоснование выдвинутой передовой педагогической мыслью системы: «учить новое, повторяя, и повторять, изучая новое». Опираясь на эту систему, автор на протяжении всей работы настойчиво проводит мысль о необходимости при изучении новых чисел повторять основы учения об известных уже числах с обязательным внесением новых сведений, которые были недоступны при первоначальном ознакомлении с этими числами. В результате такого повторения мы заставляем учащихся смотреть на известные уже им числа под новым углом зрения, глубже понимать идею развития понятия о числе. Знания учащихся становятся, таким образом, более прочными, превращаясь в убеждения.

6) Эффективность и целесообразность внесенных в работе предложений проверялась экспериментально либо в базовой школе пединститута по разработанному диссертантом плану[2], либо пу-

[1] Школы №№ 20, 24, 74, 92, 135, 138, 155, ВВС г. Киева. Школы №№ 3, 14 и 50 г. Запорожья. Школы №№ 1, 2, 3 г. Коростышева, Житомирской области. Школы с. Боярки и с. Тарасовки, Киевской области. Школа № 2, г. Черкассы и др.

[2] Школа № 74 г. Киева (V, VI и X классы).

тем обобщения передового опыта работы учителей указанных школ, а также учителей, которые поделились своим опытом на страницах методической печати.

7) Работа в целом обсуждалась на научном математическом семинаре Киевского пединститута и на кафедре элементарной математики и методики математики этого же института.

Работа состит из «Введения» и пяти глав, каждая из которых посвящена отдельному виду чисел: натуральным, дробным, отрицательным, иррациональным и комплексным. К работе прилагается список использованной литературы, содержащий 220 названий.

I.

В *первой главе* рассматривается вопрос о том, какое понятие о *натуральных числах* должны получить учащиеся, чтобы оно послужило прочной базой для формирования у них научно-правильного понятия о числе вообще и о каждом виде чисел в отдельности. Здесь, прежде всего, выясняется, какие сведения из истории развития понятия о натуральных числах необходимо использовать в средней школе (сообщить учащимся, либо учесть в процессе преподавания).

Среди трудностей, с которыми встретились при обосновании учения о натуральных числах (в связи с введением новых чисел), главным образом, выделяются: а) трудности, связанные с попытками дать «всеобщее» логическое определение натурального числа, охватывающее все виды чисел; б) трудности, связанные с обоснованием арифметических действий над натуральными числами и основных законов этих действий, с попытками дать «всеобщее» определение действий, приемлемое для любых чисел.

В работе показано, как и почему эти трудности стали причиной идеалистического толкования чисел как произвольных символов, а определений действий,— как произвольных соглашений, обусловленных «капризом ученых» (Кант, Гельмгольц, Пуанкаре и др.). Освещена роль передовых математиков, особенно отечественных (Н. И. Лобачевский, Л. Эйлер, М. В. Остроградский, С. Котельников и др.) в борьбе за материалистическое понимание природы числа, как абстракции от количественных отношений *реального* мира.

Дается краткий анализ современных взглядов на понятие натурального числа и обзор научных теорий натурального числа с точки зрения возможности их использования в средней школе.

В согласии с высказыванием проф. И. В. Арнольда и Л. П. Гокиели[1] подчеркивается, что так называемое определение натурального числа через абстракцию носит формальный, а не диалектический характер. По существу это лишь описательное определение, дающее представление только о количественном натуральном числе, в то время как понятия «количественное» и «порядковое» число— это две стороны одного и того же понятия натурального числа и не могут быть оторваны друг от друга. Понятие натурального числа является *первоначальным* понятием, не подлежащим определению.

В основу изучения натуральных чисел автор рекомендует взять теорию множеств, изложив ее в полном соответствии с психологическими особенностями пятиклассников. Теория порядкового числа, ввиду отвлеченности, не может быть рекомендована в средней школе, однако понятие о порядковом натуральном числе надо дать учащимся, рассматривая его в тесной взаимосвязи с понятием количественного натурального числа. В X классе можно ознакомить учащихся и с системой аксиом натурального ряда.

Опираясь на исследования советских психологов (проф. Менчинская, проф. Костюк), которые установили, что генезис понятия о числе у детей представляет собой весьма сложный процесс познания множества объектов, включающий счет, измерение и непосредственное восприятие в их противоположности и единстве, автор дает анализ недостатков в формировании у учащихся понятия о натуральном числе.

Одним из таких недостатков при изучении всех видов чисел является отождествление учащимися понятия числа с изображающим его символом (знаком или словом). Этот ошибочный взгляд на числа формируется уже при изучении натуральных чисел, где возможность смешивания числа и цифры обусловлена следующими обстоятельствами:

а) При изучении чисел первого десятка учащихся одновременно знакомят с числом и с изображающей его цифрой, вследствие чего у них зрительный образ цифры нередко сливается с понятием числа;

б) Согласно программе и учебнику нуль как число вводится в V классе. До этого учащиеся, имея понятие о нуле как только цифре, обычно оперируют с ним, как с числом, что в конечном итоге ведет к отождествлению в их сознании понятий «цифра» и «число».

---

[1] И. В. Арнольд, Теоретическая арифметика, Учпедгиз, Москва, 1939. Л. П. Гокиели, О понятии числа, изд. Акад. Наук Грузинской ССР, Тбилиси, 1951.

в) В учебной литературе и в практике термин «цифра» нередко употребляется в смысле «число» («сумма цифр», «умножение на значащую цифру» и т. д.), без выяснения смысла и различия этих двух понятий.

Опираясь на положительный опыт работы учителей ряда школ[1], автор намечает следующие пути устранения отмеченных недостатков:

1) Нуль как число надо изучать еще в начальных классах.

2) При изучении чисел первого десятка надо сначала ограничиться только устной нумерацией; письменное обозначение чисел ввести лишь после того, как учащиеся осознают смысл этих чисел и действий над ними на конкретных множествах.

3) Отличие числа от изображающего его символа надо выяснять систематически в процессе решения целесообразно подобранных упражнений, раскрывающих сущность каждого из этих понятий (в работе приведены примеры таких упражнений). С целью более глубокого уяснения принципа поместного значения цифр и роли нуля в изображении чисел, а также уяснения того, что *сущность*, содержание числа *не зависит* от *формы* его изображения, необходимо ознакомить учащихся и с некоторыми другими системами нумерации.

4) Нельзя допускать выражений, в которых термин «цифра» употребляется в смысле «число» без выяснений настоящего смысла этих выражений.

В работе намечаются также пути устранения причин формирования у учащихся вульгарно-материалистического понятия о натуральном числе, как понятии, составленном из конкретных *предметов* или *единиц измерения*.

Анализ календарных планов и уроков учителей ряда школ показал наличие двух противоположных тенденций в изучении раздела «Повторение целых чисел» в V классе: а) стремление быстрее закончить этот раздел и перейти к новому (вместо 21 часа, отведенных программой, берут 8—10 час.) [2]; б) стремление подать весь материал этого раздела как совершенно незнакомый учащимся (вместо 21 часа берут до 40 часов) [3].

В работе показно, что в данном разделе, умело опираясь на

---

[1] Коростышевская школа № 1 (учит. Сахнюк О. Я.), базовая школа Коростышевского педучилища, Житомирской области (учит. Зинченко Н. Г.). Школа с. Малые Бубны, Сумской области (учит. Запорожченко Т. П.), Матусовская СШ № 1, Киевской обл. (учит. С. Ф. Масич).

[2] Например, учитель Коган С. И., школа № 64 г. Киева, 1952—53 уч. год.

[3] Например, учит. Лавровская Л. К., школа с. Боярки, Киевской обл., 1952—53 уч. год.

знания учащихся, полученные в начальных классах, главное внимание надо обратить на такие принципиальные в идейно-теоретическом отношении вопросы: а) уяснение сущности позиционной десятичной системы нумерации; б) уяснение теоретической базы арифметических действий над натуральными числами и их законов; в) подготовку учащихся к осознанию необходимости введения новых чисел в связи с ограниченной выполнимостью обратных действий, а также к восприятию идей, связанных с обоснованием действий и основных их законов при каждом расширении понятия о числе (в частности, на примерах умножения на 0 и 1). В работе показан положительный опыт ряда учителей в данном вопросе.

II.

Первый, очень важный этап расширения понятия о числе в средней школе — введение *дробных* (положительных) чисел — рассматривается во *II-й главе* диссертации.

В начале главы систематизировано те сведения из истории развития дробных чисел, которые необходимо использовать в средней школе. Здесь подчеркивается, что основная трудность, с которой встретились по пути осознания дроби как числа,— это синтез в одном понятии дроби количества частиц и их размера. Долгое время, оперируя дробями, главное внимание сосредотачивали либо на *размерах* частиц (древние египтяне) либо на их *количестве* (древние вавилоняне). Введение поместного принципа нумерации создало предпосылки для использования одних и тех же знаков с целью обозначения как размеров частиц, так и их количества. При обосновании учения о дробных числах трудности состояли, главным образом, в обосновании умножения на дробь и основных законов арифметических действий. Устранение этих трудностей шло путем преодоления метафизического взгляда на новые числа как числа, обладающие *всеми* свойствами натуральных чисел. Осознание логической несостоятельности вывода правила умножения на дробь на основании свойств натуральных чисел привело к необходимости введения расширенного определения умножения (Ньютона—Коши) и связанного с ним операторного истолкования дробного множителя (Н. И. Лобачевский, М. В. Остроградский, И. В. Арнольд и др.).

В работе показано, что при осознании понятия дроби и действий над дробными числами учащиеся средней школы встречаются с теми же трудностями, которые в течение веков препятствовали признанию дроби числом, задерживая дальнейшее развитие учения о числе. Нередко учащиеся в понятии дроби видят не одно число, а два отдельных числа (числитель и знаменатель), что является одной из причин допускаемых ими ошибок в операциях с дробями (при сложении складывают отдельно числители и знаменатели и т. д.).

Учитывая положительный опыт учителей ряда школ по устранению этих трудностей, автор считает необходимым:

а) усилить внимание к использованию наглядных пособий, с помощью которых, опираясь на знания учащихся, полученные в начальных классах, постепенно приучать их к обобщающему мышлению;

б) устранить разрыв в рассмотрении дроби, как количественной характеристики совокупности одинаковых долей единицы и как частного, рассматривая понятие дроби в тесной связи с задачей нахождения дроби числа;

в) необходимость введения дробных чисел мотивировать не задачей измерения величин (учащиеся видят, что здесь можно обойтись без дробных чисел, пользуясь составными именованными числами), а решением практических задач на деление одного или нескольких предметов на равные части [1], что, с одной стороны, соответствует имеющемуся опыту учащихся, с другой стороны, позволяет установить тождественность понятия дроби как частного и как количественной характеристики совокупности равных долей единицы.

Особое внимание в работе обращено на недопустимость формирования у учащихся понятия о дроби как только о *символе*, а также вульгарно-материалистического понимания дроби, как понятия, составленного из равных долей *предмета* или единицы измерения.

Практика показывает, что хороших успехов в усвоении учащимися дробных чисел достигают те преподаватели, которые прежде чем перейти к действиям добиваются осознания учащимися сущности понятия дробного числа, выясняя: а) краткие исторические сведения о развитии дробных чисел; б) место натуральных чисел в расширенной числовой области; в) особенности дробных чисел.

В работе намечаются пути преодоления основных трудностей, возникающих у учащихся в связи с необходимостью расширения определения умножения на случай дробного множителя, а также в связи с несоответствием результатов умножения и деления на правильную дробь имеющимся у них представлениям об умножении как увеличении и делении как уменьшении. Одну из причин,

---

[1] Эксперимент проводился в двух параллельных пятых классах базовой школы пединститута (школа № 74 г. Киева, учитель Духота П. А.).

усиливающих эти трудности, автор видит в недооценке многими преподавателями и методистами отрицательного воздействия некоторых ранее приобретенных ассоциаций на усвоение нового материала. Например, когда умножение и деление дроби на целое число рассматривается на основании увеличения и уменьшения дроби в несколько раз (как в стабильном учебнике и задачнике), учащиеся, механически перенося этот подход на случай дробного множителя, говорят об «увеличении в $\frac{1}{3}$ раза» и т. д.

На основании краткого анализа научных теорий дробных чисел сделан вывод, что хотя, в силу отвлеченности, формально-логическая теория неприменима в средней школе, все же элементы ее надо использовать особенно при повторении дробных чисел в VIII и X классах, выяснив сущность принципа перманентности действий на всех этапах расширения понятия о числе. Уже в V классе на конкретных примерах надо показать учащимся, что принятые определения действий над дробными числами являются *обобщением* соответствующих определений действий над натуральными числами, в частности, больше внимания следует уделить установлению с учащимися *общности* смысла умножения для натуральных и дробных чисел.

Считая более целесообразным такой путь введения определения умножения на дробь, при котором учитель подводит к нему учащихся при помощи конкретных задач, автор обращает внимание на недопустимость создания у учащихся впечатления, будто это правило нами доказано. Против попыток создать иллюзии научной строгости выступал еще П. Л. Чебышев, подчеркивая, что если что-либо не может быть строго доказано учащимся, надо им прямо заявить об этом. В данном случае надо показать целесообразность *явного* введения принципа: задачи одного содержания должны решаться с помощью одних и тех же действий, независимо от числовых данных.

Дав критический анализ встречающихся еще попыток применения логически необоснованных приемов «доказательства» правила умножения на дробь, автор подчеркивает, что уже в V классе надо обратить внимание учащихся на необходимость проверки справедливости основных законов арифметических действий для дробных чисел. (В V классе на конкретных примерах, в X классе следует провести доказательство некоторых законов в общем виде). К концу изучения дробных чисел у учащихся V класса должно сложиться уже понимание того, что дробь $\frac{a}{b}$ (где a и b — любые натуральные числа, причем $b \neq 0$ (представляет собой *общий вид всех целых и дробных неотрицательных чисел.*

Полученные учащимися V класса знания о дробных числах должны углубляться в процессе всего дальнейшего изучения математики и особенно при введении каждого нового вида чисел.

III.

Второй этап расширения понятия о числе в средней школе связан с введением *отрицательных* чисел *(III глава)* и формированием у учащихся понятия о множестве *рациональных* чисел.

При изучении отрицательных чисел в средней школе должны найти отражение следующие факты из истории их развития:

а) возникнув из практических потребностей решения уравнений, понятие отрицательного числа осваивалось и входило в математический аппарат очень медленно, с большим трудом. Пока эти числа не нашли отображения в реальной действительности, они имели характер узкоформального искусственного понятия, что послужило почвой для непризнания их многими математиками, а также для идеалистических уклонов в освещении их природы;

б) в связи с развитием техники в 17 в. положительные и отрицательные числа истолковывают, как характеристики измерения противоположно направленных величин, что послужило толчком к признанию объективности понятия отрицательных чисел. Однако, вследствие непонимания особой их природы и общей идеи развития понятия о числе, большинство математиков до второй половины 18 в. пыталось обосновать учение об отрицательных числах на базе свойств положительных чисел, отождествляя знаки чисел (+ *и*—) со знаками сложения и вычитания. А это приводило к ряду трудностей и кажущихся парадоксов, в основе которых лежало непонимание определения отрицательных чисел, как чисел меньших нуля, при существовавшем тогда взгляде на нуль как на «ничто», а в связи с этим непонимание, почему при умножении двух отрицательных чисел получается число положительное.

В работе дан анализ учебно-методической литературы с точки зрения преодоления этих трудностей, отмечается высокий для того времени научный уровень изложения учения об отрицательных числах в учебниках Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, В. П. Ермакова и др.

На основании краткого анализа научных теорий рациональных чисел сделан вывод о том, что хотя формально—логическая теория рациональных чисел в целом недоступна учащимся, но элементы ее должны быть использованы в средней школе. В VI классе на конкретных примерах, а в X классе в общем виде надо рассмотреть с учащимися сущность принципа перманентности, лежащего в основе идеи развития понятия о числе, подчеркнув, что установленные правила действий над рациональными числами представляют собой обобщение соответствующих правил действий над положительными разностями на случай отрицательных разностей.

Нецелесообразность первоначального ознакомления с отрицательными числами как с операторами автор видит, главным образом, в том, что оно приводит учащихся к отождествлению знаков чисел и знаков действий и к непониманию особой природы отрицательных чисел. В основу введения отрицательных чисел в средней школе рекомендуется положить идею ограниченной выполнимости вычитания в области положительных чисел и идею измерения противоположно-направленных величин или величин противоположного смысла.

Различные авторы, отдавая преимущество той или иной из этих идей, рассматривают их оторванно друг от друга. В работе обосновывается целесообразность рассмотрения их в тесной взаимосвязи: необходимость введения отрицательных чисел в связи с ограниченной выполнимостью вычитания удобнее выяснить на задаче, приводящей к простому уравнению, отрицательный корень которого имеет вполне реальный смысл (в чем учащиеся убеждаются, предварительно решив задачу арифметическим путем). В работе приведены образцы таких задач и методическая разработка проведения уроков по предложенной схеме [1].

Подробно рассматривается вопрос о необходимости изучения отрицательных чисел в тесной взаимосвязи с числами положительными не только в противопоставлении их последним, но и в диалектическом единстве, с ними в одном общем понятии — «рациональные числа» [2], о необходимости выяснения с учащимися особенностей отрицательных чисел (невозможность *кратного* сравнения их по величине между собой и с числами положительными, выяснение того, что сумма может быть меньше слагаемых и т. д.).

Уяснение особой природы отрицательных чисел должно помочь учащимся осознать идею недопустимости механического перенесения на эти числа определений и свойств действий, установленных для чисел положительных, осознать необходимость проверки справедливости основных законов действий для новых чисел.

---

[1] Эксперимент проводился в двух параллельных шестых классах базовой школы (школа № 74 г. Киева).

[2] Термин «рациональные числа» необходимо ввести в программу и в учебник вместо термина «относительные числа», не раскрывающего их сущности.

IV.

В *главе IV* рассматривается дальнейший не менее важный этап расширения понятия о числе — введение *иррациональных* чисел и расширение понятия о числе до множества *действительных* чисел.

В начале главы излагаются основные факты из истории развития иррациональных чисел, на которые необходимо обратить внимание в средней школе:

а) возникновение иррациональных чисел вызвано, в первую очередь, необходимостью измерения отрезков, несоизмеримых с единицей длины, поэтому долгое время на эти числа смотрели как на «неизбежное зло», проникшее в арифметику из геометрии, признавали только иррациональные величины, но не числа;

б) начиная с 16 в. в связи с ростом техники усилились требования к методам математического исследования, что привело к осознанию идеи непрерывности прямой и множества всех действительных чисел. Намечаются новые взгляды на число как отношение одной величины к другой того же рода, принятой за единицу (Ньютон, Декарт), а также как предела последовательности рациональных чисел. Заслуга в обосновании числовой природы иррациональных величин принадлежит Л. Эйлеру, Н. И. Лобачевскому, С. Котельникову, М. В. Остроградскому.

Краткий анализ научных теорий действительных чисел позволил автору заключить, что ни одна из них не может быть применена в средней школе во всей общности. Дидактические преимущества по сравнению с другими теориями имеет теория «систем совместных двухсторонних приближений с произвольно малой амплитудой (проф. Е. Я. Ремез). Однако, мы не ставили себе целью получить достаточные экспериментальные данные о ее применении в средней школе ввиду того, что по объему и важности вопрос этот должен стать предметом специального исследования.

В работе обобщается передовой опыт изложения, основанного на идее изображения иррациональных чисел в виде бесконечных десятичных непериодических дробей, которая рассматривается в тесной взаимосвязи с идеей измерения величин и выяснением происхождения иррациональных чисел из реальной жизни.

Анализируя трудности в усвоении иррациональных чисел, автор разбивает основные недостатки в знаниях учащихся, связанные с этими трудностями, на две группы:

1) Учащиеся нередко считают иррациональные числа «приближенными числами», *«неточными»*, а отсюда, как следствие, вытекает неуверенность их в возможности выполнения действий над этими «неточными» числами.

Главные причины этих недостатков:

а) Недооценка многими преподавателями идейно-теоретического значения *бесконечных* периодических дробей для понимания иррациональных чисел, вследствие чего учащиеся делают вывод, что иррациональные числа «нельзя точно выразить» потому, что они изображаются *бесконечными* десятичными дробями (непериодическими). Трудность эта усиливается еще тем, что до 8 класса с учащимися рассматривают только прямое утверждение об обращении обыкновенных дробей в десятичные, обратное же утверждение, на которое ссылаются в VIII классе, о том, что *любая* бесконечная периодическая дробь обращается в обыкновенную, рассматривается в IX классе.

б) В учебнике и в практике школ определяют иррациональные числа, как бесконечные непериодические дроби, смешивая тем самым содержание понятия числа с *формой* его изображения (вместо того, чтобы определить их как числа, которые *могут* быть представлены в виде бесконечных десятичных непериодических дробей, подчеркнув, что такая запись иррациональных чисел представляет собой лишь одну из форм их изображения).

в) Нечеткость терминологии: употребление терминов «точный корень», «приближенный корень» вместо «точное значение корня», «приближенное значение корня».

2) Вторая группа недостатков сводится к формированию у учащихся слишком узкого понятия об иррациональных числах как только о корнях. Этому способствует несколько обстоятельств:

а) Иррациональные числа изучаются в начале 8-го класса, когда у учащихся нет еще запаса математических знаний, необходимых для рассмотрения различных путей их получения.

б) Глава «Иррациональные числа» в программе и учебниках рассматривается не самостоятельно, а входит в раздел «Степени и корни», само название которого как бы подчеркивает происхождение иррациональных чисел *только* от извлечения корней.

в) Смешивание учащимися терминов «иррациональные числа» и «иррациональные выражения» вследствие недостаточного внимания к этому вопросу со стороны преподавателей.

В диссертации намечаются такие мероприятия по устранению отмеченных недостатков:

1) Главу «Иррациональные числа» необходимо выделить как самостоятельную, уточнив определение иррациональных чисел и обратив больше внимания на выяснение различных путей их получения.

2) В виду того, что до введения понятия иррационального числа говорить о приближенном значении корня, представляющего

собой иррациональное число, не логично, а подмена этого термина термином «приближенный корень» вредно сказывается на понимании иррациональных чисел и учитывая то, что при десятилетнем обучении нет необходимости изучать в 7-м классе тему «Извлечения корня и неполные квадратные уравнения», целесообразно эту тему перенести в VIII класс, использовав ее в целях подготовки к введению иррациональных чисел.

3) Подготовительная работа к введению иррациональных чисел должна быть направлена, с одной стороны, на осознание учащимися идей, связанных с возможностью изображения *иррациональных чисел* в виде *бесконечных* десятичных (непериодических) дробей, и на преодоление исходящих отсюда ошибок учащихся. С этой целью широко используется возможность представления *обыкновенных дробей* в виде *бесконечных* десятичных (периодических) дробей и наоборот. С другой стороны, на осознание учащимися *общих идей,* связанных с расширением понятия о числе. С этой целью необходимо провести систематизацию и углубление основных сведений о рациональных числах.

4) Полученные учащимися знания о действительных числах должны усовершенствоваться при дальнейшем изучении математики (в частности, при изучении измерения дуг и углов, площадей и объемов, различных функций и т. д.).

В работе приведена система упражнений, способствующих более глубокому осознанию учащимися понятия иррационального числа в его взаимосвязи с числами рациональными.

При рассмотрении действий над иррациональными числами главное внимание уделено выяснению вопросов, связанных с идеей развития понятия о числе (необходимость введения новых определений прямых действий и проверки законов действий, обоснование целесообразности принятых определений).

V.

Завершающим этапом расширения и обобщения понятия о числе в средней школе является присоединение к действительным числам *мнимых* чисел и объединение их в одном общем понятии — множестве *комплексных чисел* (глава V).

Из исторических сведений о развитии понятия о мнимых числах главное внимание в средней школе надо обратить на следующее:

а) потребность в мнимых числах возникла в связи с практической необходимостью решения квадратных и кубических уравнений и невозможностью извлечь квадратный корень из отрицательного числа. До тех пор, пока не знали реального истолкования комплексных чисел, как векторов плоскости, считали, что мнимыми числами не может быть измерена никакая величина, поэтому называли их «фиктивными» числами, придавая им мистический смысл;

б) только после того, как под влиянием требований возросшей техники было установлено, что комплексные числа соответствуют векторным (двумернонаправленным) величинам, мнимые числа вошли в математику как равноправные, составив вместе с действительными числами множество комплексных чисел.

Учащиеся нашей школы должны быть ознакомлены с реальным истолкованием мнимых чисел, в противном случае эти числа войдут в их сознание лишь как «полезные фикции», «свободное творение рассудка».

Дав краткий анализ научных теорий комплексных чисел, автор заключает, что в основу изучения их в средней школе необходимо положить идею дальнейшего расширения и обобщения понятия о числе, широко используя реальный смысл комплексных чисел, как векторов и операторов, учитывая при этом, что трудность введения мнимых чисел состоит, главным образом, в уяснении их реального смысла.

По вопросу о постановке изучения комплексных чисел в средней школе существуют различные мнения:

1) комплексные числа надо либо совсем исключить из программы средней школы, либо оставить только понятие о комплексных числах (без действий над ними).

2) комплексные числа необходимо изучать в средней школе, но в изучении их следует внести коренные изменения, направленные на выяснение их реального смысла.

Анализируя эти точки зрения, автор обосновывает следующими мотивами нецелесообразность изъятия комплексных чисел из школьной программы: во-первых, с изъятием комплексных чисел обрывается одна из основных идей школьного курса математики — идея развития понятия о числе; во-вторых, вопрос о решении уравнений не может получить необходимого обоснования; и, в-третьих, изъятие комплексных чисел из программы средней школы противоречит целям политехнического обучения, ибо, с одной стороны, эти числа находят широкое применение в современной технике, с другой стороны, несомненную ценность представляет тот факт, что правильная постановка изучения этих чисел способствует внедрению в средней школе новых математических идей, тогда как большинство изучаемого по математике материала является достоянием еще древних и средних веков. Если же оставить в программе *только* понятие о комплексных числах, то основная цель их изучения все равно не будет достигнута, ибо сущность понятия о том или ином виде чисел раскрывается в процессе их сопоставления с другими видами чисел, в процессе уяснения их свойств и действий над ними.

Опираясь на положительный опыт работы ряда учителей[1] и эксперимент, проведенный в 74 школе г. Киева (учитель Ануленко Ф. С.), а также личный опыт работы в X кл. в течение 5 лет[2], автор приходит к выводу, что комплексные числа надо изучать в средней школе, оставив без изменения отводимое программой количество часов (14), но главное внимание надо обратить не столько на технику действий и решение сложных примеров, сколько, во-первых, на систематизацию и углубление сведений о действительных числах под углом зрения идеи расширения и обобщения понятия о числе, на выяснение роли практики в развитии этой идеи и той борьбы материалистических взглядов с идеалистическими, которая сопровождала введение каждого вида чисел, и, во-вторых, на уяснение реального смысла понятия мнимого и комплексного числа, их природы и взаимосвязи с действительными числами.

Большинство ошибок, связанных с непониманием учащимися реального смысла мнимых чисел, можно объяснить тем, что во многих школах ограничиваются истолкованием комплексных чисел только как точек плоскости. Вследствие этого учащиеся, например, невозможность установления соотношений «больше» и «меньше» в области комплексных чисел, а также отсутствие понятия «больше нуля» и «меньше нуля» для мнимых чисел объясняют тем, что «комплексные числа на плоскости изображаются точками, а о точках нельзя сказать, какая из них больше, какая меньше, или какая положительная, какая отрицательная».

К сожалению, даже в современной методической литературе иногда высказывается взгляд на мнимые числа, как на «полезные фикции», которые «никакой реальности вне нашей головы не имеют», «имеют чисто воображаемый характер»[3], и что этими числами «нельзя измерить ни одной величины...»[4].

Большое внимание обращено в работе на методику *подготовки* учащихся к восприятию мнимых и комплексных чисел, на *закрепление* и полное осознание учащимися основных идей проблемы развития понятия о числе. Автор рекомендует сравнение комп-

---

[1] Осипов Н. Б. (24 школа г. Киева), Рознатовский Н. В. (20 школа г. Киева), Сотникова М. Я. (5 школа г. Запорожья) и др.

[2] Коростышевская средняя школа № 1, Житомирской области.

[3] Н. П. Шароватов, О некоторых вопросах материалистической диалектики в математике, «Математика в школе», № 1, 1951, стр. 8, 9.

[4] Фадеев и Соминский, Алгебра, ч. II, Учпедгиз, 1954, стр. 220.

лексных чисел по величине и действия над ними рассматривать одновременно в алгебраической форме и в геометрическом истолковании, тесно связав это с решением практических задач из курса физики, приводящих к действиям над векторными величинами. В работе приведены образцы таких задач. Здесь же рассматриваются другие примеры практического применения комплексных чисел, с которыми можно ознакомить учащихся.

Особое внимание обращено на необходимость четкого осознания учащимися, что *комплексные числа обобщают все предыдущие виды чисел действительных и мнимых* и что принятые определения действий для комплексных чисел представляют собой обобщения правил действий над действительными числами.

В конце изучения темы «Комплексные числа» рекомендуется провести заключительную беседу, направленную на более глубокое осознание учащимися понятия числа вообще и отдельных чисел в их взаимосвязи, подчеркнув, что с расширением понятия числа, его объема содержание его суживается, что существуют еще «надкомплексные» или гиперкомплексные числа, в частности кватернионы, служащие для измерения пространственных векторных величин, для которых не будут иметь места еще некоторые свойства, присущие комплексным числам. В заключение предлагается система упражнений, способствующих уяснению учащимися свойств и особенностей различных видов чисел в их взаимосвязи.

Анализ состояния изучения вопросов, связанных с идеей развития понятия о числе, в ряде школ, а также результаты проведенного эксперимента в базовой школе пединститута позволяют нам полагать, что настоящая работа будет полезной преподавателям математики средней школы и что практическое осуществление внесенных в ней предложений сыграет положительную роль в поднятии идейно-научного уровня преподавания тех вопросов школьного курса математики, которые связаны с идеей развития понятия о числе.

БФ 17971 1.12.55 Тип. КГПИ, Франко, 44. Зак. 678—100