МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ У С С Р

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ЛЕВИЩЕНКО Сергей Сергеевич

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ НЕПРИМАРНОГО ИНДЕКСА

01.01.03. Алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук

Киев - 1973

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ У С С Р

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ЛЕВИЩЕНКО Сергей Сергеевич

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ НЕПРИМАРНОГО ИНДЕКСА

01.01.03. Алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой
степени кандидата физико-матема-
тических наук

Киев - 1973

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор С.Н.ЧЕРНИКОВ.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук Л.А.ШЕМЕТКОВ; кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Д.И.ЗАЙЦЕВ.

Ведущее предприятие - Институт математики и механики Уральского научного центра АН СССР (г.Свердловск).

Автореферат разослан "____" ______________ 197__ г.

Защита диссертации состоится "____" ____________ 197__ г. в ______ часов на заседании Ученого совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Отзывы просим присылать по адресу: г.Киев-30, ул.Пирогова,9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Выделение новых видов групп с заданными свойствами подгрупп (определяющие ограничения) и детальное их изучение обогатило теорию групп многими важными результатами и существенно расширило ее конкретную базу. На этом пути были выделены важные классы групп, допускающие полное изучение.

Одним из первых видов групп, выделенных этим способом, были гамильтоновы группы - неабелевы группы, все подгруппы которых инвариантны. Конечные гамильтоновы группы были описаны Дедекиндом еще в 1897 году, бесконечные гамильтоновы группы описаны много позднее Бэром.

В 1903 году Миллер и Морено изучали конечные неабелевы группы, все собственные подгруппы которых абелевы. Они показали, что такие группы разрешимы и что их порядок делится не более чем на два различных простых числа. Детальное описание таких групп было получено много позднее Редеи.

Естественным обобщением групп Миллера-Морено явились группы Шмидта - конечные ненильпотентные группы, все собственные подгруппы которых нильпотентны. Изучение таких групп было продолжено в работах Ю.А.Гольфанда и Редеи.

Группы Гамильтона, группы Миллера-Морено и группы Шмидта получили большие применения при изучении групп. Группы Шмидта широко используются при изучении конечных ненильпотентных групп, так как произвольная конечная ненильпотентная группа всегда содержит в качестве своей подгруппы некоторую группу Шмидта. Оказалось, что многие вопросы, касающиеся строения конечных разрешимых групп, в конечном итоге сводятся к содержащимся в них группам Шмидта. Строение неразрешимых конечных групп в зависимости от строения их подгрупп Шмидта изучали Янко, Судзуки и др. Взаимосвязь между свойствами подгрупп Шмидта и свойствами конечной ненильпотентной группы исследовалась в работах Л.А.Шеметкова, В.А.Ведерникова и др.

Естественно возникли попытки так или иначе обобщать группы Шмидта. Так, например, С.А.Чунихин исследовал класс ненильпотентных pd-групп (группа, порядок которой делится на простое число p, называется pd-группой), все собственные pd-подгруппы которых нильпотентны (группы типа S_p).

Группы Шмидта обобщались также Бэром, В.А.Белоноговым, Я.Г.Берковичем, Паздерским, В.М.Бусаркиным, А.И.Старостиным и др.

Если определяющая система подгрупп произвольной конечной ненильпотентной группы (т.е. система подгрупп, на которые налагаются определяющие ограничения) совпадает с системой всех собственных подгрупп, то нильпотентность, как определяющее ограничение, выделяет класс групп Шмидта. Понятно, что сужая определяющую систему подгрупп класса групп Шмидта или ослабляя определяющее его ограничение, можно получать новые классы групп как достаточно близкие по своим свойствам к группам Шмидта, так и весьма далекие от них. Например, среди ненильпотентных конечных групп, все 2-максимальные подгруппы которых нильпотентны встречаются уже и неразрешимые группы.

С другой стороны, не всегда сужение определяющей системы подгрупп приводит к расширению класса групп Шмидта.

Примеры ненильпотентных групп порядка pqr (p, q, r - различные простые числа) и симметрической группы четвертой степени S_4, в которых все собственные подгруппы непримарного индекса нильпотентны, а также тот факт, что в группах Шмидта такие подгруппы всегда нильпотентны делают естественной мысль о рассмотрении конечных ненильпотентных групп, в которых нильпотентны все собственные подгруппы непримарного индекса. Задача изучения таких групп была предложена автору С.Н.Черниковым и ее решению посвящена настоящая диссертация.

Диссертация состоит из введения (стр.2-7), раздела "Основные сведения и обозначения" (стр.7-15) и двух глав: "Конечные группы, все подгруппы непримарного индекса которых нильпотентны" (стр.16-50), "Некоторые подклассы групп класса конечных групп, в которых все подгруппы непримарного индекса нильпотентны" (стр.51-81). Список цитированной литературы (стр.82-86) содержит 45 наименований. В конце каждой главы приводится список полученных видов групп.

Охарактеризуем содержание настоящей диссертации. Для этого целесообразно ввести следующие обозначения и определения.

Обозначения.

G - конечная группа порядка $|G|$;

$Z(G)$ - центр группы G ;

$\Phi(G)$ - подгруппа Фраттини группы G ;

G' - коммутант группы G ;

$C_B(A)$ - централизатор подгруппы A в подгруппе B ;

$G=A\rtimes B$ - полупрямое разложение группы G с инвариантной подгруппой A ;

$[G:A]$ - индекс подгруппы A в группе G и если $[G:A]$ является неотрицательной степенью простого числа, то говорят, что подгруппа A группы G имеет в ней примарный индекс;

p,q,r - различные простые числа;

α,β,γ - натуральные числа;

Определения.

I. Наименьшее натуральное число x , удовлетворяющее сравнению $p^x\equiv 1 \pmod q$, называется показателем числа p по модулю q .

2. Пусть $\pi(G)$ - число всех различных простых делителей числа $|G|$. Если $\pi(G)=2$, то группа G называется бипримарной. Если $\pi(G)=3$, то группа G называется трипримарной.

3. Группу G назовем дисперсивной, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны ее силовским подгруппам.

4. Конечную ненильпотентную группу G назовем S^* - группой, если все ее подгруппы непримарного индекса нильпотентны.

Из этого определения непосредственно вытекает такое утверждение: всякая ненильпотентная подгруппа и всякая ненильпотентная фактор-группа S^* - группы сами являются S^* - группами.

5. Конечную ненильпотентную группу назовем S_p^* -группой, если все ее ненильпотентные собственные подгруппы имеют в ней примарный индекс по одному и тому же простому числу.

Очевидно, что в S_p^* -группе всякая подгруппа непримарного индекса будет нильпотентной и, значит, произвольная S_p^* - группа является S^*-группой.

6. Конечную непримарную неабелеву группу, все подгруппы непримарного индекса которой абелевы назовем M^*-группой.

7. Конечную непримарную неабелеву группу назовем M_p^*-группой, если все ее собственные неабелевы подгруппы имеют в ней примарный индекс по одному и тому же простому числу.

Совершенно понятно, что произвольная ненильпотентная M^* - группа является S^* -группой, а произвольная ненильпотентная M_p^* -группа является S_p^* -группой. Очевидно также, что в M_p^* -группе всякая подгруппа непримарного индекса абелева и, значит, произвольная M_p^*-группа является M^*-группой.

В первой главе дается описание S^*-групп. § I этой главы носит вспомогательный характер. В нем устанавливается, в частности, что S^*-группы могут быть только бипримарными или триппримарными (лемма I.I) и что S^*-группы разрешимы (следствие I.I). Для доказательства последнего факта понадобилась

Лемма I (лемма I.2 диссертации). В трипримарной S^*-группе G хотя бы одна нетривиальная силовская подгруппа содержится в центре своего нормализатора.

Из этой леммы вытекает, в частности, что каждая трипримарная S^*-группа G дисперсивна и что ее коммутант G' может быть только нильпотентной группой или группой Шмидта.

В § 2 изучается строение бипримарных S^*-групп. Оказалось, что бипримарная S^*-группа с абелевыми (неабелевыми) силовскими подгруппами является дисперсивной группой (следствие I.4 и лемма I.4 диссертации) и, значит, недисперсивная бипримарная S^*-группа всегда имеет неабелеву и абелеву силовские подгруппы. Строение последней определяется следующей леммой.

Лемма 2 (лемма I.5 диссертации). Одна из силовских подгрупп бипримарной недисперсивной S^*-группы является циклической группой простого порядка.

Основные свойства бипримарных дисперсивных S^*-групп устанавливает

Лемма 3 (леммы I.6 - I.II диссертации). Пусть G -бипримарная дисперсивная S^*-группа, $\mathcal{P}$- ее инвариантная силовская p -подгруппа, $\mathcal{P}'$-коммутант последней, $|\mathcal{P}|=p^{\alpha}$, $|\mathcal{P}'|=p^{\alpha'}$, $0\leq\alpha'<\alpha$ и в силовской q-подгруппе Q порядка q^{β} существует такой элемент b, $\{b\}\neq Q$, что $\mathcal{P}\leftthreetimes\{b\}\neq$ $\neq\mathcal{P}\times\{b\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $\alpha-\alpha'$ - показатель числа p по модулю q;

б) $\Phi(\mathcal{P})=\mathcal{P}'$ и если Φ - наибольшая собственная подгруппа из $\mathcal{P}$, инвариантная в группе G, то $\Phi(\mathcal{P})=\Phi$;

в) $\mathcal{P} \subset G'$ и $Z(\mathcal{P})$ - элементарная абелева группа;

г) если $\mathcal{P}$ - неабелева группа, то Φ - элементарная абелева группа и $\Phi = \Phi(\mathcal{P}) = Z(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$. При $p \neq 2$ порядки всех элементов группы $\mathcal{P}$ равны p. При $p=2$ порядки элементов группы $\mathcal{P}$ не превосходят 4, но не могут быть все равны 2;

д) если подгруппа $\mathcal{P}$ абелева (соответственно неабелева), то $G/C_G(\mathcal{P})$ (соответственно $G/C_G(\mathcal{P})$) - группа Фробениуса с циклической силовской q-подгруппой и инвариантной элементарной абелевой силовской p-подгруппой порядка p^{α} (соответственно $p^{\alpha-\alpha'}$).

Отмеченное в пункте д) этой леммы свойство дисперсивных бипримарных S^*-групп особенно подчеркивает их близость к группам Шмидта, в которых фактор - группа всей группы по ее центру всегда является группой Фробениуса.

Полученные леммы позволяют сформулировать основной результат, относящийся к бипримарным S^*-группам, в виде следующей теоремы.

<u>Теорема I</u> (теорема I.I диссертации). Конечная ненильпотентная бипримарная группа $G = \mathcal{P}Q$ $(|\mathcal{P}| = p^{\alpha}, |Q| = q^{\beta}, |\mathcal{P}'| = p^{\alpha'})$ тогда и только тогда является S^*-группой, когда она принадлежит одному из следующих видов групп

I. G - недисперсивная группа, $\alpha = 1$, $\beta \geq 3$.

2. $G = \mathcal{P} \leftthreetimes Q$, Q - циклическая группа и если $Q = \{b\}$, то либо $\{b^q\} \subset Z(G)$, либо $\{b^q\} \not\subset Z(G)$, $\mathcal{P}' \leftthreetimes \{b^q\} = \mathcal{P}' \times \{b^q\}$ и выполняются условия а) - г) леммы 3.

3. $G = \mathcal{P} \leftthreetimes Q$, Q -нециклическая группа, причем для группы G выполняются условия а) - д) леммы 3 и, кроме того, условие $\mathcal{P}' \subset Z(G)$.

Описание S^*_0-групп завершается в § 3 теоремой о строении трипримарных S^*-групп.

Теорема 2 (теорема I.2 диссертации). Конечная ненильпотентная трипримарная группа G тогда и только тогда является S^*-группой, когда она принадлежит одному из следующих видов групп

I. $G = Q \times (\mathcal{P} \leftthreetimes \{c\})$, $|\mathcal{P}| = p^{\alpha}$, $|Q| = q^{\beta}$, $c^{r^{\gamma}} = 1$, $Z(G) = \mathcal{P}' \times Z(Q) \times \{c^{r}\}$, $G' = Q' \times \mathcal{P}$; $\mathcal{P} \leftthreetimes \{c\}$ – группа Шмидта.

2. $G = (\mathcal{P} \times Q) \leftthreetimes \{c\}$, $|\mathcal{P}| = p^{\alpha}$, $|Q| = q^{\beta}$, $c^{r^{\gamma}} = 1$, $Z(G) = \mathcal{P}' \times Q' \times \{c^{r}\}$, $G' = \mathcal{P} \times Q$; $\mathcal{P} \leftthreetimes \{c\}$, $Q \leftthreetimes \{c\}$ – группы Шмидта.

3. $G = \mathcal{P} \leftthreetimes (\{b\} \times \{c\})$, $|\mathcal{P}| = p^{\alpha}$, $b^{q^{\beta}} = c^{r^{\gamma}} = 1$, $Z(G) = \mathcal{P}' \times \{b^{q}\} \times \{c^{r}\}$, $G' = \mathcal{P}$; $\mathcal{P} \leftthreetimes \{b\}$, $\mathcal{P} \leftthreetimes \{c\}$ – группы Шмидта.

4. $G = (\mathcal{P} \leftthreetimes \{b\}) \leftthreetimes \{c\}$, $|\mathcal{P}| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $b^{q} = c^{r^{\gamma}} = 1$, $Z(G) = \mathcal{P}' \times \{c^{r}\}$, $G' = \mathcal{P} \leftthreetimes \{b\}$, $\mathcal{P} \leftthreetimes \{c\} = \mathcal{P} \times \{c\}$; $\mathcal{P} \leftthreetimes \{b\}$, $\{b\} \leftthreetimes \{c\}$ – группы Шмидта.

Для доказательства достаточности здесь следует воспользоваться тем, что каждая собственная холловская подгруппа группы G любого из видов I) – 4) является нильпотентной группой или группой Шмидта. В доказательстве необходимости условий этой теоремы существенно используется лемма I и следующий очевидный факт: бипримарная холловская подгруппа трипримарной S^*- группы является нильпотентной группой или группой Шмидта.

Во второй главе дается описание определенных выше M^*-, S^*_p-, M^*_p-групп.

Как и в первой главе, § I носит вспомогательный характер. В частности, в § I устанавливается, что в классе S^*_p-групп строго содержатся конечные ненильпотентные pd-группы, все собственные pd-подгруппы которых нильпотентны, изученные С.А.Чунихиным (лемма 2.I). Истинный подкласс класса S^*- групп составляют также конечные разрешимые ненильпотентные группы с исключительно нильпотентными 2-максимальными подгруппами, изученные В.А.Белоноговым (лемма 2.2).

В § 2 второй главы изучаются M^*-группы. Так как произвольная ненильпотентная M^*-группа является S^*-группой, то при этом существенно используются результаты первой главы. Основные результаты рассматриваемого параграфа содержатся в следующих теоремах.

Теорема 3 (теорема 2.3 диссертации). Конечная неабелевая бипримарная группа G $(G=\mathcal{P}Q,\ |\mathcal{P}|=p^{\alpha},\ |Q|=q^{\beta})$ тогда и только тогда является M^*-группой, когда она принадлежит одному из следующих видов групп:

1. $G=\mathcal{P}\times Q$, где $\mathcal{P}$ - группа Миллера-Морено и Q - либо абелева группа, либо группа Миллера-Морено.

2. $G=\mathcal{P}\rtimes Q$, $\mathcal{P}$ -абелева группа, Q -циклическая группа и если $Q=\{b\}$, то либо $\{b^q\}\subset Z(G)$, либо $\{b^q\}\not\subset Z(G)$ и выполняются следующие условия:

а) α - показатель числа p по модулю q;

б) $\mathcal{P}$ - элементарная абелева группа;

в) $G/C_G(\mathcal{P})$ - группа Фробениуса с циклической силовской q-подгруппой.

3. $G=\mathcal{P}\rtimes Q$, $\mathcal{P}$ -группа Миллера-Морено, Q -циклическая группа и если $Q=\{b\}$, то либо $\{b^q\}\subset Z(G)$, либо $\{b^q\}\not\subset Z(G)$, $\mathcal{P}'\rtimes\{b^q\}=\mathcal{P}'\times\{b^q\}$ и выполняются следующие условия:

а) $\alpha=3$;

б) 2 - показатель числа p по модулю q;

в) если $p=2$, то $\mathcal{P}$ -группа кватернионов и $q=3$; если $p\neq 2$, то $p>q$ и $\mathcal{P}$ -неабелева группа, все элементы которой имеют порядок p;

г) $G/C_G(\mathcal{P})$ -группа Фробениуса с циклической силовской

q -подгруппой и инвариантной элементарной абелевой силовской p -подгруппой порядка p^2.

4. $G=\mathcal{P}\leftthreetimes Q$, Q - абелева нециклическая группа либо группа Миллера-Морено, $\mathcal{P}$ - абелева группа и выполняются условия а) - в) пункта 2 теоремы.

5. $G=\mathcal{P}\leftthreetimes Q$, Q -абелева нециклическая группа либо группа Миллера-Морено, $\mathcal{P}$ -группа Миллера-Морено и выполняются условия а) - г) пункта 3 теоремы.

6. $$G = (\{a_1\}\times\{a_2\})\leftthreetimes(\{b\}\leftthreetimes\{a\}),$$

$$a_1^2=a_2^2=a^{2^{\alpha-2}}=b^3=1,\ \alpha\geqslant 3,\ a_1a_2=a_2a_1,\ b^{-1}a_1b=a_1a_2,$$
$$b^{-1}a_2b=a_1,\ a^{-1}a_1a=a_1a_2,\ a^{-1}a_2a=a_2,\ a^{-1}ba=b^2,$$

причем $Z(G)=\{a^2\}$ и группа $G/Z(G)$ изоморфна симметрической группе четвертой степени S_4 .

Теорема 4 (теорема 2.4 диссертации). Конечная ненильпотентная трипримарная группа G тогда и только тогда является M^*-группой, когда она принадлежит одному из следующих видов групп.

I. $G=Q\times(\mathcal{P}\leftthreetimes\{c\})$, $|\mathcal{P}|=p^{\alpha}$, $|Q|=q^{\beta}$, ${}^{r^{\delta}}=1$, $Z(G)=Q\times\{c^r\}$, $G'=\mathcal{P}$; $\mathcal{P}\leftthreetimes\{c\}$ - группа Миллера-Морено.

2. $G=(\mathcal{P}\times Q)\leftthreetimes\{c\}$, $|\mathcal{P}|=p^{\alpha}$, $|Q|=q^{\beta}$, $c^{r^{\delta}}=1$, $Z(G)=\{c^r\}$, $G'=\mathcal{P}\times Q$; $\mathcal{P}\leftthreetimes\{c\}$, $Q\leftthreetimes\{c\}$ - группы Миллера-Морено.

3. $G=\mathcal{P}\leftthreetimes(\{b\}\times\{c\})$, $|\mathcal{P}|=p^{\alpha}$, $b^{q^{\beta}}=c^{r^{\delta}}=1$, $Z(G)=\{b^q\}\times\{c^r\}$, $G'=\mathcal{P}$; $\mathcal{P}\leftthreetimes\{b\}$, $\mathcal{P}\leftthreetimes\{c\}$ -группы Миллера-Морено.

4. $G=(\mathcal{P}\leftthreetimes\{b\})\leftthreetimes\{c\}$, $|\mathcal{P}|=p^{\alpha}$, $b^q=c^{r^{\delta}}=1$, $\alpha>1$, $Z(G)=\{c^r\}$, $G'=\mathcal{P}\leftthreetimes\{b\}$, $\mathcal{P}\leftthreetimes\{c\}=\mathcal{P}\times\{c\}$; $\mathcal{P}\leftthreetimes\{b\}$, $\{b\}\leftthreetimes\{c\}$ - группы Миллера-Морено.

Доказательству теоремы 3 в диссертации предшествует описание нильпотентных M^* -групп (теорема 2.I), недисперсивных M^*-

групп (теорема 2.2), ненильпотентных дисперсивных M^*-групп (леммы 2.4, 2.8 и 2.9), причем описание недисперсивных M^*-групп (см. пункт 6 теоремы 3) явилось результатом, принадлежащим С.Н.Черникову и автору.

В § 2 строится еще пример группы (сплетение циклической группы A простого порядка p с неабелевой группой B порядка $pq\ (p<q)$), показывающий, что класс недисперсивных S^*-групп строго включает в себя недисперсивные M^*-группы.

§ 3 второй главы посвящен описанию S_p^*- и M_p^*-групп. Так как произвольная $S_p^*(M_p^*)$-группа является $S^*(M^*)$-группой, то отыскание всех $S_p^*(M_p^*)$-групп сводится к выбору в каждом из видов $S^*(M^*)$ - групп только тех групп, в которых все ненильпотентные (неабелевы) собственные подгруппы имеют примарный индекс по одному и тому же простому числу.

Теорема 5 (теорема 2.5 диссертации). Конечная ненильпотентная группа G тогда и только тогда является S_p^*-группой, когда она принадлежит одному из следующих видов групп

1. G -группа вида 1 теоремы 1.
2. G -группа первой части вида 2 теоремы 1.
3. G -группа второй части вида 2 теоремы 1 при условии, что $\mathcal{P}' \subset Z(G)$.
4. G -группа вида 3 теоремы 1.
5. G -группа вида 1 теоремы 2.

Теорема 6 (теорема 2.6 диссертации). Конечная неабелева непримарная группа G тогда и только тогда является M_p^*-группой, когда она принадлежит одному из следующих видов групп

1. G - группа вида 1 теоремы 3 при условии, что Q -

абелева группа.

2. G - группа вида 2 теоремы 3.

3. G - группа вида 3 теоремы 3.

4. G - группа вида 4 теоремы 3 при условии, что Q - абелева нециклическая группа.

5. G - группа вида 5 теоремы 3 при условии, что Q - абелева нециклическая группа.

6. G - группа вида I теоремы 4.

Результаты диссертации докладывались на XI Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме (г.Кишинев, 1971 год), на семинаре по теории групп Института математики АН УССР, на гомельском алгебраическом семинаре АН БССР, на отчетно-научных конференциях профессорско-преподавательского состава КГПИ им.А.М.Горького (1970-1973 годы) и опубликованы в работах:

I. С.С.Левищенко, Обобщение групп Миллера-Морено, XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум (резюме сообщений и докладов), Кишинев (1971), 53-54.

2. С.С.Левищенко, Конечные ненильпотентные группы с некоторыми заданными системами нильпотентных подгрупп, Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории групп, Новосибирск (1973), 99-105.

БФ 18493. 25.IУ 1973 г. Формат 60x84 1/16.
Объем 0,75 печ.л. Тираж 200. Зак. 2846.

Киевская типография научной книги. Киев, Репина, 4.