КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени А. М. ГОРЬКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ГЕОМЕТРИИ

И. И. МАРКУШ

Об асимптотическом представлении решений некоторых типов линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр

Автореферат
диссертации, представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор Фещенко С. Ф.

Киев — 1960

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени А. М. ГОРЬКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ГЕОМЕТРИИ

И. И. МАРКУШ

Об асимптотическом представлении решений некоторых типов линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр

Автореферат
диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор Фещенко С. Ф.

Киев — 1960

Одной из наиболее важных задач, которые ставятся для линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, есть смешанная задача [1].

Наиболее общие результаты по смешанной задаче для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (зависящими от x и t) получила О. А. Ладыженская методом конечных разностей [1]. Она также исследовала метод Фурье в его наиболее общей постановке в том случае, когда имеет место разделение переменных.

В случае неполного разделения переменных метод Фурье был обобщен З. И. Халиловым [2].

Однако, упомянутые авторы рассматривали смешанную задачу для гиперболических уравнений в том случае, когда граничные условия не изменяются по t. А между тем, многие задачи математической физики приводят к переменным граничным условиям.

Одним из наиболее широко распространенных методов приближенного решения дифференциальных уравнений и систем есть асимптотический метод малого параметра.

В случае, когда малый параметр находится при старших производных дифференциальных уравнений с частными производными (параметр входит дискретно), значительные результаты получили Левинсон [3], Вишик и Люстерник [4], Олейник [5] и другие.

В случае непрерывной зависимости уравнения от малого параметра выдающиеся результаты по асимптотическим методам получили Пуанкаре, Горн, Шлезингер, Стеклов, Фаулер, Биркгоф, Градштейн, Тамаркин, Пугачев, Крылов и Боголюбов, Штокало, Митропольский, Фещенко и др. Все эти исследования относились к обыкновенным линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям и системам.

---

[1] Основные методы решения смешанной задачи для гиперболических уравнений и систем — это метод Фурье, метод преобразования Лапласа, метод сведения к интегральным уравнениям, метод конечных разностей, метод аналитической апроксимации и асимптотические методы малого параметра.

В 1958 г. появилась работа Г. Н. Савина и С. Ф. Фещенко [6], в которой дано построение асимптотики для одного дифференциального уравнения с частными производными гиперболического типа с переменными граничными условиями.

Целью настоящей работы есть применение асимптотического метода малого параметра к решению смешанной задачи для дифференциальных уравнений и систем гиперболического типа, коэффициенты и граничные условия которых зависят от x, t и малого параметра ε, а также к решению одного интегро-дифференциального уравнения с медленно изменяющимися коэффициентами [1].

К уравнениям с медленно изменяющимися коэффициентами приводят некоторые задачи с большими и малыми параметрами.

Отметим, что переменные граничные условия третьего рода при помощи определенной подстановки, можно свести к постоянным граничным условиям второго рода. Однако, когда в переменные граничные условия входит, кроме искомой функции и ее производной по x, также производная по t, то такие граничные условия не удается свести к постоянным.

В работе применяется асимптотический метод малого параметра для решения смешанной задачи как с постоянными, так и с переменными граничными условиями [2].

Диссертация состоит из пяти глав.

В первой главе рассматривается дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x} - C(\tau, x, \varepsilon)u + \sum_{j=1}^{N} F_j(\tau, x, \varepsilon)\, e^{i\theta_j(t, \varepsilon)} \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \tag{2}$$

---

[1] Функция называется медленно изменяющейся, если производная от нее по аргументу пропорциональна малому параметру.

[2] Сущность асимптотического метода заключается в том, что решение дифференциального уравнения, зависящего от малого параметра, ищется в виде разложения по степеням этого параметра. Так как эти ряды могут быть и расходящимися, то они рассматриваются как асимптотические, то есть, что их частные суммы стремятся к точному решению не с увеличением числа их членов, а при стремлении малого параметра к нулю.

граничными условиями:

$$a_1 u_x(t, 0)+a_2 u(t, 0)=0$$
$$a_3 u_x(t, \pi)+a_4 u(t, \pi)=0, \tag{3}$$

где ε — действительный малый параметр, причем $\tau=\varepsilon t$, $0\leqslant\tau\leqslant L$ (L — постоянная величина), $0\leqslant x\leqslant\pi$, $\frac{d\theta_j}{dt}=k_j(\tau)>0$ ($k_j(\tau)$ — действительные медленно изменяющиеся функции); $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — известные функции, a_i ($i=1, 2, 3, 4$) — постоянные числа, $u(t, x)$ — искомая функция.

Предполагается, что функции $A(\tau, x, \varepsilon)$, $B(\tau, x, \varepsilon)$, $C(\tau, x, \varepsilon)$, $F_j(\tau, x, \varepsilon)$ ($j=1, 2, \ldots, N$) — неограниченно дифференцируемы по τ, имеют представление:

$$A(\tau, x, \varepsilon)=A_0(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau, x),\ B(\tau, x, \varepsilon)=B_0(x)+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s B_s(\tau, x) \tag{4}$$

$$C(\tau, x, \varepsilon)=C_0(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s C_s(\tau, x),\ F_j(\tau, x, \varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s F_j^{(s)}(\tau, x),$$

$$B_0(x)=\frac{dA_0(x)}{dx}$$

и интегрируемы с квадратом по x вместе со всеми производными по τ.

Решение уравнения (1) при условиях (2), (3) ищется в виде:

$$u(t, x)=\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(t)W_n(x), \tag{5}$$

где $W_n(x)$ — собственные функции краевой задачи Штурма-Лиувиля, которая получается применением метода Фурье к главной (не зависящей от τ и ε) части уравнения (1).

При этом смешанная задача (1), (2), (3) сводится к краевой задаче на собственные функции и задаче Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с медленно изменяющимися коэффициентами.

Бесконечная система дифференциальных уравнений решается асимптотическим методом малого параметра. Рассматриваются два случая: 1) «резонансный», когда при некоторых значениях τ одна или несколько из функций $k_j^2(\tau)$ могут стать равными одному из собственных значений главной части уравнения; 2) «нерезонансный», когда ни одна из функций $k_j^2(\tau)$ не принимает собственных значений главной части уравнения.

Для «резонансного» случая доказана следующая

ТЕОРЕМА.

Если все коэффициенты полученной бесконечной системы дифференциальных уравнений неограниченно дифференцируемы по τ и выполняются все указанные выше условия, то асимптотические частные решения этой системы могут быть представлены в виде:

$$Z_n(t, \varepsilon)=\sum_{l=1}^{r}\{[\delta_{n,\,l}+\Pi_n(\tau, \varepsilon)]\,\zeta_l(t)+P_{n,\,l}(\tau, \varepsilon)\}e^{i\theta_l}+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=r+1}^{N}R_{jn}(\tau, \varepsilon)e^{i\theta_j},\ (n=1,\ 2,\ 3,\ldots) \qquad (6)$$

где $\delta_{n,\,l}$ — символ Кронекера, а $\zeta_l(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\zeta_l}{dt}=\{D(\tau, \varepsilon)+i\,[\Omega(\tau, \varepsilon)-k_l(\tau)]\}\,\zeta_l+T_l(\tau, \varepsilon) \qquad (7)$$

Предполагается, что функции $\Pi_n(\tau, \varepsilon)$ $P_{nl}(\tau, \varepsilon)$, $R_{jn}(\tau, \varepsilon)$, $D(\tau, \varepsilon)$, $\Omega(\tau, \varepsilon)$, T_l имеют представление в виде формальных рядов по степеням малого параметра, причем Π_n, P_{nl}, D, T_l начинаются с ε в первой степени, а Ω и R_{jn} — начиная с ε в нулевой степени.

Для «нерезонансного» случая имеет место следующая

ТЕОРЕМА.

Если выполняются все условия предыдущей теоремы, то формальное решение бесконечной системы дифференциальных уравнений может быть представлено в виде:

$$Z_n(t, \varepsilon)=\delta_{n,\,1}\,\zeta(t)+\sum_{j=1}^{N}\widetilde{R}_{jn}(\tau, \varepsilon)\,e^{i\theta_j(t,\,\varepsilon)}, \qquad (8)$$

где $\zeta(t)=\xi(t)+i\eta(t)$ *определяется из дифференциального уравнения:*

$$\frac{d\zeta(t)}{dt}=[\widetilde{D}(\tau, \varepsilon)+i\,\widetilde{\Omega}(\tau, \varepsilon)]\,\zeta(t) \tag{9}$$

Функции $\widetilde{R}_{jn}$, $\widetilde{D}$, $\widetilde{\Omega}$ имеют представление в виде формальных рядов по степеням ε, причем $\widetilde{R}_{jn}$ и $\widetilde{D}$ начинаются с ε в первой степени, а $\widetilde{\Omega}$ начинаются с ε в нулевой степени.

Применяя методы функционального анализа, дается математическое обоснование применяемого асимптотического метода малого параметра. Для этого доказывается существование бесконечной системы дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами, формулируются некоторые вспомогательные леммы и доказывается следующая

ТЕОРЕМА.

Если точные решения Z_n *полученной бесконечной системы дифференциальных уравнений и „m"-тые приближения* Z_n^m *взяты при одинаковых начальных условиях, то найдется такая постоянная величина* C_m, *не зависящая от* ε, *что имеет место неравенство:*

$$\| Z_n-Z_n^m \| \leqslant C_m\, \varepsilon^m \tag{10}$$

Указываются также достаточные условия для существования непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи (1), (2), (3).

Во второй главе рассматривается система дифференциальных уравнений вида:

$$A(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=B(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varepsilon C(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon D(\tau, x, \varepsilon)u+$$

$$+\varepsilon F(\tau, x, \varepsilon)e^{i\theta} \tag{11}$$

с начальными условиями:

$$u(0, x)=\varphi(x),\ u_t(0, x)=\psi(x) \tag{12}$$

и граничными условиями второго рода:[1])

$$u_x(t, 0)=0, \ u_x(t, 1)=0, \tag{13}$$

где ε $(0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$ — малый параметр, причем $\tau=\varepsilon t$, $0\leqslant\tau\leqslant L$, $\frac{d\theta}{dt}=k(\tau)>0$; $F(\tau, x, \varepsilon)$ - известная n-мерная вектор-функция; $A(\tau, x, \varepsilon)$, $B(\tau, x, \varepsilon)$, $C(\tau, x, \varepsilon)$, $D(\tau, x, \varepsilon)$ — квадратные матрицы n-го порядка, имеющие представление:

$$A(\tau, x, \varepsilon)=A_0+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau, x), \ B(\tau, x, \varepsilon)=B_0+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s B_s(\tau, x),$$

$$C(\tau, x, \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s C_s(\tau, x), \ D(\tau, x, \varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s D_s(\tau, x), \ F(\tau, x, \varepsilon)=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s F_s(\tau, x) \tag{14}$$

(A_0, B_0 — постоянные матрицы n-го порядка, причем матрица A_0 имеет обратную).

Предполагается, что матрицы $A(\tau, x, \varepsilon)$, $B(\tau, x, \varepsilon)$, $C(\tau, x, \varepsilon)$, $D(\tau, x, \varepsilon)$ и вектор-функция $F(\tau, x, \varepsilon)$ неограниченно дифференцируемы по τ и интегрируемы с квадратом по $x (0\leqslant x\leqslant 1)$, а $k(\tau)$ — действительная медленно изменяющаяся функция, неограниченно дифференцируемая по τ; кроме этого, постоянная матрица $S_0=A_0^{-1}B_0$ имеет различные действительные характеристические числа $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$.

Тогда при помощи неособенного линейного преобразования $u(t, x)=TV(t, x)$, где T — постоянная матрица, смешанная задача (11), (12), (13) приводится к смешанной задаче относительно неизвестной функции $V(t, x)$.

Решение последней задачи ищется в виде ряда по собственным функциям главной части системы:

$$V(t, x)=\sum_{j=1}^{\infty}X_j(x)Y_j(t). \tag{15}$$

---

[1] Отметим, что к постоянным однородным граничным условиям второго рода (при помощи определенной подстановки) приводятся переменные граничные условия третьего рода [7]. В случае системы дифференциальных уравнений нужно требовать, чтобы матрицы, входящие в переменные граничные условия, были коммутативными. Только в этом случае имеет место сведение переменных граничных условий к постоянным.

При этом смешанная задача сводится к краевой задаче на собственные функции $X_j(x)$ главной части системы и задаче Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $Y_j(t)$.

Последняя система решается при помощи асимптотического метода малого параметра.

Рассматриваются два случая: 1) «резонансный», когда при некоторых значениях τ функция $k^2(\tau)$ может стать равной одному из чисел $\lambda_i\nu_m(=1, 2,..., n; m=1, 2,...)$; 2) „нерезонансный", когда для всех τ функция $k^2(\tau)$ не может принимать значений $\lambda_i\nu_m$.

Для «резонансного» случая имеет место

ТЕОРЕМА.

Если все коэффициенты полученной бесконечной системы неограниченно дифференцируемы по τ и выполняются указанные выше условия, то асимптотические решения указанной системы могут быть представлены в виде:

$$Y_m(t, \varepsilon)=[E_{m,1}+\varepsilon\Delta_m(\tau, \varepsilon)]\zeta e^{i\theta}+L_m(\tau, \varepsilon)e^{i\theta}, \qquad (16)$$

где $\zeta(t)$ определяется из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \{D(\tau, \varepsilon)+i[\Omega(\tau, \varepsilon)-Ek(\tau)]\}\zeta(t)+Z(\tau, \varepsilon). \qquad (17)$$

Здесь $E_{m,1}=E$ при $m=1$ и $E_{m,1}=0$ при $m\neq 1$, а квадратные матрицы $\Delta_n(\tau, \varepsilon)$, $D(\tau, \varepsilon)$, $\Omega(\tau, \varepsilon)$ n-го порядка и n-мерные вектора $L_m(\tau, \varepsilon)$, $Z(\tau, \varepsilon)$ имеют представление в виде формальных рядов по степеням малого параметра ε

Для «нерезонансного» случая имет место следующая

ТЕОРЕМА.

Если выполняются все условия предыдущей теоремы, то формальные решения бесконечной системы дифференциальных уравнений могут быть представлены в виде:

$$Y_m(t, \varepsilon)=[E_{m,1}+\varepsilon\Pi_m(\tau, \varepsilon)]\zeta(t)+R_m(\tau, \varepsilon)e^{i\theta}, \qquad (18)$$

где $\zeta(t)=\xi(t)+i\eta(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = \mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)\zeta(t). \qquad (19)$$

Предполагается, что матрицы $\Pi_m(\tau, \varepsilon)$, $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ и вектора $R_m(\tau, \varepsilon)$ неограниченно дифференцируемы по τ и имеют представление в виде формальных рядов по степеням малого параметра.

В третьей главе рассматривается дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_0 u + \varepsilon L_1 u + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} F_j(\tau, x, \varepsilon) e^{i\theta_j(t, \varepsilon)} \tag{20}$$

с начальными условиями:

$$u(0, x) = 0, \; u_t(0, x) = 0 \tag{21}$$

и переменными граничными условиями вида:

$$\begin{aligned} &u_x(t, 0) + a(\tau, \varepsilon) u_t(t, 0) + b(\tau, \varepsilon) u(t, 0) = \varepsilon f(\tau, \varepsilon) \\ &u_x(t, \pi) + c(\tau, \varepsilon) u_t(t, \pi) + d(\tau, \varepsilon) u(t, \pi) = \varepsilon g(\tau, \varepsilon), \end{aligned} \tag{22}$$

где L_0 и L_1 дифференциальные операторы вида:

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_0(x) \frac{\partial}{\partial x}\right) - C_0(x)$$

$$L_1 = A(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} - C(\tau, x, \varepsilon). \tag{23}$$

Функции A, B, C, F_j, a, b, c, d, f, g имеют представление в виде рядов по степеням ε, причем так, что переменные граничные условия при $\varepsilon = 0$ вырождаются в постоянные граничные условия третьего рода.

Решение смешанной задачи (20), (21), (22) ищется в виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) W_n(x) + \varepsilon x^2 V_1(t, \varepsilon) + \varepsilon(\pi^2 - x^2) V_2(t, \varepsilon), \tag{23}$$

где $W_n(x)$ — собственные функции главной части уравнения, то есть, собственные функции оператора L_0, а $V_1(t, \varepsilon)$, $V_2(t, \varepsilon)$ — невязки в граничных условиях.

При этом смешанная задача (20), (21), (22) также сводится к краевой задаче на собственные функции главной части уравнения [8] и задачи Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами. Неизвестные функции $V_1(t, \varepsilon)$ и $V_2(t, \varepsilon)$ определяются из граничных условий [6].

Рассматриваются два случая: «резонансный» и «нерезонансный». Для каждого из этих случаев доказывается соответствующая теорема.

В четвертой главе исследуется система дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon B(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon C(\tau, x, \varepsilon)u + \\ + \varepsilon D(\tau, x, \varepsilon)e^{i\theta} \tag{24}$$

с начальными условиями:

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0 \tag{25}$$

и переменными граничными условиями:

$$\begin{gathered} a_1(\tau, \varepsilon)u_x(t, 0) + a_2(\tau, \varepsilon)u_t(t, 0) + a_3(\tau, \varepsilon)u(t, 0) = 0 \\ a_4(\tau, \varepsilon)u_x(t, 1) + a_5(\tau, \varepsilon)u_t(t, 1) + a_6(\tau, \varepsilon)u(t, 1) = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Здесь $D(\tau, x, \varepsilon)$ — m-мерный вектор, а $A(\tau, x, \varepsilon)$, $B(\tau, x, \varepsilon)$, $C(\tau, x, \varepsilon)$, $a_j(\tau, \varepsilon)$ $(j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$—квадратные матрицы m-го порядка, имеющие следующее представление[1]:

$$A(\tau, x, \varepsilon) = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau, x), \quad B(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s B_s(\tau, x),$$

$$C(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s C_s(\tau, x), \quad D(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s D_s(\tau, x),$$

$$a_{j_1}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s a_{j_1}^{(s)}(\tau), \quad a_{j_2}(\tau, \varepsilon) = a_{j_2}^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s a_{j_2}^{(s)}(\tau),$$

$$(j_1 = 1, 2, 4, 5; \ j_2 = 3, 6) \tag{27}$$

Матрицы A_0 и $a_{j_2}^{(0)}$ — постоянные, причем A_0 — чисто диагональная с характеристическими числами $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_m^2$.

---

[1] Предположение (27) несущественно, данные матрицы могут быть представлены конечными суммами указанного вида.

Решение смешанной задачи (24), (25), (26) ищется в виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = W(t, x) + \varepsilon x V_1(t, \varepsilon) + \varepsilon(1-x) V_2(t, \varepsilon). \tag{28}$$

Тогда получаем смешанную задачу относительно неизвестной функции $W(t, x)$.

Решение последней системы представляется в виде ряда по фундаментальным решениям главной части уравнения; то есть:

$$W(t, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} Y_\nu(x) Z_\nu(t). \tag{29}$$

При этом получаем краевую задачу для фундаментальных решений $Y_\nu(x)$ и задачу Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $Z_n(t)$. Неизвестные функции $V_1(t, \varepsilon)$ и $V_2(t, \varepsilon)$ определяются из граничных условий.

Бесконечная система второго порядка и две бесконечные системы (получающиеся из граничных условий) первого порядка решаются асимптотическим методом малого параметра. Рассматриваются как «резонансный», так и «нерезонансный» случаи. Для этих случаев доказываются соответствующие теоремы.

В пятой главе рассматривается вопрос об асимптотическом решении одного типа интегро-дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами следующего вида: [1]

$$A(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon B(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t} + \int_0^1 K(\tau, x, \xi, \varepsilon) u(t, \xi) d\xi =$$

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^{N} F_j(\tau, x, \varepsilon) e^{i\theta_j}, \tag{30}$$

где $\tau = \varepsilon t$ $(0 \leqslant \tau \leqslant L)$, $\frac{d\theta_j}{dt} = k_j(\tau)$, а функции $A(\tau, x, \varepsilon)$, $B(\tau, x, \varepsilon)$, $K(\tau, x, \xi, \varepsilon)$, $F_j(\tau, x, \varepsilon)$ – неограниченно дифференцируемы по τ, непрерывны по $x (0 \leqslant x \leqslant 1)$ и имеют представление в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра, начиная с ε в нулевой степени.

[1] Отметим, что дифференциальное уравнение второго порядка с операторными коэффициентами (в гильбертовом пространстве) рассматривалось в работе [9]; оно сводилось к системе дифференциальных уравнений первого порядка, для которой построен формальный процесс расщепления и доказана асимптотическая сходимость в смысле нормы пространства.

Относительно ядра $K_0(\tau, x, \xi, \varepsilon)$ предполагаем, что оно действительное и симметрическое, а функция $A_0(x)$ удовлетворяет условию $A_0(x) > 0$.

Формальный процесс, который мы применяем для решения интегро-дифференциального уравнения (30), рассматривался раньше для дифференциальных уравнений в работах И. З. Штокало [10], С. Ф. Фещенко [11], [12], Далецкого и Крейна [9] и др.

Предполагается, что главная часть уравнения (30) имеет вид:

$$A_0(\tau, x)\varphi(\tau, x) = \lambda(\tau)\int_0^1 K_0(\tau, x, \xi)\varphi(\tau, \xi)d\xi. \qquad (31)$$

Рассматриваются два случая: 1) „резонансный", когда одна (или несколько) из функций $k_j^2(\tau)$ при некоторых τ может стать равной одному из значений $\frac{1}{\lambda_\nu(\tau)}$; 2) „нерезонансный", когда ни одна из функций $k_j^2(\tau)$ при всех τ не может принимать значений $\frac{1}{\lambda_\nu(\tau)}$.

Для «резонансного» случая имеет место

ТЕОРЕМА.

Если функции $A_s(\tau, x)$, $B_s(\tau, x)$, $F_j^{(s)}(\tau, x)$ — неограничено дифференцируемы по τ, $K_0(\tau, x, \xi)$ — действительное непрерывное по τ, x, ξ симметрическое по x, ξ положительно-определенное ядро, заданное в области S $(0 \leqslant x, \xi \leqslant 1,\ 0 \leqslant \tau \leqslant L)$ а $K_s(\tau, x, \xi)$ $(s = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ — регулярные ядра в этой области, то асимптотическое частное решение интегро-дифферанциального уравнения (30) может быть представлено в виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = [\varphi_1(\tau, x) + \varepsilon\Pi(\tau, x, \varepsilon)]\zeta(t)e^{i\theta_1} + \sum_{j=2}^{N} P_j(\tau, x, \varepsilon)\, e^{i\theta_j}, \qquad (32)$$

где $\varphi_1(\tau, x)$ — собственная функция симметрического ядра $K_0(\tau, x, \xi)$, отвечающая собственному значению $\lambda_1(\tau)$, а $\zeta(t)$ определяется из дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = \{D(\tau, \varepsilon) + i\,[\Omega(\tau, \varepsilon) - k_1(\tau)]\}\,\zeta(t) + Z(\tau, \varepsilon). \qquad (33)$$

Функции $\Pi(\tau, x, \varepsilon)$, $P_j(\tau, x, \varepsilon)$, $D(\tau, \varepsilon)$, $\Omega(\tau, \varepsilon)$, $Z(\tau, \varepsilon)$ имеют представление в виде формальных рядов по степеням малого параметра, причем Π, Ω — начиная с ε в нулевой степени, а P_j, D, Z - начиная с ε в первой степени.

Для «нерезонансного» случая имеет место следующая

ТЕОРЕМА.

Если выполняются все условия предыдущей теоремы, то асимптотическое частное решение и-д уравнения (1) может быть представлено в виде:

$$u(t, x, \varepsilon)=\varphi_1(\tau, x)\zeta(t)+\sum_{j=1}^{N} H_j(\tau, x, \varepsilon)e^{i\theta_j}, \tag{34}$$

где $\zeta(t)$ определяется из диф. уравнения первого порядка:

$$\frac{d\zeta(t)}{dt}=[\widetilde{D}(\tau, \varepsilon)+i\widetilde{\Omega}(\tau, \varepsilon)]\zeta(t) \tag{35}$$

Функции $H_j(\tau, x, \varepsilon)$, $\widetilde{D}(\tau, \varepsilon)$, $\widetilde{\Omega}(\tau, \varepsilon)$ имеют представление в виде формальных рядов по степеням малого параметра:

$$H_j(\tau, x, \varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H_j^{(s)}(\tau, x),\ \widetilde{D}(\tau, \varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s \widetilde{D}_s(\tau),$$

$$\widetilde{\Omega}(\tau, \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\widetilde{\Omega}_s(\tau). \tag{36}$$

Основные результаты диссертационной работы напечатаны в статьях [13—17].

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953 г.
2. З. И. Халилов, ДАН СССР, т. 83, № 5, 1952 г.
3. Levinson N., Ann. of Math. v. 51, № 22, 1950.
4. М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Успехи матем. наук, в. XII, № 5, 1957 г.
5. О. А. Олейник, ДАН СССР, т. 75, № 5, 1951 г.

6. Г. Н. Савин, С. Ф. Фещенко, ДАН УССР, № 6, 1958 г.

7. Kato T., Communications Pure and Appl. Math. v. 9, № 3, 1956.

8. Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950 г.

9. Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн, Укр. мат. журнал, т. II, № 4, 1950 г.

10. И. З. Штокало, Мат. сб. т. 19 (61), 1946 г.

11. С. Ф. Фещенко. ДАН УССР, № 2 (1947) и № 2 (1954).

12. С. Ф. Фещенко, Научные записки Киевского пединститута, сер. физмат, т. 9, № 4, 1949 г.

13. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, И. И. Маркуш, Отчетно-научная конференция педвузов УССР, Тезисы докладов, 1958 г.

14. И. И. Маркуш, Научные записки Киевского пединститута, т. XXX, 1958 г.

15. С. Ф. Фещенко, И. И. Маркуш, Научная конференция Киевского пединститута, Тезисы докладов, 1959 г.

16. И. И. Маркуш, ДАН УССР, № 1, 1960 г.

17. И. И. Маркуш, ДАН УССР, № 3, 1960 г.

БФ 17001. 8.6.60. Объем 1 печ. лист Зак. 701—200

Типография при Киевском государственном педагогическом институте им. Горького, Киев, ул. Франко, 44.