МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕШЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР

Киевский государственный педагогический институт
имени А.М.Горького

На правах рукописи

ЮРИЙ ИВАНОВИЧ МАЛЁВАНЫЙ

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

(130002 – методика преподавания математики)

Диссертация написана на украинском языке

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Киев – 1975

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР

Киевский государственный педагогический институт
имени А.М.Горького

На правах рукописи

ЮРИЙ ИВАНОВИЧ МАЛЁВАНЫЙ

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

(130002 - методика преподавания математики)

Диссертация написана на украинском языке

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Киев - 1975

Работа выполнена на кафедре математики и методики математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель – кандидат педагогических наук, доцент СЛЕПКАНЬ З.И.

Официальные оппоненты:
Академик АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор ПАРАСЮК О.С.

Кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник ДУБИНЧУК Е.С.

Внешний отзыв – Ивано-Франковский государственный педагогический институт имени В.С.Стефаника, кафедра математики.

Автореферат разослан "10" января 1975 года.

Защита диссертации состоится 12 февраля 1975 года на заседании Ученого совета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу:

252030, Киев-30, ул.Пирогова, 9, научная часть.

Ученый секретарь совета

Возрастание роли математики в технической, экономической и культурной жизни общества, бурное развитие самой математической науки вызвали необходимость перестройки школьного математического образования в Советском Союзе и за рубежом.

XXIII съезд КПСС поставил перед советской школой задачу привести в соответствие с современными требованиями содержание общего, трудового, политехнического обучения. На выполнение этих задач комиссией по математическому образованию математического отделения АН СССР во главе с академиком А.Н.Колмогоровым был определен объем знаний по математике для восьмилетней и средней школы и разработана программа. Согласно новой программе авторскими коллективами созданы новые учебники по математике, которые успешно внедряются в работу общеобразовательной школы.

Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР "О завершении перехода ко всеобщему среднему образованию и дальнейшем развитии общеобразовательной школы" указывает, что практическое осуществление решений XXIУ съезда КПСС в области экономики, науки и культуры требует дальнейшего усовершенствования всего дела обучения и воспитания подрастающего поколения, повышения качества работы общеобразовательной школы.

В 1974-75 учебном году завершается переход на новую программу и учебники по математике в восьмилетней

школе. Однако, было бы ошибочным полагать, что с введением новой программы и учебников заканчивается перестройка преподавания математики в школе. Предстоит еще большая работа ученых-методистов и учителей-практиков по уточнению содержания программы, усовершенствованию учебников и разработке методики преподавания модернизированного школьного курса математики.

В частности, серьезного внимания требует разработка методики преподавания так называемого традиционного материала, удельный вес и идейная нагрузка которого в новой программе претерпели существенные изменения. Таким материалом являются, в частности, тождественные преобразования, составляющие одну из ведущих линий школьного курса алгебры. По меткому замечанию академика П.С.Александрова вопрос тождественных преобразований является "совершенно просто и естественно возникающим при преподавании курса алгебры, но вовсе не столь просто решающимся" 1/. Это в полной мере подтверждает практика первых лет работы по новой программе.

В новом учебнике по алгебре существенно изменены место, последовательность изучения и трактовка тождественных преобразований целых, дробных и иррациональных выражений по сравнению с традиционным подходом. Раньше этот материал изучался почти на протяжении трех лет обучения (У1-УIII классы), причем прямые и обратные преобразования рассматривались без взаимосвязи. Но главным недостатком постановки изучения этого материала в традиционном школьном курсе алгебры и изложения его в учебниках было отсутствие сколь-нибудь выраженной целенаправленности тождественных преобразований (или, как их называли авторы, действий над выражениями), т.е., четкого указания о том, что мы должны получить, к чему надо стремиться, выполняя то или иное преобразование. Кроме того, рассматривая действия над одночленами, многочленами, дробями авторы тради -

---

*/ П.С.Александров, Научное содержание школьного курса алгебры, журнал "Математика в школе", 1946, № 4, стр. 1.

ционных учебников перегружали изложение чрезмерным количеством правил, которыми учащиеся должны были руководствоваться при их выполнении. Причем эти правила преподносились как что-то совершенно новое, вместо того, чтобы рассмотреть их как простое следствие из известных законов арифметических действий.

Были и другие недостатки в изучении этой темы, среди которых следует выделить оторванность тождественных преобразований от практики их применения. Сборники задач по алгебре содержали большое число зачастую однотипных громоздких упражнений, решение которых занимало много времени и имело сравнительно незначительную общеобразовательную ценность.

Указанные недостатки в основном устранены в новых учебниках по алгебре для восьмилетней школы. Благодаря теоретико-функциональному подходу к трактовке тождественных преобразований удалось в значительной мере избежать формализма в их изучении. Суть этого подхода, по словам одного из страстных его сторонников и пропагандистов Г.Б.Гуревича, состоит в том, что "...действия (арифметические: сложение, вычитание, умножение и деление) над буквенными выражениями только обозначаются; их можно будет осуществить, когда будут указаны числовые значения букв. Операции начальной алгебры суть преобразования выражений в тождественно им равные, т.е. замена одного порядка действий другим, ему равносильным (приводящим всегда к тому же численному результату, что и прежний порядок действий); преобразования эти производятся на основе свойств (законов) арифметических действий"[1/]. Согласно этой точке зрения, например, сумма или произведение двух многочленов считаются найденными, если эти многочлены заключены в скобки и между ними поставлены знаки + или × . Дальше идут уже тождественные преобразования полученных выражений, которые состоят в раскрытии скобок, приведении подобных членов и пр. Это в свою очередь обусловило изменение

---

*/Г.Б.Гуревич, О терминологии начальной алгебры, журнал "Математика в школе", 1962, № 6, стр.41.

принятой ранее терминологии. В новых учебниках речь идет не об умножении двух многочленов, например, а о преобразовании произведения двух многочленов в многочлен стандартного вида; не о сложении или вычитании двух дробей, а о представлении суммы (разности) двух дробей в виде дроби и т.д.

Второй характерной особенностью изложения рассматриваемого материала в новых учебниках есть параллельное изучение взаимообратных преобразований. Целесообразность такой последовательности рассмотрения этих вопросов, обоснованная в свое время некоторыми психологами и методистами (в частности, Б.П.Эрдниевым и др.), которые подчеркивали эффективность основанного на противопоставлении изучения прямых и обратных преобразований, подтверждается практической работой в школе. Параллельное изучение прямых и обратных преобразований создает возможности для более широкого их применения к решению уравнений, доказательству тождеств, вычислению значений выражений и пр.

Однако, практика работы в школе показывает, что в изучении этой темы уже по новой программе и учебникам имеется ряд трудностей и вопросов, требующих внимательного рассмотрения. В частности, владение большинством учащихся практическими навыками выполнения основных видов тождественных преобразований все еще остается не на должном уровне. Это отрицательно сказывается на изучении курса алгебры в целом. Более того, как справедливо отмечает известный английский математик и педагог У.Сойер "умение с легкостью преобразовывать элементарные алгебраические выражения весьма полезно и для изучения алгебры современной".[1] На важность и необходимость умения свободно выполнять определенный круг преобразований неоднократно указывал академик А.Н.Колмогоров. "Несомненно , - пишет он, - что навыки в выполнении некоторых основных операций, часто встречающихся во всей последующей работе, должны быть доведенными до автоматизма. Это касается не только четырех арифметических действий, но и простейших алгебраических

---

[1] У.Сойер, Путь в современную математику, перевод с анг., М., изд. "Мир", 1972, стр.20.

преобразований"[1/]. Пока что, к сожалению, новой программой и учебниками это обеспечивается далеко не в полной мере.

Кроме того, результаты работы по опережающей программе и пробными учебниками в двятых экспериментальных классах показали, что некоторым вопросам, в частности тождественным преобразованиям иррациональных выражений , в новых учебниках УII и УIII классов уделено недостаточное внимание. Так, отсутствие в них системы упражнений на освобождение дробей от иррациональности в числителе и знаменателе отрицательно сказалось на формировании умений вычислять пределы числовых последовательностей, функций, находить производную и пр.

Не всегда целесообразна последовательность и место изучения отдельных вопросов, связанных с рассматриваемой темой.

Все это свидетельствует о необходимости проведения исследований по дальнейшему уточнению содержания и объема материала о тождественных преобразованиях, который должен рассматриваться в школе, разработке методики изучения отдельных их видов в связи с особенностями изложения материала в новых учебниках, усовершенствованию системы упражнений. Такие исследования должны помочь установить тот необходимый минимум умений и навыков, которые по словам А.Н.Колмогорова и „должны быть доведенными до автоматизма" и разработать возможные пути формирования таких навыков.

Следует отметить, что специальных диссертационных исследований в указанном плане даже по традиционной программе до сих пор не проводилось. Вопросы методики изучения тождественных преобразований в школе в определенной мере рассматривались в диссертационных работах В.И.Беляева и Н.Н.Шунды. Однако, в диссертации В.И.Беляева, написанной в 1952 году, основное внимание сосредоточено на историческом аспекте проблемы и совсем мало места отведено разработке методики. Изучению тождественных преобразо-

---

1/ А.Н.Колмогоров, Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе, журнал "Математика в школе", 1967, № 2.

ваний на функциональной основе посвящен второй раздел диссертационной работы Н.Н.Шунды. Однако, рассматривается эта проблема в основном лишь в аспекте введения основных понятий, касающихся таких преобразований (тождественные, квазитождественные выражения , тождество , квазитождество, тождественные на множестве выражения , тождество на множестве и пр.). Вопросы методики формирования умений и навыков выполнения тождественных преобразований в этой диссертации не исследовались. К тому же обе работы выполнялись в то время, когда действовала старая программа и традиционные учебники.

Мы поставили своей целью:

1) Проследить тенденции в эволюции взглядов на роль, место и назначение тождественных преобразований выражений в школьном курсе алгебры.

2) Проанализировать новую программу и учебники по алгебре отечественной восьмилетней школы с точки зрения постановки изучения тождественных преобразований. Сравнить с состоянием этого вопроса в школах некоторых зарубежных стран.

3) На основе педагогического эксперимента:

а) уточнить содержание и объем учебного материала, касающегося тождественных преобразований в курсе алгебры восьмилетней школы;

б) разработать методику изучения этого материала (введение основных понятий, изучение различных видов тождественных преобразований и применение их к решению уравнений, доказательству тождеств, вычислению значений выражений и пр.);

в) предложить целесообразную систему упражнений, способствующую сознательному усвоению его учащимися, выработке у них прочных умений и навыков выполнения различных видов тождественных преобразований.

Диссертация написана на основании:

1) изучения и анализа отечественной и зарубежной научно-методической литературы по вопросам теории алгебры, педагогики, психологии, методики преподавания школьного курса

алгебры;

2) девятилетнего опыта работы автора в школе по старой программе и традиционным учебникам по математике;

3) шестилетнего опыта работы в качестве учителя экспериментальных классов средней школы № 92 имени И.Франко г.Киева, которые обучались по опережающей программе с целью проверки возможностей новой программы и пробных учебников по математике в восьмилетней и средней школе. При этом по такой программе автор на каждом году обучения работал дважды: сначала в экспериментальном классе по пробным учебникам, а потом по введенным в массовую школу учебным пособиям.

Кроме школы № 92 имени И.Франко эффективность предложенных в диссертации методических рекомендаций проверялась также в 57-й, 79-й и 132-й средних школах г.Киева.

Диссертация имеет следующее содержание:

Глава 1. Основные вопросы теории тождественных преобразований.

Предварительные замечания.

§ 1. Выражения. Числовые выражения и выражения с переменными. Классификация выражений.

§ 2. Две точки зрения на тождественные преобразования.

§ 3. Тождество. Тождественные преобразования выражений.

§ 4. Виды тождественных преобразований выражений. Основные задачи.

Выводы к первой главе.

Глава II. Постановка тождественных преобразований в практике русской дореволюционной, советской школы и в школах некоторых зарубежных стран.

Предварительные замечания.

§ 1.Содержание и место тождественных преобразований выражений в учебных руководствах по алгебре дореволюционной школы.

§ 2. Постановка тождественных преобразований в учебниках и учебно-методической литературе советской школы.

§ 3. Содержание и место тождественных преобразований выражений в школах Чехословацкой Социалистической Республики и Германской Демократической Республики.

Выводы ко второй главе.

Глава III. Пути обучения учащихся тождественным преобразованиям выражений в курсе алгебры восьмилетней школы.

Предварительные замечания.

§ 1. Обеспечение преемственности при изучении тождественных преобразований в 1У-У классах и в курсе алгебры восьмилетней школы.

§ 2. Тождественные преобразования целых выражений.

§ 3. Система изучения тождественных преобразований дробных рациональных выражений.

§ 4. Методика изучения тождественных преобразований иррациональных выражений.

Выводы к третьей главе.

Литература (183 названия).

Взгляды на содержание, место и методику изучения тождественных преобразований в школе изменялись в связи с развитием школьного математического образования. При этом можно выдержить две достаточно выраженные тенденции:

1) тождественные преобразования выражений рассматриваются выборочно лишь в связи с их практическим применением в основном к решению уравнений, без какой-либо четко выраженной логической системы;

2) строится более-менее стройная теория тождественных преобразований с удачными в одних случаях и неудачными в других попытками обосновать выполнение отдельных их видов и иллюстрацией практических применений.

Как известно, первым, кто систематизировал и четко изложил элементарную алгебру, как она сложилась к середине XVIII столетия, был Л.Эйлер, который сделал это в своем известном руководстве "Универсальная арифметика", написанном в 1768-1769 гг. Теории тождественных преобразований здесь недостает обоснованности, которую не всегда можно было провести даже при желании автора, так как он рассматривал отрицательные числа вне связи с тождественными преобразованиями.

Качественно новый шаг в вопросе разработки теории тождественных преобразований представляет "Алгебра" Н.И.Лобачевского (1834 г.). Здесь даны обоснования правил выполнения преобразований целых и дробных выражений.

Последующие авторы учебных пособий по алгебре (А.Ю.Давыдов, Н.А.Шапошников, А.П.Киселев и др.) ничего принципиально нового в вопрос изучения тождественных преобразований не внесли.

Для всех указанных пособий характерен один существенный недостаток в изложении этого материала: отсутствие четко сформулированной задачи выполнения того или иного вида тождественных преобразований, т.е. конечной цели, которую они преследуют.

Тем более значительной следует считать заслугу известного русского педагога-математика К.Ф.Лебединцева, который в своем "Курсе алгебры" (1909-1910 гг.) придал тождественным преобразованиям необходимую целенаправленность. Рассматривая, например, тождественные преобразования дробных выражений, он вводит сначала понятие алгебраической дроби, нормального вида алгебраической дроби, а затем утверждает, что всякое дробное выражение может быть представлено в виде алгебраической дроби нормального вида. Тут же указываются пути и способы такого представления.

Указанные идеи К.Ф.Лебединцева не нашли надлежащей поддержки и распространения в учебной и методической литературе того времени. Лишь через три десятилетия с таких же позиций подошли к изложению тождественных преобразований П.С.Александров и А.Н.Колмогоров в своем пособии по алгебре для средней школы , и аналогичный подход с точки зрения целенаправленности тождественных преобразований осуществлен в ныне действующих учебниках по алгебре в восьмилетней школе.

П.С.Александрову и А.Н.Колмогорову удалось, пожалуй, наиболее полно и строго по сравнению со своими предшественниками провести обоснование выполняемых преобразований. Как отмечают они в предисловии, "авторы везде стремились к полному и отчетливому пониманию учащимися смысла всех совершаемых операций. В частности, большие старания приложены к тому, чтобы действия над буквенными выражениями не воспринимались оторванно от арифметических действий с числами". 1/ Все дальнейшее изложение материала – это яркая реализация приведенной точки зрения. Однако, авторы не сочли нужным отказаться от формулировки специальных правил выполнения различных видов преобразований, которые при такой постановке вопроса оказываются ненужными. Кроме того, отсутствие понятий нормального вида одночлена и многочлена вынуждают их включать в определенное действие (сложение, умножение) многочленов также приведение подобных членов.

Учебник А.Н.Барсукова, который был на вооружении школы пятнадцать последних лет до перехода на новые программы по математике, явился шагом назад с точки зрения целенаправленности и обоснованности тождественных преобразований. Совершенно справедливой в связи с этим представляется критика изложения автором указанного материала.

Определенную роль в утверждении принятого сейчас в школе подхода к трактовке и изложению тождественных преобразований сыграла дискуссия, развернувшаяся на стра-

---

*/ П.С.Александров и А.Н.Колмогоров, Алгебра, пособие для средних школ, часть первая, М., Учпедгиз, 1940,стр.4.

ницах журнала "Математика в школе" в 1962-1963 годах. Поводом к ней послужила упоминаемая уже статья Г.Б.Гуревича, в которой он изложил суть нового подхода к изучению тождественных преобразований. Основные положения этой статьи состоят в следующем:

а) ввести понятие канонического вида одночлена и многочлена и целью всех последующих преобразований одночленов и многочленов считать приведение их к каноническому виду;

б) Отказаться от рассмотрения действий над выражениями. "Существенным является лишь преобразование результата; этому и следует обучать и говорить при этом только о преобразовании выражений"1/.

в) Большинство упомянутых преобразований выполнять не на основе в значительной степени формально введенных правил, а основываясь на известных свойствах и законах арифметических действий. И только отдельные из них - на основе немногих теорем, вытекающих из тех же свойств (например, раскрытие скобок в произведении многочленов).

г) Свести число правил к минимуму.

Следует отметить, что вопросы, поднятые Г.Б.Гуревичем, не были в основном принципиально новыми. Это касается, в частности, размежевания действий над алгебраическими выражениями и приведения результатов действий к простейшему виду (об этом говорил в свое время С.И.Новоселов, на это обращали внимание Д.К.Фаддеев и И.С.Соминский, хоть и не остались сами до конца последовательными в данном вопросе). Не были оригинальными положения Г.Б.Гуревича относительно обоснования тождественных преобразований с помощью законов и свойств арифметических действий (учебное пособие П.С.Александрова и А.Н.Колмогорова представляет собой образец в этом плане). Главное, что остается за Г.Б.Гуревичем - это акцентирование внимания на вопросах целенаправленности тождественных преобразований путем введения понятий канонического вида одно-

1/Г.Ф.Пискарев, Е.С.Канин, А.Д.Медведенко, А.А.Москалев, Г.Б.Гуревич, П.А.Буданцев, О терминологии и понятиях начальной алгебры, дискуссия, журнал "Математика в школе", 1963, №6, стр.50.

члена и многочлена и отказ от ненужных фактически при предлагаемом подходе правил действий над одночленами и многочленами. Заслуга Г.Б.Гуревича еще и в том, что именно он поднял все эти вопросы, сделав тем самым необходимый толчок для экспериментов, исследований, которые в конечном счете привели к усовершенствованию изучения алгебры в восьмилетней школе.

При различии взглядов по отдельным частным вопросам почти всех участников дискуссии объединяло главное: тождественные преобразования выражений (приведение подобных, раскрытие скобок, сокращение дробей и др.) относятся к преобразованиям результатов действий. Они выполняются на основе известных законов или свойств арифметических действий, носящих общий характер, а потому должны рассматриваться самостоятельно, не включаясь в определение или правило выполнения соответствующего действия.

Эта точка зрения в основном и реализована в новых учебных пособиях по алгебре для восьмилетней школы.

Как видим, нынешняя постановка изучения тождественных преобразований в школьном курсе алгебры предоопределена многолетними поисками ученых, методистов, учителей-практиков и, на наш взгляд, является наиболее целесообразной с методической точки зрения.

В вопросах содержания и системы изучения тождественных преобразований в восьмилетней школе важны три аспекта: введение основных понятий, формирование у учащихся умений и навыков в выполнении тождественных преобразований и различные пути их применения в курсе математики. С точки зрения первого аспекта необходимо выяснить, как трактуются основные понятия, касающиеся тождественных преобразований, в математической науке и, в частности, в высшей и элементарной алгебре, и какое отображение находит эта трактовка в школьном курсе математики. Этим вопросам посвящено содержание первой главы диссертации.

Здесь рассмотрены разные подходы к классификации выражений, значительное внимание уделено анализу двух

точек зрения на тождественные преобразования: точки зрения абстрактной алгебры и теоретико-функциональной. Исходя из общих целей изучения школьного курса математики и учитывая дидактические соображения, а также возрастные особенности учащихся, изучающих начальную алгебру, следует отметить, что теоретико-функциональная точка зрения имеет несомненные преимущества перед точкой зрения абстрактной алгебры, однако игнорировать последнюю в школе тоже нельзя.

В научно-методической литературе существуют различные взгляды относительно определения понятия тождества. В частности, предполагается различать понятия "тождество", "квазитождество", "тождество на множестве". Причем, относительно первых двух понятий высказываются также различные точки зрения, касающиеся их трактовки. Мы считаем, что в школьном курсе математики достаточно ограничиться двумя понятиями – тождество и тождество на множестве.

Проведенные нами исследования подтверждают, насколько важно, изучая отдельные виды тождественных преобразований выражений, учитывать вопросы преемственности, максимально использовать знания, уже имеющиеся у учащихся. Игнорирование этого факта часто приводит к открытию уже известного и не способствует сознательному усвоению изучаемого материала. Так, например, уже в пятом классе учащиеся знакомятся с простейшими примерами вынесения общего множителя за скобки (особенно при вычислении значения выражения), приведением подобных членов (употребляя термин "подобные слагаемые"). Изучая в том же классе распределительный закон умножения, учащиеся преобразовывают в многочлен произведение одночлена на многочлен (называется это преобразование там раскрытием скобок). Совершенно естественно, приступая к систематическому изучению упомянутых вопросов в шестом классе, строить все не заново, а на уже имеющемся фундаменте, проведя некоторые изменения в терминологии и уточнив смысл отдельных преобразований. Суть же остается прежней. Это очень важно донести до сознания учащихся, что не всегда сделано в существующих учебниках.

Как показал эксперимент, сознательному усвоению вопросов, связанных с выполнением большинства тождественных преобразований и выработкой прочных навыков, в значительной мере способствует расчленение определенного преобразования на ряд элементарных шагов, выполнение которых не вызывает трудностей. Таким образом, создается четкий алгоритм, следуя которому можно легко прийти к поставленной цели.

Проиллюстрируем сказанное на примере изучения разложения многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки. Как известно , здесь важно отработать два момента: 1) отыскание общего множителя; 2) получение многочлена в скобках, оставшегося после вынесения общего множителя.

Начинается работа с рассмотрения примера на вычисление, который легко решить, вынося числовой множитель за скобки (с такими примерами учащиеся встречались в пятом классе). Вслед за этим предлагается найти значение выражения, содержащее переменную в первой степени, которую также целесообразно для упрощения вычислений вынести за скобки. После рассмотрения следующего примера,где при разложении на множители можно выносить за скобки различные степени переменной, делается вывод, что практически всегда за скобки выносят степень с наибольшим возможным показателем.

Найдем по указанному принципу общий множитель в многочлене $5x^7+2x^5-3x^3$. Очевидно это x^3 . Для облегчения отыскания выражения, которое будет стоять в скобках после вынесения общего множителя представим каждый член данного многочлена в виде произведения двух сомножителей, один из которых есть x^3 .

$$5x^7+2x^5-3x^3=x^3\cdot 5x^4+x^3\cdot 2x^2+x^3(-3).$$

Дальнейшие преобразования не составляют трудностей и выполняются на основании распределительного закона умножения. При этом обращается внимание на то, что показатель степени переменной x в вынесенном выражении наименьший из всех показателей, с которыми эта переменная входит в многочлен.

Если в каждый член многочлена входят степени нескольких переменных, то для отыскания общего множителя находят общие множители для каждой переменной по указанному принципу, а потом записывают их произведение.

Совершенно естественно, если коэффициенты многочлена не взаимно простые числа, то в состав множителя, который выносится за скобки, будет входить и наибольший общий делитель их модулей.

После этого формулируется алгоритм выполнения рассмотренного тождественного преобразования.

1. Устанавливается общий множитель членов многочлена. Коэффициентом его есть наибольший общий делитель модулей коэффициентов членов многочлена, который берется со знаком "плюс" или "минус". Переменные , входящие во все члены, включаются в общий множитель с наименьшим показателем, который они имеют в данном многочлене.

2. Каждый член многочлена представляется в виде произведения двух сомножителей, один из которых - найденный общий множитель.

3. Общий множитель выносится за скобки на основании распределительного закона умножения.

Выполнение второго этапа со временем можно опустить, но на первых порах он обязателен. Аналогичный подход осуществлен нами при разработке методики формирования у учащихся умений и навыков в разложении многочленов на множители другими способами, в сокращении дробей, приведении их к общему знаменателю, установлении условия равенства дроби нулю и др. Экспериментальная проверка предложенных рекомендаций позволяет сделать вывод об их эффективности.

Трудно переоценить дидактическую роль в формировании понятий и выработке навыков целесообразной системы упражнений. В этом плане новые учебники по алгебре для восьмилетней школы выгодно отличаются от традиционных. Однако, основное внимание авторы уделили содержательной стороне предлагаемых упражнений, не без основания стремясь к тому, чтобы большинство из них несло учащимся

определенную новую информацию. Вопрос же создания системы, в полной мере обеспечивающей постепенный переход от простого к более сложному, от известного к неизвестному с учетом всех деталей, возникновение которых возможно в процессе работы, решен, на наш взгляд, не везде в достаточной мере. С целью устранения указанного недочета нами разработаны, экспериментально проверены и предложены такие системы упражнений при изучении тождеств сокращенного умножения и их применений, сокращения дробей, решения уравнений, содержащих переменную в знаменателе, тождественных преобразований иррациональных выражений и др. В качестве примера приведем систему упражнений, которая готовит учащихся к выполнению достаточно сложного и важного преобразования – выделению из данного трехчлена квадрата двучлена.

Первым из этой серии рассматриваются упражнения такого содержания: представить данное выражение в виде квадрата двучлена, если это возможно. Закрепляется это преобразование при решении упражнений типа: разложить на множители

$9x^2+12xy+4y^2-a^2$; $4b^2-a^2+10a-25$ и др.

2) Дополнить данное выражение до трехчлена, который можно представить в виде квадрата двучлена.

Сюда принадлежат упражнения вида:

а) при каком значении n выражение $16x^2+n+25y^2$ можно записать в виде квадрата двучлена;

б) в данные равенства вместо ... вставить пропущенные одночлены так, чтобы образовалось тождество:

$$(\dots+3x)^2=49b^2+\dots+9x^2;$$

$$(5x-\dots)^2=\dots-20xy+\dots$$

и др.

3) Дан трехчлен, который можно преобразовать в квадрат двучлена. Образовать из него несколько трехчленов, с которыми указанного преобразования выполнить нельзя.

4) Дан двучлен $c-2d$. Образовать трехчлен, один из членов которого равен квадрату первого члена данного двучлена, второй – удвоенному произведению его членов, а третий – $3d^2$. Записать полученное выражение в виде

суммы трехчлена, равного квадрату данного двучлена, и определенного одночлена.

5) Из данного трехчлена выделить квадрат двучлена.

Проведенные исследования убедили нас в необходимости расширить по сравнению с имеющимся в учебнике объем упражнений, касающихся преобразований иррациональных выражений. Надо учитывать, что такие преобразования находят широкое применение при изучении математики в средней школе, в частности, при рассмотрении вопросов, связанных с исследованием функций, нахождением пределов последовательностей и функций, производной и ее применений, решении геометрических задач и пр. Кроме преобразований произведений, степеней радикалов и упрощения их наиболее распространенными преобразованиями, которыми при этом приходится пользоваться, являются следующие:

а) освобождение от иррациональности в знаменателе дроби;

б) освобождение от иррациональности в числителе дроби;

в) разложение на множители выражений, содержащих радикалы, и связанные с этим упрощения (сокращения дробей и др.).

Таким образом, сознательное, безошибочное, свободное выполнение разнообразных преобразований иррациональных выражений является тем необходимым базисом, который обеспечивает успешное изучение других вопросов школьного курса математики.

Отсюда очевидно, насколько основательными должны быть знания, полученные учащимися, и совершенными навыки, которыми они должны овладеть во время изучения этого материала.

К сожалению, существующие сейчас в школе учебники по алгебре не обеспечивают в полной мере решения указанной выше задачи. Отдавая дань авторам в значительном расширении количества и целесообразной систематизации упражнений, связанных с понятием арифметического корня, по сравнению с традиционными учебниками и сборниками задач, нельзя не отметить явного послабления внимания

к тождественным преобразованиям выражений, содержащим радикалы. Это, в частности, касается освобождения от иррациональности в знаменателе, особенно когда он не одночленный (лишь несколько упражнений в дополнительных заданиях к соответственному разделу); освобождения от иррациональности в числителе (ни одного упражнения такого типа) да и традиционных преобразований произведений, сумм, частных иррациональных выражений.

Если учесть, что в последующих (9-х и 10-х) классах к изучению этих вопросов больше не возвращаются, то становится очевидным несоответствие между тем, что учащиеся знают и умеют, и тем, что они должны уметь.

В диссертации сделана попытка разработать с учетом сказанного систему изучения тождественных преобразований иррациональных выражений (введение основных понятий, подбор системы упражнений), которая, как показал опыт, способствует более успешному усвоению учащимися данной темы.

На протяжении многих лет работы в школе мы имеем возможность наблюдать неоднократно допускающиеся большинством учащихся ошибки, связанные с понятиями корня n-й степени и арифметического корня. Одну из главных причин, их порождающих, мы видим в самом существовании двух этих понятий. В учебной и методической литературе можно найти достаточное количество подтверждений сказанному.

Обычно корень n-й степени из числа a определяется как число b, n-я степень которого равна a, и обозначается так: $b=\sqrt[n]{a}$. Из этого определения следует, что корень четной степени из положительного действительного числа a имеет два противоположных действительных значения b и $-b$: $\sqrt[2k]{a}=\pm b$. Для обеспечения однозначности при выполнении преобразований с радикалами знаком $\sqrt[n]{}$ в дальнейшем условливаются обозначать лишь неотрицательное значение корня, называемое арифметическим корнем. Таким образом, знак $\sqrt[n]{}$ сначала употребляется для обозначения как положительного, так и отрицательного числа, а потом лишь неотрицательного. Та-

кой подход вносит путаницу в обозначения и порождает массу ошибок учащихся типа: $\sqrt[4]{16} = -2$, $\sqrt{x^2} = x$ и др.

Авторы нового учебника алгебры в школе, оставив прежнее определение корня без изменения, употребляют символ $\sqrt[n]{\ }$ только для обозначения арифметического корня. Это вносит определенную четкость в обозначения, но не решает проблему до конца. Ученики продолжают ошибаться, допуская записи $\sqrt[6]{(-3)^6} = -3$; $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$ и пр., свидетельствующие о том, что они, как и прежде, смешивают понятие корня n-й степени вообще и понятие арифметического корня. Мы склонны объяснить эти ошибки прежде всего чисто психологическим фактором: само существование двух значений корня четной степени из положительного числа является здесь определяющим, а характеристическое слово "арифметический" в данном случае не есть существенным. Не вносит четкости в этот вопрос также употребление распространенного термина "корень уравнения". Авторы новых школьных учебников отождествляют понятия корня n-й степени из числа a и корня уравнения $x^n = a$. Последний фактор легко устранить, если термин "корень уравнения" заменить на "решение уравнения". Действительно, в существовании двух равнозначных терминов нет никакой необходимости, тем более, что "корень уравнения" употребляется исключительно при рассмотрении уравнений с одной переменной. Связанный же с предыдущим распространенный термин "корни многочлена" с успехом можно заменить термином "нули многочлена".

С целью устранения упомянутых трудностей нами предложено несколько измененное определение понятия корня n-й степени, которое исключает необходимость дополнительного введения понятия арифметического корня. Предложенные обозначения обеспечивают полную однозначность и определенность записей и, как показывает опыт, способствуют внесению четкости в данный вопрос.

Нами обоснована система работы учителя по предупреждению ошибок, допускаемых учащимися при выполнении различных видов тождественных преобразований. В диссертации раскрыты дидактические предпосылки этой системы

и приведены конкретные примеры ее применения. Достаточно эффективными в этом плане оказываются, в частности, упражнения, где предлагается найти и исправить ошибки в данных записях. Они составляются с учетом наиболее часто встречающихся при изучении определенной темы ошибок в ответах и письменных работах учеников.

Исследовательская работа по теме диссертации, которая сочеталась с непосредственной преподавательской деятельностью автора и продолжалась в течение всего периода экспериментальной проверки новой программы (с 1У по Х классы), позволила нам рассмотреть все указанные аспекты изучения тождественных преобразований в плане преемственных и перспективных связей. Конкретные данные о качестве усвоения учащимися теоретических основ тождественных преобразований и о прочности приобретаемых навыков, а также фиксация особенностей овладения этим материалом учащимися с разной подготовкой явились основой для разработки различных вариантов методик, из которых после повторного эксперимента были отобраны наиболее результативные.

Эксперимент и внедрение полученных нами предварительных результатов в практику работы других учителей полностью подтвердили, что новый подход к изучению тождественных преобразований, предусмотренный действующей программой и реализованный в соответствующих учебниках, обеспечивает необходимую действенность знаний и навыков учащихся при соблюдении следующих основных методических требований:

1) рассматривая определенное тождественное преобразование следует стремиться выработать четкий алгоритм его выполнения. С этой целью целесообразно расчленять данное преобразование на ряд элементарных шагов, выполнение которых не вызывает трудностей.

2) Использовать такую систему упражнений, которая, основываясь на дидактическом принципе перехода от простого к более сложному, дает возможность сформировать у учащихся необходимые умения, выработать прочные навыки в выполнении данного вида тождественных преобразований, показать разнообразные его применения и предупредить

от возможных ошибок, допускаемых при этом.

Наряду с этим обоснована необходимость определенного изменения содержания и методики изложения ряда тем, в частности, того материала, который получает дальнейшее развитие и обобщение в старших классах.

Результаты проведенных исследований докладывались и обсуждались на заседании кафедры математики и методики математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького, на всесоюзном семинаре заведующих кабинетами математики и методистов областных институтов усовершенствования учителей в Москве, на республиканских педагогических чтениях в Киеве, на республиканской научно-практической конференции, посвященной связи вузов с общеобразовательными школами в г.Запорожье. По тематике диссертации автор выступал с докладами и лекциями на заседании методических объединений учителей математики и на курсах усовершенствования квалификации учителей в г.Киеве.

Основные положения диссертации нашли отражение в следующих публикациях:

1. Уроки по алгебре в У1 классе, Киев, изд. "Радянська школа", 1974.

2. Из опыта работы в У классе по новой программе, журнал "Математика в школе", 1970, № 6.

3. Из опыта изучения алгебры в У1 классе по новой программе, журнал "Математика в школе", 1972, № 4.

4. Из опыта изучения алгебры в УП классе по новой программе, журнал "Математика в школе", 1973, № 5.

5. Изучение тождественных преобразований многочленов в У1 классе, журнал "Радянська школа", 1973, № 4.

6. Уроки по алгебре в УП классе, Киев, изд."Радянська школа" (принято к печати).

Лаб. фото-офсетной печати КГПИ

Зак. 213 тир. 170 экз.

Crawford