МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

Аспирант Х. МАДРАХИМОВ

КОНСТРУКТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор физико-математических наук,
профессор Б. И. КОРЕНБЛЮМ

КИЕВ — 1965

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

Аспирант Х. МАДРАХИМОВ

Конструктивная характеристика некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор физико-математических наук,
профессор Б. И. КОРЕНБЛЮМ

КИЕВ — 1965

Просьба ознакомиться с авторефератом и Ваши отзывы направить в адрес Киевского государственного педагогического института имени А. М. Горького (г. Киев, Бульвар Шевченко, 22/24, научная часть).

Защита состоится на заседании Ученого совета института 24 декабря 1965 г.

Автореферат разослан 22 ноября 1965 г.

Как известно, современная конструктивная теория функций берет свое начало от классической теоремы Вейерштрасса: *Всякая непрерывная на замкнутом отрезке* $[a, b]$ *фукция* $f(x)$ *аппроксимируется сколь угодно точно полиномами.* Другими словами,

$$E_n(f) \to 0 \qquad n \to \infty,$$

где

$$E_n(f) = \inf_{P_n(x)} \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) - P_n(x) | .$$

(*infimum* берется по всем многочленам степени не выше n).

Однако, теорема Вейерштрасса ничего не утверждает относительно быстроты, с которой $E_n(f)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Эта быстрота стремления к нулю $E_n(f)$ зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$, например, таких, как наличие ограниченной производной того или иного порядка, аналитичности и т. д.

В настоящее время, благодаря работам Д. Джексона [9], Валле-Пуссен [10] и С. Н. Бернштейна [2], [7], связь между дифференциальными свойствами функции $f(x)$ и быстротою убывания величины $E_n(f)$ исследована весьма полно.

В этих работах Д. Джексона [9] и С. Н. Бернштейна [2, 7] рассматривается вопрос о связи структурно-дифференциальных свойств функции с порядком убывания ее наилучших приближений обыкновенными алгебраическими многочленами (или тригонометрическими полиномами) степени не выше n при $n \to \infty$.

Д. Джексоном было доказано, что если функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет непрерывную производную порядка r (r — натуральное число), то для $n > r$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_r (b-a)^r}{n^r} \omega_r \left(\frac{b-a}{2(n-r)} \right),$$

где $\omega_r(\delta)$ — модуль непрерывности $f^{(r)}(x)$, т. е.

$$\omega_r(\delta) = \max_{|x-y|<\delta} \left| f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y) \right|,$$

c_r — постоянная, зависящая только от r.

Для периодического случая, Д. Джексоном получен следующий результат:

Если

$$f^{(r)}(x) \in Lip_M \alpha \quad (0 < \alpha \leqslant 1;\ \mu = \text{const}),$$

то

$$\rho_n(f) \leqslant \frac{12^{(r+1)}M}{n^{(r+\alpha)}},$$

где

$$\rho_n(f) = \inf_{T_n(x)} \max_x | f(x) - T_n |.$$

С. Н. Бернштейн [2] и Валле-Пуссен [10] получили результаты, ставшие ныне классическими, которые решают обратную задачу, задачу характеристики структурно-дифференциальных свойств функции на основании порядка малости ее наилучшего приближения.

С. Н. Бернштейн установил, что если $f(x)$ — непрерывная периодическая (с периодом 2π) функция и $\rho_n(f) \leqslant \frac{A}{n^{r+\alpha}}$ (r — натуральное число), то у функции $f(x)$ существуют непрерывные производные $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, . . . , $f^{(r)}(x)$, причем $f^{(r)}(x)$ принадлежит классу $Lip\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, а при $\alpha = 1$ $f^{(r)}(x) \in W$, где W — класс функций, для которых

$$\omega(\delta) \leqslant B\delta\,(1 + \ln|\delta|)$$

(B не зависит от δ).

Структурная характеристика класса $Lip 1$ получена в работе А. Зигмунда [11].

Сопоставляя результаты С. Н. Бернштейна и Валле-Пуссена с результатом Д. Джексона мы видим, что неравенство

$$\rho_n(f) \leqslant \frac{A}{n^{r+\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы у функции $f(x)$ существовала производная порядка r (r — натуральное число) и $f^{(r)}(x) \in Lip\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

При $\alpha = 1$ это условие остается необходимым для того, чтобы $f(x)$ входило в $Lip\,1$, но уже перестает быть достаточным.

Уточняя эти результаты, Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн [1] и Ж. Фавар [8] показали, что если периодическая (с периодом 2π) функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ имеет ограниченную производную порядка r (r — натуральное число), то

$$\rho_n(f) \leqslant \frac{k_r}{n^r} \sup |f^{(r)}(x)|,$$

где

$$k_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda(r+1)}}{(2\lambda+1)^{r+1}};$$

$$1 = k_0 < k_2 < \ldots < \frac{4}{\pi} < \ldots < k_5 < k_3 < k_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом для k_r существует общая верхняя грань $\frac{\pi}{2}$.

В настоящей работе рассматриваются адамаровские классы $D\{A_r\}$, $C\{A_r\}$ и $C\{A_r;\ [-1, 1]\}$ (см. ниже (1), (2) и (3) бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ (на всей числовой оси и на отрезке $[-1,1]$), и для этих классов устанавливаются прямые и обратные теоремы типа Джексона и Бернштейна, которые дают необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(x)$ к соответствующему классу в терминах наилучшего приближения тригонометрическими полиномами, целыми функциями экспоненциального типа и алгебраическими многочленами.

Пусть $\{A_r\}_0^\infty$ — заданная возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $A_0 = 1$, $\sqrt[r]{A_r} \to \infty\ (r \to \infty)$. Обозначим через $C_a\{A_r\}$ $(a \geqslant 0)$ класс бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, для которых

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant B a^r A_r \quad (r = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

(B — константа, зависящая от $f(x)$.

Объединение этих классов обозначим через

$$C\{A_r\} = \underset{a>0}{U} C_a. \tag{2}$$

Пусть $D_a\{A_r\}$ и $D\{A_r\}$ — подклассы, соответсвенно, $C_a\{A_r\}$ и $C\{A_r\}$, состоящие из периодических (с периодом 2π) функций.

Обозначим через $C_a\{A_r; [-1,1]\}$ $(a>0)$ класс бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[-1,1]$, для которых

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant Ba^r A_r \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1;\ r=0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

где B — константа, зависящая от $f(x)$.

Объединение этих классов обозначим через

$$C\{A_r; [-1,1]\} = \bigcup_{a>0} C_a\{A_r; [-1,1]\}. \tag{3}$$

Работа состоит из трех глав.

В первой главе излагаются вопросы, связанные с выпуклой регуляризацией последовательностей. Аппарат выпуклой регуляризации, как видно из дальнейших глав, весьма полезен при изучении конструктивных свойств классов бесконечно дифференцируемых функций. Основные результаты этой главы принадлежат С. Мандельбройту [3].

Во второй главе изучается порядок аппроксимации рассматриваемых классов бесконечно дифференцируемых функций.

Глава II состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе рассматриваются классы $D\{A_r\}$ бесконечно дифференцируемых периодических (с периодом 2π) функций и для этих классов устанавливается связь между дифференциальными свойствами функции $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ и порядком ее наилучшего приближения $\rho_n(f)$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ степени n при $n \to \infty$.

Доказываются следующие прямые и обратные теоремы аппроксимации, которые дают необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ к соответствующему классу $D\{A_r\}$ в терминах наилучшего приближения $\rho_n(f)$.

Теорема 1.1. *Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируемая периодическая (с периодом 2π) и $|f^{(r)}(x)| \leqslant Ca^r A_r$ $(C=\text{const};\ r=0,\ 1,\ 2, \ldots)$, то наилучшее приближение при помощи тригонометрических полиномов степени не выше n будет*

$$\rho_n(f) = O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{n}{a}\right)}\right),$$

где

$$\sigma(t) = \max_{0<r<\infty} \{rt - \log A_r\} \quad (0 < t < \infty)$$

и

$$\rho_n(f) = \inf_{T_n(x)} \max_{-\infty<x<\infty} |f(x) - T_n(x)|,$$

$T_n(x)$ — тригонометрический полином степени n.

Теорема 1.2. *Если $\{A_r\}_0^\infty$ — заданная возрастающая последовательность положительных чисел, $A_0=1$, $\sqrt[r]{A_r} \to \infty (r \to \infty)$, причем выполнено условие*

$$1 \leqslant \frac{A_{r+1} A_{r-1}}{A_r^2} \leqslant k < \infty \quad (r=1, 2, 3, 4, \ldots)$$

и наилучшее приближение тригонометрическими полиномами степени не выше n

$\rho_n(f) = O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{n}{a}\right)}\right)$ для некоторого $a > 0$, то $f(x) \in D\{A_r\}$.

Из теоремы 1.1 и 1.2 следует, что условие

$\rho_n(f) = O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{n}{a}\right)}\right)$ (для некоторого $a>0$) является необходимым и достаточным для того, чтобы $f(x) \in D\{A_r\}$.

Во втором параграфе рассматривается приближение на оси классов $C\{A_r\}$ целыми функциями экспоненциального типа $g_\lambda(x)$ с показателем $\lambda>0$, и доказываются следующие прямые и обратные теоремы, которые дают необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(x)$ к соответствующему классу $C\{A_r\}$ в терминах наилучшего приближения $G_\lambda(f)$ целыми функциями экспоненциального типа $g_\lambda(x)$ с показателем $\lambda>0$.

Теорема 2.1. *Если функция $(f(x)$ бесконечно дифференцируемая на всей вещественной оси $-\infty < x < \infty$ и*

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant Ba^r A_r \qquad (a>0;\ r=0, 1, 2, 3 \ldots),$$

то наилучшее приближение $G_\lambda(f)$ целыми функциями экспоненциального типа $g_\lambda(x)$ с показателем $\lambda>0$ будет

$$G_\lambda(f) = O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{\lambda}{a}\right)}\right),$$

где

$$\sigma(t)=\max_{0<r<\infty}\{rt-\log A_r\},\quad (0<t<\infty)$$

и

$$G_\lambda(f)=\inf_{g_\lambda(x)}\max_{-\infty<x<\infty}|f(x)-g_\lambda(x)|.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\{A_r\}_0^\infty$ *— заданная возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$1\leqslant\frac{A_{r+1}A_{r-1}}{A_r^2}\leqslant k<\infty\qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .)$$

и наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа с показателем $\lambda_k>0$

$$G_{\lambda_k}(f)=O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{\lambda_k}{a}\right)}\right)\quad (\textit{для некоторого } a>0),$$

где $\{\lambda_k\}_0^\infty$ *— некоторая возрастающая последовательность положительных чисел таких, что* $\lambda_0=1$, $\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\leqslant d$ $(d=\text{const};\ k=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .)$, $\lambda_k\to\infty$ $(k\to\infty)$.
Тогда $f(x)\in C\{A_r\}$.

Сопоставляя теоремы 2.2 с результатом теоремы 2.1 получим следующее.

Следствие. *Для того, чтобы* $f(x)\in C\{A_r\}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$G_{\lambda_k}(f)=O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{\lambda_k}{a}\right)}\right.\quad \textit{для некоторого } a>0).$$

В третьем параграфе рассматривается приближение функций класса $C\{A_r;\ [-1,\ 1]\}$ посредством алгебраических полиномов $P_n(x)$ степени не выше n и устанавливаются следующие прямые и обратные теоремы аппроксимации.

Теорема 3.1. *Пусть* $\left\{\frac{A_r}{r!}\right\}$ *— возрастает и пусть функция* $f(x)$ *бесконечно дифференцируемая на отрезке* $[-1,1]$ *и* $|f^{(r)}(x)|\leqslant Ba^r A_r$ $(r=0,1,2,\ .\ .\ .)$. *Тогда наилучшее прибли-*

жение $E_n(f)$ *посредством алгебраических полиномов степени не выше* n *будет*

$$E_n(f) = O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{n}{b}\right)}\right), \quad (b = \mathrm{const})$$

где

$$\sigma(t) = \max_r \{rt - \log A_r\}, \quad (0 < t < \infty)$$

и

$$E_n(f) = \inf_{P_n(x)} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} | f(x) - P_n(x) |,$$

$P_n(x)$ — *алгебраический полином степени* n.

Теорема 3.2. *Пусть* $\left\{\frac{A_r}{r!}\right\}$ — *возрастает и*

$$1 \leqslant \frac{A_{r+1} A_{r-1}}{A_r^2} \leqslant k < \infty \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

и пусть наилучшее приближение посредством алгебраических многочленов степени не выше n *будет*

$$E_n(f) = O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{n}{a}\right)}\right).$$

Тогда $f(x) \in C\{A_r;\ [-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]\}$ *при любом* $\varepsilon > 0$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\{A_r\}_0^\infty$ — *заданная возрастающая последовательность положительных чисел удовлетворяющая условию*

$$1 \leqslant \frac{A_{r+1} A_{r-1}}{A_r^2} \leqslant k < \infty \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

и наилучшее приближение посредством алгебраических многочленов степени не выше n.

$$E_n(f) = O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{n}{a}\right)}\right).$$

Тогда $f(x) \in C\{A_{2r};\ [-1,1]\}$.

Из теоремы 3.1 и 3.2 вытекает:

Следствие. *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *принадлежала к классам* $C\{A_r;\ [-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]\}$ *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *нашлась* $a_\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$E_n^\varepsilon(f) = O\left(e^{-\sigma\left(\log\frac{n}{a_\varepsilon}\right)}\right),$$

где

$$E_{n}^{\varepsilon}(f)=\inf_{P_{n}(x)}\max_{-1+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon}|f(x)-P_{n}(x)|.$$

Из теоремы 3.1 и 3.2 видно, что, вообще говоря, на отрезке $[-1,1]$ класс не сохраняется, а на любом отрезке, целиком лежащем в $(-1,1)$, класс сохраняется.

В четвертом параграфе доказанные общие теоремы применяются к некоторым конкретным примерам.

1. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{a}{x^{\alpha}}}, & \text{если } x\geqslant 0.\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

где $a>0$; $\alpha>0$.

Доказывается, что $|f^{(r)}(x)|\leqslant Bb^{r}e^{\frac{\alpha+1}{\alpha}r\log r}$.

Тогда

$$G_{\lambda}(f)=O\left(exp\left\{-k\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right\}\right),$$

где k — некоторое положительное число, причем этот результат не может быть существенно улучшен.

2. Пусть

$$f(x)=e^{-\frac{a}{|\sin x|^{\alpha}}},\ \alpha>0;\ a>0.$$

Тогда

$$\rho_{n}(f)=O\left(exp\left\{-b_{1}n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right\}\right),$$

где b_1 — некоторое положительное число.

3. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} exp\left(-a\,|\log x|^{\alpha}\right), & \text{если } 0<x<1.\\ 0, & \text{если} -1<x\leqslant 0.\end{cases}$$

где $a>0$ и $\alpha>1$.

Доказывается, что

$$f(x)\in C\left\{r^{r}e^{b_{\varepsilon}r^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}};\ [-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]\right\},$$

где b_ε — некоторое положительное число, зависящее от $\varepsilon>0$. При этом класс $C\left\{r^r e^{b_\varepsilon r^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}};\ [-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]\right\}$ нельзя сузить.

Имеем

$$E_n^\varepsilon(f)=O(exp\{-b_\varepsilon^1 \log_n^\alpha\}),$$

где b_ε^1 — некоторое положительное число.

4. Пусть

$$f(x)=exp\left\{-\log^\alpha\left|\frac{a}{\sin x}\right|\right\},\quad (\sigma>\ ;\ a>1.$$

Доказывается, что

$$\rho_n(f)=O(exp\{-b_2 \log_n^\alpha\}).$$

где b_2 — некоторое положительное число.

В третьей главе рассматриваются классы функций $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, для которых справедливы некоторые общие оценки наилучшего приближения $G_\lambda(f)$ $\left(G_\lambda(f)=\inf\limits_{g_\lambda(x)}\max\limits_x|f(x)-\right.$ $\left.-g_\lambda(x)|\right.$, и для таких классов устанавливаются достаточные условия квазианалитичности.

Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть $f(x)$ определена на всей оси $-\infty<x<\infty$ и удовлетворяет условиям:*

1) *Для некоторой возрастающей последовательности* $\{\lambda_k\}_0^\infty$, $\lambda_0=1$, $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\leqslant d$ $(d=\text{const};\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, $\lambda_k\to\infty$ $(k\to\infty)$,

$$G_{\lambda_k}(f)=O(e^{-\sigma(\log\lambda_k)}),$$

где $\sigma(t)$ — *выпуклая функция и* $\sigma''(t)\geqslant a>0$.

2) $\int\limits_0^\infty \sigma(t)e^{-t}dt=\infty$.

3) $f(x)=0$ *на некотором бесконечном ограниченном точечном множестве вещественной оси.*

Тогда $f(x)\equiv0$ *на всей оси* $-\infty<x<\infty$.

Иначе говоря, семейство функций, удовлетворяющих условию теоремы, составляет квазианалитический класс функций на оси $-\infty<x<\infty$.

Результаты настоящей диссертации были доложены на XXV научно-технической конференции Киевского инженерно-строительного института (март 1964 года) и опубликованы в работах [4, 5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, ДАН СССР, т. 15, 1937.

[2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (сообщ. Харьк. матем. об-ва, 1912).

[3] Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательности. Применения, М., 1955.

[4] Мадрахимов Х., Приближение бесконечно дифференцируемых функций на отрезке посредством алгебраических полиномов степени n. Известия АН УзССР № 5, 1965.

[5] Мадрахимов Х., Прямые и обратные теоремы аппроксимации для некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций, Успехи мат. наук (в печати).

[6] Мадрахимов Х., Приближение некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций на оси целыми функциями экспоненциального типа, Доповіді АН УРСР (в печати).

[7] Bernstein S., Leçons sur les propriétés extrémales, Paris, 1926.

[8] Favard J, Sur les meilleures procédéc d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonométriques, Bull. de sciences, Math., 61 (1937).

[9] Jackson J., Über die Genauigkeit der Annährung Stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Diss. Göttingen, 1911.

[10] Valle-Poussin Ch., Soc. math. de France, 1924.

[11] Zygmund A., Smooth Functions, Duke Math. Journ., 12 (1945).

БФ 35052. 17.XI 1965 г. Объем 3/4 п. л. Тираж 150.

Киев, тип. № 3, цех 2.

Скасувати