МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

А. М. ЗРАЖЕВСКАЯ (КИРИЛЮК)

ПОВЕРХНОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С РЕГУЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель кандидат физико-математических наук, доцент В. П. Белоусова.

Киев — 1961

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А. М. ГОРЬКОГО

А. М. ЗРАЖЕВСКАЯ (КИРИЛЮК)

ПОВЕРХНОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С РЕГУЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель кандидат физико-математических наук,
доцент В. П. Белоусова.

Киев — 1961

Поверхность называется к-регулярной (аналитической), если в окрестности каждой ее точки можно ввести локальные координаты u и v так, что радиус-вектор $\vec{r}(u, v)$ точки поверхности будет к-регулярной (аналитической) функцией этих координат.

Длина кривой γ, заданной на гладкой поверхности уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, определяется по формуле

$$S = \int_{\gamma} \sqrt{E u^{12} + 2F u^1 v^1 + G v^{12}}\, dt.$$

Если функции $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ к-раз дифференцируемы (аналитические), то говорят, что метрика поверхности к-раз дифференцируема (аналитическая).

Очевидно, что к-регулярная (аналитическая) поверхность имеет, по крайней мере, (к-1) раз дифференцируемую (аналитическую) метрику. Обратное утверждение не всегда имеет место. Может случиться, что хотя поверхность и не регулярна, но на ней в окрестности каждой ее точки могут быть введены локальные координаты u и v так, что коэффициенты первой квадратичной формы $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ будут регулярными функциями. Примером может служить переломанная по ребру плоскость.

В вопросе о степени регулярности поверхности в зависимости от степени регулярности ее метрики наиболее сильные результаты получены А. В. Погореловым в 1951 году. Им доказана теорема [1].

Теорема. Если выпуклая поверхность имеет регулярную (к-раз дифференцируемую, $k \geqslant 5$) метрику и положительную гауссову кривизну, то сама поверхность регулярна (по крайней мере (к-1) раз дифференцируема). Если же метрика поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая.

В последнее время вопрос о регулярности поверхности в зависимости от степени регулярности ее метрики для поверхностей положительной кривизны решен А. В. Погореловым полностью.

В диссертационной работе рассматриваются поверхности неотрицательной кривизны, содержащие параболические точки.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов и проблематики.

В первой главе приводится краткий обзор результатов по рассматриваемому вопросу.

Во второй главе исследуется вопрос гладкости выпуклых поверхностей неотрицательной гауссовой кривизны с регулярной метрикой. Методом А. В. Погорелова доказывается, что такие поверхности являются гладкими поверхностями, а именно: 1) если поверхность можно дополнить до полной выпуклой поверхности ограниченной удельной внешней кривизны, не содержащей в себе переломанного по прямолинейному ребру куска плоскости, то поверхность является гладкой; 2) если на поверхности точки нулевой гауссовой кривизны являются внутренними точками, то поверхность является гладкой.

В третьей главе рассматриваются трижды непрерывно-дифференцируемые поверхности F с аналитической метрикой, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) гауссова кривизна поверхности $K \geqslant 0$ $(K \not\equiv 0)$, причем точки нулевой кривизны являются параболическими точками с порядком нуля кривизны $n \leqslant 5$;

2) в окрестности параболической точки поверхность непрерывно-дифференцируема, по крайней мере, $(n+3)$ раза, где n— порядок нуля кривизны в этой точке [1].

Исследуется вопрос, являются ли такие поверхности аналитическими. Пусть X_0 — параболическая точка поверхности. Проведем через точку X_0 в главном направлении, соответствующем $k_1 \neq 0$ геодезическую γ_1, перпендикулярную к ней — геодезическую γ_2.

Введем на поверхности локальные координаты следующим образом: в окрестности точки X_0 за линии u примем геодезические, перпендикулярные к γ_1, а за линии v — их ортогональные траектории. При такой параметризации поверхности ее линейный элемент имеет вид

$$dS^2 = du^2 + c^2\, dv^2$$

Пусть $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$—уравнение поверхности.

---

[1]. Будем считать, что функция $f(u, v)$ имеет порядок нуля n, если все ее производные до n-ого порядка включительно равны нулю и хотя бы одна из производных $(n+1)$-ого порядка отлична от нуля.

Теорема 1. Если при введенной выше параметризации поверхности F $c_{uu}=f(v)$ и каждая из функций $x_{uu}(u,v)$, $y_{uu}(u,v)$, $z_{uu}(u,v)$ в окрестности параболической точки X_0 удовлетворяет условию $|f(X_0)-f(X_0)|<c|X-X_0|^{n+\alpha}$ $(\alpha>\frac{1}{2}$, n — порядок нуля кривизны в точке $X_0)$, то F является аналитической поверхностью.

Теорема доказывается методом С. Н. Бернштейна [2]. Как известно, каждая из функций $\mathbf{X}(u,v)$, $\mathbf{Y}(u,v)$, $\mathbf{Z}(u,v)$ удовлетворяет уравнению Дарбу. Уравнение Дарбу представляется в виде

$$r+t=f(r,s,t,p,q,u,v), \tag{1}$$

где функция f такова, что значения производных f_r, f_s, f_t в начале координат равны нулю. Методом последовательных приближений ищется решение уравнения (1) в кольце между концентрическими окружностями с центрами в начале координат и доказывается аналитичность решения.

Аналогично доказываются и следующие теоремы.

Теорема 2. Если при введенной выше параметризации поверхности F ее гауссова кривизна $K=K(v)$ и каждая из функций $\mathbf{X}_{uu}(u,v)$, $\mathbf{Y}_{uu}(u,v)$, $\mathbf{Z}_{uu}(u,v)$ в окрестности точки X_0 удовлетворяет условию

$|f(X)-f(X_0)|<c(X-X_0)^{n+\alpha}(\alpha>\frac{1}{2}$, n—порядок нуля кривизны в точке $X_0)$, то F является аналитической поверхностью.

Введем на поверхности F локальные координаты таким образом, чтобы в параболической точке X_0 линия u имела главное направление, соответствующее нормальной кривизне $k_2=0$, а линия v—направление, перпендикулярное к линии u. Имеет место

Теорема 3. Если можно для поверхности F выбрать указанным образом параметризацию такую, при которой полная кривизна поверхности и функции $\mathbf{X}_{uu}$, $\mathbf{Y}_{uu}$, $\mathbf{Z}_{uu}$ зависят только от переменной v, то F является аналитической поверхностью.

В четвертой главе исследуется вопрос о регулярности 2-х классов поверхностей.

1. Пусть F—поверхность, дифференцируемая, по крайней мере, 4 раза, $r=r(u,v)$—ее уравнение, $D(u,v)$—область изменения переменных u и v. Предположим, что $D(u,v)$ конечна, и каждой точке границы F области D соответствует лишь одна точка поверхности F.

Пусть полная кривизна поверхности $K \geqslant 0$, причем точки нулевой кривизны являются параболическими точками; множество $M \in D$ прообразов параболических точек имеет меру нуль, а кривые $li \in M$, если они есть, пересекаются друг с другом и с границей Γ области D конечное число раз.

Предположим, что каждой из точек $P_0 \in \Gamma \Lambda M$ можно извне коснуться окружностью, с касательной в точке P_0, не параллельной оси OU.

Для таких поверхностей доказана следующая теорема:

Теорема. Если функции E, F, G, $\frac{L}{N}$, $\frac{M}{N}$ для поверхности F непрерывно дифференцируемы, по крайней мере, $(k+6)$ раз, то F дифференцируема, по крайней мере, $(k+4)$ раза.

Для доказательства теоремы вводятся вспомогательные функции $\theta_1(u, v)$ и $\theta_2(u,v)$ такие, что коэффициенты II квадратичной формы представляются следующим образом:

$$L = -\frac{\alpha}{\theta_2}(\theta_1^2 + \theta_2^2), \quad M = -\frac{\alpha}{\theta_2}\theta_1, \quad N = -\frac{\alpha}{\theta_2} \quad (\alpha = \sqrt{LN - M^2})$$

Этим вопросом о регулярности поверхности сводится к вопросу о регулярности функции

$$f(u,v) = \frac{\alpha(u, v)}{\theta_2(u, v)}$$

Регулярность функции $f(u, v)$ доказывается как регулярность решения линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с регулярными коэффициентами и дискриминантом $\Delta \geqslant 0$. Уравнение получено из уравнений Петерсона-Кодацци.

2. Рассматриваются выпуклые поверхности, параболические точки которых заполняют кусок поверхности. Предполагается регулярность поверхности в точках кривой, отделяющей точки положительной кривизны от точек нулевой кривизны и доказывается регулярность в точках нулевой кривизны.

Литература

1. Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1951.

2. Бернштейн С. Н., Доказательство теоремы Гильберта, УМН, в. 8, 1941.

3. Ильин А. М., О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на некотором множестве внутренних точек области, ДАН СССР, т. 102, № 1, 1955.

4. Кирилюк Г. М., Поверхні з аналітичною метрикою і гауссовою кривиною $K \geqslant 0$. Вісник КДУ, № 2, 1959.

5. Кирилюк Г. М., Опуклі поверхні з регулярною метрикою, які містять в собі точки нульової гауссової кривини, Науковий щорічник КДУ за 1956 рік.

6. Кирилюк Г. М., Однозначна визначеність поверхонь невід'ємної кривини, Науковий щорічник КДУ за 1959 рік.

БФ 33639. Подписано к печати 15/XI—1961 г. Формат бумаги 60×84.
Печ. лист. 0,5. Зак. 1029. Тираж 150.

Типография при Киевском пединституте, ул. Франко, 44.