МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ДРОВОЗЮК Виктор Семенович

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА МЕТОДОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

(01. 01. 02—дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КИЕВ — 1975

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ДРОВОЗЮК Виктор Семенович

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА МЕТОДОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

(01. 01. 02—дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КИЕВ — 1975

Работа выполнена на кафедре высшей математики Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Н. Я. Лященко.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Рябов Ю. А.

кандидат физико-математических наук,
доцент Калайда А. Ф.

Внешний отзыв — институт математики Академии наук УССР.

Автореферат разослан „17“ декабря 1975 года.

Защита диссертации состоится „____“__________1976 года на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького (Киев, ул. Пирогова, 9).

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах) просим направлять по адресу: 252030, ул. Пирогова, 9. Ученому секретарю.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького (ул. Пирогова, 9).

Ученый секретарь Совета *(проф. Бакуменко П. И).*

Многие практически важные задачи механики, математической физики, техники, различные инженерные задачи сводятся к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений (и.-д. у.) типа Вольтерра.

Найти точное решение этих уравнений в замкнутой форме удается лишь в немногих частных случаях. Поэтому не вызывает сомнений необходимость разработки методов приближенного решения указанного типа уравнений и их систем.

В настоящее время имеется много методов приближенного решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Однако большинство из этих методов, являясь простым и эффективным средством решения линейных уравнений, недостаточно эффективны для решения нелинейных уравнений, к которым в основном и сводятся практические задачи. Этим объясняется возросший за последние годы интерес к нелинейным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям.

Особенно интенсивное развитие в последнее десятилетие получили методы численного решения нелинейных интегральных и и.-д. у., ориентированные на применение современных ЭВМ. Среди них в первую очередь следует выделить методы, основанные на применении формул механических квадратур различного порядка точности, а также методы, представляющие собой аналоги известных в теории дифференциальных уравнений методов типа Рунге-Кутта.

Метод механических квадратур очень удобен для решения линейных уравнений. Однако при решении нелинейных уравнений встречаются со значительной трудностью: необходимостью решения систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений.

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке методов численного решения систем нелинейных интегральных и и.-д. у. типа Вольтерра высокого порядка точности и преследует цель внести посильный вклад в математическое обеспечение современных ЭВМ.

В работе [1] предложена схема численного решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра, сочетающая в себе три метода: механических квадратур, дифференцирования по параметру и Ньютона. С помощью обобщенной квадратурной формулы трапеций нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода аппроксимируется нелинейным конечно-разностным уравнением с точностью порядка $O(h^2)$. Для решения последнего применяется комбинированный метод, где начальное приближение для метода Ньютона находится методом дифференцирования по параметру.

Вообще говоря, систему нелинейных уравнений можно решать различными методами, например, методом Ньютона или при помощи итерационного процесса Эйткена-Стеффенсена. Однако в итерационных методах важную роль играет выбор начального приближения, обеспечивающего сходимость итерационного процесса. В значительной степени эту проблему можно решить, применив метод дифференцирования по параметру.

Идея метода дифференцирования по параметру [2—8] для решения систем нелинейных уравнений основана на приведении этих систем к системам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и численному интегрированию последних на сегменте [0,1].

Применяя метод дифференцирования по параметру, можно получить решение системы нелинейных уравнений непосредственно. Однако в этом случае не представляется возможным гарантировать заданную точность решения, так как помимо погрешностей округления здесь всегда присутствует погрешность численного интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Совместное же применение метода дифференцирования по параметру и метода Ньютона, когда метод Ньютона используется для уточнения решения, полученного методом дифференцирования по параметру, является весьма эффективным средством решения систем нелинейных уравнений для современных ЭВМ, обеспечивающим высокую степень точности решения.

Ясно, что если в упомянутой схеме Н. Я. Лященко [1] для аппроксимации интегрального уравнения применить квадратурные формулы более высокого порядка алгебраической точности, то можно получить метод высокой степени точности, удобно реализуемый на ЭВМ.

В настоящей диссертации предложен такой метод повышенной точности, в котором применение $(n+1)$ — точечных квадратурных формул Ньютона-Котеса замкнутого типа и соответствующих интерполяционных формул Лагранжа позволяет аппроксимировать исходную систему нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода системой нелинейных конечно-разностных уравнений с точностью порядка $O(h^{n+2})(n = 2, 4, 6,...)$, и построен общий алгоритм, из которого алгоритм Н. Я. Лященко вытекает как частный случай при $n = 1$.

Вместе с указанным комбинированным методом решения систем нелинейных уравнений предложенный метод образует законченную вычислительную схему, нашедшую материальное воплощение в пакете программ различной алгебраической степени точности для эффективного решения систем нелинейных интегральных и и.-д. у. на современных ЭВМ.

В работе даются оценки погрешности аппроксимации, доказывается сходимость метода, а также рассматривается вопрос о рациональном использовании построенного пакета программ. Основные результаты работы иллюстрируются числовыми примерами.

Диссертация состоит из введения, трех глав, объединяющих восемнадцать параграфов, библиографии, содержащей 136 наименований, и приложения.

Во введении приводится обзор литературы по существующим методам решения интегральных и и.-д. у., а также дается краткая характеристика предлагаемого метода решения.

В первой главе излагается и обосновывается новый метод численного решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

В § 1 формулируется задача численного решения исходной нелинейной системы:

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x) + \int_{x_0}^{x} \vec{F}(x, s, \vec{y}(s))\,ds \qquad (1)$$

на сегменте $I_L : [x_0, x_0 + L]$, а также вводятся основные понятия и определения, используемые в диссертации.

Предлагаемый метод предусматривает построение начала таблицы численного решения и распадается на два этапа:

1) построение начала таблицы искомого решения;

2) продолжение этого решения для произвольного узла сеточного покрытия H области решения I_L.

В §§ 2—3 рассматривается метод получения приближенного решения в произвольном узле $x_i = x_0 + ih$ сеточного покрытия H $(i = 0, 1, 2,..., N; Nh = L)$ в предположении, что начало таблицы этого решения $(i \leqslant n)$ построено.

В § 2 предлагается метод аппроксимации системы нелинейных интегральных уравнений (1) системой нелинейных конечно-разностных уравнений с высокой степенью точности. Суть этого метода состоит в следующем. В каждом узле $x_i > x_n$ интегральный член системы (1) представляется в виде суммы двух интегралов так, что к одному из них непосредственно применяется обобщенная квадратурная формула Ньютона-Котеса замкнутого типа n-го порядка с шагом h, а для вычисления другого используется $(n+1)$ — точечная квадратура Ньютона-Котеса замкнутого типа с шагом $\frac{h}{n} r < h$:

$$\vec{y}(x_i) = \vec{f}(x_i) + \int_{x_0}^{x_r} \vec{F}(x_i, s, \vec{y}(s))\, ds + \int_{x_r}^{x_i} \vec{F}(x_i, s, \vec{y}(s))\, ds ,$$

где $$r = i - n \cdot Entier\left(\frac{i}{n}\right).$$

В результате система (1) аппроксимируется системой нелинейных конечно-разностных уравнений вида:

$$\vec{y}_i - h A_0 \vec{F}_{ii} - \vec{\varphi}_i = 0 , \tag{2}$$

где $$\vec{\varphi}_i = \vec{f}_i + \frac{h}{n} r \sum_{q=0}^{n} A_q \vec{F}_{i, \frac{q}{n} r} + h \sum_{q=r}^{i-1} A_{q-r} \vec{F}_{iq} \tag{3}$$

$$(i = n+1, ..., N).$$

Здесь A_q и A_{q-r} соответственно коэффициенты $(n+1)$ — точечной и обобщенной $(n+1)$ — точечной квадратурной формулы Ньютона-Котеса замкнутого типа, $\vec{F}_{i, \frac{q}{n} r} = \vec{F}(x_i, s_{\frac{q}{n} r}, \vec{y}_{\frac{q}{n} r})$, $\vec{F}_{iq} = \vec{F}(x_i, s_q, \vec{y}_q)$. Необходимые для вычисления свободного члена $\vec{\varphi}_i$, приближенные значения $\vec{y}_{\frac{q}{n} r}$ искомой вектор-функции в промежуточных узлах $x_{\frac{q}{n} r} = x_0 + \frac{q}{n} rh$ вычисляются только один раз сразу же после построения начала таблицы по интерполяционным формулам Лагранжа:

$$\vec{y}_{\frac{q}{n}r} = \sum_{j=0}^{n} a_{\frac{q}{n}r,\, j} \vec{y}_j. \qquad (4)$$

В § 3 для отыскания численного решения полученной нелинейной системы конечно-разностных уравнений (2) применяется метод дифференцирования по параметру с последующим уточнением приближения по методу Ньютона.

В результате применения метода дифференцирования по параметру решение системы (2) сводится к численному интегрированию на сегменте [0,1] системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left(E - \lambda h A_0 \left[\frac{\partial \vec{F}_{ii}}{\partial \vec{y}_i}\right]\right) \frac{d\vec{y}_i}{d\lambda} = hA_0\vec{F}_{ii} \qquad (5)$$

$$(i = n+1, \ldots, N),$$

где E — единичная матрица, размерность которой совпадает с размерностью исходной системы (1).

Система (5) интегрируется численно при начальном условии

$$\vec{y}_i|_{\lambda=0} = \vec{\varphi}_i \qquad (6)$$

и в соответствии с идеей метода дифференцирования по параметру значение численного решения задачи Коши (5)—(6) при $\lambda = 1$ дает приближенное решение системы (2), а следовательно, и исходной системы (1) в узле $x = x_i$.

Для численного решения задачи Коши (5)—(6) можно применять любые из известных методов численного интегрирования, лишь бы они обеспечивали устойчивый счет. Но поскольку на каждом шаге численного интегрирования задачи Коши при фиксированном $\lambda^* \in [0, 1]$ приходится разрешать соответствующую числовую систему линейных алгебраических уравнений относительно производных, то более выгодными, естественно, являются те методы численного интегрирования, которые допускают больший шаг интегрирования при сохранении необходимой точности. Одним из таких методов есть метод Рунге-Кутта, используемый в этой работе.

Если определитель системы (5) отличен от нуля на всем промежутке интегрирования, то никаких затруднений при численном интегрировании системы (5) методом Рунге-Кутта обычно не возникает, кроме возможного накопления погрешностей за счет ошибок округления и погрешности самого метода Рунге-Кутта. Поэтому для получения решения системы (2) с любой наперед заданной точностью применяется комбинированный метод дифференцирования по параметру совместно с методом Ньютона, когда найденное решение задачи Коши (5)—(6) при $\lambda = 1$ принимается за начальное приближение $\vec{y}_{i(0)}$ итерационного процесса Ньютона для системы (2).

Порядок погрешности аппроксимации системы (1) системой конечно-разностных уравнений (2) может не совпадать с порядком погрешности метода численного интегрирования системы (5). Однако это совсем не значит, что обязательно нужно применять методы численного интегрирования, погрешность которых не превышает погрешности аппроксимации. Можно, например, всегда применять метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Дело в том, что последующее уточнение приближенного решения методом Ньютона позволяет гарантировать любую заданную точность решения системы (2). Кроме того, так как в получении очень точного начального приближения для метода Ньютона нет необходимости(достаточно, чтобы оно попало в область сходимости), можно рекомендовать производить численное интегрирование задачи Коши (5)—(6) на сегменте [0,1] с достаточно крупным шагом, что значительно сокращает объем вычислений. Как правило, даже максимальный шаг $\Delta\lambda = 1$ является достаточным для обеспечения сходимости метода Ньютона.

В § 4 излагается метод построения начала таблицы искомого численного решения. Исходная система интегральных уравнений (1) записывается в каждом из n первых узлов сеточного покрытия H. В каждом из них интегральный член системы заменяется конечной суммой по $(n+1)$ — точечной квадратурной формуле Ньютона-Котеса замкнутого типа соответственно с шагом $\frac{h}{n} i \leqslant h\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. Необходимые значения искомой вектор-функции $\vec{y}_{\frac{q}{n}i}$ в промежуточных узлах $x_{\frac{q}{n}i} = x_0 + \frac{q}{n} ih\,(i,\ q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ выражаются здесь через искомые неизвестные $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ по интерполяционным формулам Лагранжа (4).

В результате для определения начала таблицы получаем систему n векторных нелинейных конечно-разностных уравнений:

$$\vec{y}_i - \frac{h}{n} i \sum_{q=1}^{n} A_q \vec{F}_{i, \frac{q}{n} i} = \vec{f}_i + \frac{h}{n} i A_0 \vec{F}_{i0} \tag{7}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для решения последней снова применяется метод дифференцирования по параметру с последующим уточнением решения методом Ньютона.

§§ 5—7 посвящены обоснованию предложенного метода решения. В § 5 дается качественная оценка погрешности аппроксимации. Показано, что в произвольном узле сеточного покрытия Н исходная система интегральных уравнений (1) аппроксимируется системой нелинейных конечно-разностных уравнений с погрешностью порядка $O\ (h^{n+2})$ $(n = 2, 4, 6, \ldots)$.

В § 6 выведены рекуррентная и независимая оценки погрешности, доказана сходимость метода. Показано, что если функция $\vec{F}(x, s, \vec{y})$ удовлетворяет по третьему аргументу условию Липшица, то имеет место следующая оценка:

$$\|\vec{\varepsilon}_i\| = \|\vec{y}(x_i) - \vec{y}_i\| \leqslant \frac{R}{1-hC} exp\left(\frac{CL}{1-hC}\right) \tag{8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

где С — некоторая константа, зависящая от коэффициентов квадратурной формулы Ньютона-Котеса замкнутого типа и констант Липшица, $\vec{y}(x_i)$ и $\vec{y}_i$ — соответственно точное и приближенное решение системы (1) в узле x_i. Поскольку для достаточно гладких функций $\vec{F}(x, s, \vec{y}(s)), \vec{f}(x)$ и $\vec{y}(x)$ остаточный член R имеет порядок $O(h^{n+2})$, то и $\|\vec{\varepsilon}_i\|$ имеет такой же порядок. А это значит, что изложенный метод решения сходится, причем порядок сходимости равен $n+2$.

В § 7 приведены еще два возможных способа аппроксимации исходной системы интегральных уравнений системой конечно-разностных уравнений, используя те же квадратурные формулы Ньютона-Котеса и интерполяционные полиномы Лагранжа. Один из упомянутых способов представляет собой блочный метод решения, по которому, решая каждый раз систему n векторных уравнений вида (7), получаем последовательные значения искомой вектор-функции $\vec{y}_i$ сразу в n узлах. Показано, что изложенный в §§ 2—4 метод является оптимальным в смысле объема вычислительных работ и точности решения.

Во второй главе диссертации приводятся алгоритмы различной алгебраической степени точности численного решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода для современных ЭВМ.

В § 1 по методу, изложенному в первой главе, построен общий алгоритм решения системы интегральных уравнений Вольтерра, из которого получаем в качестве частных случаев алгоритмы различной алгебраической степени точности. Приведены расчетные формулы и блок-схема этого алгоритма, а в приложении 1 — программа, записанная на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60.

Полагая в универсальном алгоритме n конкретные натуральные значения и применяя соответствующие этому n квадратурные формулы Ньютона-Котеса замкнутого типа и интерполяционные формулы Лагранжа, получаем алгоритмы различной степени точности.

В § 2 рассматриваются алгоритмы порядка точности $O(h^2)$ и $O(h^4)$, получаемые соответственно применением квадратурной формулы трапеций ($n = 1$) и квадратурной формулы Симпсона ($n = 2$) и Ньютона ($n = 3$).

В § 3 строятся алгоритмы повышенной точности. Применяя пятиточечную квадратурную формулу Ньютона-Котеса ($n = 4$), получаем алгоритм шестой алгебраической степени точности. Используя семиточечную квадратурную формулу Ньютона-Котеса ($n = 6$), получаем алгоритм, погрешность которого порядка $O(h^8)$.

Приводятся таблицы коэффициентов, являющиеся константами этих алгоритмов. Эти таблицы совместно с АЛГОЛ — программой универсального алгоритма, приведенной в приложении 1, образуют пакет программ решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра различной степени точности.

Этот пакет программ можно пополнять алгоритмами более высокой алгебраической степени точности, например, точности порядка $O(h^{10})$ или $O(h^{12})$. Для этого требуется лишь по приведенной методике построить таблицы коэффициентов, соответствующие квадратурным формулам Ньютона-Котеса замкнутого типа для $n = 8$ или $n = 10$, и включить их в набор исходных данных упомянутого пакета программ.

Эффективность построенных алгоритмов иллюстрируется числовыми примерами, приведенными в § 4.

В § 5 обсуждается вопрос рационального использования имеющегося пакета программ на практике при решении систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с заданной точностью решения.

Из анализа результатов численных примеров следует, что при фиксированном шаге h по алгоритмам повышенной точности получаем приближенное решение на несколько порядков точнее, чем по алгоритмам порядка точности $O(h^4)$ и тем более — $O(h^2)$. Следовательно, применяя алгоритмы повышенной точности, можно достичь заданной точности решения при более крупном шаге h. Выгоды, вытекающие отсюда, — очевидны. Кроме того, сравнивая соответствующие значения искомого приближенного решения, полученные по алгоритмам различной точности, можно судить о количестве верных знаков этого решения, а значит, практически оценить погрешность приближенного решения.

Установлено, что, если начало таблицы искомого решения определено, то объем вычислений, необходимый для получения продолжения решения, по алгоритмам различной степени точности практически одинаков. Следовательно, делается вывод о необходимости комплексного использования имеющегося пакета программ. Для этого в нужный момент необходимо ввести в память ЭВМ константы соответствующего алгоритма, постоянно хранящиеся на каком-либо носителе информации.

В третьей главе предложенный метод обобщается на случай решения задачи Коши для системы нелинейных и.-д. у. типа Вольтерра:

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}) + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{F}(x, s, \vec{y}(s), \vec{y}'(s)\, ds \qquad (9)$$

при начальном условии

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \qquad (10)$$

В § 1 исходная задачи Коши (9)—(10) сводится к эквивалентной ей системе двух векторных интегральных уравнений, одно из которых содержит повторный интеграл:

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y})\, dt + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} \vec{F}(t, s, \vec{y}, \vec{z})\, ds dt \qquad (11)$$

$$(x_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant x),$$

$$\vec{z}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}) + \int_{x_0}^{x} \vec{F}(x, s, \vec{y}, \vec{z})\, ds,$$

где обозначено $\vec{z}(x) = \vec{y}'(x)$.

В § 2 приводится метод построения начала таблицы искомого численного решения задачи (9)—(10). Применение $(n + 1)$ — точечных квадратурных формул Ньютона-Котеса замкнутого типа и соответствующих интерполяционных формул Лагранжа к системе (11) в каждом из n первых узлов сеточного покрытия H позволяет аппроксимировать эту систему системой $2n$ векторных нелинейных конечно-разностных уравнений с погрешностью порядка $O(h^{n+2})$:

$$\begin{gathered} \vec{y}_i = \vec{y}_0 + \frac{h}{n} i \sum_{q=0}^{n} A_q \vec{f}_{\frac{q}{n} i} + \frac{h^2}{n^3} i^2 \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=0}^{n} p A_p A_q \vec{F}_{\frac{p}{n} i, \frac{pq}{n^2} i}, \\ \vec{z}_i = \vec{f}_i + \frac{h}{n} i \sum_{q=0}^{n} A_q \vec{F}_{i, \frac{q}{n} i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{12}$$

В систему (12) кроме искомых неизвестных $\vec{y}_i$, $\vec{z}_i$ входят еще значения искомой вектор-функции и ее производной в промежуточных узлах $x = x_0 + \frac{q}{n} ih$ и $x = x_0 + \frac{pq}{n^2} ih$, соответствующие дробным значениям индексов $\frac{q}{n} i$ и $\frac{pq}{n^2} i$. Значения упомянутых вектор-функций в промежуточных узлах исключаются из системы (12), для чего используются их выражения через значения искомых неизвестных $\vec{y}_i$, $\vec{z}_i$ по интерполяционным формулам Лагранжа с равноотстоящими узлами.

Для численного решения полученной системы нелинейных конечно-разностных уравнений, как и ранее, применяется метод дифференцирования по параметру с последующим уточнением приближенного решения по методу Ньютона.

В § 3 рассматривается метод продолжения искомого численного решения для произвольного узла $x_i > x_n$. С помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса n-го порядка и соответствующих интерполяционных формул Лагранжа система

(11) в произвольном узле $x_i = x_0 + ih$ $(i > n)$ аппроксимируется с точностью порядка $O(h^{n+2})$ системой нелинейных конечно-разностных уравнений вида:

$$\vec{y}_i - hA_0(\vec{f}_i + hA_0\vec{F}_{ii}) = \vec{\varphi}_i, \tag{13}$$

$$\vec{z}_i - (\vec{f}_i + hA_0\vec{F}_{ii}) = \vec{\psi}_i$$

$$(i = n+1, \ldots, N).$$

В (13) вектора свободных членов $\vec{\varphi}_i$ и $\vec{\psi}_i$ вычисляются по формулам

$$\vec{\varphi}_i = \vec{y}_0 + \vec{I}_{i-n} + \vec{D}_{i-n} + \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2, \tag{14}$$

$$\vec{\psi}_i = \frac{h}{n} r_1 \sum_{q=0}^{n} A_q \vec{F}_{i, \frac{q}{n} r_1} + h \sum_{q=r_1}^{i-1} A_{q-r_1} \vec{F}_{iq}, \tag{15}$$

где

$$\vec{\sigma}_1 = h \sum_{q=0}^{n-1} A_q \vec{f}_{i-n+q},$$

$$\vec{\sigma}_2 = h' \sum_{p=0}^{n} A_p \left(\frac{h}{n} r_2 \sum_{q=0}^{n} A_q \vec{F}_{i-n+p, \frac{q}{n} r_2} + \right.$$

$$\left. + h \sum_{q=r_2}^{i-n+p} A_{q-r_2} \vec{F}_{i-n+p, q} \right),$$

$$r_1 = i - n \cdot Entier \left(\frac{i}{n} \right),$$

$$r_2 = (i - n + p) - n \cdot Entier \left(\frac{i-n+p}{n} \right),$$

а штрих у знака суммы в выражении для $\vec{\sigma}_2$ означает, что в этой сумме отсутствует слагаемое $h^2 A_0^2 \vec{F}_{ii}$, содержащее неизвестные $\vec{y}_i$, $\vec{z}_i$.

Входящие в (14) значения векторов $\vec{I}_{i-n}$ и $\vec{D}_{i-n}$ вычисляются последовательно по рекуррентным формулам:

$$\vec{I}_i = \vec{I}_{i-n} + \vec{\sigma}_1 + h A_0 \vec{f}_i ,$$

$$\vec{D}_i = \vec{D}_{i-n} + \vec{\sigma}_2 + h^2 A_0^2 \vec{F}_{ii} \qquad (i = n+1, \ldots, N) ,$$

причем, первые n значений этих векторов $\vec{I}_1, \ldots, \vec{I}_n$ и $\vec{D}_1, \ldots, \vec{D}_n$ вычисляются после построения начала таблицы соответственно по формулам:

$$\vec{I}_i = \frac{h}{n} i \sum_{q=0}^{n} A_q \vec{f}_{\frac{q}{n}i,}$$

$$\vec{D}_i = \frac{h^2}{n^3} i^2 \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} p A_p A_q \vec{F}_{\frac{p}{n}i,\, \frac{pq}{n^2}i}$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots, n) .$$

Для решения полученной системы нелинейных конечно-разностных уравнений (13) снова применяется метод дифференцирования по параметру. Полученное методом дифференцирования по параметру решение уточняется с любой наперед заданной точностью методом Ньютона.

В § 4, согласно изложенному методу решения, построен общий алгоритм решения задачи (9)—(10) на ЭВМ. Приведены расчетные формулы и блок-схема алгоритма, реализованного на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 в приложении 2.

Полагая в общем алгоритме переменной n конкретные натуральные значения и применяя соответствующие этому n квадратурные формулы Ньютона-Котеса и интерполяционные формулы Лагранжа, в § 5 построены алгоритмы четвертой, шестой и восьмой алгебраической степени точности. Эти алгоритмы отличаются лишь константами применяемых квадратурных формул и формул Лагранжа. Совокупность построенной АЛГОЛ — программы и набора упомянутых констант, приведенных в § 5, образует пакет программ численного решения системы и.-д. у. типа Вольтерра.

Эффективность построенного пакета программ иллюстрируется численными примерами, решенными на ЭВМ «Минск-22» и приведенными в § 6.

Таким образом, основным результатом диссертационной работы является предложенный метод численного решения систем интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, нашедший материальное воплощение в пакетах программ для современных ЭВМ, сданных в Республиканский фонд алгоритмов и программ АН УССР. Основные результаты диссертации изложены в работах [6—10] и докладывались на научном семинаре института математики АН УССР, а также были рассмотрены на заседаниях НТС и кафедры высшей математики Киевского педагогического института им. А. М. Горького.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лященко М. Я., Про чисельне розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь з змінною верхньою межею, ДАН УРСР, сер. А, № 5, 1967, 419—422.

2. Кирия В. С., Труды Тбилисского ун-та, 44, I (1951), 52, 55 (1954), 86, 235 (1960).

3. Давиденко Д. Ф., Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений, ДАН СССР, 88, 1953, 601—602.

4. Лященко Н. Я., Дровозюк В. С., О численном решении нелинейных интегральных уравнений с переменными верхними пределами и задачи Гурса для нелинейного уравнения с частными производными гиперболического типа. Вычислит. и прикладная математика, вып. 7, 1969, 57—63.

5. Дровозюк В. С., Лященко Н. Я., О численном решении первой краевой задачи для нелинейного уравнения Пуассона. Вычислит. и прикладная математика, вып. 15, 1971, 3—11.

6. Дровозюк В. С., Лященко Н. Я., О численном решении нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра с повышенной точностью. Вычислит. и прикладная математика, вып. 21, 1973, 13—24.

7. Дровозюк В. С., Обчислювальні алгоритми наближеного розв'язування задачі Коші для одного класу нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, ДАН УРСР, сер. А, № 12, 1974, 1062—1066.

8. Дровозюк В. С., Лященко Н. Я., Метод численного решения интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с повышенной точностью. Вычислит. и прикладная математика, вып. 27, 1975, 98—112.

9. Дровозюк В. С., Алгоритм решения системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода, Республ. фонд алгоритмов и программ АН УССР, № 7, 1975.

10. Дровозюк В. С., Алгоритм численного решения задачи Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, Республ. фонд алгоритмов и программ АН УССР, № 8, 1975.

39807. 8.12.1975 г. Формат бумаги 60×90 1/16. Объем 1 печ. л. Зак. 1018—200.