МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Нечипоренко Клавдия Алексеевна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В УП–УШ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

(13.00.02 – методика преподавания математики)

Диссертация написана на русском языке

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Киев – 1975

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Нечипоренко Клавдия Алексеевна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В УП-УШ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

(13.00.02 - методика преподавания математики)

Диссертация написана на русском языке

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Киев - 1975

Работа выполнена на кафедре математики Луцкого государственного педагогического института им. Л. Украинки.

Научный руководитель - кандидат педагогических наук, доцент ПРОЧУХАЕВ В.Г.

Официальные оппоненты:

Член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор ДЗЯДЫК В.К.

Кандидат педагогических наук, доцент КУХАРЬ В.М.

Внешний отзыв - Ивано-Франковский педагогический институт им. В.С. Стефаника, кафедра математики.

Автореферат разослан "2" марта 1970 г.

Защита состоится " " 197 г. на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им. А.М. Горького / Киев, 30, Пирогова, 9 /.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Отзывы просим присылать по адресу: 252030, Киев - 30, ул. Пирогова, 9, научная часть.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Основная задача, поставленная перед советской школой Коммунистической партией и Советским правительством - обеспечить социалистическое общество грамотными, инициативными, воспитанными в самом широком понимании этого слова людьми.

В ускорении научно-технического прогресса на современном этапе одно из решающих мест принадлежит математической науке. И в связи с этим исключительно важное значение приобретает математическое образование. Возросшие требования общества и достижения математической науки привели к реформе школьного математического образования, в результате которой существенно изменилось его содержание. Созданы новые программы и учебники, происходит пересмотр и совершенствование методов обучения. В учебные планы школ вошли факультативные курсы по выбору, которые призваны, учитывая интересы и наклонности учащихся, расширить и углубить изучение программного материала, ознакомить учащихся с некоторыми общими математическими идеями, показать приложения математики в практике.

Факультативные занятия для нашей школы - явление сравнительно новое. И, хотя уже есть некоторый опыт их проведения, есть пособия с изложением материала многих рекомендуемых программой тем, в организации факультативных занятий по математике есть еще нерешенные проблемы. Фактически не до конца решены проблемы, связанные с содержанием и методикой проведения занятий, особенно на первом этапе - в 7-8 классах.

В настоящей диссертации проводится научно-методическое исследование одного из возможных путей решения проблемы содержания и методики проведения занятий с учащимися 7-8 классов по разделу "Элементы теории чисел". Он непосредственно примыкает к арифметическому материалу, включенному в школьные программы.

Изучение элементов теории чисел способствует углублению теоретико-числовых представлений учащихся, развитию логического мышления, математических способностей, воспитанию устойчивого интереса к математике. Правильно выбранные для факультативных занятий вопросы теории чисел, примыкающие к основной программе, способствуют более глубокому пониманию и усвоению определяющих идейных положений программы. Как нами неоднократно проверено на опыте, изучение вопросов делимости, элементов теории сравнений, некоторых сведений о неопределенных уравнениях создает необходимую базу для ознакомления учащихся с такими абстрактными понятиями, как кольцо и поле.

Кроме того, изучение некоторых вопросов теории чисел оказывает положительное влияние на качественное усвоение многих разделов школьной программы, в частности тех, где в разных аспектах используются свойства целых или натуральных чисел.

Предложения об изучении элементов теории чисел на внеклассных занятиях не новы. Анализ литературы по внеклассной работе, методических рекомендаций, опыта работы школ показывает, что некоторые вопросы элементарной теории чисел изучались на занятиях кружков, входили в задания математических олимпиад. Но постановка занятий носила эпизодический характер, при отборе материала зачастую учитывалась только его занимательность.

Попытка решить проблему отбора материала и создания пособия по изучению теоретико-числовых вопросов в школе сделана в диссертации Михеловича Ш.Х. Но автором фактически решена только общая задача - выявление оптимального объема теоретико-числового материала и определение возможных путей его изучения. Соответствующее пособие является пособием для студентов физико-математических факультетов пединститутов.

Второй попыткой реализации рекомендаций об изучении элементов теории чисел в массовой школе следует считать включение специальных тем в программу факультативных занятий 7-8 классов. Изложение материала этих тем дано в нескольких пособиях и статьях. Характерно, что в разных пособиях даются различные рекомендации относительно содержания и последовательности изучения материала. К тому же в пособиях почти отсутствуют методические рекомендации. Все это говорит о том, что содержание и методика занятий по темам, включающим элементы теории чисел, требуют уточнения, дальнейшей разработки и совершенствования. Требует уточнения и сама программа.

О необходимости и актуальности исследовательской работы в этом направлении говорит и состояние факультативных занятий, о котором можно судить из опубликованных материалов. Пока еще далеко не во всех восьмилетних и средних школах организованы факультативы для учащихся 7-8 классов. А там, где организованы, учителя не всегда выбирают для изучения дополнительные вопросы арифметики. Например, это положение прослежено нами в школах Волынской области, где в 1974/75 учебном году из общего числа 572 средних и восьмилетних школ факультативы для 7-х классов работали в 54 школах, для 8-х классов - в 65 школах. Одна из причин, как показало исследование, - несовершенство пособий и отсутствие конкретных методических рекомендаций по изучению отдельных разделов и тем.

Основная проблема, которая выдвинута и решается в диссертации - разработка методически обоснованной программы изучения элементов теории чисел на факультативных занятиях в 7-8 классах.

Одновременно с основной решаются такие проблемы:

I. Определение объема материала для кружковых / У-УI классы/ занятий как подготовительных к факультативным.

2. Разработка содержания и методики проведения факультативных занятий в 7-8 классах по предложенной нами программе.

Конкретное решение выдвинутых проблем заключалось в следующем:

I. Составление проекта методически обоснованной программы факультативных занятий.

2. Изложение содержания материала в соответствии с составленным проектом программы и обоснование требований к системе упражнений.

3. Разработка методических рекомендаций по изучению основных вопросов проекта программы.

4. Опытная проверка доступности отобранного материала, его изложения, эффективности методических рекомендаций и внесение соответствующих изменений и уточнений.

При решении сформулированных задач использовались следующие методы педагогических исследований:

I. Изучение и анализ отечественной и зарубежной научной, педагогической и учебно-методической литературы по теме диссертации.

2. Изучение диссертаций, связанных с настоящим исследованием.

3. Анализ личного I8-летнего опыта работы диссертанта в школе и I2-летнего опыта работы в педагогическом институте.

4. Изучение и обобщение опыта работы школ г.Луцка и Волынской области по проведению внеклассных и факультативных занятий.

5. Экспериментальная проверка доступности предлагаемой программы, ее содержания и методики проведения занятий в школе.

6. Обсуждение результатов исследования на научных конференциях, семинарах и совещаниях работников педвузов, на семинарах и конференциях учителей.

Разработка методики изучения вопросов теории чисел проводилась с учетом современных психолого-педагогических исследований.

Педагогический эксперимент по определению объема материала, доступности его для учащихся, проверке эффективности методических рекомендаций проводился, начиная с 1967/68 учебного года в средних школах №№ 5, 8 и 9 г.Луцка. Первые два года исследования велись в соответствии с программой Министерства просвещения, затем на протяжении двух лет проверялась возможность организации факультативных занятий на базе кружковых занятий по усложненной программе. Последние 3 года, включая 1974/75 учебный год, опытная проверка эффективности занятий проходила в соответствии с разработанной в настоящей диссертации программой и методическими рекомендациями.

Диссертация состоит из введения, трех глав с выводами и библиографии.

Во введении обоснована актуальность избранной темы, сформулированы проблемы и задачи исследования, перечислены выбранные методы исследования.

В первой главе диссертации - "К истории вопроса об изучении элементов теории чисел в школьном курсе математики" - выявлены основные тенденции относительно изучения теоретико-числовых вопросов в школьном курсе, начиная с конца XIX века. В связи с этим проведен краткий обзор учебной и некоторой другой литературы с точки зрения освещения в ней вопросов элементарной теории чисел. В § I главы рассмотрены предложения об изучении элементов теории чисел, которые вносились на различных этапах реформы школьного математического образования. Эти предложения вносились вместе с предложениями о содержании курса арифметики,который к началу XX века занимал прочное место в программах учебных заведений многих стран, в том числе и России. В русских средних учебных заведениях /гимназии, реальные училища/ арифметика изучалась в два этапа. Второй был отнесен к выпускным классам, где предусматривался повторительный курс арифметики, куда фактически и входили некоторые элементы теории чисел /неопределенные уравнения первой степени, элементы теории непрерывных дробей, элементы теории делимости/.

Новые проекты программ по математике активно обсуждались в России в период 1899-1902 г.г. и 1902-1910 г.г. По курсу арифметики в них существенных изменений не предлагалось.

К этому же периоду относится и создание Меранского плана. В нем для первых трех лет предусматривался традиционный арифметический материал, но с элементами обобщений в конце третьего года обучения. Начиная с четвертого года обучения планировалось изучение элементов алгебры. Этим подчеркивалась связь арифметики с алгеброй, логические пути перехода первой во вторую.

В реформистском движении в России большую роль сыграли I и II съезды преподавателей математики. На первом съезде достаточно внимания было уделено перестройке преподавания арифметики. Предложения по этому вопросу сводились к следующему: 1/ввести в курс математики средней школы изучение элементов теории чисел; 2/усилить внимание вопросам теоретической арифметики; 3/перестроить преподавание арифметики так, чтобы она служила пропедевтикой к алгебре; 4/на начальном этапе обучения курс математики должен представлять из себя единое целое. Эти предложения не были реализованы в программах дореволюционной школы.

В программах советской общеобразовательной школы долгое время /до введения новых программ/ сохранялся курс арифметики, но повторительный курс арифметики из программы старших классов был исключен. Этим самым из программы были исключены элементы теории чисел и теоретической арифметики.

На современном этапе реформистского движения вопрос о содержании школьного курса арифметики ставился и решен совершенно по-новому. В дискуссиях о соотношении между арифметикой и алгеброй было высказано много предложений о создании единого курса начальной математики. В нем изучение начальных понятий арифметики должно происходить с использованием алгебраического языка, в соединении с элементами геометрии. Такие предложения, в частности, реализованы в программах советской общеобразовательной школы.

В некоторых зарубежных странах /Франция, Бельгия/ модернизация школьного курса математики носит более радикальный характер. Если учесть, что особенности изучения арифметики во многом определяются характером изложения теории натурального числа, то особенности модернизированных курсов можно проследить по изложению этой теории в пособиях Ж.Папи. В них теория натурального числа излагается на основе общих понятий теории множеств. Вычислительная техника при этом играет второстепенную роль.

При создании программ для старших классов во многих странах положительно решен вопрос о введении в школьный курс элементов теории чисел, в частности арифметики вычетов. Изучение операций над классами вычетов является шагом к формированию общих понятий алгебры. Операции вводятся над объектами, отличными от чисел, что подготавливает почву для введения общего понятия операции и алгебраической структуры.

Именно в таком аспекте элементы теории сравнений внесены в программы школ Англии, Франции, США.

Аналогичные предложения есть и в исследованиях наших авторов. Например, они представлены в кандидатской диссертации К.П.Захаровой "Система изучения начальных теоретико-групповых понятий в старших классах средней школы" /М,1968/. Относятся эти предложения в основном к содержанию внеклассных занятий.

Итак, в современных программах находят место элементы теории чисел, особенно арифметика вычетов. Изучение их может проходить как на уроках, так и на внеклассных занятиях.

§ 2 главы посвящен анализу учебной, научно-популярной и методической литературы с точки зрения освещения в ней вопросов теории чисел. Поскольку эта литература очень обширна, то для анализа отобраны наиболее часто рекомендуемые для занятий математических кружков книги, рассчитанные на школьников старших классов /в частности из серий "Популярные лекции по математике" и "Библиотека физико-математической школы"/, а также наиболее характерные пособия, освещающие опыт внеклассной работы. Из школьных учебников проанализированы традиционные учебники по арифметике и новые учебники и учебные пособия для 4-8 классов.

При анализе выявлены основные тенденции относительно отбора и изложения вопросов теории чисел для школьников, отмечены достоинства и недостатки отдельных книг и пособий. Так, в отношении научно-популярной литературы мы отмечаем, что в разных книгах одни и те же вопросы излагаются на различном уровне строгости, в различной последовательности. И это создает трудности при определении содержания внеклассных занятий по изучению элементов теории чисел. Возникает потребность в доступном, последовательном и достаточно строгом изложении логически связанных вопросов теории чисел, рассчитанном на понимание школьниками 7-8 классов.

Анализируя учебники и учебные пособия, констатируем, что элементы теории чисел излагались в традиционных учебниках "Арифметика" и "Алгебра", ч.II Киселева А.П. и были рассчитаны на дополнительную работу с учащимися. Новые учебники существенно отличаются от традиционных как содержанием, так и структурой. В них много места отведено различным упражнениям. Анализируя упражнения в учебном пособии "Математика" для 5-го класса, в учебных пособиях по алгебре для 6-8 классов, мы отмечаем, что некоторые из них связаны с вопросами теории чисел. Так, среди упражнений есть примыкающие к теории сравнений, неопределенным уравнениям первой степени с двумя переменными, целочисловым функциям и даже конечным непрерывным дробям. Эти упражнения могут послужить отправным пунктом при проведении дополнительной работы с учащимися по изучению элементов теории чисел.

В конце главы дан краткий обзор пособий, в которых излагаются рекомендуемые программой вопросы теории чисел /дополнительные вопросы арифметики целых чисел/. На основе этого обзора и анализа имеющегося опыта проведения факультативных занятий, отмечены основные недостатки в постановке факультативных занятий по изучению элементов теории чисел.

Глава заканчивается краткими общими выводами, в которых, исходя из всего изложенного, сформулированы основные проблемы, являющиеся предметом настоящего исследования.

Вторая глава - "Программа факультативных занятий по изучению элементов теории чисел и ее обоснование". В ней дано научно-методическое обоснование программы и разработана сама программа. Отправным пунктом для обоснования программы явилось раскрытие значения изучения вопросов теории чисел вообще и тех конкретных целей, которые реализуются на факультативных занятиях с учащимися 7-8 классов. Этому пункту посвящен § I главы. Опыт показывает, что формирование общих теоретико-числовых представлений у учащихся во многом зависит от того, насколько полные и глубокие знания получены ими о натуральных, а затем целых числах. Теоретико-числовые вопросы прямо или косвенно влияют на качественное усвоение учениками многих разделов школьной программы, например, таких, как "Квадратные уравнения", "Числовые последовательности", "Тригонометрические уравнения" и других. При этом эти вопросы не выходят за пределы множества целых чисел, то есть относятся к теории чисел.

Желательность и ценность изучения элементов теории чисел в массовой школе признавалась и признается многими учеными-математиками. Среди них можно назвать Ф.Клейна, П.С.Александрова. Доступные ученикам вопросы теории чисел способствуют воспитанию устойчивого интереса к математике, развитию логического мышления, то есть положительно влияют на формирование научных интересов школьников.

Кроме того, при изучении элементов теории чисел создаются условия для проведения обобщения предусмотренного обязательной программой арифметического материала, ознакомления учащихся с некоторыми проблемами соответствующей научной отрасли.

Итак, можно считать бесспорным факт, что изучение элементов теории чисел на факультативных занятиях в школе имеет бо́льшое значение. Конкретно, изучение элементов теории чисел: 1/способствует углублению, уточнению и совершенствованию теоретико-числовых представлений учащихся, связанных с природой чисел, формами их записи, свойствами операций; 2/дает возможность провести необходимые обобщения ранее изученного арифметического материала; 3/вводит учащихся в интересную и важную научную область, которая связана с наиболее простыми для них объектами - целыми числами; 4/позволяет овладеть некоторыми общими приемами решения задач с целыми числами, которые в обычных условиях требуют большой затраты времени; 5/создает прочную основу для формирования, иллюстрации и закрепления таких фундаментальных понятий, как функция, отношение, группа, кольцо, поле.

Исходя из этого, конкретные цели изучения элементов теории чисел сводятся к следующему:

1/ ознакомление с понятием сравнения, свойствами отношения сравнимости, методом сравнений и выработка достаточно прочных навыков в применении этого метода к решению различных задач;

2/ теоретическое обоснование основных арифметических фактов, связанных с совершенствованием вычислительных навыков и различными формами представления рациональных чисел;

3/ ознакомление с некоторыми целочисловыми функциями с целью закрепления общего понятия функции, а также использования изученных свойств в отдельных прикладных вопросах;

4/ изучение наиболее близких к школьной программе вопросов из разделов: "Сравнения с одной переменной" и "Неопределенные уравнения", способствующих углублению некоторых понятий основного курса.

Определяя эти цели, мы считаем, что в их осуществлении значительную роль могут выполнить кружковые занятия в 5-6 классах как подготовительные к факультативным. Один из возможных вариантов программы и содержания таких занятий разработан в § 2 главы. Учитывая требования программы и содержание учебников для 4-6 кл., мы предлагаем в программу кружковых занятий 5 класса включить некоторые вопросы делимости. Конкретно выделяются такие: 1/ отношение делимости и его свойства: рефлексивность, транзитивность, антисимметричность; 2/теорема о делении с остатком, ее следствия. Нахождение остатков от деления суммы, разности и произведения на натуральное число. Алгоритм Евклида. 3/Дополнительные сведения о простых числах /бесконечность множества простых чисел, решето Эратосфена. 4/ Признаки делимости на 9 и 11. Способ проверки результатов арифметических действий с помощью 9 и 11. Признаки делимости на 7 и 13 - формулировка и доказательство в пределах шестизначных чисел.

Поскольку делимость целых чисел мы рассматриваем как отношение, а с этим понятием ученики не знакомы, в этом параграфе разработана методика введения в 5 классе понятия отношения.

По всем вопросам определено содержание материала, проанализированы методические особенности его изучения, по некоторым вопросам приведены образцы изложения. Мы предлагаем уже в 5 классе при изучении признаков делимости использовать понятие сравнения и символику сравнений. Это понятие, как показал в частности наш опыт, вполне доступно ученикам.

Программа кружковых занятий для 6 класса является логическим продолжением программы 5 класса. В учебном пособии "Алгебра" этого класса есть упражнения, при решении которых можно использовать аппарат сравнений, а также упражнения, связанные с исследованием неопределенных уравнений с двумя переменными. Отправляясь от этих упражнений и учитывая содержание кружковых занятий в 5 классе, в программу занятий кружка 6 класса мы включаем такие вопросы: I/ Определение сравнения, изучение свойств отношения сравнимости. 2/ Изучение простейших свойств сравнений на основе теорем об остатках от деления на данное число. Применение свойств к решению различных задач на делимость. 3/ Простейшие сведения о неопределенных уравнениях вида $ax + by = c$ / на основе решения конкретных задач и геометрических иллюстраций/.

Эта программа, как показал эксперимент, является хорошей пропедевтикой для изучения элементов теории чисел на факультативных занятиях в 7-8 классах. Но, к сожалению, в реальных условиях она не всегда может быть принята учителями. Поэтому при решении проблемы о программе и содержании факультативных занятий мы в основном не связываем их с наличием кружковых.

В § 3 главы дано обоснование программы факультативных занятий, определен объем материала, последовательность его изучения в каждом из 7-8 классов. При составлении программы мы прежде всего исходили из целей, сформулированных в § I настоящей главы. Кроме того, учтены следующие факторы: I/ с помощью факультативных занятий в условиях нашей школы в значительной мере решается проблема индивидуализации обучения. Поэтому в программу желательно включать такие вопросы, которые могут оказать влияние на формирование научных интересов школьников; 2/ имеющийся опыт изучения дополнительных вопросов арифметики на факультативных занятиях; 3/ содержание пособий по элементарной теории чисел, пособий для факультативных занятий, содержание новых программ и учебников по математике.

Исходя из перечисленных факторов, мы предлагаем в программу включить такие разделы: I. Элементы теории делимости. 2.Элементы теории сравнений. 3.Неопределенные уравнения. 4.Элементы конечных непрерывных дробей.

Основное содержание первого раздела составляет доказательство теоремы об однозначночти разложения натурального числа на простые множители. Изучению этой теоремы мы придаем большое значение. Во-первых, только после доказательства теоремы можно считать обоснованными такие ранее изученные вопросы, как нахождение НОД и НОК способом разложения на множители, критерий представимости обыкновенной дроби в виде конечной или бесконечной десятичной, каноническое представление делителей данного натурального числа и другие. Теорема подводит итог всему ранее изученному о делимости целых чисел. Во-вторых, теорема представляет большие возможности для закрепления навыков дедуктивных доказательств, так как допускает разные способы доказательства. В-третьих, на основании теоремы и ранее изученных сведений о делимости можно сделать первые шаги к ознакомлению учащихся с такими понятиями, как кольцо, поле, область целостности.

Чтобы показать новые приложения теоремы и ее следствий, в программу вносится решение двух видов неопределенных уравнений: I/ $xy + ax + by = c$ и 2/ $X^2 - Y^2 = a$ и ознакомление с целочисловой функцией $\tau(n)$. Решение этих уравнений связано с исследованием всевозможных представлений целого числа в виде произведения двух сомножителей. Эта работа интересна и полезна для учащихся. Внесение в программу целочисловых функций $\tau(n)$ / в I раздел/ и $\varphi(n)$ /во II раздел/ полностью согласовывается с идейной направленностью школьной программы. Названные функции являются примерами функций, которые не заданы "непрерывно". Они имеют интересные свойства и точечные графики. На их примере закрепляется общее понятие функции, как отображения одного числового множества на другое. Здесь дважды, по разным законам,множество натуральных чисел отображается на себя, и законы отображения существенно зависят от состава натурального аргумента. Поэтому изучение целочисловых функций способствует также и более глубокому пониманию свойств натуральных чисел.

Закончить изучение первого раздела мы предлагаем рассмотрением вопроса о разложении на множители в множестве Z . Фактически с этим разложением ученики уже встречались, но без какихлибо обобщений. Исследуя разложение на множители в Z , мы даем первое расширение понятий простого числа и единицы. Для множества Z формулируется основная теорема арифметики и некоторые известные для множества N теоремы делимости.

Этот материал предлагается для 7 класса. Во второй раздел мы включаем такие вопросы: 1/Классы вычетов, операции над классами. 2/ Полная и приведенная системы вычетов. 3/ Функция Эйлера. 4/ Сравнения с одной переменной. Первые три вопроса являются предметом изучения в 7 классе, последний - с учениками 8 класса. Фактически в 7 классе главное внимание уделяется формированию понятия класса по данному модулю и изучению множества Z/m с точки зрения операций, которые определяются на этом множестве. Здесь впервые ученики познакомяться с конечным множеством, которое относительно введенных операций "похоже" на само множество целых чисел. Представляют интерес и элементы множества Z/m-

классы. Изучение их структуры, нахождение общих формул для записи элементов поможет ученикам лучше разобраться в свойствах целых чисел. Кроме того, этот материал используется для формирования понятия кольца. Естественно, что понятию класса должно предшествовать введение понятия сравнения и изучение свойств сравнений. Если этот материал не изучался на кружковых занятиях, то он включается первым пунктом в программу факультативных занятий.

Необходимость внесения в программу сведений о полной и приведенной системах вычетов обусловлена тем, что эти понятия непосредственно связаны с понятием класса и представляют классы. К тому же, многие вопросы теории сравнений прямо или косвенно связаны с системами вычетов.

О значении изучения функции Эйлера было уже сказано. На примере этой функции для учащихся будет еще раз конкретизирован описательный способ задания функции. При изучении свойств функции, отыскании формулы для нахождения ее значений создаются условия для организации интересной исследовательской работы с учащимися. Мы обосновываем возможность изучения свойства мультипликативности, а в ходе выполнения упражнений получение тождества Гаусса.

Вопрос о сравнениях с одной переменной мы считаем важным и интересным для учащихся 8 класса. В пользу этого вопроса можно привести хотя бы тот аргумент, что постановка задачи о решении сравнений имеет много общего с задачей решения уравнений. В обеих задачах мы оперируем одинаковыми понятиями: решение, множество решений, равносильность. Поэтому изучение сравнений с одной переменной будет способствовать формированию этих понятий.

Конкретно в программу вносятся сравнения первой степени вида $ax \equiv b \pmod{m}$. Вопросы теории включают теорему об условиях существования решений и установление способов решений. При этом ученики сначала овладевают способом нахождения решения путем испытания с использованием основных свойств сравнений, а после ознакомления с конечными непрерывными дробями - используют аппарат конечных непрерывных дробей.

После изучения условий существования решений сравнения $ax \equiv b \pmod{m}$ делаются выводы о выполнении на множестве операции деления. Этим самым создаются условия для проведения окончательных обобщений относительно структуры множества Z/m.

Раздел "Неопределенные уравнения" тоже рассчитан на учащихся 8 класса. Он невелик по объему и включает теорию уравнений первой степени с двумя переменными: условия существования решений, формулы множества решений, критерий разрешимости уравнения $ax + by = c$ в натуральных числах. Поскольку основную трудность при решении этих уравнений представляет отыскание произвольного частного решения, а наши ученики к этому времени научатся решать сравнения первой степени, то для нахождения частных решений мы предлагаем использовать аппарат сравнений. Исследование уравнений на существование натуральных решений проводится с помощью графиков.

Как показывает опыт, изучение неопределенных уравнений в школе имеет большое воспитательное, теоретическое и прикладное значение. Оно способствует активизации мыслительной деятельности учащихся, так как всегда включает элементы исследования. Решением неопределенных уравнений желательно заниматься систематически, с постепенным усложнением.

Последний раздел программы факультативных занятий - "Элементы конечных непрерывных дробей" - предлагается для 8 класса. Непрерывные дроби - один из важных и интересных разделов теории чисел, отдельные вопросы которого можно приблизить к школьной программе. В частности это относится к вопросам представления действительных чисел непрерывными дробями и элементам теории приближений. Оба названных вопроса близки к школьной программе и важны для углубления теоретико-числовых представлений. В этом разделе мы предлагаем минимальный объем материала. В него входит ознакомление с понятием "конечная непрерывная дробь", установление взаимно однозначного соответствия между множеством рациональных чисел и множеством конечных непрерывных дробей, ознакомление с подходящими дробями и некоторыми их свойствами и элементарные сведения о приближении рациональных чисел подходящими дробями.

Как видим, в программу факультативных занятий внесены логически связанные между собой вопросы, близкие к школьной программе, важные в теоретическом отношении и по возможности имеющие прикладное значение.

Поскольку эти вопросы относительно новы для школьного преподавания, внесение их в программу требует и методического обоснования. Этому посвящен последний, четвертый параграф главы. В нем рассмотрены общие положения методики факультативных занятий, отнесенные к изучению элементов теории чисел.

Опираясь на имеющийся опыт проведения факультативных занятий и экспериментальную работу, мы даем обоснование следующих положений общей методики:I/ выбор структуры занятия; 2/ выбор наиболее эффективных приемов проведения занятия;3/организация контроля и проверки знаний учащихся. Учитывая специфику изучаемого материала и возраст учащихся, к методике факультативных занятий мы предъявляем такие требования: I/широкое использование эвристических приемов при изучении нового материала; 2/выделение достаточного количества времени на самостоятельную работу и обеспечение при этом проявления инициативы и творчества учащихся; 3/свободное общение учителя с учащимися на протяжении всего занятия, обеспечивающее для учителя постоянную информацию об усвоении материала; 4/разумное сочетание классной работы с домашней путем подбора специальных упражнений, включающих проблемные вопросы последующих занятий.

В соответствии с этими требованиями разработана структура занятий и приведены примеры их построения, выявлены наиболее эффективные методические приемы, решен вопрос о роли и месте упражнений на занятии. Для обеспечения активной работы учащихся в системе упражнений необходимо иметь такие виды: I/ подготовительные, которые составляются по ранее изученному материалу и являются связующим звеном между отдельными вопросами программы; 2/тренировочные, непосредственно связанные с изучаемым материалом; 3/упражнения проблемного характера, которые создают на занятии творческую обстановку; 4/ упражнения прикладного характера, связанные с совершенствованием вычислительных навыков, решением практических задач.

Контроль и проверка знаний учащихся на занятии обеспечивается прежде всего выбором эвристических приемов обучения. Из других способов контроля мы предлагаем следующее: собеседования по специально составленным контрольным вопросам; контрольные работы; зачеты по разделам или всему изученному в классе материалу. По всем перечисленным видам контроля в диссертации приводятся образцы соответствующих заданий: перечень контрольных вопросов, варианты контрольных работ, карточки для проведения зачетов.

В конце главы приводится полностью программа факультативных занятий, в разбивке на двухчасовые занятия:

<u>7 класс.</u>

<u>Элементы теории делимости / 6 - 8 часов/</u>

I. Повторение основных фактов делимости, изученных в 4-5 классах. Отношение делимости и его свойства. Основная теорема арифметики и ее следствия.

2. Применение основной теоремы арифметики к решению неопределенных уравнений вида $XY + AX + BY = C$ и $X^2 - Y^2 = A$.

3. Функция $\tau(n)$. Формула для нахождения значений функции.

4. Понятие о разложении на множители на множестве Z. Подведение итогов.

Элементы теории сравнений / 8 часов /.

I. Определение сравнения. Свойства сравнений. Классы вычетов.

2. Операции над классами. Полная и приведенная система вычетов, их свойства. Определение функции Эйлера.

3. Формула для вычисления функции Эйлера.

4. Решение различных задач. Подведение итогов.

8 класс.

Элементы теории сравнений / 4 часа /.

I. Сравнения с одной переменной первой степени. Условия существования решений. Решение подбором.

2. Понятие о сравнениях второй степени с одной переменной. Решение подбором. Решение различных задач на применение сравнений с одной переменной.

Неопределенные уравнения / 6 часов /.

I. Неопределенные уравнения первой степени с двумя переменными. Формулы множества решений. Решение с помощью сравнений.

2. Решение неопределенных уравнений в натуральных числах. Критерий разрешимости. Решение задач.

3. Решение задач на составление неопределенных уравнений. Подведение итогов по изученному материалу.

Элементы теории конечных непрерывных дробей / 6 - 8 часов/.

I. Понятие конечной непрерывной дроби. Разложение рационального числа в конечную непрерывную дробь. Подходящие дроби.

2. Рекуррентные формулы для подходящих дробей. Понятие о приближении рациональных чисел подходящими дробями.

3. Решение задач на нахождение приближений. Применение непрерывных дробей к решению сравнений первой степени.

4. Подведение итогов.

Т Р Е Т Ь Я глава диссертации - "Содержание факультативных занятий по элементам теории чисел и методика их проведения" - самая большая по объему. В первых трех параграфах подробно разработано содержание всех включенных в программу вопросов, проведено их изложение с анализом методических особенностей. В целом эти параграфы написаны так, что их можно использовать в качестве учебно-методического пособия. Конкретное же изложение материала максимально приспособлено для понимания учениками 7-8 классов.

§ I посвящен разработке содержания и методики изучения вопросов делимости. Первый пункт - "Основная теорема арифметики". Здесь сначала дается методическое обоснование отбора необходимого материала о делимости, который используется при доказательстве основной теоремы арифметики. К этому материалу относятся основные понятия делимости /делитель, кратное, простое и составное число/, а также несколько теорем, которые приведены с доказательствами:

I. Для любого натурального числа $n>1$ наименьший, отличный от I, делитель всегда представляет собой простое число.

2. $(p$ и p_1 - простые числа и $p \neq p_1) \Longrightarrow p \nmid p_1$

3. $(a, b, c \in \mathcal{N};\ c \mid ab;\ (a,c)=1) \Longrightarrow c \mid b$

Из теоремы 3 устанавливаем следствие: если $p \mid ab$, то хоты бы один из сомножителей делится на p.

Примечание. Для записи факта делимости мы пользуемся знаком "$\mid$" /"делит"/, так как при использовании знака "$\vdots$" /"делится"/ ученики часто делают описки, заменяя последний знаком обычного деления ":".

Дальше дается краткая характеристика общей проблемы разложения на множители на произвольном множестве и формулируются основная теорема арифметики в такой форме: <u>каждое составное натуральное число можно разложить на простые множители и притом единственным образом с точностью до порядка сомножителей</u>. Доказательство существования разложения не представляет трудности для учащихся. Для второй части теоремы - единственности разложения - в существующей литературе приводятся разные способы доказательства. Мы предлагаем использовать несколько видоизмененное доказательство Гаусса: пусть n - составное число и разложено на простые множители: $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$. Предположим, что существует еще одно разложение, отличное от найденного. Установим, какие простые множители могут в него входить. На основании следствия теоремы 3 заключаем, что в него не могут войти никакие другие простые числа, кроме $p_1, p_2, \dots, p_k$. Если бы вошло новое простое число q, то на него должно было делиться одно из записанных чисел, а это невозможно, так как эти числа простые. С другой стороны, в новой системе сомножителей ни одно из чисел первой системы не может отсутствовать - иначе число n не делилось бы на него. Значит, два разложения n могут отличаться только степенями сомножителей, хотя бы одного из них. Пусть разложения отличаются степенью одного числа p /для удобства не будем ставить у него никакого индекса/, которое в одном разложении имеет степень k, а в другом l, причем $k > l$. Разложения в таком случае имеют вид: $n = p^k \cdot n_1$ /I/ и $n = p^l \cdot n_1$ / 2 /. Если каждое произведение разделить на p^l, то получим натуральное число $\frac{n}{p^l}$, которое можно записать в двух видах $\frac{n}{p^l} = p^{k-l} \cdot n_1$ и $\frac{n}{p^l} = n_1$. Это значит, что число $\frac{n}{p^l}$ разложено на множители, таких разложений два и отличаются они простым множителем p. Согласно начальным рассуждениям это невозможно: два разложения могут отличаться только степенями сомножителей. Мы пришли к противоречию. Значит, сделанное допущение неверно, и разложение натурального числа на простые множители единственно.

Дальше сформулированы следствия о каноническом представлении делителей натурального числа и о том, что число способов разложения натурального числа на два множителя конечно.

Второе следствие используется при решении неопределенных уравнений, которые рассматриваются в следующих двух пунктах параграфа. Способ решения уравнений $XY + AX + BY = C$ сначала разъясняется на примерах, а затем проводится обобщение. Для уравнения $X^2 - Y^2 = a$ доказывается критерий существования решений, а после преобразования уравнения к равносильному $(X-Y)\cdot(X+Y) = a$ легко устанавливается способ решения. Способ состоит в том, чтобы составить и решить всевозможные системы вида: $\begin{cases} X + Y = n_1 \\ X - Y = n_2 \end{cases}$, где n_1 и n_2 определяются из условия: $a = n_1 \cdot n_2$.

Материал о функции $\tau(n)$ предлагается изучать в такой последовательности: определение функции, составление таблицы значений функции по определению для отрезка $[1,20]$ и построение графика; вывод формулы для вычисления значений функции на основе первого следствия из основной теоремы арифметики. Здесь мы отмечаем большие возможности для проведения исследовательской работы - ученики занимаются поисками способа подсчета всех делителей натурального числа, в результате обобщения которых мы приходим к формуле:
$\tau(n) = (k_1 + 1)\cdot(k_2 + 1)\cdot \ldots \cdot(k_r + 1)$, где $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$.

Последний пункт параграфа - "Разложение на множители в множестве Z". Здесь введено понятие делителя единицы, тривиального разложения в Z и простого числа. Сформулирована и разъяснена основная теорема арифметики для Z : всякое целое число a, отличное от нуля и ± 1, разлагается на простые множители однозначно, если не обращать внимания на порядок множителей и допускать введение четного числа знаков минус. На основании теоремы доказано существование в Z делителей двух знаков.

В конце параграфа дано методическое обоснование системы упражнений по разделу и разработана методика решения основных видов упражнений, которые входят в систему и приведены в диссертации в минимальном варианте.

Второй параграф главы посвящен разработке содержания и методических особенностей изложения элементов теории сравнений.

Изучение элементов теории сравнений начинается с определения понятия сравнения, исследования свойств сравнений. В пособиях по теории чисел даются различные определения сравнения. Для школьного преподавания наиболее доступно определение в такой форме: "числа a и b называются сравнимыми по данному модулю m, если при делении на m они дают один и тот же остаток". Сразу же акцентируется внимание на том, что для заданного модуля относительно любой пары чисел на основе определения можно установить, сравнимы или несравнимы числа этой пары по модулю m. Если рассматривать сравнимость как некоторое отношение на множестве целых чисел, то определение дает возможность сделать вывод о принадлежности данной пары новому отношению. Именно с этой точки зрения мы и будем рассматривать определение понятия сравнения - на множестве целых чисел оно задает новое для нас отношение, которое назовем отношением сравнимости и попробуем установить его свойства. Исходя из определения, нетрудно показать, что новое отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, и дать первые сведения о разбиении множества Z на классы.

Из других свойств сравнений рассматриваются лишь самые простые: о почленном сложении, вычитании и умножении сравнений по одному и тому же модулю, о делении обеих частей сравнения на число, взаимно простое с модулем. При доказательстве свойств используем факт: $a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow a = b + mt$, где $t \in Z$. Этих свойств достаточно, чтобы решить много интересных задач на делимость. В параграфе разработана методика решения таких задач, составлены соответствующие упражнения.

В следующем пункте излагается материал о классах вычетов, операциях над классами. Сначала уточняется понятие класса, вводится символика для обозначения классов и множества классов. Множество классов по модулю m записываем так: $Z/m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$. Для классов дается геометрическая интерпретация с помощью окружности длины m. Операции над классами определяются, по определению составляются таблицы сложения и умножения. Работе по составлению таблиц и с готовыми таблицами отводится много места, с их помощью исследуется структура множества Z/m. Исследуя различные конкретные множества Z/m, мы приходим к выводу, что на каждом из них всегда выполняются операции сложения, вычитания и умножения. Операции имеют свойства, аналогичные тем, которые установлены для числовых множеств. На каждом множестве есть единичный и нулевой классы. Для множества классов по составному модулю возможен случай, когда произведение классов, отличных от нулевого, дает нулевой класс. Дальше вводится понятие кольца классов с делителями нуля и без делителей нуля.

В пункте о полной и приведенной системах вычетов дается определение каждой системы, формулируются и доказываются две теоремы: I/ Если $(a, m) = 1$, b - произвольное целое число, переменная x пробегает полную систему вычетов по модулю m, то выражение $ax + b$ принимает значения, образующие полную систему вычетов по этому модулю. 2/ Если $(a, m) = 1$ и переменная x пробегает приведенную систему вычетов по модулю m, то выражение

принимает значения, образующие приведенную систему вычетов по этому модулю. Доказательство этих теорем проводится после их проверки для отдельных случаев, при этом перед теоремой 2 дано определение функции Эйлера с тем, чтобы при доказательстве использовать соответствующую символику.

Система упражнений по этому пункту носит стандартный характер, но в нее входят и исследования, подготовительные к изучению теоремы Эйлера.

Поскольку определение функции Эйлера уже введено, изучение соответствующего пункта начинается с составления и анализа таблицы значений функции для числового отрезка $[1,30]$ и построенного для этого отрезка графика функции. Выдвигается проблема - найти зависимость $\varphi(n)$ от n. Частичное решение оказывается возможным для случая простого n: если $n=p$, то $\varphi(p)=p-1$. В общем случае решение проходит в таком плане: индуктивным путем устанавливается свойство мультипликативности функции Эйлера, затем свойство доказывается; формулируется и доказывается свойство: если $n=n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$, где n_i - попарно взаимно простые числа, то $\varphi(n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ldots\cdot n_k)=\varphi(n_1)\cdot\varphi(n_2)\cdot\varphi(n_3)\cdot\ldots\cdot\varphi(n_k)$. Дальше решается задача: сколько существует натуральных чисел, не превышающих произвольного положительного числа α и кратных натурального числа d. На основе свойства мультипликативности и решенной задачи получаем искомую формулу для $\varphi(n)$.

В последнем пункте параграфа освещается вопрос об изучении сравнений с одной переменной. Изложение материала мы предлагаем начинать с формирования основных понятий: сравнение с переменной, решение, множество решений, равносильность. Эти понятия вводятся в сопоставлении с одноименными понятиями теории уравнений. Лишь понятие решения требует расширения. Без доказательства сформулированы теоремы о равносильности с учетом, что эти доказательства можно внести в систему упражнений.

Основное внимание уделяется изучению сравнений первой степени $ax \equiv b \pmod{m}$. Для них доказывается теорема о существовании решений. Особенно детально разработана методика доказательства в случае, когда $(a, m) = d$ и $d|b$. Здесь сначала проводится исследование и решение такой задачи: имеется класс по модулю m ; скольким классам принадлежат эти числа по модулю md? После решения этой задачи нетрудно установить, что в названном случае сравнение имеет d решений по модулю m .

Специальных способов решения сравнений первой степени на данном этапе не предлагается - они решаются или непосредственным подбором или переходом к равносильному, правая часть которого кратна первому коэффициенту. Итоговой частью этого материала является освещение вопроса об операции деления на множестве Z/m, которое приводит к выводу: на множестве Z/m всегда можно выполнить деление любого класса $\bar{a}$ на каждый класс $\bar{b}$, взаимно простой с модулем. Естественно сформулировать этот вывод относительно множества классов по простому модулю.

Чтобы расширить область применения сравнений с одной переменной и, учитывая, что ученики к этому времени познакомились с теорией квадратного трехчлена, мы частично рассматриваем вопрос о сравнениях второй степени с одной переменной. В частности дается преобразование к двучленному виду, вводится понятие о квадратичных вычетах и невычетах. Этот материал используется при решении некоторых частных видов неопределенных уравнений второй степени с двумя переменными. Упражнения и методика их решения тщательно разработаны.

В § 3 разработано содержание и методика изучения материала о неопределенных уравнениях и непрерывных дробях. Сначала излагается материал о неопределенных уравнениях вида ах + ву = с. Первый вопрос - доказательство условий существования решений и нахождение формул, задающих множество решений. Учитывая, что с этими фактами ученики уже встречались на уроках, изложение предлагается начинать с формулировки и доказательства теоремы. При этом основное внимание уделено получению формул множества решений. Исследование существования решений здесь проводится описательным путем со ссылкой на алгоритм Евклида. В качестве способа отыскания частных решений используется метод сравнений. С помощью сравнений полностью решается и проблема существования решений.

Исследование существования решений уравнения $ax + by = c$ в натуральных числах проводится с использованием графиков. С помощью графиков наглядно и убедительно иллюстрируются все случаи, относящиеся к существованию или отсутствию натуральных решений.

Понятие непрерывной дроби является новым для учащихся, поэтому при изложении много внимания уделяется разъяснению определения, анализу записи и нахождению значения непрерывной дроби - "свертыванию дроби". Доказательство теоремы о представлении рациональных чисел конечными непрерывными дробями проводится подробно и иллюстрируется примерами.

Весь материал о подходящих дробях излагается в сочетании конкретно-индуктивного и дедуктивного методов. Проводя доказательство свойств подходящих дробей методом неполной индукции, мы в то же время намечаем схему строгого доказательства методом математической индукции в предположении, что этот метод можно дополнительно изучить с учениками 8 класса.

В последнем, четвертом параграфе главы дано описание опыта изучения элементов теории чисел на факультативных занятиях.

Экспериментальная работа по изучению элементов теории чисел с учащимися 7-8 классов проводилась диссертантом на протяжении нескольких лет в школах г.Луцка, а также с учащимися школы юных математиков при Луцком désинституте. На разных этапах ее проведения ставились разные задачи, в частности велись поиски оптимально возможного объема материала.

На последнем этапе проводилась опытная проверка доступности материала и эффективности методических рекомендаций, разработанных в настоящем исследовании. Кроме того, ставилась задача- установить влияние изучаемого материала на повышение общей математической культуры учащихся, на развитие их логического мышления.

В диссертации дано описание проведенной работы, раскрыты методические особенности проведения всех предусмотренных программой занятий. Проанализированы результаты контрольных работ и зачетов. Прослежено влияние изучаемых вопросов на усвоение некоторых разделов обязательного курса алгебры 7-8 классов.

На основании всего проведенного исследования и результатов экспериментальной работы сделаны выводы и определены некоторые рекомендации. Они сводятся к следующему:

Элементы теории чисел в объеме разработанной программы и содержания доступны ученикам, могут быть рекомендованы на факультативные занятия в 7-8 классах, и их изучение принесет ощутимую пользу. Необходимая база для их изучения создается в обязательном курсе математики 4-7 классов.

Предлагаемая программа имеет значительные преимущества в сравнении с существующими вариантами: I/ все вопросы программы взаимосвязаны, материал для 8 класса является логическим продолжением материала 7 класса; 2/ почти во всех вопросах легко прослеживается связь с основной школьной программой, а значит и обеспечивается влияние этих вопросов на более качественное усвоение обязательного программного материала; 3/ программа и разработанное ее содержание являются оптимальным вариантом - некоторые вопросы ввиду ограниченности бюджета времени, без нарушения логической стройности программы, могут быть исключены. К ним относятся: критерий существования решений уравнения $x^2 - y^2 = a$, свойства приведенной системы вычетов, сведения о сравнениях второй степени, вопрос о приближении рациональных чисел подходящими дробями. 4/Программа построена так, что дает возможность определить пути ее расширения для второго этапа факультативных занятий в 9-10 классах, которое возможно в направлении дальнейшего изучения целочисловых функций, сравнений второй степени с одной переменной, степенных вычетов и элементов теории бесконечных непрерывных дробей.

В диссертационной работе частично решен вопрос о преемственности и взаимосвязи кружковых и факультативных занятий на материале темы исследования.

В диссертации разработан такой вариант изложения материала для учащихся, который может значительно восполнить пробелы существующих пособий по этим вопросам. В этом изложении использованы доступные школьникам способы доказательства теорем, современная трактовка понятий, учтены методические особенности и пути преодоления возможных трудностей при изучении отдельных вопросов.

По каждому пункту программы разработана необходимая система упражнений, при этом четко определены значение отдельных видов упражнений и разработана методика их решения. Поскольку эта система является минимальной, указаны возможные пути ее расширения и дополнения.

Конкретные методические рекомендации относятся к структуре занятий, выбору методов изучения материала, определению роли, места и методики проверки домашних заданий, выбору и методике организации различных форм контроля и проверки знаний учащихся.

Материалы диссертации обсуждались и одобрены:

на республиканской научно-методической конференции "Научные основы подготовки учителя", Луцк, 1969;

на республиканской научно-методической конференции по проблемам совершенствования методов преподавания, Кировоград, 1971 ;

на отчетных научных конференциях преподавателей математических кафедр Луцкого пединститута / 1970 - 1972 г.г./;

на заседаниях Украинского республиканского научно-методического семинара по вопросам преподавания математики,Киев, 1972,1974;

на заседаниях кафедры математики Луцкого пединститута, 1974, 1975 г.г.

на семинарах и конференциях учителей математики средних школ г.Луцка и Волынской области.

Содержание диссертации отражено в публикациях:

1. Дополнительные вопросы арифметики на факультативных занятиях в УШ классе. "Математика в школе", № 6,1969.

2. Дополнительные вопросы арифметики на кружковых и факультативных занятиях в 4-8 классах средней школы. Сб.статей "Актуальные вопросы методики преподавания математики". МГПИ им. В.И. Ленина. М.1972.

3. Дополнительные вопросы арифметики на кружковых занятиях в 4-6 классах. "Математика в школе", № 5,1974.

4. Элементы теории чисел на факультативных занятиях в 7-8 классах средней школы. Сб.трудов "Актуальные вопросы методики преподавания математики". МГПИ им. В.И.Ленина. М.1975.

5. Элементы теории чисел на факультативных занятиях в УП-УШ классах / на укр. языке/. Республиканский научно-методический сборник "Методика преподавания математики",вып. 10.К.1975.

6. Глубокие знания программ, учебников и сборников задач по математике для средней школы - необходимое условие качественной подготовки учителя/ на укр.языке/.Материалы научно-методической конференции " научные основы подготовки учителя". Киев, 1969.

Подписано к печати 20-II-76. Объем 2 п. л.
Формат 60×84/16. Тираж 200. Зак. 6-2581.
Киевская книжная типография научной книги. Киев, Репина, 4.

Скасувати