МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А.М.Горького

на правах рукописи

Абд-эль Сайед

АМАЛЬ РИАД АБДЭЛЬ САЙЕД

МЕТОДИКА ОЗНАКОМЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ С ЭЛЕМЕНТАМИ ТЕОРИИ ГРУПП

(13.00.02 - методика преподавания математики)

Диссертация выполнена на русском языке.

А в т о р е ф е р а т

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
по методике математики

К И Е В
-1974-

Работа выполнена на кафедре математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института им. А.М.Горького.

Научный руководитель - кандидат педагогических наук, профессор ШИМАНСКИЙ И.Е.

Официальные оппоненты:

Доктор педагогических наук, профессор ТЕСЛЕНКО И.Ф.

Кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник КЛИМПУШ И.В.

Внешний отзыв - Ивано-Франковский педагогический институт им. В.Стефаника, кафедра математики и методики математики.

Автореферат разослан "___" августа 1974 г.

Защита диссертации состоится II сентября 1974 г. в 14.00 часов на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (ауд.431).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу: 252030, Киев-30, ул. Пирогова,9, научная часть.

Ученый секретарь Совета

В настоящее время реформа математического образования приняла международный характер. Обычно это об"ясняют двумя причинами:

I. Значительно возросшая роль математики и ее методов во многих областях науки и человеческой деятельности, которые еще недавно казались весьма далекими от математики.

2. В результате развития обобщающих и об"единяющих идей (основные структуры) стала возможной перестройка школьного курса математики в направлении сближения его с духом современной математики.

Нам бы хотелось выделить и еще одну не менее существенную причину - психолого-педагогическую: последние исследования психологов и методистов показали, что до сих пор возможности абстрактного мышления учащихся были занижены. Результаты этих исследований позволяют повысить логический уровень изложения традиционных вопросов школьного курса математики, перестроив его на современной теоретико-множественной основе и дополнив некоторыми важными понятиями современной математики, имеющими обобщающий, достаточно абстрактный характер, но тем не менее нашедшими уже свое практическое приложение.

Вопросы модернизации математического образования обсуждались почти на всех Международных конгрессах и симпозиумах математиков. В частности, на Международном математическом конгрессе, который проходил в 1966 г. в Москве, этот вопрос обсуждался на специальной секции.

Если подходить к этому вопросу с общих позиций, можно сказать, что общие тенденции всюду одинаковы. Если же рассматривать вопрос по существу, то, как отметил академик А.Н.Колмогоров[1)], в осуществлении идеи модернизации школьной математики намечается две различные тенденции:

1. Систематическое построение школьного курса на основе элементарных понятий теории множеств с подчинением конкретных классов функций общему понятию отображения, изучение общих свойств бинарных отношений (рефлексивность, симметричность и антисимметричность, транзитивность), выдвижение на первый план понятия группы и т.д.

2. Центр тяжести переносится на внедрение в школьное преподавание элементов дискретной математики (математическая логика, графы, теория вероятностей и т.д.).

По словам А.Н.Колмогорова, вторая тенденция "служит скорее для украшения первой и придания ей видимости неизбежного следствия из настоятельных требований практики (переработка информации, развитие машинной вычислительной техники" и т.д.).

Еще более 30-ти лет тому назад в предисловии к своей книге "Введение в теорию групп", предназначенной для учащихся и учителей математики средней школы, академик П.С.Александров подчеркнул, что понятие числа, множества, функции и г р у п п ы являются теми четырьмя краеугольными камнями, на которых зиждется все здание современной математики, и высказал уверенность в том, что понятие группы не труднее понятия функции и что с этим понятием можно ознакомить учащихся на самых первых ступенях математического об-

---

1) А.Н.Колмогоров, "Современная математика и математика в современной школе", ж."Математика в школе", 1971, № 6.

разования, причем на материале так называемой элементарной математики. Подобные слова 80-летней давности принадлежат Саймону Ньюкомбу:

"Математика двадцать первого века может сильно отличаться от нашей; возможно школьник начнет изучение алгебры с теории групп подстановок, что он мог бы сделать и сейчас, если бы не установившиеся традиции"[1].

Анализ программ и учебно-методической литературы ряда стран показывает, что последнее время с каждым годом все сильнее ощущается ломка этих традиций: идея группы настойчиво проникает в школьный курс математики.

Однако на пути введения элементов теории групп в среднюю школу имеются значительные методические препятствия, вызванные большой общностью и абстрактностью понятия группы. Этим и об"ясняется тот факт, что по вопросу как введения, так и изучения понятия группы в школе до сих пор не выработано единого мнения.

Подавляющее большинство математиков и методистов находит, что изучение этого понятия в школе полезно и целесообразно.

Так, по мнению академика А.Н.Колмогорова,"не вызывает сомнений общее положение: в целом последовательно современное изложение математики, начинающееся с весьма общих понятий множества, отображения, группы, <u>упрощает</u> ее, открывая в разнообразных частных фактах общую их основу, делает изложение более кратким <u>и в конечном счете</u> более простым и доходчивым"[2].

---

1) У.У.Сойер, Прелюдия к математике, "Просвещение", М.,1972, стр. 178

2) А.Н.Колмогоров,"Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики средней школы", ж."Математика в школе", 1967, № 2.

Главной причиной, сдерживающей, в частности, совершенствование содержания современного курса школьной геометрии, профессор И.Ф.Тесленко считает недостаточную разработку вопросов о соотношении об"ема научных знаний и учебного предмета. Их сближение может быть осуществлено усилиями ученых математиков, дидактов и методистов.

Невыполнение в полной мере требования научности в преподавании геометрии автор усматривает в следующем:

"Основополагающим в современной геометрической науке являются понятия структурного множества, группы, преобразования и векторного пространства, с помощью которых создаются достаточно четкие логико-пространственные модели для изучения окружающей действительности, в частности, в физике, химии, астрономии, биологии и др. В то же время изучение школьной геометрии в настоящем не базируется даже на простейших преобразованиях (движениях) с их групповыми свойствами..."[1)]

Ввиду того, что понятие группы геометрических преобразований требует от учеников сравнительно меньше усилий, чем общее понятие группы, весьма распространенным является мнение о том, чтобы в школьном курсе математики ограничиться рассмотрением только этим понятием группы.

Другая крайне противоположная тенденция в осуществлении теоретико-группового пути модернизации школьной математики сводится к попыткам об"единить в одно целое все предметы традиционной и современной математики, положив в осно-

---

1) И.Ф.Тесленко, Педагогические основы преподавания геометрии в средней школе. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора педагогических наук, Киев, 1970.

ву об"единения основные структуры (алгебраические и топологические). Наиболее яркими выразителями этой тенденции является группа французских математиков, выступавших под псевдонимом Н.Бурбаки, и бельгийский математик и психолог Жорж Папи. Его курс "Современной математики", написанный как пробный учебник для бельгийских школ, содержит группы геометрических преобразований, группы подстановок, группы подмножеств данного множества, числовые группы и общее понятие группы. Хотя этот учебник во многом весьма интересен, однако, изложение элементов теории в нем носит слишком формальный характер, и доступность этого весьма абстрактного материала на столь ранней ступени обучения (УI-й класс по системе советской школы) весьма сомнительна, да и вряд ли необходимо это делать.

В 1972г. на втором Международном конгрессе математиков (Англия) рассматривался вопрос о математическом образовании в Египте. Для школ АРЕ было создано в 1967 г. проект программы по математике (проект ЮНЕСКО), в котором элементы теории групп представлены весьма солидно. В результате экспериментальной проверки в 1972 г. этот проект был заменен более умеренным проектом, созданным Арабской Лигой образования, культуры и науки ("Арабское Юнеско"). Согласно этому проекту в Арабской республике Египет элементы теории групп вводятся в X и XI классах, т.е. на третьей стадии обучения в школах с естественным уклоном. Этот материал не концентрирован в одном разделе, а вклинивается в разных местах программы.

Краткое содержание:

Закон композиции, его свойства. Системы с одной операцией. Группы.

Структура целых чисел. Структура рациональных чисел. Коммутативные и мультипликативные числовые группы.

Группы геометрических преобразований. Матрицы. Группы матриц. Елементарная теория групп. Изоморфизм. Подгруппы. Аддитивная группа многочленов. Уравнения n-й степени.

В учебниках по математике для школ АРЕ этот материал изложен далеко неполно, к тому же без достаточной экспериментальной проверки. Изложение нуждается в значительной методической доработке. Это и послужило причиной избрания нами темы диссертационной работы, в которой мы поставили себе задачу исследовать:

I) В каком об"еме целесообразно ознакомить учащихся средних школ с элементами теории групп;

2) Отобрать и экспериментально проверить материал возможной реализации приведенной выше программы.

Этот тип школ АРЕ по уровню математического развития учащихся примерно соответствует школам Советского Союза с физико-математическим уклоном. В обычных общеобразовательных школах Советского Союза в условиях обязательного среднего образования для всех в таком об"еме элементы теории групп в настоящее время вводятся только на факультативных занятиях. Поэтому основная часть нашего эксперимента проходила в физико-математической школе - в условиях близких к условиям работы средних школ АРЕ.

Эксперимент состоял из двух частей:

I. Пропедевтика формирования понятия группы (6-8 классы школ № 78 и 38 г.Киева и Боярской средней школы № 4

Киево-Святошинского райнона).

2. Ознакомление учащихся с элементами теории групп (8-й класс Киевской республиканской физико-математической школы) по программе, рассчитанной на 20 часов и близкой к программе для школ АРЕ. Изучались следующие вопросы:

Понятие группы. Аксиомы группы. Простейшие примеры групп (числовые группы, группы сложения и умножения классов вычетов по данному модулю, группы функций с операцией суперпозиции функций, группы симметрии многоугольников и др.).

Группы подстановок. Понятие подгруппы. Группы симметрии многочленов, группы симметрии пространственных фигур.

Группы геометрических преобразований и группы матриц (линейные преобразования и матрицы, композиция линейных преобразований. Группы матриц 2x2).

Группы геометрических преобразований и ее подгруппы. Графы групп. Группа перемещений (изометрий). Группа подобия и гомотетии.

Изоморфизм групп, общее понятие изоморфизма и его свойства.

Свойства групп и подгрупп.

Проведению эксперимента предшествовало изучение научно-методической литературы по теме исследования, в частности, диссертационных работ Г.А.Гинзбурга, Ф.М.Рафиковой, И.Е.Побережника и др., посвященных вопросам формирования у учащихся некоторых представлений и понятий современной алгебры. В каждом из указанных исследований рассматриваются преимущественно отдельные вопросы формирования у учащихся понятия группы. Наиболее полно это представлено в работе Ф.М.Рафиковой, однако, ее изложение результатов исследований, носит в какой-то мере формальный характер и,конечно, не охватает многих вопросов, которые включает приведенная выше программа для школ АРЕ.

Нами изучен также положительный опыт осуществления в общеобразовательных школах Советского Союза идеи пропедевтики понятия группы, особенно группы геометрических преобразований в УI-УШ классах.

Диссертация состоит из введения, трех глав, общих выводов и библиографии.

Во введении раскрыта сущность проблемы исследования и аргументируется ее актуальность.

Первая глава диссертации - "Краткий анализ состояния вопроса о введении элементов теории групп в школьный курс математики" посвящена анализу новых программ школьного курса математики в разных странах с точки зрения целесообразности его модернизации путем введения элементов теории групп.

В первом параграфе этой главы рассматриваются некоторые вопросы происхождения теории групп и ее всевозрастающей роли в развитии всей математики, особенно в ее важнейшей части - алгебре, и других наук. Современная алгебра не ограничивается изучением свойств действий над числами, а рассматривает свойства операций над элементами все более общей природы. "Изучение операций, заданных в множествах произвольной природы, так можно охарактеризовать основную задачу алгебры" (А.Г.Курош).

Особую роль в современной алгебре играет теория групп, возникновение которой относится к концу ХУШ и началу XIX в.

Первоначально теория групп развивалась лишь как вспомогательный аппарат для изучения таких важных закономерностей реального мира, как симметрия, в частности, в связи с задачей о решении уравнений высших степеней в радикалах.
В связи с этой задачей впервые было замечено, что свойства симметрии корней уравнения играют существенную роль в решении вопроса о возможности выразить в общем виде корни уравнения:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

через его коэффициенты с помощью четырех арифметических действий, возведения в степень и извлечения корня.
Понадобилась работа нескольких поколений математиков, занявшая более ста лет: от Лагранжа, который стихийно применил группы подстановок для решения уравнений, через работы Руффини и Абеля, до замечательного французского математика Эвариста Галуа, которого справедливо считают творцом теории групп и современной алгебры. У 1832 г. Галуа показал, что с любым алгебраическим уравнением связана некоторая группа. Исследуя эту группу, можно сказать, является ли данное уравнение "задачей-атомом" или его можно свести к более простым уравнениям.

Независимо идея группы возникла в геометрии, когда в средине 19ст. на смену единой античной геометрии пришло множество других геометрий, и встал вопрос об их классификации. У 1872 г. немецкий математик Феликс Клейн в лекции, которая вошла в историю математики под названием "Эрлангенской программы", предложил в основу классификации геометрий положить понятие группы. Он исходил из того, что фактически разные геометрии отличаются друг от друга тем, что одна из них изучает свойства фигур, которые остаются неизменными при одних преобразованиях, образующих некоторую группу; другая - при других преобразованиях, образующих другую группу. Каждая геометрия является теорией инвариантов соответствующей группы преобразований. Оказалось, что все известные в то время геометрии (метрическая, проективная, афинная и др.) соотносятся с определенными группами проективной группы (т.е. являются частными случаями проективной геометрии).

Третьим источником возникновения понятия группы была теория чисел. Это направление связано с именами Эйлера, Гаусса, Кронекера и др.

В самостоятельную область математики теория групп оформилась в связи с выходом книги О.Ю.Шмидта "Абстрактная теория групп" (1916). Теория групп является одной из наиболее развитых областей алгебры, имеющей многочисленные применения в топологии, теории функций, квантовой механике, кристаллографии и т.д..

Известный русский кристаллограф Е.С.Федоров еще в 1890г., используя идею группы, решил очень важную задачу классификации правильных пространственных систем точек. Плоских федоровских групп симметрии существует всего 17, и они были найдены непосредственно, пространственных же федоровских групп симметрии - 230, и только теория групп позволила провести их исчерпывающую классификацию. Исторически это был первый пример, при том очень важный, применения теории групп в естествознании. Успех теории групп в физике элементарных частиц разительно выявился у 1964 г., когда лабораторным путем была открыта частица омега минус-бариона, существование которой было предсказано теоретически на основании теории групп. Причем ее масса с большой степенью точности совпала с теоретически предсказанной.

Эти исторические сведения в значительной мере могут быть с успехом использованы не только для возбуждения в учащихся живого интереса к изучению элементов теории групп, но и для формирования у них научного взгляда на математические абстракции, роль математических методов в развитии науки и техники, желания испробовать свои силы в математической науке.

Во втором параграфе первой главы дается краткий анализ истории и состояния вопроса о введении элементов теории групп в школьный курс математики. Здесь рассматриваются программы и учебно-методическая литература для школ АРЕ, СССР и других стран.

Первый вариант проекта новой программы по математике для школ Советского Союза содержал элементы теории групп. В частности, в курсе алгебры X класса предусматривалась тема "Группы, кольца, поля". Однако, широкое обсуждение данного проекта показало, что включение этих вопросов в программу недостаточно подготовлено широкой пропагандой идей современной математики. Начиная с 1967 г., в школах Советского Союза введены факультативные курсы, в частности в IX классе факультатив: "Группы геометрических преобразований". Уже накоплен некоторый опыт проведения этих занятий, созданы первые учебно-методические пособия[1].

---

1) И.Ф.Тесленко, Геометрические преобразования. Факультатив для IX кл., "Радянська школа", 1970 и др.

Советские ученые математики и методисты А.И.Маркушевич, Б.В.Гнеденко, И.Е.Шиманский, И.Ф.Тесленко и др. считают, что "такие обобщающие и об"единяющие понятия, как отношение, группа, поле, кольцо, линейное пространство могут появляться в школьном курсе не как исходные пункты, а как итоги изучения, подводимые по мере накопления фактов и закономерностей, дающих повод к соответствующим обобщениям"[1].

Сторонники другой точки зрения слишком увлеклись идеей модернизации и, не считаясь с психологическими особенностями учащихся среднего школьного возраста, предлагают начинать с учащимися 11-12-летнего возраста изучение общей формы структур порядка, алгебраических структур (группа, кольцо, поле), топологических структур и т.д.).

Так, в заключениях и рекомендациях Международного симпозиума, организованного Венгерским Комитетом ЮНЕСКО (Будапешт, 1962), в пункте "Программы" указывается: "Многочисленные эксперименты показали, что начиная с 12-летнего возраста (и даже раньше)... можно и желательно вводить понятия, необходимые для рационального об"яснения структуры векторного пространства (эквивалентности, трансляция векторов, понятие группы...)".

На этом симпозиуме обсуждался проект перспективной программы по математике (разработанной на конференции стран "Европейского Экономического Сообщества" при участии США). Согласно этому проекту понятие группы вводится в первом цикле (учащиеся 16-18 лет) в школах с естественным уклоном.

---

1) Маркушевич А.И. К вопросу о реформе школьного курса математики, ж. "Математика в школе", 1964, № 6.

Следует подчеркнуть, что на симпозиуме были высказаны также и серьезные замечания по поводу перегруженности программы и нереальности обсуждаемого проекта, в результате чего было принято предложение о его доработке, с учетом имеющегося опыта других стран.

В 1966г. в Англии был создан проект программы известный под названием SMP или (School Mathematics Project). Теория групп по этому проекту изучается на средней ступени (возраст учащихся 16-18лет). За введение понятия группы в школу выступают и авторы Мидлендского экспериментального проекта и соответствующего ему учебника[1], составленного в 1960 г. группой английских педагогов. Перестройка математического образования во Франции находится под влиянием идей Н.Бурбаки, Ж.Папи, о которых мы уже упоминали.

В США под руководством специальной комиссии по изучению преподавания математики - SMSY (Schul Mathematics Study Group) создано ряд проектов программ и учебников к ним, в которых широко представлены элементы теории групп. Эти учебники отличаются настолько высоким теоретическим уровнем и сложностью изложения, что подчас они оказываются трудными даже для учителей. Это послужило одной из причин того, что 66 видных американских математиков, среди которых Д.Пойа, А.Вейль и др., не разделяющие резкий отрыв новых программ от традиционных, подписали меморандум и разослали его математикам США и Канады - участникам SMSY. В этом меморандуме высказано мнение, которое, на наш взгляд, заслуживает пристального внимания: "... дух современной математики не может быть усвоен повто-

1) Математика, Мидлендский экспериментальный учебник, перевод с английского Г.Г.Масловой, "Просвещение", Москва, 1971.

рением ее терминологии. В соответствии с нашими принципами мы желаем, чтобы введению новых терминов и понятий предшествовала достаточная конкретная подготовка и последовали настоящие приложения, предлагались учащимся настоящие задачи, а не только материалы незначительные и без всякого смысла: надо мотивировать и применять новое понятие, если хотят убедить разумных молодых людей, что стоит уделить ему внимание"[1].

В 1966 г. на Международном конгрессе математиков профессор З.Крыговская сделала сообщение об успешном проведении эксперимента по изучению с учащимися 14-15 лет группы изометрий. Содержание этого экспериментального материала соответствует § 26 учебного пособия автора "Геометрия"[2]. Значительный интерес представляют экспериментальные работы З.П.Дьенеша, Г.Шоке, Дьедонне, Феликс Люсьен, а также опыт модернизации математики в школах Скандинавских стран (Нордничного комитета). На конференции экспертов методики преподавания математики в средних школах Африки (18 стран) в 1970 г. одобрена программа, в которой особое внимание уделено понятию группы.

В немецких учебниках для старших классов (ФРГ), действующих еще в 50-х годах, уже содержалось понятие о группе геометрических преобразований. Однако, в новые перспективные программы элементы теории групп явно не вошли. Анализ состояния вопроса о введении элементов теории групп в школьный курс математики позволяет заключить, что в настоящее время еще нет единого мнения не только по вопросу методики, но и по вопросу места и содержания этого материала в школьном курсе. Однако, имеющийся уже первый опыт по изучению элемен-

1) ж."Математика в школе", 1964, № 4, М.,"Просвещение", стр.92.
2) З.Крыговская, Геометрия. Основные свойства плоскости. Перевод с польского. Москва, Просвещение, 1971.

тов теории групп в школе дает положительные результаты в повышении математического развития учащихся, в формировании у учащихся взгляда на математику, не как на собрание отдельных разобщенных понятий, формул и теорем, а как на единую научную систему, в которой факты связаны между собой общими идеями.

При этом, как и при изучении многих математических вопросов, мы считаем наиболее приемлемым концентрическое изучение элементов теории групп:

Первый концентр - пропедевтический, соответствует возрасту учащихся 12-15 лет (в школах Советского Союза - 6-8 классы, в школах АРЕ - подготовительная стадия - 6-9 кл.).

Второй концентр - основной, соответствует старшим классам 9-10 в Советском Союзе, а у физико-математических школах 8-10 классы, в школах АРЕ - 10-12 классы.

Такой подход определил содержание последующих глав по результатам нашего исследования.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам "Пропедевтики элементов теории групп в средней школе".

Изучение литературы по вопросу введения элементов теории групп в школах различных стран, подробное ознакомление с опытом работы по новым программам в школах Советского Союза, а также проведенные нами экспериментальные исследования дают основание сделать вывод о том, что успешное ознакомление учащихся с некоторыми элементами теории групп возможно при всестороннем учете трех критериев: психологического, дидактического и научного.

В первом параграфе этой главы рассматриваются основные учебные цели пропедевтики элементов теории групп и ее содержание. Для выяснения этих вопросов мы проанализировали различные, наиболее распространенные, определения понятия группы (5 определений) с точки зрения той подготовки, которую должен получить ученик, чтобы его можно было подвести к общему определению группы, которое для большей наглядности мы в своем эксперименте записывали сокращенно с применением символов математической логики.

Во втором параграфе рассматриваются понятия о множествах, знания которых необходимо актуализировать при ознакомлении учащихся с элементами теории групп. Поскольку группы рассматриваются конечные и бесконечные, в процессе пропедевтики понятия группы учащиеся должны получить четкое понятие конечного и бесконечного множества. С этой целью после накопления у них достаточного опыта оперирования с различными множествами полезно предлагать соответствующие упражнения. Способствует формированию в учащихся более глубокого понимания бесконечности и бесконечного множества представление о плотности множества рациональных чисел, о непрерывности множества действительных чисел. Усвоение этих понятий является хорошей пропедевтикой для понимания учащимися идеи изоморфизма.

Приведенная нами система упражнений преследует двойную цель: во-первых, предупредить ошибки учеников в смешивании понятия бесконечного с понятием очень большого, конечного с обозримым; во-вторых, понимание учениками сущности самого термина "множество", как "совокупность" об"ектов, их свойств, отношений между ними и т.д., об"единенных по какому-то признаку и рассматриваемых как е д и н о е ц е л о е. Указание этого признака не должно сопровождаться собирательным словом-квантором - "все", это само собой подразумевается по соглашению. Если мы, например, говорим "множество осевых симметрий плоскости", то имеем в виду в с е (всевозможные) осевые симметрии плоскости и только их. К сожалению, это условие в учебно-методической литературе часто не соблюдается, что на практике приводит к различным недоразумениям.

Понятие подгруппы базируется на понимании термина "подмножество" и предполагает хорошее знакомство учащихся с понятиями пересечения и об"единения множеств, а также умение учащихся определять количество всех подмножеств данного множества. Все эти вопросы выясняются в данном параграфе на целесообразно подобранных примерах. Здесь же дан критический анализ неудачных примеров, встречающихся в учебно-методической литературе.

Обычно понятия пересечения и об"единения множеств вводятся на арифметическом материале. Эти понятия хорошо об"яснить одновременно на примерах решения уравнений и неравенств, а также их систем. При этом удобно показать учащимся целесообразность замены союзов "или","и" логическими союзами соответственно "$\vee$", "$\wedge$", имеющими строго однозначный смысл в отличие от союзов "или", "и".

В процессе решения примеров и задач с помощью диаграмм Эйлера-Венна учащиеся с интересом устанавливают и проверяют основные свойства операций над множествами и с помощью таблицы истинности операций над высказываниями сопоставляют их с соответствующими законами операций над числами. Здесь же рассматривается методика ознакомления учащихся с понятием декартового произведения множеств, на котором основано понятие закона композиции (бинарной операции), определенного на данном множестве. В неявном виде понятие декартового произведения в школах Советского Союза вводится в экспериментальном учебнике для I класса (под редакцией академика А.И.Маркушевича) и не вызывает особых трудностей в учащихся.

В § 3 данной главы разработана методика формирования в учащихся понятия бинарной алгебраической операции. Понятие группы учащимися усваивается сравнительно легко, если они будут хорошо владеть общим понятием бинарной алгебраической операции, или как часто называют ее просто алгебраической операцией, или же законом композиции.

"Алгебраической операцией, определенной на множестве М, называется закон, ставящий в соответствие любой упорядоченной паре элементов (а,в) этого множества некоторый единственный третий элемент с из того же множества М". К этому определению подводим учащихся прежде всего в процессе рассмотрения известных уже им обычных операций сложения и умножения на том или ином числовом множестве.

Так, еще в IУ классе при изучении всех действий над натуральными числами, подчеркиваем, что действия сложения и умножения в множестве натуральных чисел всегда выполняются, и притом однозначно, т.е. любой паре чисел $a \in N$ и $b \in N$ соответствует вполне определенное единственное число $a+b = c \in N$, а также $a \cdot b = d \in N$, следовательно, сложение и умножение на множестве натуральных чисел являются алгебраическими операциями. Действия вычитания и деления на множестве натуральных чисел не всегда выполнимы, а потому не являются алгебраическими операциями на этом множестве. Для активизации мышления учащихся при каждом новом расширении и обобщении понятия числа целесообразно предлагать им примеры на определение истинности или ложности высказываний, утверждающих, является или не является та или иная операция алгебраической на данном множестве. Учащиеся должны не только знать, что операция сложения и умножения коммутативны на любом числовом множестве, но и уметь вкладывать в это несколько иной смысл, а именно: Каждая подстановка, т.е. преобразование множества $M = \{a, b\}$ переводит двучлен $a+b$ или одночлен $a \cdot b$ сам в себя.

При обобщении понятия действия деления, т.е. при рассмотрении деления с остатком и возможности представления любого целого числа a в виде: $a = km + r$, где $0 \leq r \leq m$,

а позже при изучении делимости чисел целесообразно рассмотреть с учащимися вопрос о разбиении множества целых чисел на классы эквивалентности – классы вычетов по данному модулю m, где $(m \in N) \wedge (m > 1)$, а затем операции сложения, умножения и вычитания классов вычетов по данному модулю. Составляя таблицы Кэли для каждой из этих, учащиеся убеждаются, какая их них будет алгебраической операцией на множестве классов вычетов по данному модулю. В качестве наглядного пособия здесь используем модель часового циферблата с числом делений по кругу соответствующим модулю. На факультативных занятиях или в более сильных классах можно использовать и свойства конгруенций (предварительно обосновав их).

Параллельно с изучением в алгебре операций над числовыми множествами, а также одночленами и многочленами идет изучение геометрических преобразований. Уже в V–VI кл. школ Советского Союза ученики знакомятся с поворотом фигуры вокруг точки.

Учащиеся с интересом, с помощью цветных подвижных картонных моделей квадрата и правильного треугольника (демонстрационных и типа дидактического материала) устанавливают, что сложение (произведение) поворотов правильных многоугольников на множестве углов самосовмещения этих фигур является алгебраической операцией. Составление таблиц Кэли для случая треугольника, квадрата, прямоугольника, параллелограмма, равнобедренной трапеции и т.д. является хорошим видом упражнений в формировании понятия алгебраической операции на конечном множестве. Сопоставление этих таблиц с таблицами для сложения или умножения на конечных числовых множествах $\{1,-1\}$, $\{0,1\}$, $\{-1,1\}$ и т.п. развивает мышление учащихся, формирует приемы умственной деятельности, анализ, сравнение, сопоставление и является хорошей пропедевтикой для формирования понятия изоморфизма.

После рассмотрения таких геометрических преобразований как центральная и осевая симметрии, параллельный перенос, операции сложения векторов, мы ввели в 7 кл. общее определение композиции произвольных перемещений. Учащиеся с интересом, пользуясь подвижными моделями, решали соответствующие упражнения по своему учебнику, а затем несколько усложненные упражнения (из учебника 8 кл. и составленные нами) на нахождение композиции двух перемещений.

Особое внимание во всех этих и предыдущих упражнениях по арифметике и алгебре мы обращали на определение (нахождение) учащимися нейтрального (единичного) элемента, противоположного данному (обратного, симметричного) и на установление свойств данной операции (ассоциативность, коммутативность).

При рассмотрении преобразования подобия и, в частности, гомотетии учащиеся устанавливали, в каком случае композиции этих преобразований будут представлять собой алгебраическую операцию, а в каком случае нет. При этом мы стремились каждый раз поставить ученика в положение исследователя. Так, например, после того, как учащиеся установили, что композиция двух гомотетий с общим центром является коммутативной и ассоциативной алгебраической операцией на множестве гомотетий с данным центром, мы предложили вопрос: - "Будет ли композиция любых гомотетий с разными центрами гомотетий?"

Все учащиеся, не задумываясь, считали, что на этот вопрос ответ должен быть положительным, с некоторым недоверием восприняли сообщение учителя, что они ошибаются. Тогда учитель предложил им самим опровергнуть себя, придумав контрпример своему утверждению. Примеры рисунков были разные, что, как всегда в подобных случаях, принесло удовлетворение учащимся.

ГЛАВА Ш - "Методика ознакомления учащихся средней школы с элементами теории групп" начинается параграфом, посвященным систематизации и углублению понятия алгебраической операции с использованием проблемного подхода и других методов активизации мышления учащихся.

Так, например, рассмотрев несколько примеров алгебраических и неалгебраических операций на числовых множествах, можно поставить проблему: "Ученик, чтобы застеклить разбитую шибку классного окна, замерил и дома вырезал стекло (прямоугольник). Но при первых попытках стекло не укладывалось в рамку. Сколько таких попыток (проб) надо сделать, чтобы с уверенностью сказать, можно ли, не подрезая стекла, застеклить им окно?"

Пользуясь соответственными моделями рамки и стекла, учащиеся с интересом находят, что таких проб всего 4 и устанавливают связь между композицией двух осевых симметрий относительно двух взаимноперпендикулярных осей и поворотом на 180^0 вокруг центра - центральной симметрией.

Вспомнив понятие тождественного преобразования и обозначив его через   - для вращения на о вокруг центра и через P_0 при осевой симметрии, учащиеся составляют параллельно таблицы

<u>алгебраическая операция</u>

	α_0	α_1
α_0	α_0	α_1
α_1	α_1	α_0

<u>не алгебраическая операция</u>

	P_0	P_1	P_2
P_0	P_0	P_1	P_2
P_1	P_1	P_0	α_1
P_2	P_2	α_2	P_0

Затем учащимся ставится новый вопрос - проблема:

А будет ли алгебраической операцией композиция преобразований центральной и осевой симметрии на множестве самосовмещений прямоугольника? Об"единив эти две таблицы в одну, дополнив и заменив P_0 на   ., ученики получают таблицу Кэли:

– I-я операция

2-я операция

	α_0	α_1	P_1	P_2
α_0	α_0	α_1	P_1	P_2
α_1	α_1	α_0	P_2	P_1
P_1	P_1	P_2	α_0	α_1
P_2	P_2	P_1	α_1	α_0

По таблице видно, что эта операция коммутативна (таблица симметрична относительно главной диагонали). Ассоциативность доказывают самостоятельно.

В результате такой работы подводим учащихся к несколько иному определению алгебраической операции через понятие декартового произведения: "Алгебраическая операция - это закон, по которому каждому элементу из M^2 ставится в соответствие один и только один элемент из М" или: "Алгебраическая операция - это функция f, определенная на множестве M^2 и принимающая значения из М: $M^2 \xrightarrow{f} M$.

Формулируем и записываем в виде определения (общего вида) свойства алгебраической операции: замкнутости множества по отношению к данной операции, коммутативности, ассоциативности. После чего даем определения нейтрального и обратного элементов. Доказываются теоремы о единственности нейтрального элемента и обратного элемента к каждому элементу. Учащиеся сами приводят примеры, иллюстрирующие все эти свойства.

После такой пропедевтической работы, как показал эксперимент, можно подвести учащихся к общему определению группы. Учитель подчеркивает, что среди множеств с определенной на них алгебраической операцией, особый интерес представляют множества в том случае, когда эта операция ассоциативна, имеется нейтральный элемент и к каждому элементу обратный элемент. Такое множество с определенной в нем алгебраической операцией называется группой.

Предлагаем учащимся сформулировать определение группы. Обычно учащиеся дают определение в форме импликации: $A \to B$, подобные тем определениям, с которыми встречаемся в литературе. Например: "Множество с определенной на нем алгебраической операцией называется группой, если эта операция ассоциативна, имеется нейтральный элемент и к каждому элементу обратный элемент".

При такой формулировке определений в виде импликации не видно их логической структуры, а это может привести к различным недоразумениям: с одной стороны, при A ложном, вопрос об истинности B остается открытым по определению импликации, с другой стороны, B должно быть ложным вместе с A по самому определению. С целью уточнения математического языка следует избегать определений в такой форме. Поэтому приведенное определение мы давали в несколько видоизмененной форме: в виде равносильности $A \Longleftrightarrow B$:

"Группой называется множество с определенной на нем алгебраической операцией, обладающей свойством ассоциативности, имеющей нейтральный элемент и обратный элемент к каждому элементу данного множества".

Это определение символически записывали, выделяя все групповые аксиомы:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \forall a, \text{в} \in \mathcal{G}\ \ a \circ \text{в} = c \\ \qquad\qquad c \in \mathcal{G} \text{ и } c - \text{единств.} \\ 2.\ \forall a, \text{в}, c \in \mathcal{G}\ \ (a \circ \text{в}) \circ c = a \circ (\text{в} \circ c) \\ 3.\ \exists e \in \mathcal{G} \text{ такое, что } a \circ e = e \circ a = a \\ 4.\ \forall a \in \mathcal{G}\ \exists a^{-1} \text{ такое, что } a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (\mathcal{G}, \circ)\text{-группа.}$$

Учитель сообщает, что <u>коммутативной</u> или <u>абелевой</u> группой называется группа, для которой кроме этих четырех условий выполняется еще условие коммутативности операции: $\forall a, \text{в} \in \mathcal{G}\ a \circ \text{в} = \text{в} \circ a$.

Чтобы учащиеся представили себе, почему именно такие множества с определенной на них операцией представляют особый интерес, целесообразно после определения группы и нескольких приведенных учащимися примеров групп ознакомить их с историей возникновения теории групп, ее широким применением в кристаллографии, физике и т.д., с историей трагических, но прекрасных страниц из жизни творца теории групп Эвариста Галуа, об успехах кристаллографа Федорова. Конечно, все это в общих чертах и более сокращенно, чем изложено в первой главе диссертации, но более ярко и красочно.

Опыт подтвердил, что первые уроки по введению элементов теории групп проходят наиболее интересно и содержательно, если при этом рассматриваются группы симметрии многоугольников, с которыми учащиеся фактически знакомы, только не называли их группами. Это позволяет обеспечить высокую активность учащихся, используя при этом подвижные цветные модели, таблицы Кэли, которые составляли при изучении понятия алгебраической операции. В процессе этой работы учащиеся подмечают, что группа симметрии правильного треугольника - группа 6-го порядка - отображается на группу 2-го порядка. На такую же группу отображается группа симметрии 8-го порядка - группа симметрии квадрата. Эти группы 2-го порядка имеют одинаковую структуру с группой второго порядка $(M, \times)$, где $M = \{-1, -1\}$, а $\times$ - знак обычного умножения. Учащиеся устанавливают, что отображение одного из этих множеств на другое является обратимым и что композиции соответствующих элементов обеих множеств находятся между собой в таком же отношении.

Выяснение этих вопросов преследует три цели:

1. Развитие наблюдательности и способности учащихся к умовыводам.

2. Подготовку к пониманию идеи изоморфных групп и изоморфизма.

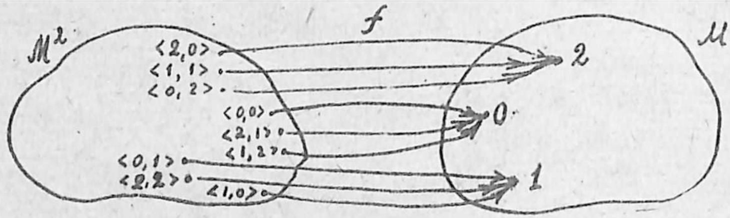
3. Подготовку к выяснению с учащимися того факта, что решение уравнения может быть сведено к решению более простых уравнений, что проявляется в структуре таблицы его группы: она обязательно содержит структуры группы низшего порядка.

С целью активизации мышления учащихся полезно предлагать им упражнения на записывание (в две колонки) примеров числовых групп (конечных и бесконечных) по отношению к обычной операции сложения (аддитивных групп) и умножения (мультипликативных групп), ориентируя при этом не только на стандартные подмножества универсальных множеств, но и другие, например, типа $a+b\sqrt{c}$ и т.п.

Составляя таблицы сложения, умножения и вычитания классов вычетов по данному модулю, учащиеся убеждаются, что каждое множество классов вычетов по данному модулю относительно операции сложения является группой и не является группой по отношению к вычитанию, так как не выполняется свойство ассоциативности. По отношению к операции умножения каждое из этих множеств также не является группой, так как число 0 не имеет обратного элемента. Если нуль исключить, то множество классов вычетов по отношению к операции умножения будет группой только в том случае, когда модуль число простое.

Работа с таблицами даёт возможность углубить понятие алгебраической операции как функции, отображающей одно множество на другое. Например, после составления таблицы Кэли сложения классов вычетов по модулю 3 предлагаем учащимся представить схематически необратимость отображения множества M^2 на множество M, пользуясь этой таблицей, учащиеся составляют схему:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1



Значительный интерес вызывает в учащихся рассмотрение групп функций с операцией суперпозиции функций, если при этом показать учащимся примеры рационального решения уравнений или неравенств, содержащих суперпозиции функций.

Методика формирования в учащихся понятия подгруппы раскрывается в третьем параграфе этой главы, посвященном рассмотрению групп подстановок.

Начав с рассмотрения подстановок трех элементов множества $M=\{\triangle, \circ, \square\}$, мы подвели учащихся к выводу, что число и виды этих подстановок не зависят от характера элементов множества, которые могут быть произвольными: Х,У,Z, или I,2,3, или А,В,С, - вершины треугольника и т.д.

Составив таблицу Кэли композиции подстановок на множестве шести подстановок из трех произвольных элементов, учащиеся приходят к заключению, что это множество является группой.

	e	a	в	u	v	w
e	e	a	в	u	v	w
a	a	в	e	w	u	v
в	в	e	a	v	w	u
u	u	v	w	e	a	в
v	v	w	u	в	e	a
w	w	u	v	a	в	e

Если в таблице выделить циклические и нециклические подстановки разным цветом, легко заметить, что эта группа 6-го порядка также отображается на группу второго порядка такой же структуры, как имели раньше:

	К	Ч
К	К	Ч
Ч	Ч	К

	Ц	Н
Ц	Ц	Н
Н	Н	Ц

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

После введения понятия подгруппы учащиеся подмечают, что группа подстановок 6-го порядка имеет 6 подгрупп. Такую же структуру имеет группа симметрии правильного треугольника, ведь самосовмещения его вершин можно рассматривать с помощью 6-ти возможных подстановок, о чем учащиеся делают вывод на основании таблицы с использованием графов подстановок.

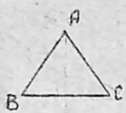
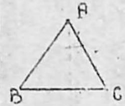
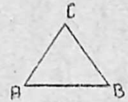
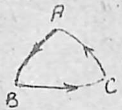
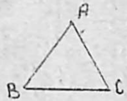
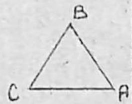
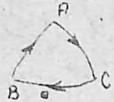
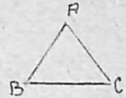
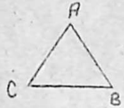
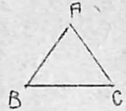
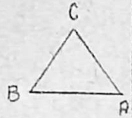
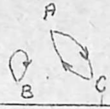
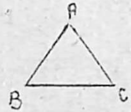
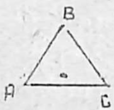
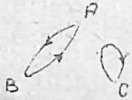
Вид движения	Подстановка	Символ	I-е положение	2-е положение	Граф
Нет движения	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$	α_0			
Поворот против часовой стрелки на 120^0	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$	α_1			
Поворот против часовой стрелки на 240^0	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$	α_2			
Верхняя вершина на месте, а две другие меняются местами	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$	P_1			
Левая вершина на месте, а две другие меняются местами.	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$	P_2			
Правая вершина на месте, а две другие меняются местами.	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$	P_3			

Таблица Кэли

	α_0	α_1	α_2	P_1	P_2	P_3
α_0	α_0	α_1	α_2	P_1	P_2	P_3
α_1	α_1	α_2	α_0	P_3	P_1	P_2
α_2	α_2	α_0	α_1	P_2	P_3	P_1
P_1	P_1	P_2	P_3	α_0	α_1	α_2
P_2	P_2	P_3	P_1	α_2	α_0	α_1
P_3	P_3	P_1	P_2	α_1	α_2	α_0

В четвертом параграфе рассматривается группа симметрии многочленов в тесной взаимосвязи с понятием циклической группы Галуа. Сначала рассматриваются примеры уравнений, для которых учащиеся находят корни, а затем составляют группу Галуа данного уравнения. На основании этого учитель подчеркивает, что оказывается возможным, хотя и очень сложным путем, определить группу Галуа уравнения, не решая самого уравнения, и этим самим определить, разрешимо ли это уравнение и как искать путь к его решению. В этом и заключается значение групп Галуа.

Рассматриваются циклические и симметричные многочлены трех переменных и замена несимметричных многочленов симметричными относительно новых переменных. Решая системы уравнений и неравенств с помощью этого приема, учащиеся сначала определяют порядок группы симметрии системы, а затем, решив ее, убеждаются, что такую группу симметрии имеет множество ее решений, поэтому, зная одно из них, можно записать другое (или другие).

Например, система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$ имеет группу симметрии 4-го порядка $\mathcal{G} = \{e, a, в, c\}$. Путем 4-х подстановок на множестве $x, -x, y, -y$ система переходит сама в себя. Такую же группу симметрии имеет и множество ее решений. Зная одно из них $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ (его легко найти устно), ученики записывают остальные три:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}.$$

При обычном же способе решения учащиеся, получив конъюнкцию двух систем, часто в результате теряют по одному решению в каждой из систем.

Группы симметрии многочленов рассматриваются в тесной взаимосвязи с группами симметрий многоугольников (ромба, прямоугольника и др.).

Отдельным параграфом выделено группы симметрий пространственных фигур, которые рассматриваются подробно на примерах правильного тетраэдра и куба. Последний пример связывается с задачей олимпиадного характера о раскраске куба.

Группы геометрических преобразований мы начинали с рассмотрения линейных преобразований на плоскости и соответствующих им матриц. Операции над матрицами вводили сначала на конкретных примерах, после чего учащиеся сами делали общие выводы. При этом мы добивались понимания учащимися связи между преобразованиями с помощью матриц и с помощью подстановок. В результате ряда упражнений после введения понятий обратной матрицы и единичной учащиеся устанавливают, что множество квадратных матриц 2x2, для которых определитель $\Delta \neq 0$, образует группу относительно операции умножения.

Рассматривая линейные преобразования единичного квадрата, мы поставили учащимся проблему: "Какое преобразование надо применить к единичному квадрату, чтобы площадь его образа была больше площади квадрата в 2 раза? в 5 раз? Осталась неизменной? Была нулевой?

На основании целесообразно подобранных нами примеров учащиеся высказывают гипотезу, что преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ увеличивает площадь фигуры в Δ раз. Если $\Delta = 0$, получаем фигуру нулевой площади, при $\Delta = 1$ площадь не изменяется, т.е. является инвариантом преобразования. Ставим теперь перед учениками новую проблему: какой вид должны иметь матрицы преобразований, при которых инвариантом является расстояние?

Поскольку при перемещении сохраняются не только расстояния, но и площади, учащиеся делают вывод, что $\Delta = \pm 1$, т.е. $ad - bc = \pm 1$.

Исходя из этого, и рассматриваются все случаи изометрии: вращение вокруг точки и, в частности, центральная симметрия, симметрия относительно прямой. и др. Параллельно на конкретных примерах выясняется, где применяется тот или иной вид симметрии при изучении традиционных вопросов математики – построение графиков функций обратных данной, графиков $y=-f(x)$ по данному графику $y=f(x)$, графика зависимости $|y|=f(x)$ и т.д. Затем рассматриваем общее понятие группы геометрических преобразований и ее подгруппы, для чего доказываем теорему: "Множество геометрических преобразований с операцией умножения на нем является группой". На ряде упражнений мы помогаем ученикам проявить самостоятельность у выявлении возможных подгрупп группы геометрических преобразований: перемещения (изометрия), подобие, гомотетия как подгруппа группы подобия, а значит и общей группы геометрических преобразований. Здесь же приводятся примеры более сложных упражнений.

Целесообразно поставить учащимся проблемный вопрос:

– Выполнение каких групповых аксиом надо проверить, чтобы установить, что множество изометрий (перемещений) плоскости представляет собой подгруппу группы геометрических преобразований?

Обычно учащиеся считают, что надо проверить выполнение всех аксиом. Даже в научно-методической литературе нет четкости в этом вопросе. Так,в диссертационной работе Ф.М.Рафиковой считается необязательной проверка только свойства ассоциативности для каждого отдельного вида геометрических преобразований, поскольку это свойство следует из доказательства его в общем виде для любых геометрических преобразований.

На самом же деле, достаточно проверить выполнимость только условия замкнутости данного множества относительно операции умножения, так как из этого и доказанной в общем виде выполнимости аксиом на множестве геометрических преобразований следует их выполнимость и на данном множестве.

В процессе решения упражнений учащиеся убеждаются, что множество осевых симметрий с разными осями не является замкнутым относительно умножения; тоже самое множество вращений с разными центрами; множество центральных симметрий с разными центрами, гомотетий с разными центрами.

Понятие изоморфных групп было подготовлено к восприятию учащимися в процессе рассмотрения различных групп и их подгрупп, поэтому введение этого понятия в общем виде не вызвало особых затруднений.

Значительный интерес вызывают в учащихся упражнения на сведение таблиц Кэли двух изоморфных групп в одну таблицу (цветную).

ж	а	в	с	d
а	а	в	с	d
в	в	с	d	а
с	с	d	а	в
d	d	а	в	с

+	0	I	2	3
0	0	I	2	3
I	I	2	3	0
2	2	3	0	I
3	3	0	I	2

+ / ж	0 / a	I / в	2 / c	3 / d
0 / a	0 / a	I / в	2 / c	3 / d
I / в	I / в	2 / c	3 / d	0 / a
2 / c	2 / c	3 / d	0 / a	I / в
3 / d	3 / d	0 / a	I / в	2 / c

В заключение мы рассмотрели некоторые теоремы, выражающие свойства групп, в частности изоморфных групп. В старших классах школ АРЕ такие теоремы вполне доступны учащимся и могут быть рассмотрены, хотя и не обязательно требовать от учащихся их доказательства.

Приведенные в диссертации таблицы различных изученных групп оказывают значительную помощь в обобщении и систематизации полученных знаний учащихся.

Результаты проведенного эксперимента показали, что:

I) учащиеся с интересом воспринимают и усваивают данный материал. Так, несмотря на то, что для учеников 8 кл. это был дополнительный факультативный курс, сверх учебного плана, ребята с энтузиазмом отнеслись к его изучению, активно и осознанно в полном составе класса усваивали основные идеи этого курса.

2) Введение элементов теории групп в школьный курс математики позволяет в значительной мере обеспечить связь в преподавании геометрии и алгебры, а также об"единить одной идеей ряд казалось бы разобщенных разделов школьной математики; предо-

ставляет возможность, если не раскрыть, то хотя бы проиллюстрировать учащимся свойственный современной математике абстрактный подход к развитию теории, показать, что именно благодаря этой абстрактности математические теории, в частности теория групп, находят широкое применение при об"яснении свойств самых различных пространств (в топологии, теории функции, квантовой механики, кристаллографии и др.).

Особенно показательными являются результаты проведенной нами контрольной работы и домашних рефератов учащихся 8 класса. В рефератах многие учащиеся не ограничивались материалом, который мы излагали на занятиях, а использовали еще рекомендованную литературу, приводили собственные примеры групп и их подгрупп, исследовали их свойства.

Все это дает нам основание полагать, что выполненное нами исследование будет полезным, особенно, при проведении реформы математического образования в школах АРЕ.

Материалы диссертации обсуждались и получили одобрение:

а) на кафедре математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (1971-1974гг.).

б) На Республиканском научно-методическом семинаре преподавателей математики вузов (1973).

в) На отчетно-научных конференциях преподавателей Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (1974г.).

г) На отделе методики математики научно-исследовательского института педагогики УССР (1974).

Основные результаты исследования отражены в следующих, принятых к печати, статьях автора:

1. Модернизация математического образования в средних школах АРЕ, в сб. "Методика викладання математики", вып. 10 "Радянська школа", К., 1974 г.

2. Активизация мышления учащихся при изучении геометрических преобразований, ж. "Радянська школа", К., 1974.

подписано к печати 7.8.74 г. Объем 2,25 п. л. Формат 60x84/16
Тираж 200, Зак. 4-3402

Киевская книжная типография научной книги, Киев, Репина, 4.