ДЕЯКІ ПРИЙОМИ ПОБУДОВИ ПРОБЛЕМНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЧНІВ – ЧЛЕНІВ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК

М.П. Пихтар

учитель математики Славутицького ліцею,

викладач Славутицької філії НТУУ «КПІ

У статті розглянуто основні прийоми створення дослідницьких та творчих задач для учнів, що працюють в структурі Малої академії наук.

В статье рассматриваются основные приёмы создания исследовательских и творческих заданий для учеников, которые работают в труктуре Малой академии наук.

In this article we consider the basic techniques for research and a creative problem developing for students working in the structure of the Small Academy of Sciences.

Педагогічний процес у МАН має свої особливості, які відрізняють його від навчання в школі. Перш за все це форми проведення занять, бо навчальні програми гуртків мають охоплювати такі проблемні питання (з урахуванням індивідуальних інтересів та творчих можливостей конкретних дітей), поетапне розв'язання яких ефективно впливало б на формування математичних здібностей учнів. Постає питання: як побудувати для учнів дослідницькі задачі, при поступовому розв'язанні яких відбувалося б збагачення математичною теорією та народжувалися нові методи?. Здавалося б, є проста відповідь на таке запитання – взяти готові відкриті математичні проблеми і гіпотези, які існують майже в усіх розділах елементарної математики (такого роду задачі мають знати учні – члени та кандидати МАН). Але на таке вирішення питання краще відповісти словами П.Л.Капіци: «Мне думается, что при выработке методов преподавания решение задач – проблем … может быть широко использовано…. Перед тем, как решать крупную научную проблему, ученым надо уметь ее решать в малых формах» [1].

Виходячи з досвіду роботи, виділимо положення щодо дослідницької задачі та її побудови:

1) побудувати дослідницьку задачу для учня важче, ніж для студента;
2) дослідження учня має починатися або з підручника, або з заняття;
3) формулювання дослідницької задачі не повинно вимагати від учня значної додаткової підготовки;
4) матеріал, необхідний для початкової роботи над проблемою є цілком доступним для учнів;
5) правильна постановка задачі і керування нею дозволяє учню досягти бажаних результатів.

Дослідницькі задачі або завдання мають бути одночасно зрозумілими, цікавими і доступними, якщо це можливо, для розв'язання учневі та математично змістовними. Найкращою задачею або найкращим завданням для дослідження є та проблема, яка чітко і просто формулюється, але не просто розв'язується. При цьому задача може бути вже розв'язаною в науці, тоді учень про це має знати і на це зробити акцент при виступі та запропонувати свій шлях розв'язання та порівняти їх. Дослідницькі теми та нові постановки задач в основному з'являються під час участі в роботі одного з спеціальних курсів гуртка при МАН. Іноді вони виникають з природного бажання більш глибоко розібратися в темах, які вивчаються безпосередньо на уроках. *Найкращими темами для учня в нашому досвіді (в плані реалізації дослідження) є ті теми, які виникли несподівано з деякої задачі на самому занятті гуртка або на уроці, бо вони пронизані атмосферою допитливості про невідоме.*

Ось чому, ідучи на заняття гуртка викладач має мати в арсеналі задачі проблемного характеру з кожної запланованої теми. Такі задачі легко будуються завдяки:

1. *Додатковим питанням*.

Задача 1. Назвемо натуральне число n зручним, якщо будь-яке менше за n натуральне число є сумою одного чи кількох попарно різних дільників числа n. Наприклад, дільниками числа 6 є числа: 1, 2, 3, 6. Оскільки $1=1$, $2=2$, $3=3$, $4=3+1$, $5=2+3$, то число 6 є зручним. Знайдіть ще хоча б одне зручне число.

Цю задачу можна перетворити в пошуково-дослідницьку завдяки таким питанням:

1) Чи правильно, що зручних натуральних чисел безліч?

2) Якими властивостями володіють зручні числа?

2. *Задачам – «двійникам»*.

Враховуючи різну підготовку членів гуртка, керівник не повинен допускати, щоб учні, які розв'язали запропоновану задачу швидше, заважали іншим. Тому бажано, щоб вчитель мав одне або декілька додаткових питань або задач – «двійників», які він може запропонувати учням, що розв'язали задачу раніше інших. Питання такого роду для гуртковців МАН можуть і мають носити характер додаткового дослідження.

Розглянемо приклади задач – «двійників», взятих з різних областей математики.

Задача 2. Для непорожньої множини $M \subset Q$ виконуються умови:

1) Якщо $a \in M$, то $a+b \in M$ і $ab \in M$;

2) Якщо $r \in Q$, то є вірним рівно одне із трьох тверджень: $r \in M$, $(-r) \in M$, $r = 0$. Чи містить множина M в собі множину натуральних чисел?

Додаткове питання: «Чи співпадає множина M з множиною додатних раціональних чисел?»

Розв'язання. З умови 2) випливає, що або $1 \in M$, або $(-1) \in M$. Але $(-1) \in M$, бо в силу умови 1) мали б $(-1)\cdot(-1) = 1 \in M$, що суперечить умові 2). Отже, $1 \in M$. Тепер з умови 1) маємо: $1+1 \in M$; $2+1 \in M$ і т. д, тобто $M \supset N$.

Якщо тепер $(-\frac{1}{m}) \in M$ (де $M \in N$), то згідно умові 1), $\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot m = -1 \in M$, що не можливо, а тому $\left(-\frac{1}{m}\right) \notin M$. Отже $\frac{1}{m} \in M$ $\forall M \in N$. Далі з умови 1) слідує, що $n\cdot\frac{1}{m} = \frac{n}{m} \in M$ $\forall$ $n, m \in N$. Значить $(-\frac{n}{m}) \notin M$ ($m, n \in N$) і крім того, з умови 2) маємо $0 \notin M$. Таким чином, M співпадає з Q^+.

Задача 3. Дане натуральне число $n = 500$ розкладається на суму декількох послідовних цілих чисел. Знайти кількість усіх таких розкладів.

Для більш підготовлених учнів можна запропонувати задачу – «двійник» для:

а) $n = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3}$, де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - натуральні числа. Які з цих розкладів містять тільки натуральні числа?

б) довільного натурального числа n.

Розв'язання цих задач базується на одній ідеї: зведення до рівняння у цілих числах та перебору варіантів.

Якщо x , $x+1,\ x+2, ..., x+k$ шукані цілі числа, то рівняння задачі є таким $x+(x+1)+(x+2)+...+(x+k) = n$ або $\frac{(x+x+k)(k+1)}{2} = n,$ звідки $x = \frac{n}{k+1} - \frac{k}{2}$ (1). При $n = 500 = 2^2 \times 5^3$ співвідношення (1) приводить до аналізування двох випадків:

1) якщо, k - парне, то для того щоб x було цілим, $k+1$ має дорівнювати $1,\ 5,\ 5^2$ або 5^3. Отже,

$$
\begin{aligned}
&k_1 + 1 = 1, x_1 = 500, && 500 = 500\\
&k_2 + 1 = 5, x_2 = 98, && 500 = 98+99+100+101+102;\\
&k_3 + 1 = 5^2, x_3 = 8, && 500 = 8+9+...+31+32;\\
&k_4 + 1 = 5^3, x_4 = 500, && 500 = -58-57-...-1+0+1+...+65+66.
\end{aligned}
$$

2) якщо, k - не парне, то для того, щоб x було цілим, дріб $\frac{500}{k+1}$ має дорівнювати $m + \frac{1}{2}(m \in z)$, а значить $k+1$ повинно бути добутком 2^3 з $1,\ 5,\ 5^2$ або 5^3. Маємо:

$k_5+1=2^3+1, x_5=59,\quad 500=59+60+...+66;$

$k_6+1=2^3+5, x_6=-7,\quad 500=-7-6-...-1+0+1+...+31+32;$

$k_7+1=2^3+5^2, x_7=-97,\quad 500=-97-96-...-1+0+1+...+101+102;$

$k_8+1=2^3+5^3, x_8=-499,\quad 500=-499-498-...-1+0+1...+500.$

При $n=2^{\alpha_1}\times 3^{\alpha_2}\times 5^{\alpha_3}$ співвідношення (1) буде мати вигляд: $x=\dfrac{n=2^{\alpha_1}\times 3^{\alpha_2}\times 5^{\alpha_3}}{k+1}-\dfrac{k}{2}$.

Якщо, k - парне, $k+1$ може набувати непарних значень $1,3,3^2,...,3^{\alpha_2};5\times1,5\times3,...,5\times3^{\alpha_2};5^2\times1,5^2\times3,...,5^2\times3^{\alpha_2};...;5^{\alpha_3}\times1,5^{\alpha_3}\times3,...,5^{\alpha_3}\times3^{\alpha_2}$, тобто $(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)$ значень. Така ж кількість і шуканих сум. Якщо k - непарне, то для того, щоб $x\in z$, дріб $\dfrac{2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}}{k+1}$ має дорівнювати $m+\dfrac{1}{2}$. А значить, $k+1$ може набувати попередніх значень, кожне з яких помножене на 2^{α_1+1}, тобто $(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)$ значень. Таким чином, одержимо $2(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)$ шуканих сум. Легко показати, що половина цих сум буде складатися тільки з натуральних чисел.

При $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot p_m^{\alpha_m}$, де $p_1,p_2,...,p_m$ - зростаючі прості числа, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\in N$, дослідження розбивається на два випадки:

1) $p_1=2$, тоді, базуючись на попередніх міркуваннях, встановлюємо, що кількість шуканих сум дорівнює $2(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)...(\alpha_m+1)$;

2) якщо p_1>2, то число n - непарне, і проводячи аналогічні попереднім міркування, стверджуємо, що кількість шуканих сум дорівнює $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_m+1)$.

Досить корисними є задачі – «двійники» з недетермінованими відповідями, в яких учневі самому пропонується з’ясувати або довести, яке саме твердження насправді є правильним. Розв’язування задач такого типу може послужити першою сходинкою науково – дослідницької діяльності.

Наступний приклад показує, як задача – «двійник» може залучити учнів до пошуково – дослідницької діяльності.

Задача 4. Множина A складається з натуральних чисел, причому:

1) $1\in A$, 2) якщо $a\in A$, то $2a+1\in A$, 3) якщо $3a+1\in A$, то $a\in A$.

Чи вірно, що $8\in A$?

Розв'язання. Побудуємо ланцюг чисел, які входять до множини *A*:

$$1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 7 \xrightarrow{2} 15 \xrightarrow{2} 31 \xrightarrow{2} 63 \xrightarrow{2} 127 \xrightarrow{3} 42 \xrightarrow{2} 85 \xrightarrow{2} 171 \xrightarrow{2} 343 \xrightarrow{3} 11$$
$$\xrightarrow{2} 229 \xrightarrow{3} 76 \xrightarrow{3} 25 \xrightarrow{3} 8$$

Отже, $8 \in A$.

Задача - «двійник»: множина *A* складається з натуральних чисел, причому: 1) $1 \in A$, 2) якщо $a \in A,$ то $2a+1 \in A$, 3) якщо $3a+1 \in A,$ то $a \in A$. Чи співпадає множина *A* з множиною натуральних чисел?

Відповіді на це питання у нас поки що немає, хоча деякі дослідження цієї задачі були проведені за допомогою обчислювальної техніки. Вдалося з'ясувати деякі закономірності, що характерні даній множині, однак повного доведення не було знайдено, але є впевненість в тому, що множина *A* співпадає з множиною N.

Такого роду відповідь обов'язково спонукає більшість учнів – гуртківців до бажання вирішити поставлену проблему.

Задача 5. Два гравці по черзі записують на дошці натуральні числа, які не перевищують 10. Правилами гри забороняється записувати на дошці дільники вже написаних чисел. Програє той, хто не може зробити наступний хід. З'ясуйте, який з гравців має виграшну стратегію і вкажіть її.

Додаткове питання: «Хто з гравців має виграшну стратегію, якщо на дошці записують натуральні числа, які не перевищують числа *n*?» (правила гри ті ж самі).

Розв'язання. Для *n* = 10 гравець, який починає, має виграшну стратегію. Наприклад, першим ходом він записує число 6, після чого другий гравець може написати тільки одне з чисел 4,5,7,8,9,10. Розіб'ємо їх на пари: (4,5), (8,10), (7;9), і тоді, якщо перший гравець у відповідь на кожний черговий хід другого буде записувати число в парі з тим, яке записав другий, забезпечить собі виграш.

Доведемо, що перший гравець має виграшну стратегію для $\forall\ n \in N$. Розглянемо нову гру – за тими ж правилами, але з одним обмеженням: забороняється записувати на дошці число 1 (ясно, що тоді гра буде складатися з одного ходу). Якщо в цій новій грі у першого гравця є виграшна стратегія, то вона є придатною і для даної задачі. Якщо ж перший гравець не має такої виграшної стратегії, то він першим ходом може написати число 1 і тим самим передати хід другому гравцю, який стає вже починаючим і не має виграшної стратегії.

Розширення кола задач – «двійників» при вивченні математики на гуртках МАН позитивно впливає на відношення учнів до математики тому, що розв'язання цих задач:

- підвищує мотивацію навчання;

- виховує потребу в розширенні математичних знань;
- підводить до узагальнення, а може й до «математичного відкриття»;
- сприяє раціональному вибору теми для майбутнього дослідження, якщо навіть ця тема досліджувалася чи досліджується кимось з членів МАН.

3. *Узагальнення.* Узагальнення задачі або цілого класу задач та пошук її розв'язання формують у учнів – кандидатів і членів МАН дослідницькі навички, а тому до домашнього завдання (після занять гуртка з математики) доцільно включати завдання, які вимагатимуть від учня не тільки узагальнення деякої задачі, а й пошук її розв'язання.

Задача 6. Нехай при вивченні теми «Функціональні співвідношення» були включені для колективного розв'язання такі задачі:

1) Функція $f:R\to R$ задовольняє умову $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, де $a\in R_+$. Довести, що f - періодична та навести приклад такої, відмінної від сталої, функції при $a=1$.

2) Функція $f:R\to R$ задовольняє умову $f(x+a)=\dfrac{1}{3}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{3}f(x)+f^2(x)-f^3(x)}$, де $a\neq 0$. Які властивості має така функція?

Одне з можливих узагальнень цих задач може бути таким:

3) а) Якими повинні бути дійсні числа $b_0\ (b_0>0), b_1, b_2, \ldots, b_n$, щоб функція $f:R\to R$, яка задовольняє умову $f(x+a)=b_0+\sqrt[n]{b_1f(x)-b_2f^2(x)+\ldots+b_nf^n(x)}$ $(a>0, n\neq 1, n\in \mathrm{N})$ була періодичною з періодом $T=2a$?

б) Чи не можна сформулювати подібну задачу при $\forall n\in R$, замінивши вираз $\sqrt[n]{A}$ на вираз $A^{\frac{1}{n}}$?

в) Наведіть приклад функції f, множина значень якої містить не менше двох чисел (тобто $f(x)\neq c$) і яка задовольняла б умову а) і умову б).

Діапазон задач, які узагальнюються, їх тематика, характер і складність можуть бути самими різними. Головне, щоб кожна така задача знайшла свого дослідника. Найкращим помічником - посібником задач, що узагальнюються для керівників гуртків МАН можуть стати задачі з ТЮМ – Турніру юних математиків, а також задачі з журналів «Квант», «У світі математики», «Математика у школі».

4. *Відкритим задачам.* Відкриті задачі – задачі, головна вимога яких містить деяку невизначеність: чи існує об'єкт A, що задовольняє умові B?; чи можна побудувати об'єкт

A, що задовольняє властивостям B і C?; об'єкт A має властивість B, а які ще властивості має даний об'єкт? скласти задачу обернену даній; скласти задачу на застосування методу; узагальнити дану задачу.

Розв'язання відкритої навчальної задачі полягає у тому, щоб спочатку її довизначити і тільки після цього знайти розв'язок або деякі суттєві кроки розв'язання у разі узагальнення. Довизначення відкритої задачі можна здійснити різними способами. Це залежить від освіченості, досвідченості, особистих уподобань учнів, і цей процес довизначення є складовою етапу *постановки задачі*, що у дослідницькій роботі складає суттєву частину успішності дослідження [2].

Задача називається задачею з *відкритою умовою*, якщо невизначеність наявна в умові задачі (наприклад: В опуклому чотирикутнику сума квадратів довжин діагоналей дорівнює сумі квадратів довжин сторін. Чи є такий чотирикутник паралелограмом?)

Задача називається задачею з *відкритим твердженням*, якщо невизначеність наявна в її твердженні, наприклад:

1) «Дослідити властивості параболічного чотирикутника».

2) «Дослідити властивість функції $f: R \to R$, що задовольняє умову $f(x+2) = 1 + \sqrt{2f(x) - f^2(x)}$».

3) «Якими властивостями володіє послідовність: $x^x, x^{x^x}, \ldots (x > 1)$? ».

Зрозуміло, що існують задачі, в яких невизначеність присутня і в умові і в твердженні – так звана вища форма відкритості (наприклад: За яких умов параболічний чотирикутник має певну кількість осей симетрії?). Найвищою формою «відкритості» задачі є *предметна область задачі*, у якій немає ні умови, ні твердження. Наприклад:

1) Дослідити властивості $(x]$ - найменшого цілого числа, яке не менше за x.

2) Побудуйте арифметику лишків за натуральним модулем m, або m-арифметику. Елементами m- арифметики є числа $0,1,2,\ldots,m-1$. Додавання та множення в m-арифметиці визначаються такими правилами: сумою (або добутком) двох чисел буде остача від ділення на m їх звичайної арифметичної суми (або добутку). Віднімання та ділення в m-арифметиці, подібно до звичайної арифметики, вводяться як обернені додаванню та множенню відповідно. Наведіть практичне застосування такої побудованої арифметики.

Результативні просування у розв'язуванні таких задач можуть послужити домінуючим фактором при виборі теми та її дослідженні у рамках МАН. Починати складати *відкриті задачі* можна і треба на будь – якому етапі навчання на заняттях гуртка МАН, але краще цьому навчати з узагальнення.

Тема дослідницької роботи – це завдання з перспективою, з продовженням, іншими словами – це серія такого роду задач, які природньо виходять з деякої задачі шляхом узагальнення або зміною параметрів, відкритості тощо. Багато яскравих задач для дослідження можна знайти у матеріалах: ТЮМу (турнір юних математиків), турнірів міст, журналів «У світі математики», «Квант», «Математика в школі». Зміст технології такого дослідження полягає в тому, щоб допомогти учню пройти шляхом наукового пізнання, засвоїти його алгоритм. На всіх етапах (від слухача до дійсного члена МАН) роботи ми повинні мати на увазі, що головним серед очікуваних нами результатів являється розвиток творчих здібностей, придбання дитиною нових знань, вмінь і навичок.

Для нас головним результатом є не просто детально пророблена схема, підготовлена дитиною доповідь, а педагогічний результат – це, перш за все, безцінний в виховному відношенні досвід самостійності, творчої, дослідницької праці, нові знання і вміння, які складають цілий спектр психологічних новоутворень, що відрізняють дійсного творця від простого виконавця.

Література

1. Капица П.Л. Эксперимент. Теория. Практика / П.Л. Капица. – М.: Наука, 1987. – 99 с.

2. Раков С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій: Автореф.дис…доктора пед.наук. 13.00.02. Харків: ХНПУ, 2005. – 44 с.