Математика

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ МАЙБУТНІМИ ВЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ

М.В. Працьовитий, доктор фіз.-мат. наук, професор

НПУ імені М.П. Драгоманова

Л.Л. Креш, НПУ імені М.П. Драгоманова

Проводиться аналіз логічно-структурної та дидактично-методичної схем вивчення теми “Векторний добуток векторів” студентами математичних спеціальностей педагогічних університетів, обговорюються проблеми діагностики знань.

Проводится анализ логико-структурной и дидактико-методической схем изучения теми “Векторное произведение векторов” студентами математических специальностей педагогических университетов, обсуждаются проблемы диагностики знаний.

We analyse logical structural, didactic and methodical schemes of learning “Cross product of vectors” by students of mathematical specialities of pedagogical universities and discuss an issue of diagnostics of knowledge, abilities and skills.

Вступ

Векторне множення векторів є бінарною некомутативною алгебраїчною операцією (символічно: $\vec{a}\times\vec{b}$), яка впорядкованій парі векторів за певним правилом ставить у відповідність третій вектор, що називається *векторним добутком*. На вивчення теми “Векторний добуток векторів” у розділі “Елементи векторної алгебри” курсу “Аналітична геометрія” для студентів педагогічних університетів напрямку підготовки “Математика *” відводиться 4 год. (2 – л. + 2 – пр.).

Множина всіх векторів площини разом з операцією векторного множення утворює антигрупу (алгебраїчну структуру з однією незамкненою операцією, для якої виконуються твердження, що є запереченням всіх аксіом групи).

Операція векторного множення векторів є для студентів новою, в шкільному курсі математики вона не вивчається. Разом з тим має цікаві геометричні та алгебраїчні тлумачення і різні застосування. Зупинимося на деяких проблемах, пов’язаних з вивченням цієї теми майбутніми математиками.

Існує кілька альтернативних шляхів побудови теорії векторного добутку векторів. Зупинимося на деяких проблемах та альтернативах при викладі теоретичного матеріалу.

1. *Проблема означення.* Зафіксувавши у тривимірному векторному просторі ортонормований базис та ввівши координати вектора у ньому, з'являється можливість означити векторний добуток векторів у координатній формі. А саме: *якщо* $< i, j, k >$ – *ортонормований базис,*

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k} = (b_1, b_2, b_3),$$

то векторним добутком векторів $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *(символічно:* $\vec{a} \times \vec{b}$*) називається вектор* $\vec{c} = (\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix})$.

Цей підхід дозволяє дати загальне означення не розмежовуючи випадки, коли вектори-множники є колінеарними чи неколінеарними. З нього нескладно вивести "суто геометричні властивості" результату векторного множення векторів – *векторного добутку*:

1. взаємозв'язок модуля векторного добутку з модулями векторів – множників;

2. ортогональність векторного добутку векторам – множникам;

3. у випадку неколінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однакову орієнтованість базисів $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$ та $< \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} >$;

4. у випадку колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівність результуючого вектора $\vec{c}$ нуль-вектору за даним означенням є очевидною.

Єдиною необхідною умовою такого підходу є попередній розгляд питання "орієнтація векторного простору". Точніше, існує потреба лише в понятті однакової орієнтованості базисів і властивостях цього відношення. В системі підготовки математика (вчителя математики) можливий єдиний строгий підхід до означення поняття "однакової орієнтованості" – це алгебраїчний: *два базиси називаються однаковоорієнтованими, якщо визначник матриці переходу від одного базису до іншого є додатним*.

Іншою альтернативною схемою введення означення векторного добутку є більш поширений (можна сказати, традиційний) підхід: *векторним добутком двох колінеарних векторів називається нуль-вектор, а неколінеарних – вектор, який має властивості*:

1. *його модуль дорівнює добутку модулів на синус кута між ними;*

2. *він ортогональний обом векторам - множникам;*

3. *трійка векторів* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *– права.*

Зазначимо, що переважна більшість посібників містить дане означення без розмежування випадків колінеарності та неколінеарності векторів, що є грубою помилкою, оскільки поняття правої трійки векторів стосується лише некомпланарних векторів.

Зрозуміло, що цьому означенню має передувати означення правої, лівої трійки векторів, відносність якого очевидна. “Нематематичність” означення правої трійки (правило правої руки, правого гвинта тощо), яка тут часто використовується робить виклад дещо нестрогим. Однак, цей підхід є досить поширеним [11] і для студентів нематематичних спеальностей (наприклад, фізиків, інженерів тощо) можливо є більш доступним, зрозумілішим, природним і практичним.

Вважаємо доцільним поєднання останнього означення з аналітичним доведенням теореми про вираз векторного добутку в координатній формі в довільному та ортонормованому базисі, як це зроблено в [8].

2. Обгрунтування алгебраїчних властивостей. Іноді при виведенні алгебраїчної властивості (дистрибутивності) операції векторного множення векторів використовують знову ж таки неприродню для аналітичної геометрії лему [11]: *Якщо вектор* $\vec{a}$ *спроектувати на площину* π *, перпендикулярну до вектора* $\vec{c}$ *, і проекцію вектора* $\vec{a}$ *(вектор* $\vec{a}_1$*) повернути в площині* π *на кут* $-\dfrac{\pi}{2}$ *або* $+\dfrac{\pi}{2}$*, то дістанемо вектор* $\vec{a}_2$*, що дорівнює* $+\left(\vec{a}+\vec{c}_0\right)$ *або* $-\left(\vec{a}+\vec{c}_0\right)$*, де* $\vec{c}_0$ *– орт вектора* $\vec{c}$. Основним методом аналітичної геометрії є метод координат, тому кожне геометричне поняття, яке вводиться в теорії чим по швидше має мати координатний аналог, тому доведення алгебраїчних властивостей операцій в аналітичній геометрії доцільно проводити в координатній формі. Більше того, таке доведення є і коротшим, і простішим, і підкреслює міжпредметні зв’язки аналітичної геометрії і лінійної алгебри.

3. *Проблема природності та продуктивності понять.* Застосування векторного добутку в геометрії (для обчислення площ многокутників, обчислення синуса кута між векторами, з’ясування факту колінеарності векторів та точок, знаходження вектора ортогонального двом даним) підкреслює геометричну природність цієї операції. Векторний добуток векторів є продуктивним поняттям при розгляді наступних питань та розв’язанні задач аналітичної геометрії:

1. відстань від точки до прямої в тривимірному просторі;
2. спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих;
3. площа трикутника, заданого координатами вершин;
4. перехід від загальних рівнянь прямої у просторі до канонічних рівнянь;
5. відстань між мимобіжними прямими ;
6. при виведенні рівняння площини, яка проходить через задану точку і паралельна двом мимобіжним прямим тощо.

Зазначимо, що застосовність векторного добутку значно розширюється після розгляду теми мішаного добутку векторів. Пропонуємо читачеві самостійно довести, що відстань між двома мімобіжними прямими в просторі дорівнює довжині проекції довільного відрізка M_1M_2 кінці якого лежать на даних прямих на спільний перпендикуляр до даних прямих.

Прийнято вважати, що фізичним змістом векторного добутку є момент сили. Додаткові акценти на цьому при викладі теоретичного матеріалу та при розв'язанні задач не лише зміцнюють зв'язки математики та фізики, а й підкреслюють продуктивність цього поняття для фізичних застосувань.

4. *Специфічність операції векторного множення*. Природність, продуктивність, особливість поняття у повній мірі не вдасться збагнути не акцентуючи увагу на специфічності цього об'єкта. Зрозуміло, що пізнати особливості можна лише в порівнянні. Співставляти та порівнювати можна лише в певній мірі з аналогічними об'єктами. В даному випадку – це добуток чисел або ж раніше вивчений скалярний добуток векторів. Специфічними властивостями векторного множення векторів (векторного добутку є: 1) не комутативність та не асоціативність цієї операції; 2) рівняння $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$ має не єдиний розв'язок.

5. *Приклади та застосування векторного добутку до розв'язання задач*.

Особливо актуальною є проблема добору задач та завдань для практичних занять та самостійної роботи студентів, а також забезпечення навчального процесу навчально-методичними засобами. Міжпредметні зв'язки, прикладна та професійна спрямованість курсу – аспекти загальної проблеми ефективності методичної системи навчання векторній алгебрі.

При викладі теоретичного матеріалу доцільно запропонувати студентам принаймні одну задачу, яка за допомогою векторного добутку розв'язувалась би достатньо ефектно. Розглянемо приклади.

Задача 1. Довести, що площа S трикутника ABC, заданого координатами вершин в прямокутній декартовій системі координат на площині: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ обчислюється за формулою:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|. \tag{5.1}$$

Розв'язання. Даний трикутник є трикутником побудованим на векторах $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;0)$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1;y_3-y_1;0)$.

Відомо, що

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_2 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_2 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|=$$

$$=\frac{1}{2}|x_2y_3-x_2y_1-x_1y_3+x_1y_1-x_3y_2+x_3y_1+x_1y_2-x_1y_1|=$$

$$=\frac{1}{2}|x_2y_3-x_2y_1-x_1y_3-x_3y_2+x_3y_1+x_1y_2|.$$

Перетворимо праву частину рівності (5.1), розкладаючи визначник за елементами третього стовпця:

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}|x_2y_3-x_3y_2-x_1y_3+x_3y_1+x_1y_2-x_2y_1|=$$

$$=S_{\Delta ABC},$$

що й вимагалось довести.

Задача 2. Використовуючи вектори довести, що для довільних дійсних чисел a_1,a_2,a_3 і b_1,b_2,b_3 виконується нерівність

$$(a_2b_3-b_2a_3)^2+(a_3b_1-b_3a_1)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2\le(a_1^{\ 2}+a_2^2+a_3^2)(b_1^{\ 2}+b_2^2+b_3^2),$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

Розв'язання. В прямокутній декартовій системі в просторі розглянемо вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Оскільки, згідно з означенням векторного добутку $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b})$, то $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$, причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\perp\vec{b}$, тобто $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$. Переписавши останню нерівність у координатній формі, отримуємо нерівність яку й вимагалося довести.

Наведемо приклади застосування векторного добутку векторів при вивченні методу координат в просторі, а саме – при вивченні теми «Пряма та площина в просторі».

Задача 3. *Довести, що відстань від точки* $M_*\left(x_*;y_*;z_*\right)$ *до прямої*

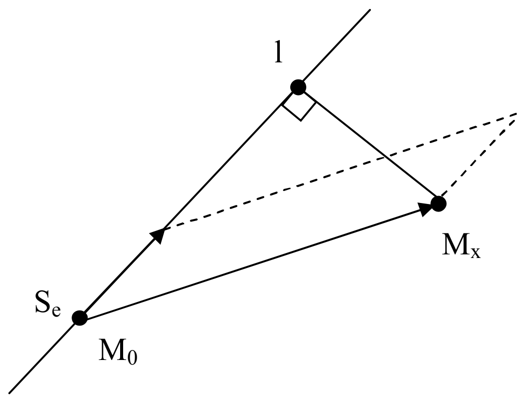
$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

заданих в прямокутній декартовій системі координат, обчислюється за формулою:

$$\rho(M_*, l) = \frac{\left|\vec{s}_1 \times \overrightarrow{M_0 M_*}\right|}{\left|\vec{s}_l\right|} =$$

$$= \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} y_* - y_0 & z_* - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_* - z_0 & x_* - x_0 \\ p & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_* - x_0 & y_* - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (1)$$

Доведення. Шукана відстань $\rho(M_*, l)$ є висотою паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0 M_*} = (x_* - x_0; y_* - y_0; z_* - z_0)$ і $\vec{s} = (m; n; p)$ як на сторонах (див. мал.1).



Мал.1

Тому з формули для площі паралелограма

$$S_{пар.\vec{s}, \overrightarrow{M_0 M_*}} = a h_a = |\vec{s}|\rho(M_*, l)$$

і геометричної властивості модуля векторного добутку

$$S_{пар.\vec{s}, \overrightarrow{M_0 M_*}} = \left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0 M_*}\right|$$

Отримуємо спочатку першу з рівностей формули (1). Виразивши векторний добуток в координатній формі, отримаємо останній вираз формули (1). Що й вимагалося довести.

Задача 4. Довести, що відстань між двома мимобіжними прямими,

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

(умова мимобіжності: $\vec{s}_1 \vec{s}_2 M_1 M_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$),

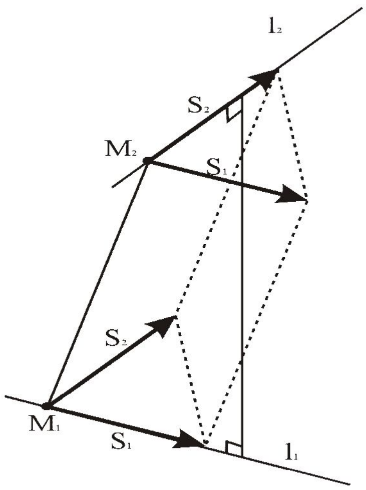
заданими своїми рівняннями в прямокутній декартовій системі координат, обчислюється за формулою:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)\overrightarrow{M_1 M_2}\right|}{\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 p_1 \\ n_2 p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 m_1 \\ p_2 m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Доведення. Розглянемо трикутну призму, побудовану на векторах $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ як на ребрах.

Оскільки одна з прямих лежить в одній основі призми, а друга – в іншій, то спільний перпендикуляр заданих прямих є висотою цієї призми, тому

$$\rho(l_1, l_2) = H = \frac{V}{S_{осн}}.$$



Об'єм призми виражається через мішаний добуток векторів формулою

$$V = \frac{1}{2}\left|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)\overrightarrow{M_1M_2}\right|.$$

Основа призми – це трикутник, побудований на векторах $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ як на сторонах, тому його площа обчислюється за формулою

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|.$$

Тоді

$$\rho(l_1, l_2) = H = \frac{\left|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|}.$$

Якщо прямі задані своїми рівняннями в прямокутній декартовій системі координат, то останній вираз можна переписати в координатній формі:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 p_1 \\ n_2 p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 m_1 \\ p_2 m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Враховуючи вищесказане та багаторічний досвід викладання у Національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова, вважаємо доцільним вивчати дану тему за наступним планом:

1. Орієнтація векторного простору.
2. Означення векторного добутку.
3. Геометричний зміст векторного добутку.
4. Вираз векторного добутку в координатній формі.
5. Алгебраїчні властивості векторного добутку.
6. Специфічні властивості векторного множення векторів.

7. Фізичний зміст векторного добутку.

8. Застосування векторного добутку.

Наведемо приклад завдань контрольної роботи з теми “Векторний добуток векторів”, розрахованої на одну та дві академічні години, список усних задач та запитань для самоконтролю з теми “Векторний добуток векторів”.

Приклад самостійної роботи на 0,5 академічної години.

1. Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Чи зміниться векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо до вектора $\vec{a}$ додати вектор $\vec{c}$, колінеарний вектору:

а) $\vec{a}$; б) $\vec{b}$; в) $\vec{a} - \vec{b}$; г) $2\vec{a} + 3\vec{b}$?

2. Задано дві точки O і A. Яку фігуру утворюють всі точки M, для яких виконується рівність $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OA} = \vec{0}$?

3. Скільки розв’язків має векторне рівняння $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$, якщо відомо, що $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні?

4. В правому ортонормованому базисі $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ $\overrightarrow{AB} = (1;-2;2)$, $\overrightarrow{AC} = (3;1;0)$.

Знайти координати вектора $\overrightarrow{CD}$, якщо відомо, що $[CD]$ — висота трикутника ABC.

Примітка. Задача 1 діагностує знання алгебраїчних властивостей векторного добутку, задача 2 діагностує розуміння геометричної суті векторного множення та розвиток просторової уяви у студентів, задача 3 на розуміння суті поняття векторний добуток векторів, його означення, задача 4 на вміння застосовувати теоретичні положення на практиці і розв’язувати задачі в координатній формі.

Контрольна робота

1. Довести, що сума векторів, перпендикулярних до граней тетраедра, рівних по абсолютній величині площам цих граней і направлених до вершин, протилежних граням, дорівнює нулю.

2. Обчислити висоти паралелограма $ABCD$, якщо в ортонормованому базисі задано вектори $\overrightarrow{AB} = (2;-3;7)$ і $\overrightarrow{BC} = (5;0;1)$.

3. Довести, що коли $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні.

4. Знайти вектор $\vec{x}$, який перпендикулярний векторам $\vec{a} = (-2;5;9)$, $\vec{b} = (4;6-3)$ має довжину 4 (лін. од.) і з вектором $\vec{j}$ правого ортонормованого базису $< \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} >$, в якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами, утворює тупий кут.

5. Чи є умова $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{0}$ необхідною для того, щоб $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}=\vec{0}$?

6. Сила $\vec{F}=(4;-3;8)$ прикладена до точки С. Визначити момент цієї сили відносно точки А, якщо $\overrightarrow{AC}=(2;-1;5)$.

Зауваження. Так скомпоноване завдання дозволяє спектрально перевірити засвоєння теми, починаючи з означення векторного добутку, його виразу в координатній формі, алгебраїчних властивостей, закінчуючи різні застосування.

Усні задачі та запитання для самоконтролю

1. Назвати спільні та відмінні властивості операцій скалярного і векторного множення векторів.

2. В чому специфічність операції векторного множення векторів в порівнянні з множенням чисел?

3. Чи є умова $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$ достатньою для $\vec{a}=\vec{b}$ при $\vec{c}\neq\vec{0}$? А необхідною?

4. Точки O, A_1, A_2, A_3 лежать на одній прямій. Чому дорівнює $\left(\overrightarrow{OA_1}\times\overrightarrow{A_1A_2}\right)\times\overrightarrow{A_2A_3}$?

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з довжиною ребра a. Чому дорівнює $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$?

6. Три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ пов'язані співвідношеннями $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}$, $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}$. Визначити довжини векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ та кути між ними.

7. При яких умовах $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{0}$?

8. Чому дорівнює $\vec{i}\times\vec{j}\times\vec{i}$, $\vec{k}\times(\vec{j}\times\vec{i})$, $\vec{i}\times\vec{i}\times\vec{i}$?

9. Відомо, що трійка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ права. Якими є трійки $(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$, $(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$?

10. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}=(\alpha;\beta;\gamma)$, $\vec{b}=(13\alpha;13\beta;13\gamma)$, якщо координати їх задані не в ортонормованому базисі.

11. Скільки орієнтацій тривимірного векторного простору V_3 існує?

12. Відомо, що $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}=(1;2;k)$, $\vec{b}=(m;4;1)$. Знайти k і m.

13. Впорядкована система векторів $\vec{p},\vec{q},\vec{s}$ утворює лівий ортонормований базис. Знайти $\vec{p}\times\vec{q}$, $\vec{q}\times\vec{s}$, $\vec{s}\times\vec{p}$.

14. Чи зміниться векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо до вектора $\vec{a}$ додати вектор $\vec{c}$, колінеарний $\vec{a}$?

15. Знайти координати векторного добутку векторів $\vec{a}=(1;-2;0)$ і $\vec{b}=(3;2;4)$, заданих своїми координатами в лівому ортонормованому базисі $\langle\vec{p},\vec{q},\vec{s}\rangle$.

16. Чи виконується рівність $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c})\times\vec{d}$?

17. $ABCD$ — паралелограм, S — його площа. Яку довжину має вектор $\frac{1}{S}(\vec{AB}\times\vec{AC})$?

18. O і A — фіксовані точки простору. Яку фігуру утворюють точки M, для яких виконується рівність: $\vec{OM}\times\vec{OA}=\vec{0}$?

19. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}=(2;1;0)$ і $\vec{b}=(0;0;2)$, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі.

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вказати матрицю переходу від базису $<\vec{AB},\vec{AD},\vec{BB_1}>$ до $<\vec{AC},\vec{AB_1},\vec{AD_1}>$. Чи є ці базиси однаково орієнтовані?

21. Чи володіє векторний добуток векторів властивістю асоціативності?

22. Чи можлива рівність $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$?

23. Чи є умова $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ достатньою для того, щоб $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}=\vec{0}$?

24. Чи є умова "$\vec{a}=\vec{0}$ або $\vec{b}=\vec{0}$" необхідною для $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$?

25. Вектори $\vec{a}=(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\vec{b}=(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ задані своїми координатами в лівому ортонормованому базисі. Чи правильна формула

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\right)?$$

Якщо ні, то вказати правильну.

26. Яким умовам мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб виконувалася рівність $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$?

27. Чи є вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ лінійно залежними? Дати повну і коректну відповідь.

28. Чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ базис? А коли утворюють?

29. Відомо, що в ортонормованому базисі $\vec{a}=(7;-1;3)$, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Знайти координати вектора $\vec{b}$.

30. Відомо, що $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$. Чи випливає з цього, що $\vec{b}=\vec{c}$?

31. Відомо, що $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$. Що можна сказати про вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$?

32. Відомо, що в правому ортонормованому базисі $\vec{a}=(0;0;2)$, $\vec{b}=(\lambda;0;0)$. При якому значенні λ базис $<\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}>$ є лівим ортогональним?

33. Які формули скороченого множення векторів ви знаєте?

34. Чи правильна формула $(\vec{a}\pm\vec{b})\times(\vec{a}\pm\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}\pm 2(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{b}\times\vec{b}$?

35. Вказати основні застосування векторного добутку.

36. Вказати фізичний та геометричний зміст векторного добутку векторів.

37. Чому дорівнює подвійний векторний добуток трьох взаємно перпендикулярних векторів?

38. Як виражається подвійний векторний добуток через інші операції над векторами?

39. При яких умовах мають місце рівності:

а) $\vec{a}\times\vec{x}=2\vec{a}$;   б) $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{x})=\vec{a}\times\vec{a}$;   в) $(\vec{x}\times\vec{a})\times\vec{x}=\vec{a}$?

40. Які основні геометричні задачі розв'язуються з допомогою векторного добутку векторів?

Література

1. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия в 2-х частях. Ч.1. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.

2. *Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М.* Аналітична геометрія. — Київ: Вища школа, 1973. — 328 с.

3. *Креш Л.Л., Працьовитий М.В.* Векторна алгебра – основа сучасної математичної освіти вчителя математики // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – 2009. – В. 31. С. 34-37.

4. *Креш Л.Л., Працьовитий М.В.* Векторна алгебра в системі підготовки вчителя математики. // Дванадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука , 15-17 трав., 2008 р., Київ: Матеріали конф. – К.: ТОВ “Задруга”, 2008. – С. 236.

5. *Працьовитий М.В.* Екзамен з аналітичної геометрії (І семестр). – К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. – 120с.

6. *Працьовитий М.В.* Екзамен з аналітичної геометрії (ІІ семестр). – К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. – 60с.

7. *Працьовитий М.В.* Елементи векторної алгебри. Л.4 (Скалярний добуток векторів). К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2008. – 35 с.

8. *Працьовитий М.В.* Елементи векторної алгебри. Л.5 (Векторний добуток векторів). К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2008. – 23 с.

9. *Слєпкань З.І.* Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі: Навч. посіб. – К.: Вища шк., 2005. – 239 с.

10. *Шкіль М.І., Жалдак М.І., Працьовитий М.В. та ін.* Галузеві стандарти вищої освіти. Математика. (1. Освітньо-кваліфікаційна характеристика бакалавра. 2. Освітньо-професійна програма підготовки бакалавра). – Міністерство освіти і науки України, Київ. – 2002. – 74 с.

11. *Шкіль М.І., Колесник, Котлова В.М.* Вища математика: Елементи аналітичної геометрії, диференціальне і інтегральне числення функції однієї змінної. – К.: Вища шк. Головне ви-во, 1984. – 391 с.

12. *Шкіль М.І., Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В., Требенко Д.Я. та ін.* Державний екзамен з математики і методики навчання математики. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. – 88 с.