Г.О.Михалін

Поняття степеня та показникова і степенева функції у структурі професійних знань учителя математики

Одним з найважливіших математичних понять є поняття степеня числа a з числовим показником α. За допомогою цього поняття можна ввести показникову і степеневу функції, а також інші основні елементарні функції.

Важливість поняття степеня підкреслюють, наприклад, такі прості запитання:

- Чому $3=\dfrac{6}{2}$, проте $(-1)^3 = -1 \neq (-1)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-1)^6} = 1 \neq (\sqrt{-1})^6 = i^6 = -1$?
- Чи можна знайти степінь $(-1)^3$ за формулою $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$?
- Чи є тотожними (однаковими) функції $f_1(x) = x^{\frac{2}{6}}$, $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_4(x) = (\sqrt[6]{x})^2$, $f_5(x) = \sqrt[6]{x^2}$ і $f_6(x) = e^{\frac{1}{3}\ln x}$?
- Коли $x^{\alpha\beta} = (x^{\alpha})^{\beta} = (x^{\beta})^{\alpha}$?

Стосовно кожного математичного поняття, яке вивчається у шкільному курсі математики, учитель математики повинен вміти відповідати на запитання:

- Що це таке (степінь a^{α}, степенева функція тощо) і як його побачити?
- Навіщо воно потрібне?
- Коли воно існує і чи єдине воно?
- Як його знайти (обчислити, виміряти тощо)?
- Які воно має властивості?
- Які з його властивостей є основними?
- Чи можна іншим (не гіршим) способом дістати не гірший результат?

Проілюструємо можливі відповіді на деякі з поставлених запитань стосовно поняття степеня.

1. Що таке степінь a^{α} ?

Коротку відповідь на це запитання дати не можна, оскільки поняття степеня найчастіше відносять до так званих рекурсивних, яке вводиться поступово, шляхом розширення області його дії, причому на кожному наступному кроці розширення суттєво використовуються результати попередніх кроків.

1.1. Означення степеня фіксованого числа a **(дійсного або комплексного) з фіксованим натуральним показником** $\alpha = n$ можна ввести індуктивним способом за допомогою поняття добутку двох чисел:

$$a^1 := a \text{ і } a^{n+1} := a^n a \;\; \forall n \in \boldsymbol{N} \text{ і } \forall a \in \boldsymbol{C}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots\}$ - множина натуральних чисел, $\boldsymbol{C}$ – множина комплексних чисел, яка містить у собі множину $\boldsymbol{R}$ дійсних чисел.

Базою цього означення є принцип математичної індукції, в силу якого можна стверджувати, що рівності (1) означають степінь a^n для будь-якого натурального показника n.

Степінь a^n можна означити і як добуток n співмножників, кожен з яких дорівнює a, проте слід розуміти, що ***таке означення є коректним лише за умови, що визначено поняття добутку довільної скінченної кількості співмножників,*** а для цього знову потрібен принцип математичної індукції.

З означення (1), використовуючи метод математичної індукції, легко дістати усі ***властивості степеня з натуральним показником***, зокрема такі:

1) $(ab)^n = a^n b^n \;\; \forall a$ і b і $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \;\forall a$ і b, $b \neq 0$, $\forall n \in N$;

2) $a^{m+n} = a^m a^n$, $\forall m$ і $n \in N$ та $\forall a$ і $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n} \;\forall m$ і $n \in N$, $m - n > 0$, $a \neq 0$;

3) $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n \;\; \forall m$ і $n \in N$ та $\forall a$;

4) якщо $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $a^n = |a|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – формула Муавра.

Степінь з натуральним показником потрібен, зокрема, для десяткового зображення натуральних чисел, наприклад:

$$12745 = 1\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 1.$$

Вже цей приклад наводить на доцільність означення $10^0 := 1$, а тому й виникає проблема поширення поняття степеня a^α на випадок $\alpha = 0$ і $\alpha = -n$, $n \in N$.

1.2. Розширення поняття степеня a^α на випадок довільного цілого показника α доцільно здійснити таким чином, щоб не тільки зберегти усі властивості степеня з натуральним показником, а й поширити їх на інші випадки, не розглянуті раніше. Наприклад, намагання поширити властивість

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n},\ a \neq 0$$

на випадок довільних натуральних m і n, а не тільки $m - n > 0$, приводить до того, що $a^{n-n} = a^0 = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$, тобто доцільно означити $a^0 := 1\ \forall a \neq 0$. Тоді

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}\quad \forall n \in \boldsymbol{N} \text{ і } \forall a \neq 0,$$

тобто степінь a^α з цілим недодатним показником α доцільно означити так:

$$a^0 := 1 \ \ i\ \ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \forall a \neq 0 \quad \text{і} \quad \forall n \in \boldsymbol{N}. \tag{2}$$

Рівності (2) разом з рівностями (1) дають означення степеня a^α з цілим показником $\alpha \in \boldsymbol{Z}$ і основою $a \in \boldsymbol{C}$, зокрема, $a \in \boldsymbol{R}$, причому $a \neq 0$, коли $\alpha \leq 0$. Зрозуміло, що за накладених у рівностях (1) і (2) умов цей степінь існує та єдиний, причому усі властивості степеня з натуральним показником з певними уточненнями залишаються правильними і для степеня з цілим показником.

За допомогою степеня з цілим показником можна, наприклад, ввести десяткові зображення дійсних чисел.

Наприклад, $183.745 = 1\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 3\cdot 10^0 + 7\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 5\cdot 10^{-3}$.

1.3. Наступним кроком розвитку поняття степеня є означення степеня з дробовим показником $\alpha = \frac{1}{n},\ n \in \boldsymbol{N},\ n > 1$**.**

Бажання зберегти і узагальнити властивості степеня приводить, зокрема, до того, що намагання поширити властивість $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}$ на випадок $\alpha = \frac{1}{n}$ і $\beta = n$ приводить до рівностей

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^{1} = a\,,$$

тобто $a^{\frac{1}{n}}$ *повинно бути таким числом, n-й степінь якого дорівнює числу a*. А це означає, що $a^{\frac{1}{n}}$ повинно бути *коренем n-го степеня з числа a*. Звідси випливає доцільність наступного означення:

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}\,,$$

за умови, що попередньо означене поняття кореня n-го степеня з числа a і вирішено питання про його існування та єдиність.

1.4. Поширюючи поняття степеня a^{α} **на випадок довільного раціонального показника** $\alpha = \frac{m}{n}$**, де** $m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N}$, можна міркувати так: оскільки $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$ або $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$, то намагаючись зберегти властивість 3), приходимо до можливості *означення степеня* a^{α} *з раціональним показником* $\alpha = \frac{m}{n}$ *двома способами:*

$$a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{m}\right)^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a^{m}} \qquad (3)$$

та

$$a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} \qquad (4)$$

за умови існування правих частин рівностей (3) та (4).

Відразу виникає питання, чи є означення (3) і (4) рівносильними і якщо ні, то яке з них є доцільнішим?

Для вирішення цих питань визначимо, коли існує $\sqrt[n]{a}$ і чи єдиний він, а тому і коли існує степінь $a^{\frac{m}{n}}$ і чи єдиний він.

1.5. Коли існує степінь з раціональним показником і чи єдиний він? Якщо користуватися означенням (3), то дістанемо парадоксальну рівність (−1)=1, оскільки із того, що $3=\frac{6}{2}$, слідує $(-1)^3=(-1)^{\frac{6}{2}}$, тобто $-1=\sqrt{(-1)^6}=\sqrt{1}=1$.

Якщо ж користуватися означенням (4), то із того, що $3=\frac{6}{2}$, слідує, що $(-1)^3=-1$, а $(-1)^{\frac{6}{2}}=\left(\sqrt{-1}\right)^6$ не існує, якщо оперувати тільки дійсними числами (як найчастіше відбувається у шкільному курсі математики).

Таким чином, обидва означення (3) та (4) виявляються некоректними. *Як цього можна позбутися?*

Перш за все, зауважимо, що проведене у пункті 1.2 *розширення поняття степеня* з випадку натурального показника на випадок цілого показника *здійснювалося шляхом доповнення, а не поглинання раніше введеного поняття*. Навпаки, кожне з означень (3) та (4) без додаткових умов фактично здійснює поглинання раніше введених понять степеня з натуральним і цілим показником, і саме це поглинання приводить до вище вказаних некоректностей.

Позбутися цього можна, якщо врахувати, що *коли раціональне число α є цілим, то його найчастіше розглядають як нескоротний дріб* $\alpha=\frac{m}{1}$.

Тому в означенні степеня з довільним раціональним показником $\alpha\in Q$ доцільно вимагати нескоротність дробу α, тобто вважати, що коли $\alpha=\frac{m}{n}$, де $m\in Z$, а $n\in N$, то $a^{\alpha}:=\sqrt[n_1]{a^{m_1}}$ або $a^{\alpha}:=\left(\sqrt[n_1]{a}\right)^{m_1}$ за умови існування правої частини відповідної рівності, де $\frac{m_1}{n_1}$ – це нескоротний дріб, що є рівним дробові $\frac{m}{n}$, який може бути скоротним. При цьому доцільно вважати, що $\sqrt[1]{a} := a$.

Легко довести, що так дані означення для дійсного степеня з раціональним показником вже є рівносильними і виключають вказані вище некоректності.

Таким чином, у випадку, коли α дорівнює цілому числу, існування та єдиність степеня a^{α} майже очевидні і гарантуються основними властивостями дійсних чисел та принципом математичної індукції.

Якщо ж раціональне число $\alpha = \frac{m}{n}$ не дорівнює ніякому цілому числу, то питання про існування та єдиність степеня a^{α} пов'язане з відповідними питаннями для кореня n-го степеня, яке повністю вирішується у полі комплексних чисел.

1.6. ***Комплексним коренем*** n***-го степеня з числа*** a ***називають таке комплексне число*** b***,*** n***-ий степінь якого дорівнює числу*** a***.*** При цьому, якщо число b – дійсне, то його називають ***дійсним коренем*** n-го степеня з числа a, а якщо до того ж $b \geq 0$, то його називають ***арифметичним коренем*** n-го степеня з числа a.

Зрозуміло, що коренем n-го степеня з числа $a = 0$ є лише число $b = 0$ для будь-якого $n \in N$.

З теорії комплексних чисел випливає, що для будь-якого комплексного числа $a = |a|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ існує рівно n попарно різних значень кореня n-го степеня з числа a, які можна знайти за формулою

$$b = b_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\ k \in \overline{0, n-1}, \qquad (5)$$

де $\sqrt[n]{|a|}$ – це *арифметичний корінь* n-го степеня з числа $|a| > 0,$ який існує і єдиний. При цьому, якщо $\varphi \in (-\pi;\pi]$ (а цього завжди можна досягти), то число $b_0 = \sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})$ називають *головним значенням кореня* n*-го степеня з числа* a і позначають $\sqrt[n]{a}$.

Зокрема, якщо $a \ge 0,$ то $\varphi = 0$ і $b_0 = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|}$ – *шкільний арифметичний корінь* n*-го степеня* з невід'ємного числа a.

Легко довести, що серед усіх значень кореня n-го степеня з числа a, які визначаються рівністю (5), існують і дійсні, але тоді й тільки тоді, коли $a \ge 0$ і n – довільне, або $a < 0$ і $n = 2m+1$ – непарне число. При цьому:

1) якщо $n = 2m+1$, то для будь-якого дійсного числа a існує єдиний дійсний корінь n-го степеня з числа a, який дорівнює $b_0 = \sqrt[n]{|a|} = \sqrt[n]{a}$, коли $a \ge 0$, (у цьому випадку $\varphi = 0$), або $b_m = \sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\pi + 2\pi m}{2m+1} + i\sin\frac{\pi + 2\pi m}{2m+1}) = -\sqrt[n]{(-a)},$ коли $a < 0$ (і тоді $\varphi = \pi$). Цей дійсний корінь найчастіше і позначають як $\sqrt[n]{a} = \sqrt[2m+1]{a} \quad \forall a \in R.$

2) У випадку парного $n = 2m$ серед коренів n-го степеня з числа a існують дійсні тоді й тільки тоді, коли $a \ge 0$. При цьому, якщо $a > 0$, то таких дійсних коренів існує лише два: $b_0 = \sqrt[n]{|a|} = \sqrt[2m]{a}$ і $b_m = \sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{2\pi m}{2m} + i\sin\frac{2\pi m}{2m}) = -\sqrt[2m]{a}$. Лише b_0 позначають як $\sqrt[2m]{a}$.

3) Якщо $a \notin R$, то серед значень кореня n-го степеня з числа a не існує жодного дійсного, усі b_k, $k \in \overline{0, n-1},$ є так званими уявними числами.

1.7. Які числа можна вважати значеннями степеня $a^{\frac{m}{n}}$. У літературі зустрічається позначення виразом $\sqrt[n]{a}$ множини усіх значень кореня n-го степеня з числа $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, яка визначається рівністю (5). Враховуючи це і формулу Муавра: $a^n = |a|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, дістаємо такі випадки:

1) Множина

$$\sqrt[n]{a^m} := \sqrt[n]{|a|^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)} = \left\{\sqrt[n]{|a|^m}_{+}(\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}); k \in \overline{0, n-1}\right\}$$

має n попарно різних значень;

2) Множина

$$\sqrt[np]{a^{mp}} := \sqrt[np]{|a|^{mp}(\cos mp\varphi + i\sin mp\varphi)} = \left\{\sqrt[n]{|a|^m}_{+}(\cos\frac{mp\varphi + 2k\pi}{np} + i\sin\frac{mp\varphi + 2k\pi}{np}); k \in \overline{0, np-1}\right\}$$

має вже np попарно різних значень $\forall p \in N$;

1*) Множина $(\sqrt[n]{a})^m = \left\{(\sqrt[n]{|a|}_{+}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}))^m\right\} =$

$= \left\{\sqrt[n]{|a|^m}_{+}(\cos\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) : k \in \overline{0, n-1}\right\}$ має n_1 попарно різних значень, якщо нескоротний дріб $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m}{n}$;

2*) Множина $(\sqrt[np]{a})^{mp} = \left\{(\sqrt[np]{|a|}_{+}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{np} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{np}))^{mp}\right\} =$

$= \left\{\sqrt[n]{|a|^m}_{+}(\cos\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) : k \in \overline{0, n-1}\right\} = (\sqrt[n]{a})^m$ має ті самі значення, що й у випадку 1*).

Таким чином, позначаючи виразом $a^{\frac{m}{n}}$ множину усіх можливих значень кореня n-го степеня з a^m, тобто $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} =$ $= \sqrt[n]{|a|^m}\left(\cos\frac{m\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{m\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ дістаємо, що перехід до показника $\frac{mp}{np}$, який дорівнює $\frac{m}{n}$, розширює цю множину, збільшуючи кількість її елементів у p разів.

На відміну від цього, якщо позначити виразом $a^{\frac{m}{n}}$ множину m-их степенів усіх можливих значень кореня n-го степеня з числа a, тобто $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{|a|^m}\left(\cos\frac{m}{n}(\varphi + 2\pi k) + i\sin\frac{m}{n}(\varphi + 2\pi k)\right)$, $k \in \overline{0,\, n_1 - 1}$ то перехід до показника $\frac{mp}{np}$ не змінює цю множину ані за складом елементів, ані за кількістю елементів (ця кількість дорівнює n_1, де $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m}{n}$ і дріб $\frac{m_1}{n_1}$ – нескоротній), ані за їх впорядкованістю. Зокрема, $a^{\frac{n}{n}} := (\sqrt[n]{a})^n = a$ має лише одне значення на відміну від $a^{\frac{n}{n}} := \sqrt[n]{a^n}$, що має n різних значень, коли $a \neq 0$.

Сказане дає підставу вважати рівність (4) на відміну від рівності (3) коректним означенням узагальненого степеня числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$:

$$a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{|a|}^m\left(\cos\frac{m}{n}(\varphi + 2\pi k) + i\sin\frac{m}{n}(\varphi + 2\pi k)\right), \qquad (6)$$

причому під $\sqrt[n]{a}$ розуміють головне значення цього кореня за винятком випадку, коли мають справу з дійсним значенням степеня $a^{\frac{m}{2k-1}}$ з від'ємного числа, і тоді вважають, що

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[2k+1]{a} := -\left(\sqrt[2k+1]{|a|}\right).$$

1.8. Що таке степінь з ірраціональним показником? Оскільки кожне ірраціональне число $\alpha \in R$ можна як завгодно добре наблизити його раціональними наближеннями α_i з недостачею: $\alpha = \lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i$, то природно вважати, що

$$a^{\alpha} := \lim_{i\to\infty} a^{\alpha} \qquad (7)$$

де $\alpha_i = \dfrac{m_i}{n_i} \in Q$ і $a^{\alpha_i} = a^{\frac{m_i}{n_i}}$ – фіксоване значення узагальненого степеня визначене рівністю (6) з відповідними зауваженнями щодо $k : k = k_0$ – фіксоване.

Виявляється (див., наприклад, [1, с.82]), що коли $k = 0$, то границя (7) існує для будь-якого числа $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in (-\pi;\pi]$ причому

$$a^{\alpha} := \lim_{i\to\infty} a^{\alpha_i} = \lim_{i\to\infty}|a|^{\alpha_i} \cdot \lim_{i\to\infty}(\cos\alpha_i\varphi + i\sin\alpha_i\varphi) = |a|^{\alpha}(\cos\alpha\varphi + i\sin\alpha\varphi),$$

тобто степінь з ірраціональним показником α можна означити за допомогою рівностей:

$$|a|^{\alpha} = \lim_{i\to\infty}|a|^{\alpha_i} \text{ і } a^{\alpha} := |a|^{\alpha}(\cos\alpha\varphi + i\sin\alpha\varphi), \qquad (8)$$

де $|a|^{\alpha} = \lim_{i\to\infty}|a|^{\alpha_i}$, а $\varphi \in (-\pi;\pi)]$, $\alpha \in \boldsymbol{Q}$ і $\lim_{i\to\infty}\alpha_i = \alpha$.

Зокрема, якщо $a \geq 0$, то $\varphi = 0$, $|a| = a$ і $a^{\alpha_i} := \lim_{i\to\infty} a^{\alpha_i} \in R$ – *це дійсний степінь числа* $a \geq 0$ *з ірраціональним показником* α**,** а якщо $a < 0$, то $\varphi = \pi$, $|a| = (-a)$ і $a^{\alpha} := \lim_{i\to\infty}|a|^{\alpha_i}(\cos\alpha_i\pi + i\sin\alpha_i\pi) = (-a)^{\alpha}(\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi)$, тобто степінь a^{α} від'ємного числа a з ірраціональним показником α є уявним числом.

Замінюючи у формулі (8) φ на число $\varphi + 2\pi k$, де фіксоване $k \in Z$, $k \neq 0$, дістанемо зчисленну кількість "інших значень степеня a^{α} з ірраціональним показником α". Тому часто символом a^{α} позначають зчисленну множину $\{|a|^{\alpha}(\cos\alpha(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) : k \in Z\}$, кожен елемент якої вважають значенням степеня a^{α}, а елемент цієї множини, що відповідає параметру $k = 0$, називають *головним значенням степеня* a^{α} з ірраціональним показником α.

Серед усіх значень $b_k = |a|^{\alpha}(\cos\alpha(\varphi + 2\pi k) + i\sin\alpha(\varphi + 2\pi k)),\ k \in Z$, де $\alpha \in R \setminus Q$, а $\varphi \in (-\pi; \pi]$, дійсним може бути лише $b_0 = |a|^{\alpha}(\cos\alpha\varphi + i\sin\alpha\varphi)$, причому $b_0 \in R$ тоді й тільки тоді, коли $a \geq 0$.

1.9. Таким чином, дійсний степінь a^{α} дійсного числа a з дійсним показником α можна визначити умовами:

1) $a^1 = a,\ a^2 = a^1 \cdot a,\ \ldots,\ a^{\alpha} = a^{\alpha-1} \cdot a$, коли $\alpha = n \in N$;

2) $a^0 = 1$ і $a^{\alpha} = \dfrac{1}{a^n}$, коли $a \neq 0$ і $\alpha = -n,\ n \in N$;

3) $a^{\alpha} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, коли $a > 0$ та існують $m \in Z$ і $n \in N$, для яких $\alpha = \dfrac{m}{n}$, де $\sqrt[n]{a}$ – арифметичний корінь n- го степеня з числа a (для зручності вважають, що $\sqrt[1]{a} := a$);

4) $a^{\alpha} = (-1)^m \left(\sqrt[2k-1]{(-a)}\right)^m$, коли $a < 0$ та існують $m \in Z$ і $k \in N$, для яких $\alpha = \dfrac{m}{2k-1}$, де $\sqrt[2k-1]{(-a)}$ – арифметичний корінь $(2k-1)$-го степеня з числа $(-a)$, (для зручності вважати, що $\sqrt[1]{a} := a \ \ \forall a$);

5) $a^{\alpha} = 0$, коли $a = 0$ і $\alpha > 0$;

6) $a^{\alpha} = \lim\limits_{i \to \infty} a^{\alpha_i}$, коли $a > 0$, $\alpha \in R \setminus Q$ і $\alpha = \lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i$;

7) якщо $a < 0$ і $\alpha \neq \dfrac{m}{2k-1}$ для будь-яких $m \in Z\ i\ k \in N$, то не існує дійсного степеня числа a з показником α.

Згідно із вказаними умовами маємо: $(-1)^3 = ((-1)\cdot(-1))\cdot(-1) = 1\cdot(-1) = -1$, а для знаходження $(-1)^{\frac{6}{2}}$ спочатку переконаємося, що існують $m \in Z$ і $k \in N$, для яких $\dfrac{6}{2} = \dfrac{m}{2k-1}$.

Це дійсно так, оскільки $\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$, тобто $m=3,\ k=1$, отже за умовою 4) $(-1)^{\frac{6}{2}}=(-1)^{\frac{3}{1}}=(-1)^{3}=-1$. При інших m і k, для яких $\frac{6}{2}=\frac{m}{2k-1}$ дістаємо той самий результат, тобто ***чітке означення дійсного степеня з дійсним показником виключає парадокси, згадані у пункті 1.5.***

2. Чи можна іншим (не гіршим) способом ввести поняття степеня a^{α}? Відповідь на це запитання позитивна. Зупинимося на способі введення поняття степеня, який тісно пов'язаний з одним із найважливіших математичних понять – експонентою числа (дійсного або комплексного).

Вважаючи, що поняття степеня a^{α} введено для довільного натурального показника $\alpha=n$ (див. пункт 1.1.), можна довести (див, наприклад, [2, с.23 і с.36]), що для будь-якого фіксованого числа z (дійсного чи комплексного) існує скінчена границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}$, яку називають *експонентою числа* z і позначають $\exp z$.

Отже

$$\exp z:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}. \tag{9}$$

Зокрема, якщо $z=1$, то число $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ позначають e. Таким чином

$$e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}. \tag{10}$$

2.1. З означення (9) випливають ***основні властивості експоненти*** [2, с. 39-42]:

1. $\exp 1=e$, де число e означено рівністю (10);
2. $\exp(z_1+z_2)=\exp z_1\cdot\exp z_2 \quad \forall z_1\ i\ z_2$;
3. $\lim\limits_{z\to z_0}\exp z=\exp z_0 \quad \forall z_0$.

Виявляється, що за допомогою лише властивостей 1)-3) можна довести *усі інші властивості експоненти,* зокрема:

4. $\exp z \neq 0 \quad \forall z$;

5. $\exp\frac{1}{n} = \sqrt[n]{e} \quad \forall n \in N$ і тому $\exp 0 = 1$;

6. $\exp(z_1 - z_2) = \exp z_1 / \exp z_2 \quad \forall z_1 \; i \; z_2$;

7. $\exp(zn) = (\exp z)^n \quad \forall z$ і тому $\exp\alpha = e^{\alpha} > 0 \quad \forall \alpha \in R$;

8. $\exp z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad \forall z$ і тому $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + r_n(z)$

де $|r_n(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{n!} \; \frac{\max\{1, |z|\}}{n}$;

9. $\exp(iy) = \cos y + i\sin y$ і тому $|\exp iy| = 1 \quad \forall y \in R$;

10. $\exp z = \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i\sin y) \quad \forall z = x + iy$;

11. $\exp(z + T) = \exp z \quad \forall z \Leftrightarrow T = 2\pi ki, k \in Z$

12. Рівняння $\exp w = z$ має зчисленну кількість розв’язків відносно w для будь-якого фіксованого числа $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. При цьому серед цих розв’язків є дійсний тоді і тільки тоді, коли $z = x > 0$. Цей дійсний розв’язок єдиний, його позначають $\ln x$ і називають *логарифмом натуральним числа* $x > 0$. Усі інші розв’язки рівняння $\exp w = z$ пов’язані з логарифмом натуральним рівністю:

$$w = w_k = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi), \; k \in Z,$$

коли $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

Сукупність точок $w_k, k \in Z$ часто позначають $\operatorname{Ln} z$ і пишуть:

$$\operatorname{Ln} z := \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi), k \in Z, \tag{11}$$

а те значення $\operatorname{Ln} z$, яке відповідає параметру $k = 0$, позначають

$$\ln z := \ln|z| + i\varphi \tag{12}$$

і називають *логарифмом натуральним комплексного числа* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$.

Таким чином, *логарифм натуральний існує для будь-якого числа* $z \neq 0$ *(а не тільки для додатного* z *), проте* $\ln z \in R$ *тоді й тільки тоді, коли* $z = x > 0$, тобто *дійсний логарифм натуральний існує лише для додатних чисел.*

2.2. З означення логарифма натурального та з властивостей експоненти випливає, що коли α – дійсне, а $z = x > 0$, то обов'язково $x^{\alpha} = \exp(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x}$, а коли $\alpha \in R$, а $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^{\alpha} = |z^{\alpha}|(\cos\alpha\varphi + i\sin\alpha\varphi) =$

$= \exp(\alpha \ln|z|)\exp(i\alpha\varphi) = \exp(\alpha\ln|z| + i\alpha\varphi) = \exp\alpha(\ln|z| + i\varphi) = \exp(\alpha \ln z)$.

Звідси випливає доцільність введення поняття степеня a^{α} з довільним показником α і довільною основою $a \neq 0$ за допомогою рівності:

$$a^{\alpha} := \exp(\alpha \ln a), \text{ зокрема, } e^{\alpha} := \exp\alpha. \tag{13}$$

Символом a^{α} іноді позначають і сукупність чисел $\exp(\alpha \operatorname{Ln} a) := \exp\alpha(\ln|a| + i\varphi + i2k\pi), k \in Z$, кожне з яких можна назвати значенням *узагальненого степеня числа* $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ *з показником* α. Серед цих значень міститься і те, що означене рівністю (13), яке відповідає параметру $k = 0$; його називають *головним значенням узагальненого степеня числа а з показником* α. З ним в основному і мають справу на практиці, проте для $\alpha = \dfrac{m}{2n+1}, m \in Z$ і $n \in N$, та $a < 0$ дійсне значення узагальненого степеня $a^{\alpha} = \exp\dfrac{m}{2n+1}(\ln|a| + i\pi + 2k\pi i)$ дістають, коли $k = n$, саме його позначають $a^{\alpha} := \exp\dfrac{m}{2n+1}(\ln|a| + i\pi(2m+1)) = \exp\left(\dfrac{m}{2n+1}\ln|a|\right)\cdot\exp i\pi m =$

$= (-1)^m \exp\dfrac{m}{2n+1}\ln(-a)$ і воно не є головним значенням узагальненого степеня числа a<0 з показником $\alpha = \dfrac{m}{2n+1}$.

Таким чином, *дійсний степінь дійсного числа* a *з дійсним показником* α *можна ввести так:*

$$a^{\alpha} := \begin{cases} e^{\alpha \ln a}, \text{ коли } a > 0, \\ 0, \text{ коли } a = 0 \text{ і } \alpha > 0, \\ (-1)^m e^{\alpha \ln(-a)}, \text{ коли } a < 0 \text{ і } \alpha = \dfrac{m}{2k-1}, m \in Z, k \in N, \end{cases} \quad (14)$$

за умови, що попередньо введено поняття експоненти дійсного числа $\exp x = e^x$ і логарифма натурального додатного числа: $\ln x$ та вказано процедури їх обчислення.

Легко бачити, що означення (14) є рівносильним означенням, введеним у пункті 1.9.

Зауважимо, що узагальнений степінь $a^{\alpha} := \exp \alpha(\ln|a| + i\varphi + 2k\pi i)$, $k \in Z$, може набувати дійсних значень і тоді, коли основа a та показник α є уявними. Наприклад, якщо, $a = \alpha = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$, то $|i| = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}$, $i^i := \exp i\left(\ln|i| + i\frac{\pi}{2} + i \cdot 2k\pi\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$, $k \in Z$, тобто усі значення узагальненого степеня i^i є дійсними числами.

3. Степеневою функцією називають функцію, значення якої знаходять за формулою $f(x) = x^{\alpha}$, де α – фіксований показник, а x – змінна. Це означення є коректним за умови, що попередньо введено поняття степеня числа x з показником α.

Властивості степеневої функції залежать від показника α. Найчастіше мають справу із *степеневою функцією дійсної змінної*: $f(x) = x^{\alpha}$, де x і α – дійсні, або із степеневою функцією комплексної змінної: $f(z) = z^{\alpha}$, де z і α – комплексні. В останньому випадку найчастіше вважають, що z^{α} – головне значення степеня числа z з показником α, тобто $z^{\alpha} := \exp\alpha(\ln|z| + i\varphi)$, коли $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

Для степеневої функції дійсної змінної розрізняють випадки:

1. $f(x) = x^n, n \in \boldsymbol{N}$ – степенева функція з натуральним показником, для якої $D(f) = R$;

2. $f(x) = x^{-n}, n \in \boldsymbol{N}$ – степенева функція з цілим від'ємним показником, для якої $D(f) = R \setminus \{0\}$;

3. $f(x) = x^{\frac{2k-1}{2n}}, k \in \boldsymbol{Z}, \quad n \in \boldsymbol{N}$ – степенева функція з раціональним показником, для якої $D(f) = (0;+\infty)$, коли $k < 1$ і $D(f) = [0;+\infty)$, коли $k \geq 1$;

4. $f(x) = x^{\frac{m}{2n-1}}, m \in \boldsymbol{Z}, \quad n \in \boldsymbol{N}$ – степенева функція з раціональним показником, для якої $D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, коли $m < 0$ і $D(f) = \boldsymbol{R}$, коли $m > 0$;

5. $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ – степенева функція з ірраціональним показником, для якої $D(f) = [0;+\infty)$, коли $\alpha > 0$, і $D(f) = (0;+\infty)$, коли $\alpha < 0$.

Усі ці випадки можна об'єднати за допомогою формули:

$$f(x) = x^{\alpha} := \begin{cases} \exp(\alpha \ln x), \text{ коли } x > 0, \\ 0, \text{ коли } x = 0 \text{ і } \alpha > 0, \\ (-1)^m \exp(\alpha \ln(-x)), \text{ коли } x < 0 \; i \; \alpha = \dfrac{m}{2k-1}, m \in \boldsymbol{Z}, k \in \boldsymbol{N}. \end{cases}$$

Таким чином, властивості степеневої функції є наслідками властивостей експоненти і логарифма натурального.

4. Показниковою функцією називають функцію, значення якої знаходять за формулою $f(x) = a^x$, де основа $a \neq 0$ – фіксоване число, а x – змінна. Як і для степеневої функції, дане означення є коректним, коли попередньо введено поняття степеня числа a з показником x.

Найчастіше мають справу з *показниковою функцією дійсної змінної*:

$$f(x) = a^x := \exp(x \ln a) =: e^{x \ln a}, \; \text{де} \; x \in R, a > 0 \; i \; a \neq 1,$$

та *з показниковою функцією комплексної змінної:*

$$f(z) = a^z := \exp(z \ln a) = \exp(z(\ln|a| + i\varphi)),$$

де $z \in \boldsymbol{C}$ $, 1 \neq a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0, \varphi \in (-\pi\ ; \pi]$.

Зокрема, якщо $a = e$, то дістаємо *експоненціальну функцію,* як показникову функцію з основою $a = e$:

$$f(x) = e^x := \exp x,\ x \in R, \text{ та } f(z) = e^z := \exp z,\ z \in C.$$

Таким чином, властивості показникової функції залежать від основи a і випливають з властивостей експоненти та логарифма натурального.

З наведених фактів випливає надзвичайна важливість експоненти і логарифма натурального фіксованого числа, та пов'язаних з ними понять експоненціальної і логарифмічної функцій.

Враховуючи це, наведемо формулювання двох важливих теорем.

Теорема 1 (про характеристичні властивості експоненціальної функції). *Для того, щоб функція* $y = f(x)$, $x \in R$, *була експоненціальною, необхідно і досить, щоб вона задовольняла принаймні одну з умов:*

1) $f'(x) = f(x)\ \forall x \in R$ і $f(0) = 1$;

2) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad \forall x \in R$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $f(1) = e$ і $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)\ \forall x_1$ і $x_2 \in R$.

Теорема 2 (про характеристичні властивості логарифма натурального). *Для того, щоб функція* $y = f(x)$, $x \in (0; +\infty)$, *була логарифмом натуральним, необхідно і досить, щоб вона задовольняла принаймні одну з умов:*

1) $f'(x) = \dfrac{1}{x}\ \forall x > 0$ і $f(1) = 0$;

2) функція f є оберненою до експоненціальної;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 > 0, \quad f(e) = 1 \quad$ і $\quad f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $\forall x_1 \in (0; +\infty)$ і $\forall\ x_2 \in (0; +\infty)$.

Доведення теорем 1 і 2 можна знайти у посібниках [3, с. 137-139] або [4, с. 158-159].

5. Висновки.

5.1. Коректне означення степеня, яке, зокрема передбачає, щоб були рівними два степені, у яких рівними є відповідні основи та показники, можна ввести різними способами, що є еквівалентними між собою.

При цьому, якщо основа степеня a>0, то для довільного раціонального показника $\alpha = \frac{m}{n}$, де $m\in \boldsymbol{Z}$, а $n\in \boldsymbol{N}$, степеня a^{α} можна вважати $\sqrt[n]{a^m}$, і $(\sqrt[n]{a})^m$ і $\exp(\frac{m}{n}\ln a)$, оскільки усі ці вирази є дійсними і тотожно рівними за вказаних умов.

Якщо ж a<0, то коректне означення дійсного степеня a^{α} можна ввести лише за умови існування чисел $m\in \boldsymbol{Z}$ і $k\in \boldsymbol{N}$ таких, що $\alpha = \frac{m}{2k-1}$. При цьому означення дійсного степеня a^{α} дійсного числа a з раціональним показником α доцільно вводити за допомогою нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, що дорівнює α,

$$a^{\alpha} := (-1)^m \left(\sqrt[2k-1]{|a|}\right)^m = (-1)^m \exp(\alpha \ln|a|)$$

Оскільки:

- по-перше, при цьому означення $a^{\alpha} := \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\alpha} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ є еквівалентними;
- по-друге, множина комплексних значень узагальненого степеня a^{α}, де $\alpha \in \boldsymbol{Q}$, має саме n елементів, за умови, що нескоротній дріб $\frac{m}{n}$ дорівнює α;
- і по-третє, дійні степені з раціональними показниками мають ті самі властивості, що й з цілим показником, якщо раціональні показники

вважати нескоротними дробами, зокрема, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$,

коли усі дроби $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{mn}{pq}$ – нескоротні.

5.2. Властивості дійсного степеня з додатною основою і з довільним дійсним показником такі самі, як і властивості степеня з цілим показником.

5. 3. Властивості дійсного степеня з від'ємною основою і з довільним раціональним показником, взагалі кажучи, не такі самі, як властивості степеня з цілим показником. Наприклад, якщо α і β - цілі, то для будь-яких

$$x^{\alpha\beta} = (x^{\alpha})^{\beta} = (x^{\beta})^{\alpha},$$

проте, якщо $x = -1$, $\alpha = 6$, а $\beta = \frac{1}{2}$, то $x^{\alpha\beta} = (-1)^3 = -1$, $(x^{\alpha})^{\beta} = ((-1)^6)^{\frac{1}{2}} = 1$, а $(x^{\beta})^{\alpha} = ((-1)^{\frac{1}{2}})^6$ – не існує у полі дійсних чисел, тобто, взагалі кажучи, $x^{\alpha\beta} \neq (x^{\alpha})^{\beta} \neq (x^{\beta})^{\alpha}$, коли $x<0$, а α і β не є одночасно цілими числами. Разом з тим, якщо раціональні числа α, β і $\alpha \cdot \beta$ є нескоротними дробами, то $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta} = (x^{\beta})^{\alpha}$.

Сучасні програмні засоби орієнтовано переважно на означення (13).

5.4. Степеневу функцію $f(x) = x^{\alpha}$ теж можна ввести різними, еквівалентними між собою способами. При цьому найчастіше означення степеневої функції орієнтоване на те, що попередньо введене поняття степеня додатного числа з даним показником. В силу цього серед функцій $f_1(x) = x^{\frac{2}{6}}$, $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_4(x) = (\sqrt[6]{x})^2$; $f_5(x) = \sqrt[6]{x^2}$ і $f_6(x) = e^{\frac{1}{3}\ln x}$ тотожними (однаковими) є функції $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і $y = f_3(x)$. Разом з тим усі ці функції є тотожно рівними між собою коли їх розглядати лише для $x \in (0; +\infty)$.

5.5. Для показникової функції, як і для степеневої, фундаментом є поняття степеня. У показникової функції змінюється показник, а основа фіксована , а у степеневої функції – навпаки.

Умову $a > 0$ для показникової функції дійсної змінної $y = a^x$ накладають для того, щоб вона набувала дійсних значень для дійсних x. Якщо $a < 0$, то a^x існує $\forall x \in R$, проте може бути уявним.

Умову $a \neq 1$ для показникової функції $f(x) = a^x$ накладають лише тому, що для $a = 1$ показникова функція перетворюється у сталу: $f(x) = 1\ \forall x$.

5.6. Використовуючи комп'ютер і програмні засоби для обчислення степенів та для побудови графіків степеневих функцій, корисно знати правило, за яким здійснюється обчислення степенів x^{α}. Зокрема, може виявитися, що комп'ютер будує графік функції $y = x^{\frac{1}{3}}$ у вигляді кривої, зображеної на рис. 1, нехтуючи частиною цього графіка, що відповідає від'ємним x.

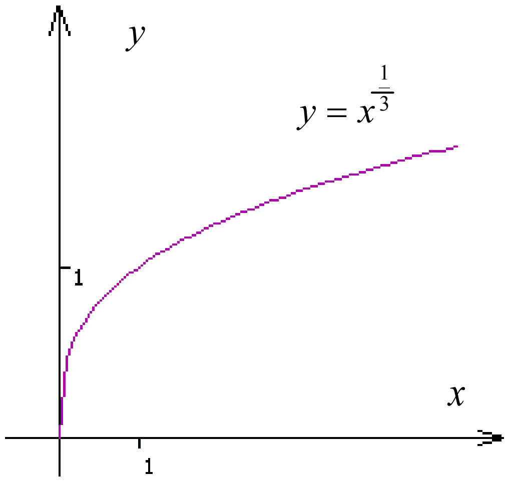

Рис. 1

5.7. Створюючи програмні засоби, пов'язані із знаходженням степенів, доцільно передбачати усі можливі випадки, коли ці степені набувають дійсних значень, за умови, що дійсні основа і показник. Для цього можна використати, наприклад, рівність (14).

ЛІТЕРАТУРА

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Частина 1.–К.: Вища школа, 1990.–384 с.

2. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Границя і неперервність функції .–К.: УДПУ ім. М.П. Драгоманова, 1997.– 94 с.

3. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Диференціальне числення функцій однієї змінної.–К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998.– 166 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс диференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966.– 608 с.