

МАТЕМАТИКА

УДК 373.5.091.33.–027.22:514.1

Соколенко Л. О., Швець В. О.

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

У статті, на основі проведеного аналізу змістового модуля “Площина і пряма в просторі” курсу “Аналітична геометрія”, виділено типи вправ і задач на застосування теорії прямої і площини, які призначені для вивчення властивостей фігур у просторі. Основними методами розв'язування цих задач є: метод координат та методи елементарної алгебри. Задачі систематизовано у відповідності до чинної навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів. Вони призначені для учнів, які вивчають курс “Геометрія” на профільному та поглибленому рівнях. Представлено методичку навчання розв'язування окремих типів задач.

Запропонований у статті підхід до побудови системи задач на застосування теорії прямої та площини розкриває роль теоретичних основ шкільного курсу “Геометрія” та сприяє підготовці старшокласників до вивчення курсу “Аналітична геометрія” у закладах вищої освіти (ЗВО).

Ключові слова: *теорія прямої та площини, властивості фігур у просторі, метод координат, курс “Аналітична геометрія”, стереометрія, профільний рівень навчання.*

Постановка проблеми. Теорія прямої та площини, є складовою курсу “Аналітична геометрія” і має безпосереднє відношення до вивчення властивостей фігур у просторі.

Різноманітність застосувань визначається змістом теоретичного матеріалу, з яким мають можливість ознайомитись учні, вивчаючи тему “Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі” курсу “Геометрія” на профільному [10] та поглибленому рівнях.

Аналіз змістового модуля “Площина і пряма в просторі” курсу “Аналітична геометрія” [13] на предмет виокремлення теоретичного матеріалу, який є базовим для розв'язування стереометричних задач шкільного курсу геометрія, дає змогу класифікувати та систематизувати задачі на застосування теорії прямої та площини, призначених для навчання курсу “Геометрія” на профільному та поглибленому рівнях.

Такий підхід до побудови системи задач розкриває роль теоретичних основ шкільного курсу “Геометрія” та сприяє підготовці учнів до подальшого навчання, зокрема для вивчення курсу “Аналітична геометрія”.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теорія прямої та площини, яка вивчається в курсі “Аналітична геометрія”, має безпосереднє відношення до шкільного курсу стереометрії. Певна увага цьому питанню приділена авторами навчальних посібників з геометрії для студентів педагогічних університетів [1, с.196-198], [2, с.145-146].

Різноманітні вправи та задачі, пов'язані з прямою та площиною, пропонуються у збірниках задач з аналітичної геометрії, серед яких [2], [5], [6] та ін. Задачі, пов'язані з загальним рівнянням площини, взаємним розміщення двох площин, визначенням відстані від точки до площини, включені до діючих альтернативних шкільних підручників, серед яких [3], [4], [7]-[9]. У підручнику [3] розглянуті рівняння площини у просторі та відповідні до них задачі.

Окремі питання, пов'язані з застосуванням теорії прямої на площині до розв'язування задач шкільного курсу геометрії в курсі “Аналітична геометрія”, розглядаються в роботі [12].

Постановка завдання (цілей статті). На основі аналізу змістового модуля “Площина і пряма в просторі” курсу “Аналітична геометрія” виділити типи вправ і задач на застосування теорії прямої і площини, які призначені для вивчення властивостей фігур у просторі, використовуючи основні методи дослідження: метод координат та методи елементарної алгебри.

Виділити типи задач, призначених для учнів, які вивчають курс “Геометрія” на профільному та поглибленому рівнях, у відповідності до чинної навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів [10]. Розкрити методику навчання розв'язування окремих типів задач.

Виклад основного матеріалу статті. Пряма та площина відносяться до основних понять (*простіших геометричних фігур*), які вивчаються в курсі “Аналітична геометрія” ЗВО та курсі “Геометрія” старшої школи. Але підходи до їх вивчення певним чином відрізняються.

У відповідності до чинних навчальних програм з математики для старшої школи [10], [11] в курсі геометрії 10 класу виокремлюються теми “Паралельність прямих і площин у просторі”, “Перпендикулярність прямих і площин у просторі”, “Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі”. Під час вивчення перших двох з них розглядаються різні розміщення у просторі прямих і площин, формулюються відповідні означення та доводяться ознаки, які потім застосовуються під час розв'язування задач. Вивчаючи третю тему: “Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі”, учні ознайомлюються з методом координат, який і є основним засобом дослідження аналітичної геометрії.

У курсі “Аналітична геометрія” геометричні образи, серед яких точки, прямі та площини, досліджуються засобами алгебри на основі методу координат. Відповідна навчальна дисципліна вивчається у ЗВО на 1-му курсі, зокрема студентами педагогічних спеціальностей, паралельно з дисципліною “Лінійна алгебра”. Міждисциплінарні зв'язки навчальних дисциплін “Лінійна алгебра” та “Аналітична геометрія” дають можливість засвоювати теорію прямої та площини в наступній послідовності:

Тема 1. Площина у просторі. Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (заданої точкою і напрямним підпростором; площини, яка проходить через три задані точки; у відрізках на осях; площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Нормальне рівняння площини. Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Розміщення площини відносно системи координат.

Тема 2. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин. Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин. [Відстань між паралельними площинами]. Пучок площин. Взаємне розміщення трьох площин. В'язка площин.

Тема 3. Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин. Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин).

Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої. Відстань між двома мимобіжними прямими.

Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Основні задачі на пряму і площину у просторі.

Аналіз змісту названих тем приводить до висновку, що переважна більшість з них є теоретичною основою курсу геометрії 10 класу старшої школи. При цьому виокремлюються питання, теоретичне обґрунтування яких можливе без використання понять лінійної алгебри (“визначник”, “матриця” та понять пов’язаних з ними), а також без використання векторного та мішаного добутку векторів і їх геометричних властивостей. До таких питань відносяться: 1) Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Загальне рівняння площини; 2) Розміщення площини відносно системи координат; 3) Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин; 4) Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин); 5) Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих; 6) Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною; 7) Відстані у просторі: відстань від точки до площини; відстань між паралельними площинами.

Саме ці питання і взяті за основу під час викладу даної теорії та її застосувань до розв’язування стереометричних задач у альтернативних підручниках геометрії для 10 класу, зокрема [3], [4], [7]-[9].

Класифікуючи задачі теми “Площина і пряма в просторі” курсу “Аналітична геометрія”, виокремлюють такі типи задач: 1) задачі, пов’язані з площиною у просторі; 2) задачі, пов’язані з прямою у просторі; 3) задачі, пов’язані з прямою і площиною [6]. Окремі з задач цих типів відіграють роль **опорних задач**.

До *опорних задач* шкільного курсу геометрії 10 класу, пов’язаних з теорією площини та прямої у просторі відносяться:

I. Задачі, пов’язані з площиною у просторі: 1) на складання рівняння площини (заданої точкою і нормальним вектором, загального рівняння площини); 2) на визначення належності точки площині, заданої загальним рівнянням; 3) на з’ясування розміщення площини відносно системи координат; 4) на з’ясування взаємного розміщення двох площин (паралельні, перетинаються під певним кутом, перпендикулярні); 5) на обчислення двогранного кута між площинами, заданими загальними рівняннями; 6) на визначення відстані від точки до площини; 7) на визначення відстані між паралельними площинами.

II. Задачі, пов’язані з прямою у просторі: 1) на складання рівняння прямої (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричних рівнянь прямої; заданої як перетин двох площин); 2) на визначення належності точки прямій; 3) на з’ясування взаємного розміщення двох прямих (прямі паралельні, прямі перетинаються під певним кутом, прямі перпендикулярні); 4) на обчислення кута між прямими, заданими канонічними рівняннями.

III. Задачі, пов’язані з прямою і площиною: 1) на складання рівняння прямої (площини), що проходить через певну точку перпендикулярно до площини (прямої); 2) на взаємне розміщення прямої та площини (пряма перетинає площину, паралельна площині, належить площині); 3) на визначення точки перетину прямої з площиною; 4) на визначення кута між прямою з площиною.

Опорні задачі мають різний рівень складності, певним чином пов’язані між собою.

Обґрунтуємо це на прикладі деяких видів задач, пов'язаних з площиною у просторі.

Приклад 1. Задачі на складання рівняння площини (заданої точкою і нормальним вектором) ускладнюються від безпосереднього складання рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, в якому координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$, та координати вектора нормалі $\vec{n}(A; B; C)$ відомі (задача 1), до випадків різного рівня складності, коли координати вектора нормалі потрібно знайти (задачі 2, 3).

Задача 1 [5, с. 129, № 913]. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2; 1; -1)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(1; -2; 3)$.

Задача 2 [5, с. 129, № 913]. Дано точки $M_1(3; -1; 2)$ і $M_2(4; -2; -1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Задача 3 [5, с. 129, № 915]. Точка $P(2; -1; -1)$ є основою перпендикуляра, який опущено з початку координат на площину. Складіть рівняння цієї площини.

Приклад 2. Задачі на з'ясування розміщення площини відносно системи координат, пов'язані з загальним рівнянням площини $Ax + By + Cz + D = 0$ та неповними рівняннями, можуть розв'язуватись аналітичним методом (задачі 4, 5) та містити вимогу побудови такої площини, після проведення аналізу рівняння (задача 6).

Задача 4. [5, с. 133, № 941(1)]. Складіть рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M_1(4; -1; 2)$.

Задача 5. [5, с. 133, № 942(1)]. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(7; 2; -3)$ і $M_2(5; 6; -4)$ паралельно до вісі Ox .

Задача 6. Вказати особливості у розташуванні наступних площин та побудувати їх:
1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$; 2) $3x + 4y - 12 = 0$; 3) $4x + 5z - 20 = 0$; 4) $3y + 4z - 24 = 0$;
5) $2x - 9 = 0$; 6) $3y - 7 = 0$; 7) $4z - 11 = 0$; 8) $2y - 3z = 0$; 9) $x - 2z = 0$; 10) $2x - 5y = 0$;
11) $2x + 3y - 4z = 0$.

Опорні задачі шкільного курсу геометрії (ШКТ), пов'язані з теорією площини та прямої у просторі, використовують під час розв'язування окремих типів стереометричних задач.

Серед них виокремлюються 1) на складання рівняння площини, враховуючи додаткові умови її розміщення відносно інших площин та прямих; 2) задачі на знаходження ГМТ; 3) на знаходження точки симетричної даній відносно даної прямої; 4) задачі на обчислення величин; 5) задачі на доведення.

Розглянемо приклади таких задач.

Задача 7 (на складання рівняння площини, враховуючи додаткові умови її розміщення відносно інших площин) [5, с. 131, № 931]. Складіть рівняння площини α , яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин $\alpha_1: 2x - y + 3z - 1 = 0$, $\alpha_2: x + 2y + z = 0$.

Розв'язання. Нехай вектор нормалі площини α має координати $\vec{n}(A; B; C)$. Враховуючи вимогу задачі про перпендикулярність площин α і α_1 та α і α_2 , на основі рівності нулю скалярних добутків $\vec{n} \cdot \vec{n}_1$ та $\vec{n} \cdot \vec{n}_2$ складемо систему
$$\begin{cases} 2A - B + 3C = 0, \\ A + 2B + C = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, A та C виражають через B : $A = -7B$, $C = 5B$. Підставляючи ці значення у неповне загальне рівняння площини $Ax + By + Cz = 0$, оскільки вона проходить через початок координат, одержують $-7Bx + By + 5Bz = 0$. Звідки, поділивши на B , приходять до рівняння площини $\alpha: -7x + y + 5z = 0$.

Задача 8 (на знаходження ГМТ) [5, с. 137, № 972(1)]. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних площин $\alpha_1: 4x - y - 2z - 3 = 0$ і $\alpha_2: 4x - y - 2z - 5 = 0$.

Розв'язання. ГМТ простору, рівновіддалених від двох паралельних площин, є площина α , паралельна кожній з двох заданих, що проходить через середину їх спільного перпендикуляра [4, с.294].

Отже, $d_1 = d_2$, де d_1 – відстань від точки $M(x; y; z) \in \alpha$ до площини α_1 , а d_2 – відстань від точки $M(x; y; z) \in \alpha$ до площини α_2 .

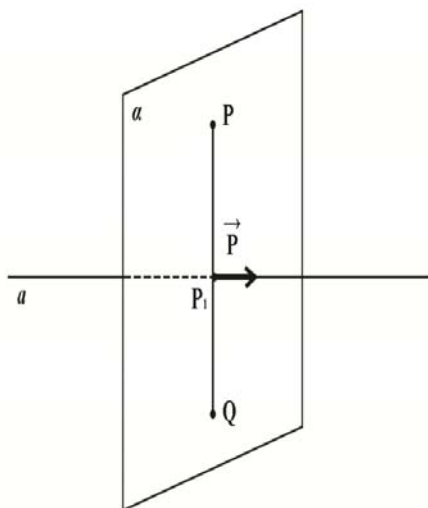
Використовуючи формулу відстані від точки $M(x; y; z)$ до площини, в даному випадку α_1 та α_2 матимемо рівняння $\left| \frac{4x - y - 2z - 3}{\sqrt{21}} \right| = \left| \frac{4x - y - 2z - 5}{\sqrt{21}} \right|$, розв'язуючи яке одержуємо рівняння площини $\alpha: 4x - y - 2z - 4 = 0$.

Задача 9 (на знаходження точки симетричної даній відносно даної прямої) Знайдіть точку Q симетричну до точки $P(4; 1; 6)$ відносно прямої $a: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2,5}{1}$.

Розв'язання. Для розв'язування цієї задачі складається рівняння площини (рис. 1), перпендикулярної до прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2,5}{1}$, в якій і розташовані точки P та Q симетричні відносно точки перетину площини та прямої a .

Напрямний вектор прямої $\vec{p}(2; -2; 1)$ є вектором нормалі до площини. Отже, рівнянням площини є рівняння: $2(x-4) - 2(y-1) + 1(z-6) = 0$ або рівносильне йому рівняння $2x + 2y + z - 12 = 0$.

Прирівнявши рівняння прямої до t та виразивши x, y, z через t одержують систему



$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -2t + 2, \\ z = t + 2,5, \\ 2x + 2y + z - 12 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи яку, знаходять координати точки $P_1(3; -1; 4)$ – середини відрізка PQ .

Використовуючи формули координат середини відрізка знаходять координати точки $Q(2; -3; 2)$.

Рис. 1

Задача 10 (на обчислення об'єму) [5, с. 133, № 947]. Обчисліть об'єм піраміди, яка обмежена площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ і координатними площинами.

Розв'язання. Представимо рівняння площини $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Одержимо, $\frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$. Матимемо відрізки, які відтинає площина на осях координат $a = 6, b = -4, c = 2$.

Побудуємо цю площину у прямокутній системі координат (рис.2). Одержимо піраміду, основою якої є прямокутний трикутник з катетами $a = 6, b = 4$ та висотою $H = 2$. За формулою об'єму піраміди обчислимо $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot 2 = 8$ (куб. од.).

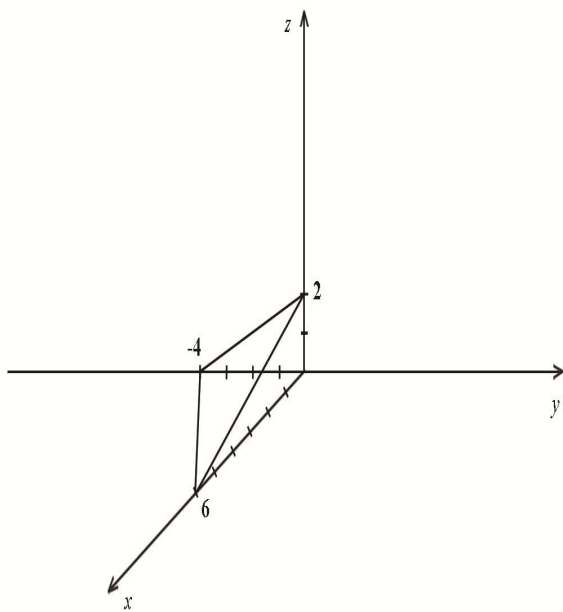


Рис. 2

Задача 11 (на доведення). [2, № 1183]. Доведіть, що для висоти h трикутної піраміди з взаємно перпендикулярними бічними ребрами, які дорівнюють a, b, c , виконується співвідношення $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$.

Розв'язання. Нехай вершина піраміди співпадає з початком координат, а її бічні ребра з додатними півосями прямокутної системи координат.

Тоді рівняння площини $ABC: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (у "відрізках на осях"). Звівши його до загального одержуємо: $bcx + acy + abz - abc = 0$. Висота h піраміди дорівнює відстані від точки $O(0; 0; 0)$ до цієї площини $h = \frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$.

Звідки $h^2(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) = a^2b^2c^2$. Поділивши цей вираз на $h^2a^2b^2c^2$, одержуємо рівність, яку слід було довести.

Висновки з проведеного дослідження. Проведений аналіз змістового модуля "Площина і пряма в просторі" курсу "Аналітична геометрія" дав можливість виділити типи задач, які розв'язуються, використовуючи теоретичний апарат шкільного курсу стереометрії старшої школи. Представлені способи та методи розв'язування таких задач переконують в тому, що курс "Аналітична геометрія" є теоретичною основою теми "Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі" шкільного курсу. На основі цього побудована система задач, призначена для навчання згаданої теми на профільному та поглибленому рівнях, яка може бути розширена за запропонованим у статті підходом.

Використана література:

1. Атанасян Л. С. Геометрія. В 2-х ч. Ч. 1. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Л. С. Атанасян, В. Т. Базилев. – М. : Просвещение, 1986. – 336 с.

2. *Атанасян Л. С.* и др. Сборник задач по геометрии. Ч. 1 / Л. С. Атанасян и др. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.
3. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім “Освіта”, 2018. – 272 с.
4. *Істер О. С.* Геометрія: (профіль. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 368 с.
5. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 224 с.
6. *Кобко Л. М.* Аналітична геометрія. Частина 3. Площина і пряма в просторі : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / Л. М. Кобко, І. Б. Глінка-Єремко. – Чернігів, 2008. – 75 с.
7. *Мерзляк А. Г.* Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 240 с.
8. *Мерзляк А. Г.* Геометрія: початок вивчення на поглибл. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 272 с.
9. *Нелін Є. П.* Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін]. – Харків : Вид-во “Ранок”, 2018. – 240 с.
10. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // <https://mon.gov.ua/.../programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>
11. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики) // <https://mon.gov.ua/.../programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>
12. Соколенко Л. О. Про застосування теорії прямої до розв’язування задач шкільного курсу геометрії / Л. О. Соколенко // Сучасна освіта в контексті нової української школи : зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області [та ін.]. – Чернівці, 2018. – С. 153-156.
13. *Яковець В. П.* Аналітична геометрія : навчальний посібник / В. П. Яковець, В. Н. Боровик, Л. В. Ваврикович. – Суми : ВТД “Університетська книга”, 2004. – 296 с.

References:

1. *Atanasyan L. S.* Geometri`ya. V 2-kh ch. Ch. 1. Ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. fak. ped. in-tov / L. S. Atanasyan, V. T. Bazilev. – M. : Prosveshhenie, 1986. – 336 s.
2. *Atanasyan L. S.* i dr. Sbornik zadach po geometrii. Ch 1. – M. : Prosveshhenie, 1973. – 256 s.
3. Geometri`ya. Profi`lnij ri`ven` : pi`druch. dlya 10 kl. zakladi`v zagal`noyi seredn`oyi osvi`ti / G. P. Bevez, V. G. Bevez, V. M. Vladimirov, N. G. Vladimirova. – K. : Vidavnichij di`m “Osvi`ta”, 2018. – 272 s.
4. *Ister O. S.* Geometri`ya: (profi`l. ri`ven`) : pi`druch. dlya 10-go kl. zakl. zag. sered. osvi`ti / O. S. Ister, O. V. Yergina. – Kiyiv : Geneza, 2018. – 368 s.
5. *Kletenik D. V.* Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. Ucheb. posobie dlya vtuzov / D. V. Kletenik. – M. : Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. – 224 s.
6. *Kobko L. M.* Analitichna geometri`ya. Chastina 3. Ploshhina i` pryama v prostori`. Navchal`nij posi`bnik dlya studentiv`v vishhikh navchal`nikh zakladi`v / L. M. Kobko, I. B. Glinka-Yeremko. – Cherni`gi`v, 2008. – 75 s.
7. *Merzlyak A. G.* Geometri`ya : prof. ri`ven` : pi`druch. dlya 10 kl. zakladi`v zagal`noyi seredn`oyi osvi`ti / A. G. Merzlyak, D. A. Nomi`rovs`kij, V. B. Polons`kij, M. S. Yaki`r. – Kh. : Gi`mnazi`ya, 2018. – 240 s.
8. *Merzlyak A. G.* Geometri`ya : pochatok vivchennya na poglibl. ri`vni` z 8 kl., prof. ri`ven` : pi`druch. dlya 10 kl. zakladi`v zagal`noyi seredn`oyi osvi`ti / A. G. Merzlyak, D. A. Nomi`rovs`kij, V. B. Polons`kij, M. S. Yaki`r. – Kh. : Gi`mnazi`ya, 2018. – 272 s.
9. *Nelin Ye. P.* Geometri`ya (profi`lnij ri`ven`): pi`druch. dlya 10 kl. zakl. zagal. sered. osvi`ti / Ye. P. Nelin]. – Kharki`v : Vid-vo “Ranok”, 2018. – 240 s.
10. Navchal`na programa z matematiki dlya uchni`v 10-11 klasi`v zagal`noosvi`tni`kh navchal`nikh zakladi`v. Profi`lnij ri`ven` // <https://mon.gov.ua/.../programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>

11. Navchal'na programa z matematiki dlya uchni'v 10-11 klasi'v zagal'noosvi'tni'kh navchal'nikh zakladi'v (dlya klasi'v z pogliblenim vivchennyam matematiki) // <https://mon.gov.ua> / ... programi / navchalni-programi- dlya – 10-11...2018
12. Sokolenko L. O. Pro zastosuvannya teori'yi pryamoyi do rozv'yazuvannya zadach shki'l'nogo kursu geometri'yi / L. O. Sokolenko // Suchasna osvita v konteksti' novoyi ukrayins'koyi shkoli: zb. tez za materi'alami Vseukrayins'koyi naukovopraktichnoyi konferenczi'yi z mi'zhnarodnoyu uchastyu, 11-12 zhovtnya 2018 r. / M-vo osviti i nauki Ukraini, Institut pi'slyadiplomnoyi pedagogichnoyi osviti Chernivets'koyi oblasti [ta i n.]. – Chernivci', 2018. – S. 153-156.
13. Yakovecz' V. P. Analitichna geometri'ya: Navchal'nij posibnik / V. P. Yakovecz', V. N. Borovik, L. V. Vavrikovich. – Sumi : VTD "Universitets'ka kniga", 2004. – 296 s.

Соколенко Л. О., Швець В. А. Применение теории прямой и плоскости в решение пространственных задач

В статье, на основе проведенного анализа содержательного модуля “Плоскость и прямая в пространстве” курса “Аналитическая геометрия”, выделены типы упражнений и задач на применение теории прямой и плоскости, предназначенные для изучения свойств фигур в пространстве. Основными методами решения этих задач являются: метод координат и методы элементарной алгебры. Задачи систематизированы в соответствии с действующей учебной программы по математике для учащихся 10-11 классов. Они предназначены для учащихся, изучающих курс “Геометрия” на профильном и углубленном уровнях. Представлена методика обучения решения отдельных типов задач.

Предложенный в статье подход к построению системы задач на применение теории прямой и плоскости раскрывает роль теоретических основ школьного курса “Геометрия” и способствует подготовке старшеклассников к изучению курса “Аналитическая геометрия” в учреждениях высшего образования (ЗВО).

Ключевые слова: теория прямой и плоскости, свойства фигур в пространстве, метод координат, курс “Аналитическая геометрия”, стереометрия, профильный уровень обучения.

Sokolenko L., Shvets V. The application of the theory of line and plane in solving spatial problems

Based on the analysis of the content module “Plane and a straight line in space” of the course “Analytical geometry”, the article identifies the types of exercises and tasks for applying the theory of a straight line and a plane, designed to study the properties of figures in space. The main methods for solving these problems are: the coordinate method and methods of elementary algebra. The tasks are systematized in accordance with the current curriculum in mathematics for students in grades 10-11. They are intended for students studying the course “Geometry” at the profile and advanced levels. A training technique for solving certain types of problems is presented.

The approach proposed in the article to constructing a system of problems for the application of the theory of a straight line and a plane reveals the role of the theoretical foundations of the school course “Geometry” and helps prepare high school students to study the course “Analytical Geometry” in higher education institutions.

Keywords: theory of a straight line and a plane, properties of figures in space, coordinate method, course “Analytical geometry”, stereometry, profile level of training.