КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ЛЕВІЩЕНКО Сергій Сергійович

ГРУПИ З ДЕЯКИМИ СИСТЕМАМИ ДИСПЕРСИВНИХ ПІДГРУП

01.01.06 — математична логіка, алгебра і теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1993

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі вищої математики Українського державного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова

Офіційні опоненти - член-кореспондент АН Республіки Беларусь,
доктор фізико-математичних наук,
професор ШЕМЕТКОВ Л.О.
доктор фізико-математичних наук,
професор ШУНКОВ В.П.
доктор фізико-математичних наук
ЧЕРНІКОВ М.С.

Провідна організація : Ужгородський державний університет

Захист відбудеться "17" січня 1994 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.01 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127 Київ - 127 проспект Глушкова, 6, механіко-математичний факультет, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці університету / вул.Володимирська, 62 /.

Автореферат розісланий "16" грудня 1993 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ОВСІЄНКО С.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність дослідження. Вивчення будови груп за заданими властивостями деяких систем її підгруп є одним з класичних і фундаментальних напрямів в теорії груп. Найбільш поширеним в цьому напрямі є такий підхід до визначення конкретного класу груп: серед усіх груп розглядаються лише ті, в яких виділено деяку систему підгруп Σ, кожна з яких володіє певною теоретико-груповою властивістю θ /для спрощення такий клас груп часто будемо позначати через $\mathfrak{K}(\Sigma, \theta)$/. Задача вивчення полягає в отриманні конструктивного опису всіх груп класу $\mathfrak{K}(\Sigma, \theta)$.

Започаткували цей напрям роботи Р.Дедекінда /1897 р./, Г.Міллера і Г.Морено /1903 р./, О.Ю.Шмідта /1924 р./ і ін. Загальна задача описання будови груп з тими чи іншими обмеженнями для тих чи інших систем їх підгруп явно була оформульована С.М.Черніковим /1969 р./. На цьому шляху було виділено багато важливих класів, які збагатили конкретну базу теорії груп. При такому підході, перш за все, виділяються і вивчаються класи $\mathfrak{K}(\Sigma, \theta)$ -груп, в яких Σ - система всіх власних підгруп. Зрозуміло, що групи з цього класу не обов"язково самі є θ -групами. Не θ -група, у якої всі власні підгрупи є θ -групами, називається мінімальною не θ -групою /означення А.І.Старостіна /1968 р.//. Добре відомі такі важливі класи мінімальних не θ -груп:

- скінченні мінімальні неабелеві групи /групи Міллера-Морена або $\mathcal{M}$ -групи/, введені в розгляд Г.Міллером і Г.Мореном в 1903 р. ;

- скінченні мінімальні ненільпотентні групи /групи Шмідта або S -групи/, введені в розгляд О.Ю.Шмідтом в 1924 р.;

- мінімальні нескінченні групи, введені в розгляд О.Ю.Шмідтом в 1938 р. /приклади таких неабелевих груп вперше побудував О.Ю.Ольшанський в 1979 р./.

Подальші дослідження в цьому напрямку присвячуються виділенню і вивченню тих класів $\mathfrak{K}(\Sigma, \Theta)$ -груп, у яких Σ містить вже не всі власні підгрупи. В ролі Σ може виступати, наприклад, множина всіх: 2-максимальних підгруп; підгруп непримарного індексу; власних підгруп підгруп непримарного індексу; власних неабелевих підгруп;,власних абелевих підгруп; неінваріантних підгруп і ін. Зауважимо, що в ролі Θ, незалежно від вибору Σ, можуть розглядатися такі важливі властивості: дисперсивність, φ -дисперсивність, дисперсивність за Оре, надрозв"язність, нільпотентність, абелевість, циклічність, нормальність, субнормальність, пронормальність і ін.

Важливе місце в дослідженнях розглядуваного напрямку посідають результати, які відносяться до вивчення скінченних груп. Найбільш яскраво ці результати відобразили в своїх роботах: П.П.Барановець, В.О.Белоногов, Я.Г.Беркович, Ю.А.Гольфанд, Л.С.Казарін, В.А.Крекнін, М.Ф.Кузенний, Л.А.Курдаченко, В.С.Монахов, В.Т.Нагребецький, А.І.Новіцький, В.М.Семенчук, В.В.Сергійчук, Я.П.Сисак, А.І.Старостін, А.Д.Устюжанінов, М.С.Черніков, С.М.Черніков, С.А.Чуніхін, Є.І.Шатило, Л.О.Шеметков, В.О. Шеріев, О.Ю.Шмідт, В.П.Шунков, Р.Бер, Н.Бленборн, М.Курціо, Де Віво Клоріндa, Й.Дер, К.Дерк, А.Фаттахі, З.Янко, Т.Хоукс, Б.Хупперт, О.Оре, П.Пелфі, Л.Редеі, М.Судзукі, Д.Томпсон. Розвитку цього напряму присвячена дана робота. Зауважимо, що в роботі в ролі Θ будуть виступати такі властивості: θ_0 /метациклічність, θ_1 /циклічність, θ_2 /абелевість, θ_3 /нільпотентність, θ_4 /надрозв"язність, θ_5 /дисперсивність за Оре, θ_6 / φ -дисперсивність, θ_7 /дисперсивність, а в ролі Σ - системи: Σ_1 /максимальних, Σ_2 /2-максимальних, Σ_3 /3-максимальних підгруп; Σ_4 /підгруп непримарного індексу, Σ_5 /власних підгруп підгруп непримарного індексу. Ясно, що для перелічених властивостей θ всі підгрупи θ -групи є також θ -групами, а означення не θ -групи є логічним запереченням θ -групи.

<u>Мета і об"єкти дослідження</u>. Для більш точного формулювання мети зупинимось на деяких означеннях і результатах.

Скінченна група G називається *дисперсивною*, якщо вона володіє таким інваріантним рядом

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \ldots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G ,$$

що фактор-група G_i/G_{i-1} - p_i -група, ізоморфна силовській p_i -підгрупі групи G , p_i - просте число, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо послідовність простих чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ складає деяку фіксовану упорядкованість φ , то дисперсивна група називається φ *-дисперсивною* групою. Клас скінченних φ -дисперсивних груп цікавий тим, що він складає формацію. Це зумовлює використання поняття φ -дисперсивності при формаційних дослідженнях груп.

Якщо для φ -дисперсивної групи G $p_i > p_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то G називається *дисперсивною за Оре* групою.

Одними з перших робіт, які мають відношення до дисперсивних груп, є роботи О.Оре /1939 р./, С.М.Чернікова /1940 р./.

В роботах Р.Бера /1958 р., 1966 р./, А.Фаттахі /1973 р./, Й.Дера /1970 р./, Й.Дера і Н.Мукерджі /1973 р./ були знайдені деякі характеристики дисперсивних груп і встановлені ознаки дисперсивності скінченних груп. Клас скінченних недисперсивних груп досить широкий /він, зокрема, містить всі скінченні нерозв"язні групи/ і вивчений не в повній мірі. В роботі Д.К.Фаддеєва /1947 р./ доведено, що для недисперсивної групи порядку $p^{\alpha}q$ виконується нерівність $p^{\delta}/(p,\delta) \le \alpha - 1$, де $\delta = \delta_q(p)$ – показник числа p за модулем q. Справедливість цієї нерівності для недисперсивної групи порядку $p^{\alpha}q^{\beta}$ з максимальною силовською p-підгрупою була доведена Л.О.Шеметковим /1969 р./. Він же узагальнив цей результат, а також встановив деякі властивості небіпримарних недисперсивних груп. В роботах Т.Хоукеса /1968 р./, Р.Картера, Б.Фішера, Т.Хоукеса /1968 р./, С.М.Черникова і автора /1973 р./, М.Ф.Кузенного і автора /1975 р./, М.Ф.Кузенного /1978 р./, А.Ф.Турбіна, В.Є.Горецького, М.Ф.Кузенного, В.В.Пилаєва /1984 р./ досліджуються деякі підкласи класу недисперсивних груп.

Серед усіх розглядуваних в роботі властивостей θ найбільш загальною є дисперсивність, всі попередні властивості, за виключенням метациклічності, є більш вузькими в порівнянні з наступними. Нагадаємо, що група називається **метациклічною**, якщо вона є добутком двох циклічних підгруп, одна з яких інваріантна. Властивість метациклічності за загальністю можна помістити між властивостями циклічності і надрозв"язності.

Відповідно до введених позначень маємо 40 класів груп: $\mathfrak{K}(\Sigma_i, \theta_j)$, де $i \in \overline{1,5}$, $j \in \overline{0,7}$. Оскільки $\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \Sigma_3$ і $\Sigma_4 \supset \Sigma_5$, а також $\theta_1 \to \theta_2 \to$

$\to \Theta_3 \to \Theta_4 \to \Theta_5 \to \Theta_6 \to \Theta_7$ і $\Theta_1 \to \Theta_0 \to \Theta_4$, то виникає ціла система включень розглядуваних класів. Зокрема, для будь-якого фіксованого i та будь-якого фіксованого j, $j \in \overline{1,7}$ маємо: $\mathfrak{K}(\Sigma_i, \Theta_{j+1}) \supset \mathfrak{K}(\Sigma_i, \Theta_j)$, а також $\mathfrak{K}(\Sigma_i, \Theta_1) \subset \subset \mathfrak{K}(\Sigma_i, \Theta_0) \subset \mathfrak{K}(\Sigma_i, \Theta_4)$. Зрозуміло, що для будь-якого j, $j \in \overline{0,7}$ $\mathfrak{K}(\Sigma_5, \Theta_j) \supset \mathfrak{K}(\Sigma_4, \Theta_j)$ і $\mathfrak{K}(\Sigma_3, \Theta_j) \supset \supset \mathfrak{K}(\Sigma_2, \Theta_j) \supset \mathfrak{K}(\Sigma_1, \Theta_j)$. Розмаїття відмічених включень введених сорока класів зумовлює необхідність пошуків загальних раціональних підходів до опису цих класів, які значно поповнюють конкретну базу теорії груп. Це і становить основну мету роботи.

Зауважимо, що будь-який клас $\mathfrak{K}(\Sigma, \Theta)$ є об"єднанням класів: всіх Θ -груп, які не потребують окремого дослідження, оскільки вже за означенням належать до $\mathfrak{K}(\Sigma, \Theta)$ і не Θ -груп розглядуваного класу, вивчення яких і є головною задачею опису $\mathfrak{K}(\Sigma, \Theta)$.

Зауважимо також, що часто складається невірне враження про тривіальність опису класу з вужчою властивістю Θ на основі опису класу з більш широкою властивістю Θ. Інколи так воно і є. Наприклад, з опису класу $\mathfrak{K}(\Sigma_1, \Theta_2)$ /об"єднання абелевих та мінімальних неабелевих груп/ легко отримати опис класу $\mathfrak{K}(\Sigma_1, \Theta_1)$ /об"єднання циклічних та мінімальних нециклічних груп/. В більшості ж випадків це далеко не так. Зокрема, з опису класу $\mathfrak{K}(\Sigma_1, \Theta_3)$ /об"єднання нільпотентних та мінімальних ненільпотентних груп/ аж ніяк не випливає опис класу $\mathfrak{K}(\Sigma_1, \Theta_2)$ /об"єднання абелевих та мінімальних неабелевих груп/, оскільки самостійного розгляду потребують нільпотентні мінімальні неабелеві групи. Відмітимо також, що подібні самостійні задачі для кожного Θ мають різний рівень складності. Всі ці міркування можна повторити і для класів $\mathcal{K}(\Sigma_i, \theta)$, $\mathcal{K}(\Sigma_j, \theta)$, де $\Sigma_i \supset \Sigma_j$.

Деякі з розглядуваних класів були описані іншими авторами, а деякі з них не скоро будуть досліджуватись. Детальніше на цьому зупинимось нижче.

Окреслимо коло розглянутих задач. Для зручності означимо матрицю $M_{5\times 8} = (\mathcal{K}_{ij})$, елементами якої є введені класи $\mathcal{K}(\Sigma_i, \theta_j) = \mathcal{K}_{ij}$, $i \in \overline{1,5}$, $j \in \overline{0,7}$ і розглянемо її як частину таблиці I.

Таблиця I

Властивість / Система підгруп	θ_0 метациклічність	θ_1 циклічність	θ_2 абелевість	θ_3 нільпотентність	θ_4 надрозв"язність	θ_5 дисперсивність за Оре	θ_6 φ - дисперсивність	θ_7 дисперсивність
Σ_1 всі максимальні підгрупи	$\mathcal{K}_{10}$	$\mathcal{K}_{11}$	$\mathcal{K}_{12}$	$\mathcal{K}_{13}$	$\mathcal{K}_{14}$	$\mathcal{K}_{15}$	$\mathcal{K}_{16}$	$\mathcal{K}_{17}$
Σ_2 всі 2-максимальні підгрупи	$\mathcal{K}_{20}$	$\mathcal{K}_{21}$	$\mathcal{K}_{22}$	$\mathcal{K}_{23}$	$\mathcal{K}_{24}$	$\mathcal{K}_{25}$	$\mathcal{K}_{26}$	$\mathcal{K}_{27}$
Σ_3 всі 3-максимальні підгрупи	$\mathcal{K}_{30}$	$\mathcal{K}_{31}$	$\mathcal{K}_{32}$	$\mathcal{K}_{33}$	$\mathcal{K}_{34}$	$\mathcal{K}_{35}$	$\mathcal{K}_{36}$	$\mathcal{K}_{37}$
Σ_4 всі підгрупи непримарного індексу	$\mathcal{K}_{40}$	$\mathcal{K}_{41}$	$\mathcal{K}_{42}$	$\mathcal{K}_{43}$	$\mathcal{K}_{44}$	$\mathcal{K}_{45}$	$\mathcal{K}_{46}$	$\mathcal{K}_{47}$
Σ_5 всі максимальні підгрупи підгруп непримарного індексу	$\mathcal{K}_{50}$	$\mathcal{K}_{51}$	$\mathcal{K}_{52}$	$\mathcal{K}_{53}$	$\mathcal{K}_{54}$	$\mathcal{K}_{55}$	$\mathcal{K}_{56}$	$\mathcal{K}_{57}$

Історично дослідження класів $\mathfrak{K}_{ij}$ почалося з введення класів $\mathfrak{K}_{12}$ /об"єднання абелевих та мінімальних неабелевих груп/, $\mathfrak{K}_{13}$ /об"єднання нільпотентних та мінімальних ненільпотентних груп/. Клас $\mathfrak{K}_{12}$ введений Г.Міллером і Г.Мореном в 1903 р. Ними встановлено, що мінімальні неабелеві групи /групи Міллера-Морено або $\mathcal{M}$ -групи/ можуть бути тільки примарними і біпримарними, а також дано опис таких біпримарних груп. Клас $\mathfrak{K}_{13}$ введений О.Ю.Шмідтом в 1924 р. Ним встановлено, що мінімальні ненільпотентні групи /групи Шмідта або S -групи/ можуть бути тільки біпримарними і дано їх першу характеризацію. Пізніше завершення опису груп Міллера-Морена і груп Шмідта здійснювалось у роботах Л.Редеї /1947 р., 1956 р. 1958 р./, Ю.О.Гольфанда /1948 р./ та ін. Конструктивно групи Міллера-Морена G виявилися такими:

I/ G – група кватерніонів;

2/ $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $m \geq 2$, $n \geq 1$, $b^{-1} a b = a^{1+p^{m-1}}$;

3/ $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, $b^{-1} a b = ac$, $b^{-1} c b = c$;

4/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$, $Q \ntriangleleft G$, $\mathcal{P}$ – мінімальна нормальна підгрупа групи G, $\alpha = \delta_q(p)$;

а групи Шмідта – такими:

Скінченна група G тоді і тільки тоді є групою Шмідта, коли вона розкладається в напівпрямий добуток $G = \mathcal{P} \leftthreetimes Q$ своїх інваріантної силовської p -підгрупи $\mathcal{P}$ порядку p^{α}, $\alpha \geq 1$ і неінваріантної силовської q -підгрупи $Q = \langle b \rangle$ порядку q^{β}, $\beta \geq 1$, і задовольняє таким умовам:

I/ $Z(G) = \Phi(G) = \Phi(\mathcal{P}) \times \langle b^q \rangle$;

2/ $G' = \mathcal{P}$ $\mathcal{P}' = \Phi(\mathcal{P})$; $G'' = \mathcal{P}'$; $\exp \mathcal{P}' \leq p$, 3/ якщо $\mathcal{P}' \neq 1$, то $Z(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' = \Phi(\mathcal{P})$;

4/ $\exp \mathcal{P} = p$ або $\exp \mathcal{P} = 4$ і $\mathcal{P}' \neq 1$;

5/ якщо $|\mathcal{P}'| = p^{\gamma}$, то $\alpha - \gamma = S_q(p)$, причому $\alpha \leq \frac{3}{2}(\alpha - \gamma)$, тобто $\gamma \leq \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$ і при $\alpha - \gamma$ непарному $\gamma = 0$, а $\mathcal{P}$ – абелева мінімальна нормальна підгрупа в G;

6/ якщо $a \in \mathcal{P} \setminus \Phi(\mathcal{P})$, то $G = \langle a, b \rangle = \langle a^{-1} b a, b \rangle$;

7/ G має точно два класи максимальних підгруп:
а/ $\{\mathcal{P} \times \langle b^{q} \rangle\}$, б/ $\{\Phi(\mathcal{P}) \times \langle a^{-1} b a \rangle \mid a \in \mathcal{P} \setminus \Phi(\mathcal{P})\}$

8/ довільна інваріантна в G p-підгрупа або співпадає з $\mathcal{P}$, або міститься в $\Phi(\mathcal{P})$;

9/ $C_{\mathcal{P}}(\langle b \rangle) = \Phi(\mathcal{P})$ і $|\mathcal{P}| = p$ при $|\mathcal{P} : \Phi(\mathcal{P})| = p$.

Тут і скрізь надалі через $\mathcal{P}$, Q, R, S будемо позначати відповідно деякі фіксовані силовські p-, q-, r-, s-підгрупи скінченної групи, p, q, r, s – попарно різні прості числа. Відмітимо також, що в дисертації використовуються загальновживані позначення і означення.

Клас $\mathcal{K}_{23}$ /об"єднання нільпотентних груп та нenільпотентних груп з нільпотентними 2-максимальними підгрупами/ введений в розгляд і описаний М.Судзукі /1957 р./, З.Янко /1962 р./ В.О.Белоноговим /1968 р./. М.Судзукі і З.Янко встановили, що нерозв"язні групи такого роду вичерпуються групами $PSL(2,5)$ і $SL(2,5)$. В.О.Белоногов дав опис розв"язних груп такого роду /такі ненільпотентні групи можуть бути тільки біпримарними і трипримарними, серед них лише один тип біпримарних недисперсивних груп/, а також зауважив, що з цього опису може бути отриманий опис ненільпотентних розв"язних груп з класу $\mathcal{K}_{22}$.

Сам клас $\mathcal{K}_{22}$ /об"єднання абелевих груп та неабелевих груп з 2-максимальними абелевими підгрупами/ розглядали В.О.Шеріев /1970 р./, Л.С.Казарін /1971 р./, П.Пелфі /1981 р./. В.О.Шеріев та Л.С.Казарін встановили будову примарних груп такого роду /їх виявилось 21 тип, їх уточненням займався С.В.Драганюк /1990 р.//; П.Пелфі дав опис таких непримарних розв"язаних груп /11 типів біпримарних груп, 3 типи трипримарних груп, причому серед всіх таких груп тільки одна група S_4 є недисперсивною/. Неважко встановити з опису нерозв"язних груп класу $\mathcal{K}_{23}$, що нерозв"язною групою з класу $\mathcal{K}_{22}$ є тільки група $PSL(2,5)$.

Клас $\mathcal{K}_{16}$ /об"єднання φ -дисперсивних та мінімальних не φ -дисперсивних груп/ ввела в розгляд і дала їх опис Де Віво Клоріндa /1979 р., 1980 р./

Класи $\mathcal{K}_{12}$, $\mathcal{K}_{13}$, $\mathcal{K}_{22}$, $\mathcal{K}_{23}$, $\mathcal{K}_{16}$ описані іншими авторами, але оскільки вони використовуються в роботі, то їх описи з необхідними уточненнями приводяться в теоремах 2.1.2, 2.1.1, 3.1.2, 3.1.1, 2.3.1 роботи відповідно.

Класи $\mathcal{K}_{27}$, $\mathcal{K}_{30}$, $\mathcal{K}_{34}$, $\mathcal{K}_{35}$, $\mathcal{K}_{36}$, $\mathcal{K}_{37}$, $\mathcal{K}_{45}$, $\mathcal{K}_{46}$, $\mathcal{K}_{47}$, $\mathcal{K}_{50}$, $\mathcal{K}_{54}$, $\mathcal{K}_{55}$, $\mathcal{K}_{56}$, $\mathcal{K}_{57}$, наскільки відомо автору, явно ще не досліджувались. Деякі результати опису класу $\mathcal{K}_{20}$ отримані автором, М.М.Семком, М.Ф.Кузенним /1985 р./; класу $\mathcal{K}_{40}$ - аспіранткою автора Л.І.Зузук /1993 р./; класу $\mathcal{K}_{44}$ - В.О.Монаховим /1991 р./.

Дослідженню будови решти 18 класів і присвячена дисертація. Про повноту опису і про вклад автора в ці описи буде йти мова при викладі основних результатів дисертації.

<u>Методи і методика дослідження</u>. Використовуться класичні методи досліджень: абстрактних груп, теорії чисел, теорії графів. На основі цих методів поряд за все отриманий повний опис

мінімальних недисперсивних груп. Після цього при дослідженні всіх інших класів застосовується такий методичний підхід: досліджуваний клас розбивається завжди на підкласи дисперсивних і недисперсивних груп. Потім дисперсивні групи вивчаються окремо з використанням класичних теорем Машке, Силова, Шура- Цассенхауза, конструкцій напівпрямих добутків, груп автоморфізмів та інших найбільш загальних і відомих результатів. Кожна з недисперсивних груп містить принаймні одну мінімальну недисперсивну підгрупу. Остання ж є завжди в розглядуваних класах групою цього ж класу. Ось чому першим кроком дослідження недисперсивних груп є повний опис мінімальних недисперсивних груп такого роду /їх, як правило простіших, виявляється значно менше, ніж довільних мінімальних недисперсивних груп, з яких ми них вибираємо/. Використовуючи цей опис і той факт, що тільки ці групи можуть бути мінімальними недисперсивними підгрупами недисперсивних груп такого роду, описуємо решту.

<u>Наукова новизна дослідження</u>. Всі основні результати дисертації є новими. Найважливішими з основних результатів слід вважати такі теореми дисертації:

2.2.2, 2.2.4, 2.2.6, 2.4.I, 2.5.2, 3.2.I, 3.2.2, 3.3.I, 3.4.I, 4.2.I, 4.2.2, 4.2.3, 4.3.I, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.4.I, 4.4.2, 4.4.3, 4.5.I, 4.5.2, 4.5.3, 4.6.I, 4.6.2, 4.6.3, 5.I.I, 5.2.I, 5.2.2, 5.2.3, 5.3.I, 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4, 5.3.5, 5.4.3, 5.4.4.

<u>Теоретичне та практичне значення дослідження</u>. Описані в роботі класи груп значно поповнюють конкретну базу теорії груп. Теоретичне значення має також запропонована методика дослідження груп. Отримані в роботі результати можуть бути використані при різноманітних теоретико-групових дослідженнях. Зокрема, во-

ни використовувались в роботах аспірантів автора О.С.Белозьорова, Н.Ю.Верпатової, С.В.Драганюка, Л.І.Зузук, роботах Н.П.Баришовця, В.Є.Горецького, О.В.Крайчука, В.А.Крекніна, М.Ф.Кузенного, В.С.Монахова, В.В.Пилаєва, М.М.Семка, О.В.Сидорова, І.Я.Субботіна, Л.Томанека, А.Ф.Турбіна, В.В.Цибуленка та ін.

Сформульовані і нерозв"язані в роботі задачі можуть служити темами кандидатських, дипломних та курсових робіт. Деякі розділи та параграфи можуть служити основою для спецкурсів та спецсемінарів.

Автором також опублікований навчальний посібник для студентів "Группы с условиями дисперсивности для подгрупп" [21], прочитано декілька спецкурсів на теми, пов"язані з матеріалом дисертації в Київському державному педагогічному інституті ім.М.П.Драгоманова, в Кошицькому університеті ім.П.Й.Шафарика /Словакія/, в вищому педагогічному інституті м.Санта Клара /Куба/.

Апробація роботи. Основні результати опубліковані в роботах [1 - 25], доповідались на 10 міжнародних та всесоюзних конференціях, симпозиумах та колоквіумах, на наукових та методичних семінарах, конференціях Інституту математики АН України, Гомельського відділення Інституту математики АН Білорусії, Гомельського, Київського, Кошицького /Словакія/, Красноярського, Московського університетів, Вінницького, Київського педінститутів. Результати робіт [3, 4, 12, 25] неподільні і отримані за рівною участю авторів. Результати інших робіт, написаних у співавторстві, належать автору дисертації.

Об"єм та структура роботи. Дисертація складається зі вступу та п"яти глав, містить 230 сторінок, у списку літератури 183 назви. Глави в свою чергу діляться на параграфи. Глави нумеруються римськими цифрами, а параграфи - двома арабськими /перша цифра - номер глави, друга - номер параграфа, наприклад, § 3.2 означає другий параграф третьої глави/. В першій главі 3 параграфи, в другій - 5, в третій - 4, в четвертій - 6, в п"ятій - 4. Означення, твердження, леми, теореми, наслідки, приклади, зауваження тощо нумеруються /незалежно один від одного/ трьома арабськими цифрами, наприклад, теорема 4.I.II означає одинадцяту теорему з першого параграфу глави IУ.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

У вступі: обгрунтована актуальність дослідження; сформульована мета і перелічені об"єкти дослідження; висвітлені методи і методика дослідження; показана наукова новизна дослідження; обгрунтоване теоретичне і практичне значення дослідження; подана інформація про апробацію та про об"єм і структуру роботи; викладено зміст дисертації.

У главі I "Методи вивчення скінченних груп з різними умовами дисперсивності для підгруп" розробляються методи вивчення скінченних груп з різними умовами дисперсивності для деяких фіксованих систем підгруп. Своєрідна переставна властивість підгруп довільної силовської бази скінченної розв"язної небіпримарної мінімальної недисперсивної групи дозволила ввести нове поняття, яке в роботі здобуло назву контура нормалізованості. Вивченню властивостей цього поняття присвячені §§ I.I, I.2. Для формулювання основних результатів цих параграфів дамо декілька необхідних означень.

Непорожня система Σ підгруп деякої групи G володіє властивістю взаємної нормалізованості /нормалізованості/, якщо довільна /деяка/ з підгруп A і B будь-якої пари A, B груп з Σ міститься в нормалізаторі іншої в групі G.

Підгрупа A нормалізує підгрупу B або B нормалізується підгрупою A, якщо $A \leq N_G(B)$ і підгрупа A строго нормалізує підгрупу B або B строго нормалізується підгрупою A, якщо $A \leq N_G(B)$, а $B \nleq N_G(A)$.

При нумерації множників розкладів, їх елементів тощо ми будемо часто вибирати індекс з групи лишків Z_n кільця цілих чисел Z за модулем n. При цьому зручно позначати через i як ціле число, так і елемент групи Z_n, який йому відповідає.

Однозначне відображення ψ групи Z_n, $n>0$ в непорожню систему підгруп деякої групи G називається нормалізаторно-контурним, а послідовність підгруп $\psi(i)$, $i \in Z_n$ називається контуром нормалізованості, якщо:

1/ підгрупа $\psi(i)$ строго нормалізує підгрупу $\psi(i+1)$ для всіх $i \in Z_n$;

2/ підгрупи $\psi(i)$ і $\psi(j)$, $j \bar{\in} \{i-1, i, i+1\}$ /несусідні підгрупи/ володіють властивістю взаємної нормалізованості.

В § 1.2 основними є такі теореми, які встановлюють зв"язок між недисперсивністю скінченної групи та контуром нормалізованості.

Теорема 1.2.1. Скінченна група тоді і тільки тоді недисперсивна, коли вона або не містить ні однієї силовської бази з властивістю нормалізованості, або довільна її силовська база з властивістю нормалізованості є контуром нормалізованості.

Т е о р е м а І.2.2. Скінченна розв"язна небіпримарна група тоді і тільки тоді є мінімальною недисперсивною групою, коли довільна її силовська база є контуром нормалізованості і ні одна силовська база будь-якої її власної підгрупи цією властивістю не володіє.

Т е о р е м а І.2.3. Скінченна група G тоді і тільки тоді володіє силовською базою, яка є контуром нормалізованості, коли G розкладається в добуток

$$G = \left(\underset{i \in \mathbb{Z}_n}{\times} A_i \right) \left(\underset{i \in \mathbb{Z}_n}{\times} B_i \right) , \qquad n \geq 3 ,$$

таких підгруп $\underset{i \in \mathbb{Z}_n}{\times} A_i$, $\underset{i \in \mathbb{Z}_n}{\times} B_i$, що :

I/ $1 \neq A_i = [A_i, B_{i-1}] \trianglelefteq G$ для всіх $i \in \mathbb{Z}_n$;

2/ підгрупа $A_i B_i = P_i$ - фіксована силовська p_i -підгрупа групи G , при цьому підгрупа $\langle P_i , B_j \rangle$ нільпотентна для всіх $j \overline{\in} \{ i-1, i \}$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$.

Відмітимо, що Р.Картер, Б.Фішер, Т.Хоукес /1968 р./, Т.Хоукес /1968 р./ використовували поняття контура нормалізованості на мові теорії графів.

В § I.3 вивчається будова одного класу скінченних недисперсивних груп нільпотентної довжини два, комутант яких не містить ні однієї силовської підгрупи всієї групи /елементарні недисперсивні групи/, цікавого тим, що він вичерпує всі небіпримарні і містить багато біпримарних мінімальних недисперсивних груп /відмітимо принагідно, що скінченну біпримарну недисперсивну групу, комутант якої містить обов"язково одну з її силовських підгруп. надалі будемо називати особливою недисперсивною групою/. В теоремі I.3.I встановлено, що всі елементарні недисперсивні групи вичерпуються недисперсивними підгрупами прямих добутків ненільпотентних біпримарних дисперсивних груп спеціального виду.

<u>У главі II</u> "Скінченні групи з деякими умовами дисперсивності для максимальних підгруп" подається повна інформація про будову класів $\mathfrak{K}_{12}$, $\mathfrak{K}_{13}$, $\mathfrak{K}_{16}$ /теореми 2.1.2, 2.1.1, 2.3.1 відповідно/. Як наслідок теореми 2.1.2 отримується опис класу $\mathfrak{K}_{11}$ /теорема 2.1.3/. Також встановлюється опис класів $\mathfrak{K}_{10}$, $\mathfrak{K}_{14}$, $\mathfrak{K}_{15}$ /теореми 2.5.2, 2.4.1, 2.3.2 відповідно/ та класу $\mathfrak{K}_{17}$ /теореми 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6/.

В § 2.1 з теореми 2.1.2 випливає опис класу $\mathfrak{K}_{11}$.

Т е о р е м а 2.1.3. Скінченні мінімальні нециклічні групи вичерпуються групами таких типів:

1/ G – елементарна абелева група порядку p^2;

2/ G – група кватерніонів;

3/ $G = P \leftthreetimes Q$, $\alpha = 1$, $Q = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$

В § 2.2 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних недисперсивних груп /в теоремі 2.2.2 – особливі, в теоремі 2.2.4 – елементарні, в теоремі 2.2.6 – нерозв"язні мінімальні групи/ /клас $\mathfrak{K}_{17}$ /.

В теоремі 2.2.2 отримано 9 типів особливих мінімальних недисперсивних груп. З цієї теореми можна дістати більш компактний опис таких груп.

Т е о р е м а 2.2.3. Особливі мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами таких типів:

1/ – 2/ $G = A \leftthreetimes (Q \leftthreetimes \langle b \rangle)$, де $\Phi(A) = A' \leq Z(A)$, $[Q, \Phi(A)] = 1$, $A/\Phi(A)$ – мінімальна нормальна підгрупа в $G/\Phi(A)$, $|A/\Phi(A)| = p^{b_1}$, $b_1 \geq 2$, $|Q/\Phi(Q)| = q^{\beta_1}$, $b_1 > \beta_1 = \delta_p(q)$, $|b| = p^{\delta}$, $\delta \geq 1$, $b^p \in Z(G)$, $[A, b] \not\leq \Phi(A)$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ – [illegible] p -[illegible] пи G ; при цьому в групах типу 1/ $Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ - група Шмідта, $C_Q(A) \leq \Phi(Q)$, $|\Phi(Q) : C_Q(A)| = q^{\gamma}$, $\gamma \leq 1$, а в групах типу 2/ $[\Phi(Q), b] \neq 1$, $C_Q(A) = \Phi(Q)$;

3/ G - група, яка є фактор-групою групи типу 1/ чи 2/ цієї теореми за їх центральною підгрупою простого порядку p, що не міститься ні в A, ні в $\langle b \rangle$. Групи цього типу можна також дістати як центральні розширення підгрупи простого порядку в $\Phi(G)$ за допомогою груп типу 1/ чи 2/.

Т е о р е м а 2.2.4. Елементарні мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами виду $G = \prod_{i \in Z_n} S_i$, $n \geq 2$, де $S_i = A_i \leftthreetimes \langle b_{i-1} \rangle$ - інваріантна в G підгрупа Шмідта, $A_i \langle b_i \rangle = P_i$ - силовська p_i-підгрупа групи G, $[S_i, S_j] = 1$, p_i, p_j - різні прості числа, $i \neq j$, $i, j \in Z_n$.

З теореми 2.2.4 можна дістати опис елементарних мінімальних недисперсивних груп в дещо іншому вигляді, аналогічному до опису особливих мінімальних недисперсивних груп в теоремі 2.2.3 /теорема 2.2.5/. Наявність різних видів опису особливих та елементарних мінімальних недисперсивних груп дозволяє більш ефективно конструювати такі групи, а також використовувати їх при вивченні скінченних недисперсивних груп.

Т е о р е м а 2.2.6. Скінченні нерозв"язні мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами наступних типів:

1/ G - група, в якій $\Phi(G)$ r-група, $G/\Phi(G) \cong PSL(2, 2^q)$, $q > 2$, $r \mid 2^q + 1$;

2/ G - група, в якій $\Phi(G) = D \times R$, $|D| \leq 2$, $G/R \cong SL(2, 3^q)$ або $PSL(2, 3^q)$, $r > 2$, $q > 2$, $r \mid 3^q + 1$;

3/ G - група, в якій $\Phi(G) = D \times R$, $|D| \leq 2$,

$\mathcal{R}$ - 5-група, $G/\mathcal{R} \cong SL(2,5)$ або $\mathcal{P}SL(2,5)$;

4/ G - група, в якої $\Phi(G) = \mathcal{D} \times \mathcal{P} \times \mathcal{R}$, $|\mathcal{D}| \leq 2$, $G/\mathcal{P} \times \mathcal{R} \cong SL(2,p)$ або $\mathcal{P}SL(2,p)$, $r \mid p+1$, $p \geq 13$, $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2-1 \not\equiv 0 \pmod{16}$.

5/ G - група, в якої $\Phi(G) = \mathcal{R} \times \mathcal{S}$, $G/\Phi(G)$ група Судзукі $Sz(2^q)$, $q > 2$, $r \mid 2^{2q}+1$, $s \mid 2^{2q}+1$, r і s не є одночасно дільниками чисел $2^q - 2^{q+1/2} + 1$ і $2^q + 2^{q+1/2} + 1$.

В § 2.3 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних не дисперсивних за Оре груп /клас $\mathcal{K}_{15}$ /.

Т е о р е м а 2.3.2. Скінченні мінімальні не дисперсивні за Оре групи вичерпуються не дисперсивними за Оре групами Шмідта виду $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $p < q$.

В § 2.4 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних ненадрозв"язних груп /клас $\mathcal{K}_{14}$ /. Такі групи вивчались в роботах Б.Хупперта /1954 р./, К.Дьорка /1966 р./, Є.І.Шатила /1970 р., 1973 р./, В.Т.Нагребецького /1975 р./. Ними отримано багато різних властивостей цих груп /всі ці властивості сформульовані в теоремі 2.1.4/. Зокрема, доведено, що вони дисперсивні і не більш ніж трипримарні, володіють єдиною силовською підгрупою шмідтовського типу. Нехай скінченна група G розкладається в напівпрямий добуток $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{B}$ своїх холовських підгруп $\mathcal{P}$ і $\mathcal{B}$ і підгрупа $\mathcal{P}$ задовольняє наступним умовам: 1/ $\mathcal{P}$ - силовська p-підгрупа групи G; 2/ експонента $\mathcal{P}$ не перевищує числа p або числа 4; 3/ $\mathcal{P}' \leq \Phi(\mathcal{P}) \leq Z(\mathcal{P})$; 4/ $\mathcal{P}' = 1$ при $\Phi(\mathcal{P}) \neq Z(\mathcal{P})$. 5/ експонента $\Phi(\mathcal{P})$ не перевищує числа p; 6/ $\mathcal{P}/\Phi(\mathcal{P})$ - нециклічна мінімальна нормальна підгрупа групи $G/\Phi(\mathcal{P})$. Тоді підгрупу $\mathcal{P}$ будемо називати силовською p-підгрупою груп G шмідтовського типу.

Теорема 2.4.1. Скінченні мінімальні ненадроза"язні групи вичерпуються групами наступних типів:

1/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $|\mathcal{P}| \geq p^2$;

2/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ - силовська p-підгрупа групи G шмідтовського типу, $\mathcal{Q}$ - циклічна група, $\Phi(\mathcal{P}) \leftthreetimes \mathcal{Q}$ і $\mathcal{P} \leftthreetimes \Phi(\mathcal{Q})$ - надроза"язні групи, $[\mathcal{P}, \Phi(\mathcal{Q})] = \mathcal{P}$;

3/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ - силовська p-підгрупа групи G шмідтовського типу; $\Phi(\mathcal{Q}) > C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \triangleleft G$; $\mathcal{Q}/C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})$ - або неабелева група порядку q^3 експоненти q, або примарна група Міллера-Морена, яка містить циклічну максимальну підгрупу; $p \equiv 1 \pmod q$; $\Phi(\mathcal{P}) \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}_1$ - надроза"язні групи, де $\mathcal{Q}_1$ - довільна максимальна підгрупа з $\mathcal{Q}$; $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}'] = \mathcal{P}$;

4/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes (\mathcal{Q} \leftthreetimes \mathcal{R})$, $\mathcal{P}$ - силовська p-підгрупа групи G шмідтовського типу; $\mathcal{Q}$ і $\mathcal{R}$ - циклічні групи: $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \mathcal{P}$, $[\mathcal{Q}, \mathcal{R}] = \mathcal{Q}$, $\Phi(\mathcal{P}) \times \Phi(\mathcal{Q}) \leq Z(\mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q})$, $\Phi(\mathcal{R}) = Z(\mathcal{Q} \leftthreetimes \mathcal{R})$; $\mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{R}$ - надроза"язна група.

В § 2.5 встановлюється опис мінімальних неметациклічних груп /клас $\mathcal{K}_{10}$ /. Всього в теоремі 2.5.2 отримано 30 типів таких груп. Ці групи раніше вивчали Н.Блекберн /1961 р./ /нільпотентний випадок/ і М.Курціо /1984 р./ /ненільпотентний випадок/. Вони встановили, що такі групи не більш ніж трипримарні, дисперсивні за Оре і що їх комутант може бути однією з груп: одинична група, група порядку p , група порядку pq , група кватерніонів; p , q - прості /не обов"язково різні числа/. В роботі М.Курціо неспожиченим лишилися групи типу G /ненільпотентні біпримарні мінімальні неметациклічні групи з інваріантною силовською підгрупою простого порядку/. В теоремах 2.1.5 та 2.1.6 уточнюється будова нільпотентних та нењільпотентних мінімальних неметациклічних груп. Головна ж частина цього параграфу присвячена дослідженню груп типу G_α. Виявилося, що всіх таких груп є 19 неізоморфних типів.

У главі III "Скінченні групи з деякими умовами дисперсивності для 2-максимальних підгруп" подається повна інформація про будову класів $\mathfrak{K}_{22}$, $\mathfrak{K}_{23}$ /теореми 3.1.2, 3.1.1/. Як наслідок теореми 3.1.2 отримується опис класу $\mathfrak{K}_{24}$ /теорема 3.1.3/. Також встановлюється опис класів $\mathfrak{K}_{24}$ /теорема 3.4.1/, $\mathfrak{K}_{25}$ /теорема 3.3.1/, $\mathfrak{K}_{26}$ /теореми 3.2.1, 3.2.2/.

В § 3.1 з теореми 3.1.2 отримується результат, який дає опис нециклічних груп з 2-максимальними циклічними підгрупами.

Т е о р е м а 3.1.3. Скінченні нециклічні групи, в яких всі 2-максимальні підгрупи циклічні, вичерпуються групами наступних типів:

1/ G - мінімальна нециклічна група;

2/ $G = \mathcal{P} \times H$, $|\mathcal{P}| = p$, H - мінімальна нециклічна не pd -група;

3/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$ - група Шмідта, $|Q| = q$, $\mathcal{P}$ - мінімальна нециклічна p -група;

4/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $\mathcal{P} \rtimes \langle b^q \rangle$ - мінімальна нециклічна група;

5/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = q$, $\mathcal{P} \rtimes \langle a \rangle$ - мінімальна нециклічна група, $C_Q(\mathcal{P}) = \langle b \rangle$;

6/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, Q - група кватерніонів, $\alpha = 1$, $p > 2$, $C_Q(\mathcal{P}) \neq Q$;

7/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $\mathcal{P}$ - циклічна група порядку p^2, $\Phi(\mathcal{P}) \rtimes Q$ - мінімальна нециклічна група;

8/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \rtimes Q$, $\mathcal{P}_2 \rtimes Q$ -

ступних типів:

1/ G - скінченна дисперсивна за Оре група;

2/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $p < q$;

3/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}$ - циклічна група, $\mathcal{P} \leftthreetimes \Phi(\mathcal{Q})$ - група Шмідта, $\Phi(\mathcal{P}) \le Z(G)$, $p < q$;

4/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \triangleleft G$, $\mathcal{P}_2 \triangleleft G$, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Phi(\mathcal{P}_1) = \Phi(\mathcal{P}_2)$, $\mathcal{P}_2 = \Phi(\mathcal{P}) \langle c \rangle$, $c \in \mathcal{P}_1$, $c^p \in \Phi(\mathcal{P})$, $\mathcal{P}_2 \le Z(G)$

$\mathcal{P}_1 \leftthreetimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $p < q$, кожна підгрупа Шмідта з G містить $\Phi(\mathcal{P})$;

5/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$; $\mathcal{P}_1 \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P}_2 \leftthreetimes \mathcal{Q}$ - групи Шмідта, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Phi(\mathcal{P}_1) = \Phi(\mathcal{P}_2) = \Phi(\mathcal{P}) \le Z(G)$, $p < q$, кожна підгрупа Шмідта з G містить $\Phi(\mathcal{P})$;

6/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$; $\Phi(\mathcal{P}) \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $G/\Phi(\mathcal{P})$ - група Шмідта, $p < q$;

7/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $b^q = 1$, $|[a, b]| \le q$, $\mathcal{P} \leftthreetimes \langle a \rangle$ - група Шмідта, $C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) = \Phi(\langle a \rangle) \times \langle b \rangle$, $\Phi(\mathcal{P}) \le Z(G)$, $p < q$;

8/ $G = (\mathcal{R} \times \mathcal{P}) \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $p < q$, $\mathcal{R}$ неодинична мінімальна нормальна підгрупа в підгрупі $\mathcal{R} \leftthreetimes \mathcal{Q}$, при $|\mathcal{R}| > r$ $r > q$;

9/ $G = (\mathcal{R} \times \mathcal{P}) \leftthreetimes \mathcal{Q}$; $\mathcal{R} \leftthreetimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$ - групи Міллера-Морена, $r < q$, $p < q$;

10/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes (\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$, $\mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $|\mathcal{R}| = r$, $[\mathcal{P}, \mathcal{R}] = \mathcal{P}$, $p < q$ або $p < r$, причому при $p < r$ $\mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{R}$ - група Шмідта, а $|\mathcal{Q}| = q$;

11/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes (\mathcal{Q} \leftthreetimes \mathcal{R})$, $\mathcal{P} \leftthreetimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $[\mathcal{Q}, \mathcal{R}] = \mathcal{Q}$, $|\mathcal{R}| = r$, $q > p > r$, $\Phi(\mathcal{P}) < \Phi(\mathcal{P})[\mathcal{P}, \mathcal{R}] < \mathcal{P}$;

12/ $G = \mathcal{P} \leftthreetimes (\mathcal{Q} \leftthreetimes \mathcal{R})$, $\mathcal{Q} \times \mathcal{R}$ - група Шмідта, $q < r < p$; $\mathcal{P}$ - мінімальна нормальна підгрупа непростого порядку в G

$[\mathcal{P},\mathcal{R}] \neq 1$, $[\mathcal{P}, Q] = \mathcal{P}$;

13/ $G = A(Q \rtimes \langle b \rangle)$, $A \triangleleft G$, $A\langle b \rangle = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}' \neq 1$, $A \rtimes Q$ група Шмідта, $b^p \in \Phi(A)$, $[Q, b] = Q$, $q > p$.

14/ $G = A(Q \rtimes \langle b \rangle)$, $A \triangleleft G$, $A/\Phi(A)$ – нециклічна мінімальна нормальна підгрупа в $G/\Phi(A)$, $A\langle b \rangle = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}' \neq 1$, $Z(G) = \langle b^p \rangle \times C_Q(A)$, $C_Q(A) \leq \Phi(Q)$, $|\Phi(Q) : C_Q(A)| \leq q$, $\Phi(A) \leq \Phi(\langle b \rangle)$, $|\Phi(A)| \leq p$, $[A, Q] = A$; $p > q$;

15/ $G \cong SL(2,5)$ або $PSL(2,5)$;

16/ $G \cong SL(2,p)$ або $PSL(2,p)$, $p \geq 13$, $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$;

17/ $G \cong PSL(2, 2^q)$; q, $2^q - 1$ – непарні прості числа;

18/ $G \cong PSL(2, 3^q)$; q, $3^q - 1/2$ – непарні прості числа.

В § 3.4 встановлюється опис класу $\mathcal{K}_{24}$ /теорема 3.4.1/. Задача опису скінченних розв"язних груп, в яких всі 2-максимальні підгрупи надрозв"язні, явно сформульована в монографії Л.О.Шеметкова /"Формации конечных групп". – М.: Наука, 1978 р./ як проблема /проблема 26/. В розв"язанні цієї задачі брали участь багато авторів, зокрема Я.Г.Беркович /1964 р./, А.І.Новіцький /1974 р./, Де Віво Клорінда /1979 р./, В.М.Семенчук /1979 р.; 1985 р./, В.Т.Нагребецький /1983 р./, О.В.Сидоров /1985 р./ та ін. Я.Г.Беркович без доведення навів список скінченних нерозв"язних груп, в яких всі 2-максимальні підгрупи надрозв"язні. В роботах А.І.Новицького і В.М.Семенчука отримані характеризації таких скінченних розв"язних груп при додаткових умовах /наприклад, $\Phi(G) = 1$ /. Де Віво Клорінда вивчала властивості скінченних простих груп і властивості силовських підгруп скінченних розв"язних груп, в яких всі 2-максимальні підгрупи надрозв"язні. Результати В.Т.Нагребецького стосуються таких же нерозв"язних груп з умовою $\Phi(G)=1$ і подаються без доведень. О.В.Сидоров довів деякі властивості скінченних розв"язних груп, у яких всі 2-максимальні підгрупи належать деякій формації $\mathfrak{F}$, де $\mathfrak{F}$, зокрема, формація надрозв"язних груп. Всього в теоремі 3.4.І отримано 34 типи, серед яких 33 типи ненадрозв"язних груп /групи типу 2/ - мінімальні ненадрозв"язні, групи типів 3/ - 34/ містять власну ненадрозв"язну підгрупу/. Групи типів: 3/ - 7/ - біпримарні дисперсивні, 8/ - 23/ - трипримарні дисперсивні, 24/ - 28/ - чотирипримарні дисперсивні, 29/ - 30/ - біпримарні мінімальні недисперсивні, 3І/ - 34/ - мінімальні нерозв"язні.

<u>У главі ІУ</u> "Скінченні групи з деякими умовами дисперсивності для підгруп непримарного індексу" дається опис класів $\mathcal{K}_{41}$, $\mathcal{K}_{42}$, $\mathcal{K}_{43}$, $\mathcal{K}_{51}$, $\mathcal{K}_{52}$, $\mathcal{K}_{53}$. В роботах автора /І973 - І975 р.р./ отримано конструктивний опис S^*-груп /клас $\mathcal{K}_{43}$ /. S^*-групи - це скінченні ненільпотентні групи, в яких всі підгрупи непримарного індексу нільпотентні. Окремі види скінченних ненільпотентних груп, в яких умова нільпотентності накладалась на всі власні підгрупи підгруп непримарного індексу всієї групи, розглядались П.П.Барашовцем і М.О.Островерхим /І980 р./. В роботах автора, а також С.М.Чернікова і автора /І97І - І973 р.р./ отримано конструктивний опис M^*-групп - скінченних неабелевих непримарних груп, в яких всі підгрупи непримарного індексу абелеві /клас $\mathcal{K}_{42}$ /. C^*-групи - скінченні непримарні нециклічні групи, в яких всі підгрупи непримарного індексу циклічні /клас $\mathcal{K}_{41}$ / вивчені в роботах автора /І97І р./. Для зруч-

ності в теоремах 4.I.I, 4.I.2, 4.I.3 подана повна інформація про S^* -, M^* -, C^* -групи /класи $\mathfrak{K}_{43}$, $\mathfrak{K}_{42}$, $\mathfrak{K}_{41}$ відповідно/. Деякі узагальнення відмічених класів груп на мові формацій здійснені О.В.Сидоровим /1985 р./. В §§ 4.I - 4.6 цієї глави встановлено опис S^{**} -, M^{**} -, C^{**} -груп /класи $\mathfrak{K}_{53}$, $\mathfrak{K}_{52}$, $\mathfrak{K}_{51}$ /. Скінченна ненільпотентна /відповідно непримарна неабелева, непримарна нециклічна/ група називається S^{**} /відповідно M^{**} -, C^{**} -/ -групою, якщо в ній всі власні підгрупи підгруп непримарного індексу нільпотентні /відповідно абелеві, циклічні/. Відмітимо, що в главі IУ дуже суттєво використовуються результати глави II, особливо при встановленні будови мінімальних недисперсивних S^{**} -, M^{**} -, C^{**} -груп /теореми 4.I.9, 4.I.10, 4.I.II відповідно/.

Т е о р е м а 4.I.9. Мінімальні недисперсивні S^{**} -групи вичерпуються групами наступних типів:

I/ G - мінімальна недисперсивна група порядку $p^\alpha q$, p, q - різні прості числа;

2/ $G \cong PSL(2,5)$;

3/ $G \cong SL(2,5)$.

Т е о р е м а 4.I.10. Мінімальні недисперсивні M^{**} -групи вичерпуються групами наступних типів:

I/ $G = A(\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle)$, $|a|=3$, $|b|=4$, A - група кватерніонів; $A \leftthreetimes \langle a\rangle$, $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ - групи Шмідта, $A\langle b\rangle$ - узагальнена група кватерніонів;

2/ $G = A \leftthreetimes (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle)$, $|a|=3$, $|b|=2$, A - група кватерніонів; $A \leftthreetimes \langle a\rangle$, $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ - групи Шмідта, $A \leftthreetimes \langle b\rangle$ - квазідіедральна група;

3/ $G = A \leftthreetimes (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle)$, $|a|=3$, $|b|=2^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \geq 1$, групи з дедекіндовими силовськими підгрупами вичерпуються групами наступних типів:

I/ $G = \underset{i \in \mathcal{Z}_n}{\times} S_i$, $n \geq 2$, $S_i = A_i \rtimes \langle b_{i-1} \rangle$ - група Міллера-Морена для всіх $i < n$; а S_n - або група Міллера-Морена, або група Шмідта з підгрупою A_n, ізоморфною групі кватерніонів і $p_{n-1} = 3$, $|b_n| = 2$, $A_i \times \langle b_i \rangle$ - силовська p_i - підгрупа групи G, p_i, p_j - різні прості числа при $i \neq j$, $i, j \in \mathcal{Z}_n$;

2/ $G \cong PSL(2, 2^q)$, q - просте число;

3/ $G \cong PSL(2, 3^q)$ або $SL(2, 3^q)$, q - просте непарне число;

4/ $G \cong PSL(2, 5)$ або $SL(2, 5)$;

5/ $G \cong PSL(2, p)$ або $SL(2, p)$, p - просте число, $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$;

Т е о р е м а 5.2.3. Критичні недисперсивні групи вичерпуються групами наступних типів:

I/ $G = A \rtimes (Q \rtimes \langle b \rangle)$, A - елементарна абелева група порядку p^k, $k \geq 2$, що є мінімальною нормальною підгрупою групи G, $|Q / \Phi(Q)| = q^{\beta_1}$, $k \geq \beta_1 \geq \delta_p(q)$, $|b| = p$, $Q \rtimes \langle b \rangle$ - група Шмідта, $[A, b] \neq 1$, $C_Q(A) = 1$, $|\Phi(Q)| \leq q$, $A \rtimes \langle b \rangle$ - силовська p -підгрупа з G ;

2/ $G = \underset{i \in \mathcal{Z}_n}{\times} M_i$, $n \geq 2$, $M_i = A_i \rtimes \langle b_{i-1} \rangle$ - група Міллера-Морена, $|b_i| = p_i$, $A_i \times \langle b_i \rangle = P_i$ - силовська p_i -підгрупа з G, p_i, p_j - різні прості числа, $i \neq j$, $i, j \in \mathcal{Z}_n$;

3/ $G \cong PSL(2, 2^q)$, q - просте число;

4/ $G \cong PSL(2, 3^q)$, q - непарне просте число;

5/ $G \cong PSL(2, p)$, p - просте число, $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$;

6/ $G \cong Sz(2^q)$, q – непарне просте число.

В § 5.3 вивчається будова скінченних груп з умовами нільпотентності, абелевості, циклічності для 3-максимальних підгруп. В теоремах 5.3.1 – 5.3.3 встановлено будову скінченних ненільпотентних груп, в яких всі 3-максимальні підгрупи нільпотентні. В теоремах 5.3.4, 5.3.5 встановлено конструктивний спис скінченних нерозв"язних груп, в яких всі 3-максимальні підгрупи відповідно абелеві, циклічні. Відмітимо, що будову примарних регулярних 2-породжених груп, в яких всі 3-максимальні підгрупи абелеві, встановив аспірант автора С.В.Драганюк /1989 – 1992 р.р./.

§ 5.4 присвячений встановленню деяких ознак дисперсивності і недисперсивності скінченних груп. Відмітимо серед них особливо теореми 5.4.3 і 5.4.4.

Т е о р е м а 5.4.3. Скінченна група дисперсивна, якщо в ній всі підгрупи Шмідта надрозв"язні.

Т е о р е м а 5.4.4. Порядок скінченної недисперсивної групи G ділиться або на 24, або на четвертий степінь деякого свого простого дільника, або ж силовська 2-підгрупа з G є елементарною абелевою підгрупою порядку 4 і G містить підгрупу H , ізоморфну групі одного з наступних типів:

1/ $\Phi(H)$ – r -група, $H/\Phi(H) \cong PSL(2,3^q)$, r і q -непарні прості числа, $r \mid 3^q+1$;

2/ $\Phi(H)$ – 5-група і $H/\Phi(H) \cong PSL(2,5)$;

3/ $\Phi(H) = \Phi_p \times \Phi_r$, Φ_p, Φ_r – силовські p - і r -підгрупи з $\Phi(H)$ відповідно, $H/\Phi(H) \cong PSL(2,p)$, p , r – різні прості числа, $r \mid p+1$, $p \geq 13$, , $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2-1 \not\equiv 0 \pmod{16}$.

На закінчення відмітимо, що найбільш повно в роботі дано одно таких класів: $\mathfrak{K}_{10}$, $\mathfrak{K}_{11}$, $\mathfrak{K}_{14}$, $\mathfrak{K}_{15}$, $\mathfrak{K}_{17}$, $\mathfrak{K}_{21}$, $\mathfrak{K}_{24}$, $\mathfrak{K}_{25}$, $\mathfrak{K}_{26}$, $\mathfrak{K}_{41}$, $\mathfrak{K}_{42}$, $\mathfrak{K}_{43}$, $\mathfrak{K}_{51}$, $\mathfrak{K}_{52}$, $\mathfrak{K}_{53}$. Класи $\mathfrak{K}_{31}$, $\mathfrak{K}_{32}$, $\mathfrak{K}_{33}$ досліджені лише частково і з різною точністю. Завершення описання кожного з цих класів може бути окремою задачею.

ПУБЛІКАЦІЇ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Скінченні ненільпотентні групи з деякими заданими системами нільпотентних підгруп // Допов. АН УРСР. Сер.А-1974 - № 1. - С. 35 - 37.
2. Конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса // Некоторые вопросы теории групп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1975. - С.197 - 217.
3. Разрешимые недисперсивные группы с некоторыми силовскими подгруппами, порядки которых делятся не более чем на куб простого числа // Укр.мат.журн. - 1975. 27, № 3. - С. 329 336 / сп. з Кузенним М.Ф./.
4. Конечные разрешимые минимальные недисперсивные группы // Укр.мат.журн. - 27, № 4. - 1975. - С. 526 - 528 / сп. з Кузенним М.Ф./.
5. О конечных недисперсивных группах. - Киев, 1978. - 48 с. - /Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 78.7/ /сп. з Кузенним М.Ф./.
6. Конечные квазибипримарные группы // XУ Всесоюзная алгебраическая конференция, Красноярск, 3-6 июля 1979 г.: Тез. докл. Часть первая. - Красноярск: Изд-во Красноярский госуниверситет, 1979. - С. 91.
7. Конечные квазибипримарные группы // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР.

- 1979. - С. 83 - 97.

8. Конечные недисперсивные группы, в которых любая подгруппа непримарного индекса нильпотентна либо является группой Шмидта // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1980. - С. 117 - 132 /сп. з Кузенним М.Ф./

9. Конечные ненильпотентные группы, в которых любая ненильпотентная подгруппа непримарного индекса является группой Шмидта// XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, Ленинград, 22 - 25 сентября 1981 г.: Тез. Часть вторая. - Ленинград, 1981. - С. 80 - 81 /сп.з Кузенним М.Ф./

10. Конечные бипримарные дисперсивные группы, в которых всякая подгруппа непримарного индекса нильпотентна либо является группой Шмидта // Исследование групп с заданными свойствами подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1981. - С. 93-104 /сп.з Кузенним М.Ф./.

11. Конечные дисперсивные небипримарные группы, всякая ненильпотентная подгруппа непримарного индекса которых является группой Шмидта // Подгрупповая характеризация групп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1982. - С. 74 - 84 /сп. з Кузенним М.Ф./.

12. Строение конечных минимальных недисперсивных групп // Группы и системы их подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1983. - С. 56 - 66 /сп. з Кузенним М.Ф./.

13. Об одном классе конечных минимальных недисперсивных групп // Строение групп и их подгрупповая характеризация. - Киев: Ин-т математики АН УССР. -1984. - С. 66 - 73 /сп. з Кузенним М.Ф./.

14. Группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп. -

Киев, 1984. - 60 с. - /Препр. / АН УССР. Ин-т математики: 84.II/.

I5. Недисперсивные группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп. - Киев, 1984. - 47 с. - /Препр. /АН УССР. ИН-т математики: 84.35//сп. з Кузенным М.Ф./.

I6. Группы с условиями дисперсивности для подгрупп. - Киев: КГПИ, 1985. - 96 с. / сп. з Кузенным М.Ф./.

I7. Конечные группы с условиями дисперсивности по Оре для 2-максимальных подгрупп. - Киев: КГПИ, 1986. - I5 с. - Деп. В УкрНИИНТИ I8.02.86, № 629 /сп. з Кузенним М.Ф./.

I8. Конструктивное описание конечных групп, у которых все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы. - Киев: КГПИ, 1986. - 42 с. - Деп. в УкрНИИНТИ I7.04.86, № I086 /сп. з Кузенним М.Ф. /.

I9. Конечные группы со сверхразрешимыми 2-максимальными подгруппами //Строение групп и свойства их подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1986. - С. 63 - 73 /сп. з Кузенним М.Ф./.

20. Конструктивное описания конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы метациклические // Исследование групп с ограничениями для подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1986. - С. 42 - 5I /сп. з Семком М.М./

2I. Конструктивное описание конечных минимальных несверхразрешимых групп //Вопросы алгебры. - Минск: Изд-во "Университетское", 1987. - № 3. - С. 56 - 63 /сп. з Кузенним М.Ф./.

22. Конечные группы Шмидта и их обобщения //Укр.мат.журн. - 1991. - 43 , № 7 - 8. - С. 963 - 968 /сп. з Кузенним М.Ф./.

23. Строение конечных минимальных неметациклических групп //

Zbornik Pedagogickej Fakulty Prešove, University P. J. Šafarika v Košiciach, Roč. XXIV, Zvazok 1, Prirodne vedy, matematika. - Košice . - 1990 /1992/. - S. 49 -98 /сп. з Кузенним М.Ф., Семком М.М., Томанеком Л./

24. Строение конечных групп, у которых все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы //там же. - С. I25 - I60 /сп. з Кузенним М.Ф. , Томанеком Л./.

25. Конструктивное описание конечных недисперсивных групп, в которых все подгруппы непримарного индекса абелевы // Укр. мат.журн. - I992. - 44 , № 6. - С. 8I8 - 822 /сп. з Черніковим С.М./.

Підп. до друку 14.12.93 . Формат 60х84/I6. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,86 . Ум. фарбо-відб. 1,86 . Обл.-вид. арк. 1,6 Тираж 100 пр. Зам. 453 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3