УДК 517.521.8

Білоцький М. М., Деканов С. Я., Михалін Г. О.
(НПУ ім. М. Драгоманова, м. Київ)

ТАУБЕРОВІ ТЕОРЕМИ ІЗ ЗАЛИШКОМ ДЛЯ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ ВОРОНОГО З РАЦІОНАЛЬНОЮ ТВІРНОЮ ФУНКЦІЄЮ

Для додатних регулярних середніх Вороного вигляду $W_n^{(p)} = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}S_k$ з твірною функцією $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, що є раціональною і задовольняє певні умови, вказано загальний метод одержання тауберових теорем із залишком.

A general method for obtaining of Tauberian theorems with a remainder for Voronoi positive regular means of the form $W_n^{(p)} = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}S_k$ with the generating function $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, which is rational and satisfies certain conditions, is suggested.

1. Нехай

$$p_0 > 0,\ p_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \ \text{ і } \ \frac{p_n}{P_n} \to 0\ (n \to \infty), \tag{1}$$

$$p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \frac{p_l(z)}{p_\alpha(z)} \ \ \forall z: \ |z| < 1, \tag{2}$$

де $p_l(z)$ і $p_\alpha(z)$ — деякі многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів l і α відповідно, причому $p_l(0) > 0$, $p_l(z)$ не має додатних нулів, а p_l і p_α не мають спільних нулів.

Функцію $p(z)$ називатимемо *твірною функцією* додатного регулярного *методу Вороного* (W, p) [1, с. 88 — 89], середні якого мають вигляд

$$W_n^{(p)} = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}S_k \ \ \forall n \in \mathcal{N}_0.$$

Будемо вважати, що додатні послідовності (λ_n) і (σ_n) задовольняють умови

$$0 < c_1 \leq \frac{\lambda_m}{\lambda_n},\ \frac{\sigma_m}{\sigma_n} \leq c_2 < +\infty,\ \text{коли}\ 0 < c_1^* \leq \frac{m}{n} \leq c_2^* < +\infty, \tag{3}$$

і нехай $\mu_n^{(\alpha)} = \lambda_n/\sigma_n^\alpha \; \forall n \in \mathcal{N}_0$ і $\forall \alpha \in \mathcal{N}_0$.

Точку $z = 0$ назвемо $(\mu^{(\alpha)})$-*точкою* послідовності (S_n), якщо існують послідовності (m_k), (n_k) і (θ_k) такі, що $1 < \dfrac{n_k}{m_k} \le 2 \; \forall k$, $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = +\infty$,

$$\lim_{k\to\infty} \min_{m_k \le n \le n_k} \mathrm{Re}\, e^{i\theta_k} S_n \mu_{n_k}^{(\alpha)} = \omega > 0 \;\text{ і }\; \varliminf_{k\to\infty} \sigma_{n_k}(1 - \frac{m_k}{n_k}) > 0. \tag{4}$$

Якщо у даному означенні $\omega = +\infty$, то казатимемо, що *точка* $z = \infty$ *є* $(\mu^{(\alpha)})$-*точкою* послідовності (S_n).

У випадку $\sigma_n \asymp 1$ або $\alpha = 0$ $(\mu^{(\alpha)})$-точку називатимемо (λ)-*точкою* послідовності (S_n).

Дане означення введено у роботі [2], і воно узагальнює поняття (C)-точки послідовності, введене М. О. Давидовим [3] (дивись також [4]).

2. Основними результатами роботи є наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай послідовність* (p_n) *задовольняє умови* (1) *і* (2), *а додатні послідовності* (λ_n) *і* (σ_n) — *умови* (3). *Нехай також точка* $z = 1$ *є нулем многочлена* $p_\alpha(z)$ *кратності* $\alpha_1 \in \mathcal{N}$. *Тоді якщо точка* $z = \infty$ $(z = 0)$ *є* $(\mu^{(\alpha_1)})$-*точкою послідовності* (S_n), *то* $\lambda_n W_n^{(p)} \ne O(1)$ $(\ne o(1))$ $(n \to \infty)$.

Теорема 2. *Нехай послідовності* (p_n), (λ_n) *і* (σ_n) *з теореми* 1, *а послідовність* (S_n) *задовольняє умову*

$$\varliminf_{n>m\to\infty} (S_n - S_m)\mu_m^{(\alpha_1)} \ge -r > -\infty, \;\text{коли}\; \sigma_m(1 - \frac{m}{n}) \to 0, \tag{5}$$

де $n = m_k \uparrow +\infty$ *або* $m = m_k \uparrow +\infty$. *Тоді якщо* $\lambda_n W_n^{(p)} = O(1)$ $(n \to \infty)$, *то* $\mu_{m_k}^{(\alpha_1)} S_{m_k} = O(1)$ $(k \to \infty)$, *а якщо* $r = 0$ *і* $\lambda_n W_n^{(p)} = o(1)$ $(n \to \infty)$, *то* $\mu_{m_k}^{(\alpha_1)} S_{m_k} = o(1)$ $(k \to \infty)$.

Наслідок 1. *Нехай послідовності* (p_n), (λ_n) *і* (σ_n) *з теореми* 1, *а послідовність* (S_n) *задовольняє умову*

$$\varlimsup_{n>m\to\infty} |S_n - S_m|\mu_m^{(\alpha_1)} \le r < +\infty, \;\text{коли}\; \sigma_m(1 - \frac{m}{n}) \to 0.$$

Тоді мають місце твердження теореми 2 $\forall (m_k) : m_k \uparrow +\infty$ $(k \to \infty)$

Наслідок 2. *Нехай послідовності* (p_n), (λ_n) *і* (σ_n) *з теореми* 1, *а* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *і* $\mu_n^{(\alpha_1)} a_n = O_L(\dfrac{\sigma_n}{n+1})$, *коли* $m_k \le n \le r_k$, $k \in \mathcal{N}$, *де* $m_k < n_k < r_k$, $m_k \uparrow +\infty$, *і* $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{\nu=m_k}^{n_k} \dfrac{\sigma_\nu}{\nu} > 0$ *та* $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{\nu=n_k}^{r_k} \dfrac{\sigma_\nu}{\nu} > 0$, *або* $\mu_n^{(\alpha_1)} a_n = O(\dfrac{\sigma_n}{n+1})$, *коли* $m_k \le n \le n_k$ *або* $n_k \le n \le r_k$, *причому відповідно* $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{\nu=m_k}^{n_k} \dfrac{\sigma_\nu}{\nu} > 0$ *або* $\varliminf\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{\nu=n_k}^{r_k} \dfrac{\sigma_\nu}{\nu} > 0$. *Тоді з умови* $\lambda_n W_n^{(p)} = O(1)$ $(= o(1))$ $(n \to \infty)$ *випливає умова* $\mu_{n_k}^{(\alpha_1)} S_{n_k} = O(1)$ $(= o(1))$ $(k \to \infty)$.

Наслідок 3. *Нехай в умовах наслідку* 2 $\sigma_n = \ln^2(n+1)$, *а* $\mu_n^{(\alpha_1)} = \ln(n+1)$, *тобто* $a_n = O_L(\dfrac{\ln(n+1)}{n+1})$ *або* $a_n = O(\dfrac{\ln(n+1)}{n+1})$, *коли* n *задовольняє вказані вище нерівності. Тоді якщо* $\exists \gamma > 0 : n^\gamma W_n^{(p)} = O(1)$ $(= o(1))$ $(n \to \infty)$, *то* $S_{n_k} \ln n_k = O(1)$ $(= o(1))$ $(k \to \infty)$.

Наслідок 4. *Нехай в умовах наслідку* 2 $\lambda_n = \sigma_n^{\alpha_1+1}$, *тобто* $a_n = O_L(\dfrac{1}{n})$ *або* $a_n = O(\dfrac{1}{n})$, *коли* n *задовольняє вказані вище нерівності. Тоді якщо* $\lambda_n W_n^{(p)} = O(1)$ $(= o(1))$ $(n \to \infty)$, *то* $\lambda_{n_k}^{\frac{1}{\alpha_1+1}} S_{n_k} = O(1)$ $(= o(1))$ $(k \to \infty)$.

Аналоги сформульованих тверджень мають місце і для подвійних послідовностей.

Частинними випадками наведених тверджень є результати робіт [2] — [4].

Ідея доведення тауберових теорем вказаним у роботі способом належить М. Білоцькому для випадку $\lambda_n = \sigma_n = 1$, а для загального випадку — Г. Михаліну та С. Деканову.

3. Для доведення сформульованих тверджень нам знадобляться леми 1 — 7, які мають у тауберовій теорії і самостійний інтерес.

Лема 1. *Нехай* $p_l(z)$ — *многочлен степеня* l *з дійсними коефіцієнтами, який не має додатних нулів, і* $p_l(0) > 0$. *Тоді існує многочлен* $r(z)$ *з невід'ємними коефіцієнтами такий, що* $r(0) > 0$, *а* $B_\theta(z) := p_l(z) r(z)$ *є многочленом степеня* $\theta \ge l$ *з невід'ємними коефіцієнтами.*

Лема 2. *Нехай степеневі ряди*

$$p^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nz^n=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_nz^n \text{ і } q^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nz^n=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}Q_nz^n$$

збігаються в одиничному крузі, а ряд $k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}k_nz^n=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ *збігається для досить малих* z. *Тоді якщо* (λ_n) *задовольняє умови* (3) *і* $\lambda_n\sum_{i=0}^{n}|k_{n-i}|\dfrac{P_i}{\lambda_i}=O(Q_n)$, *то* $(W,q)_\lambda\supset(W,p)_\lambda$, *тобто з умови* $\lambda_nW_n^{(p)}=O(1)$ $(=o(1))$ $(n\to\infty)$ *випливає умова* $\lambda_nW_n^{(q)}=O(1)$ $(=o(1))$ $(n\to\infty)$.

Лема 3. *Нехай послідовність* (p_n) *задовольняє умови теореми* 1. *Тоді існує послідовність* (q_n) *така, що*

$$q(z):=\sum_{n=0}^{\infty}q_nz^n=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}Q_nz^n=\frac{B_\theta(z)}{p_\alpha(z)},\ |z|<1,$$

де $B_\theta(z)$ — *многочлен з невід'ємними коефіцієнтами,* $B_\theta(0)>0$, *причому* $\dfrac{B_\theta(z)}{p_l(z)}=:r_{\theta-l}(z)$ *є многочленом степеня* $\theta-l$ *з невід'ємними коефіцієнтами,* $r_{\theta-l}(0)>0$, *а метод* (W,q) — *додатний, регулярний і* $(W,q)_\lambda\supset(W,p)_\lambda$.

Лема 4. *Нехай послідовності* (p_n) *і* (q_n) *з леми* 3. *Тоді існують послідовність* (g_n) *і натуральне число* $\alpha_1\le\alpha$ *такі, що*

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}g_nz^n=\frac{B_\theta(z)}{(1-z)^{\alpha_1}},\ |z|<1,$$

де B_θ *і* α *з леми* 3, *причому метод* (W,g) — *додатний, регулярний і* $(W,g)_\lambda\supset(W,q)_\lambda$.

Лема 5. *Нехай* (g_n) — *послідовність з леми* 4, $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=g^{-1}(z)=(\sum_{n=0}^{\infty}g_nz^n)^{-1}$, $0<m_k<n_k\uparrow+\infty$, $a_{kj}=0$, *коли* $j>n_k-m_k$, *і*

$a_k = \sum\limits_{j=0}^{n_k-m_k} a_{kj} \neq 0\ \forall k$. *Тоді*

$$\sum_{i=0}^{n_k}(\sum_{j=0}^{n_k-i} c_{n_k-i-j}a_{kj})G_iW_i^{(g)} = \sum_{i=0}^{n_k-m_k} a_{k,n_k-m_k-i}S_{m_k+i}. \tag{6}$$

Лема 6. *Нехай виконано умови леми* 5, $B_\theta(z)$ *— многочлен з леми* 1, $g(z)$ *— з леми* 4, $h_k = [\dfrac{n_k-m_k-\theta-1}{\alpha_1}] > 0$, $R_{\alpha_1h_k}(z) := (1-z^{h_k})^{\alpha_1} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_1h_k}\delta_i(h_k)z^i$ *і* $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{kj}z^j = R_{\alpha_1h_k}(z)g(z)\ \forall k$. *Тоді*

1) $a_{kj} \geq 0\ \forall j,\ k$;

2) $a_{kj} = 0$, *коли* $j > \alpha_1h_k+\theta+1$;

3) $a_k = \sum\limits_{j=0}^{n_k-m_k} a_{kj} = h_k^{\alpha_1}B_\theta(1) > 0\ \forall k$;

4) $\sum\limits_{i=0}^{n_k}(\sum\limits_{j=0}^{n_k-i} c_{n_k-i-j}a_{kj})G_iW_i^{(g)} = \sum\limits_{n=0}^{\alpha_1}(-1)^n\dbinom{\alpha_1}{n}G_{n_k-nh_k}W_{n_k-nh_k}^{(g)}$.

Лема 7. *Нехай виконано умови теореми* 2. *Тоді якщо* $\mu_{m_k}^{(\alpha_1)}S_{m_k} \neq O(1)$ $(k\to\infty)$, *то точка* $z=\infty$ *є* $(\mu^{(\alpha_1)})$*-точкою послідовності* (S_n). *А якщо* $r=0$ *і* $\mu_{m_k}^{(\alpha_1)}S_{m_k} \neq o(1)$ $(k\to\infty)$, *то точка* $z=0$ *є* $(\mu^{(\alpha_1)})$*-точкою послідовності* (S_n).

4. Доведення леми 1. Оскільки коефіцієнти многочлена $p_l(z)$ дійсні, то для кожного уявного нуля цього многочлена спряжене до нього число також є нулем цього многочлена, тобто $p_l(\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi)=0 \Rightarrow p_l(\rho\cos\varphi-i\rho\sin\varphi)=0$, де $\rho>0$, $\varphi\in(0;\pi)$. Звідси випливає, що многочлен $p_l(z)$ має множником квадратний тричлен $(z-\rho\cos\varphi-i\rho\sin\varphi)(z-\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi) = (z-\rho\cos\varphi)^2+\rho^2\sin^2\varphi = z^2-2\rho z\cos\varphi+\rho^2$, де $\rho>0$, $\varphi\in(0;\pi)$. Враховуючи, що $p_l(z)$ не має додатних нулів, його можна записати у вигляді

$$p_l(z) = a\prod_{i=1}^{n_1}(z^2-2\rho_iz\cos\varphi_i+\rho_i^2)^{m_i}\prod_{j=1}^{n_2}(z+x_j)^{k_j},$$

де $x_j>0\ \forall j$, $\rho_i>0$ і $\varphi_i\in(0;\pi)\ \forall i \Rightarrow a>0$.

Таким чином, лему 1 достатньо довести для многочлена $z^2 - 2\rho z\cos\varphi + \rho^2$, де $\rho > 0$, а $\varphi \in (0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \exists n$: $\varphi \in [\frac{\pi}{2^{n+1}};\frac{\pi}{2^n})$.

Зауважимо, що $(z^2 - 2\rho z\cos\varphi + \rho^2)(z^2 + 2\rho z\cos\varphi + \rho^2) = z^4 - 2z^2\rho^2\cos 2\varphi + \rho^4$.

Тому якщо $n = 1$, тобто $\varphi \in [\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$, то $2\varphi \in [\frac{\pi}{2};\pi) \Rightarrow \cos 2\varphi < 0 \Rightarrow z^4 - 2z^2\rho^2\cos 2\varphi + \rho^4$ має невід'ємні коефіцієнти і можна вважати, що $r(z) = z^2 + 2\rho z\cos\varphi + \rho^2$.

Якщо ж $n > 1$, то маємо: $\varphi \in (0;\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2\varphi \in (0;\frac{\pi}{2})$ і $(z^4 - 2z^2\rho^2\cos 2\varphi + \rho^4)(z^4 + 2z^2\rho^2\cos 2\varphi + \rho^4) = z^8 - 2z^4\rho^4\cos 4\varphi + \rho^8$.

Тому якщо $n = 2$, тобто $\varphi \in [\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4})$, то $4\varphi \in [\frac{\pi}{2};\pi) \Rightarrow \cos 4\varphi < 0 \Rightarrow$ многочлен $z^8 - 2z^4\rho^4\cos 4\varphi + \rho^8$ має невід'ємні коефіцієнти і можна вважати, що

$$r(z) = (z^2 + 2\rho z\cos\varphi + \rho^2)(z^4 + 2\rho^2 z^2\cos 2\varphi + \rho^4).$$

Повторюючи міркування, через скінченну кількість кроків дістанемо правильність леми 1.

5. Доведення леми 2. З умови леми випливає, що степеневий ряд $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n z^n$ абсолютно збігається для досить малих z, причому

$$q(z)S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n W_n^{(q)} z^n \ \text{ і } \ p(z)S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n W_n^{(p)} z^n \Rightarrow$$

$$Q_n W_n^{(q)} = k_n P_0 W_0^{(p)} + k_{n-1} P_1 W_1^{(p)} + \ldots + k_0 P_n W_n^{(p)} \Rightarrow$$

$$\lambda_n W_n^{(q)} = \frac{\lambda_n}{Q_n} \sum_{i=0}^{n} k_{n-i} \frac{P_i}{\lambda_i} (\lambda_i W_i^{(p)}).$$

Звідси і випливає твердження леми 2.

6. Доведення леми 3. За лемою 1 існує многочлен $r(z)$ з невід'ємними коефіцієнтами такий, що $r(0) > 0$, а $B_\theta(z) = p_l(z)r(z)$ є многочленом степеня $\theta \geq l$, усі коефіцієнти якого невід'ємні, і $B_\theta(0) > 0$. Зрозуміло, що степінь многочлена $r(z)$ дорівнює $\theta - l$.

Окрім того $q(z) := \dfrac{B_\theta(z)}{p_\alpha(z)} = \dfrac{p_l(z)r(z)}{p_\alpha(z)} = p(z)r(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n z^n \sum\limits_{k=0}^{\theta-l} a_k z^k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{i=0}^{n} p_{n-i}a_i) z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n z^n$, де $q_n = \sum\limits_{i=0}^{n} p_{n-i}a_i$, якщо $n \le \theta - l$, і $q_n = \sum\limits_{i=0}^{\theta-l} p_{n-i}a_i$, якщо $n > \theta - l$.

Звідси випливає, що $q_0 = p_0 a_0 = p_0 r(0) > 0$, $q_n \ge p_n a_0 \ge 0 \ \forall n \in \mathcal{N}$, $Q_n := \sum\limits_{i=0}^{n} q_i \ge a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} p_i = a_0 P_n \Rightarrow \dfrac{q_n}{Q_n} = \dfrac{1}{Q_n} \sum\limits_{i=0}^{\theta-l} p_{n-i}a_i \le \dfrac{1}{a_0} \sum\limits_{i=0}^{\theta-l} \dfrac{p_{n-i}}{P_n} a_i \to 0$ $(n \to \infty)$.

Отже, метод (W, q) задовольняє умови (1), а тому є додатним і регулярним.

Для доведення включення $(W, p)_\lambda \subset (W, q)_\lambda$ скористаємося лемою 2 і розглянемо відношення $\dfrac{Q(z)}{P(z)} = \dfrac{q(z)}{p(z)} = r(z) = \sum\limits_{i=0}^{\theta-l} a_i z^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} k_i z^i \ \forall z$: $|z| < 1$, де $k_i = a_i \ge 0$, коли $i \le \theta - l$, і $k_i = 0$, коли $i > \theta - l$. Тому $k_i \ge 0 \ \forall i$. Отже, враховуючи умову (3), дістаємо: $\dfrac{\lambda_n}{Q_n} \sum\limits_{i=0}^{n} |k_{n-i}| \dfrac{P_i}{\lambda_i} = \dfrac{\lambda_n}{Q_n} \sum\limits_{i=0}^{\theta-l} a_i \dfrac{P_{n-i}}{\lambda_{n-i}} \le H \cdot \dfrac{1}{Q_n} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i P_{n-i} = H < +\infty$.

Отже, умови леми 2 виконано, а тому $(W, p)_\lambda \subset (W, q)_\lambda$.

7. Доведення леми 4. За лемою 3 $q(z) = \dfrac{B_\theta(z)}{p_\alpha(z)}$, де $B_\theta(z) = \sum\limits_{i=0}^{\theta} b_i z^i$ — многочлен з невід'ємними коефіцієнтами степеня $\theta \ge l$, $r_{\theta-l}(z) := \dfrac{B_\theta(z)}{p_l(z)}$ — многочлен степеня $\theta - l$ з невід'ємними коефіцієнтами, $r_{\theta-l}(0) > 0$.

Нехай точка $z = 1$ є нулем кратності $\alpha_1 \in \mathcal{N}$ многочлена $p_\alpha(z)$, тобто $p_\alpha(z) = (1-z)^{\alpha_1} p^*_{\alpha-\alpha_1}(z)$, де $p^*_{\alpha-\alpha_1}(z)$ — многочлен степеня $\alpha - \alpha_1$ і $p^*_{\alpha-\alpha_1}(1) \ne 0$.

Покладемо $g(z) = \dfrac{B_\theta(z)}{(1-z)^{\alpha_1}}$. Тоді $g_n = \sum\limits_{i=0}^{\theta} b_i E_{n-i}^{(\alpha_1-1)} \ge b_0 E_n^{(\alpha_1-1)} \ge 0 \ \forall n$, $G_n = \sum\limits_{i=0}^{n} g_i \ge b_0 \sum\limits_{i=0}^{n} E_i^{(\alpha_1-1)} = b_0 E_n^{(\alpha_1)} > 0 \ \forall n$ і $\dfrac{g_n}{G_n} \le \dfrac{1}{b_0} \sum\limits_{i=0}^{\theta} b_i \dfrac{E_{n-i}^{(\alpha_1-1)}}{E_n^{(\alpha_1)}} \to 0$

$(n \to \infty)$. Отже, метод (W, g) — додатний і регулярний. Для доведення включення $(W, q)_\lambda \subset (W, g)_\lambda$ розглянемо відношення $k(z) = \dfrac{g(z)}{q(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} G_n z^n \Big/ \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n z^n = p^*_{\alpha-\alpha_1}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} k_n z^n$, де $k_n = 0\ \forall n > \alpha - \alpha_1$.

Звідси, враховуючи умову (3), дістаємо

$$\frac{\lambda_n}{G_n} \sum_{i=0}^{n} |k_i| \frac{Q_{n-i}}{\lambda_{n-i}} \asymp \frac{1}{G_n} \sum_{i=0}^{\alpha-\alpha_1} |k_i| Q_{n-i} = \frac{Q_n}{G_n} \sum_{i=0}^{\alpha-\alpha_1} |k_i| \frac{Q_{n-i}}{Q_n} \leq H \cdot \frac{Q_n}{G_n} \ \ \forall n, \quad (7)$$

оскільки $Q_{n-i}/Q_n \to 1$ $(n \to \infty)$ $\forall i \in \overline{0, \alpha - \alpha_1}$.

Залишилося довести, що $Q_n = O(G_n)$ $(n \to \infty)$. Якщо $\alpha - \alpha_1 = 0$, то це, очевидно, так. Нехай $\alpha - \alpha_1 > 0$. Тоді за умовою (2) нулі ногочлена $p^*_{\alpha-\alpha_1}(z)$ (позначимо їх z_j) або уявні і лежать на колі $|z| = 1$, або дійсні і від'ємні, або ж лежать у зовнішності одиничного круга.

Враховуючи міркування, проведені при доведенні леми 1, маємо

$$p^*_{\alpha-\alpha_1}(z) = a \prod_{j=1}^{n_1} (z + x_j)^{m_j} \prod_{j=1}^{n_2} (z^2 - 2z \cos \varphi_j + 1)^{k_j} \prod_{j=1}^{n_3} (z_j - z)^{l_j},$$

де $a \neq 0$, n_1, n_2, $n_3 \geq 0$, $x_j > 0$, $\varphi_j \in (0; \pi)$ і $|z_j| > 1\ \forall j$.

Таким чином,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n = a \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n \prod_{j=1}^{n_1} (z+x_j)^{m_j} \prod_{j=1}^{n_2} (z^2 - 2z \cos \varphi_j + 1)^{k_j} \prod_{j=1}^{n_3} (z_j - z)^{l_j}. \quad (8)$$

Далі маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n (z + x_j) = Q_0 x_j + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n x_j + Q_{n-1}) z^n =: \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(1)} z^n,$$

причому $Q_n^{(1)} \asymp Q_n$ $(n \to \infty)$. Отже, при множенні $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$ на двочлен $(z + x_j)$ ми дістаємо степеневий ряд, коефіцієнти $Q_n^{(1)}$ якого мають при $n \to \infty$ той самий порядок, що й Q_n.

Оскільки $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n z^n (z^2 - 2z \cos \varphi_j + 1) = Q_0 + Q_1 z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (Q_{n-2} - 2Q_{n-1} \cos \varphi_j + Q_n) z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n^{(1)} z^n$, то за умовою $\varphi_j \in (0; \pi)$ дістаємо, що

$Q_n^{(1)} = Q_{n-2} - 2Q_{n-1}\cos\varphi_j + Q_n = Q_n(1 + \frac{Q_{n-2}}{Q_n} - \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \cdot 2\cos\varphi_j) \asymp Q_n$, оскільки $\frac{Q_{n-i}}{Q_n} \to 1$ $(n \to \infty\ \forall i)$. Отже, при множенні $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$ на тричлен $(z^2 - 2z\cos\varphi_j + 1)$, де $\varphi_j \in (0;\pi)$, дістаємо степеневий ряд, коефіцієнти якого мають той самий порядок при $n \to \infty$, що й Q_n.

Нарешті,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n (z_j - z) = Q_0 z_j + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n z_j - Q_{n-1}) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(1)} z^n,$$

а тому $|Q_n^{(1)}| = Q_n \cdot |z_j - \frac{Q_{n-1}}{Q_n}| \asymp Q_n$ в силу умов $|z_j| > 1$ і $\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \to 1$ $(n \to \infty)$. Отже, множення $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$ на двочлен $(z_j - z)$, де $|z_j| > 1$, також дає степеневий ряд, коефіцієнти якого мають той самий порядок при $n \to \infty$, що й Q_n.

Враховуючи проведені міркування та рівність (8), дістаємо, що $G_n \asymp Q_n$ $(n \to \infty)$. Звідси та з нерівності (7) випливає, що виконано умови леми 2, за якою $(W, q)_\lambda \subset (W, g)_\lambda$.

8. Доведення леми 5. Використаємо властивості згортки $(a * b) := \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i$:

а) комутативності: $(a * b) = (b * a)$;

б) існування одиниці: $E_n = \begin{cases} 1, & \text{коли} \quad n = 0, \\ 0, & \text{коли} \quad n > 0, \end{cases}$ і $(a * E) = (\sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i} E_i) = (a_n) = (E * a)$;

в) асоціативності: $((a * b) * c) = (a * (b * c))$, оскільки $((a * b) * c) = \sum\limits_{i=0}^{n} (\sum\limits_{j=0}^{n-i} a_{n-i-j} b_j) c_i = \sum\limits_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j c_0 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{n-1-j} b_j c_1 + \sum\limits_{j=0}^{n-2} a_{n-2-j} b_j c_2 + \ldots + a_0 b_0 c_n = a_n b_0 c_0 + a_{n-1}(b_1 c_0 + b_0 c_1) + a_{n-2}(b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2) + \ldots + a_0(b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \ldots + b_0 c_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i} (\sum\limits_{j=0}^{i} b_{i-j} c_j) = (a * (b * c))$.

З означення послідовності (c_n) випливає, що $g_0 c_0 = 1$ і $\sum\limits_{k=0}^{n} g_{n-k} c_k = 0$

$\forall n \in \mathcal{N}$, тобто $(c * g) = E$, і в той же час $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k G_{n-k} = 1 \ \forall n \in \mathcal{N}_0$.

Враховуючи це, маємо:

$$\sum_{i=0}^{n_k}(\sum_{j=0}^{n_k-i} c_{n_k-i-j}a_{kj})G_iW_i^{(g)} = \sum_{i=0}^{n_k}(\sum_{j=0}^{n_k-i} c_{n_k-i-j}a_{kj})\sum_{\nu=0}^{i} g_{i-\nu}S_\nu =$$

$$= ((c * a_k) * (g * S)) = ((a_k * (c * g)) * S) = ((a_k * E) * S) = (a_k * S) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n_k} a_{ki}S_{n_k-i} = \sum_{i=0}^{n_k} a_{k,n_k-i}S_i = \sum_{i=m_k}^{n_k} a_{k,n_k-i}S_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n_k-m_k} a_{k,n_k-m_k-i}S_{m_k+i} \ \ \forall k \in \mathcal{N}.$$

Лему 5 доведено.

9. Доведення леми 6. За означенням многочлена $R_{\alpha_1 h_k}(z)$ маємо:

$$R_{\alpha_1 h_k}(z) = (1 - z^{h_k})^{\alpha_1} = \sum_{n=0}^{\alpha_1}(-1)^n\binom{\alpha_1}{n}z^{h_k n} = \sum_{i=0}^{\infty}\delta_i(h_k)z^i, \text{ де}$$

$$\delta_i(h_k) = \begin{cases} 0, & \text{коли } \ i \neq nh_k \ \forall n \in [0;\alpha_1], \\ (-1)^n\binom{\alpha_1}{n}, & \text{коли } \ i = nh_k \text{ для деякого } n \in [0;\alpha_1]. \end{cases}$$

Далі, враховуючи означення $g(z)$, маємо:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}z^j = R_{\alpha_1 h_k}(z)g(z) = \frac{R_{\alpha_1 h_k}(z)B_\theta(z)}{(1-z)^{\alpha_1}} =$$

$$= (\sum_{i=0}^{h_k-1} z^i)^{\alpha_1}B_\theta(z) = (\sum_{i=0}^{h_k-1} z^i)^{\alpha_1}\sum_{j=0}^{\theta} b_j z^j \Rightarrow$$

$$(a_{kj}) = (\sum_{i=0}^{j}\delta_{j-i}(h_k)g_i) = (\delta(h_k) * g).$$

Звідси випливають твердження 1) — 3) леми 6. Для доведення твердження 4) знову скористаємося властивостями згортки:

$$\sum_{i=0}^{n_k}(\sum_{j=0}^{n_k-i} c_{n_k-i-j}a_{kj})G_iW_i^{(g)} = \sum_{i=0}^{n_k}(\sum_{j=0}^{n_k-i} c_{n_k-i-j}\sum_{\nu=0}^{j} g_{j-\nu}\delta_\nu(h_k))G_iW_i^{(g)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n_k} (c * (g * \delta(h_k)))_{n_k - i} G_i W_i^{(g)} = \sum_{i=0}^{n_k} ((c * g) * \delta(h_k))_{n_k - i} G_i W_i^{(g)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n_k} (E * \delta(h_k))_{n_k - i} G_i W_i^{(g)} = \sum_{i=0}^{n_k} \delta_{n_k - i}(h_k) G_i W_i^{(g)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n_k} \delta_i(h_k) G_{n_k - i} W_{n_k - i}^{(g)} = \sum_{n=0}^{\alpha_1} (-1)^n \binom{\alpha_1}{n} G_{n_k - nh_k} W_{n_k - nh_k}.$$

Лему 6 доведено.

10. Доведення леми 7 можна знайти у роботі [2].

11. Доведення теореми 1. Нехай точка $z = \infty$ є $(\mu^{(\alpha_1)})$-точкою послідовності (S_n). Тоді $\exists (m_k)$, (n_k) і (θ_k), для яких мають місце умови (4). Припустимо, що $\lambda_n W_n^{(p)} = O(1)$ $(n \to \infty)$. Тоді за лемами 4, 5, і 6 існує метод (W, g), для якого $\lambda_n W_n^{(g)} = O(1)$ і має місце рівність

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\alpha_1} (-1)^n \binom{\alpha_1}{n} G_{n_k - nh_k} W_{n_k - nh_k}^{(g)} \mu_{m_k}^{(\alpha_1)}}{h_k^{\alpha_1} B_\theta(1)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n_k - m_k} a_{k, n_k - m_k - i} S_{m_k + i} \mu_{m_k}^{(\alpha_1)}}{h_k^{\alpha_1} B_\theta(1)}. \tag{9}$$

За твердженнями 1) і 3) леми 6 та за умовою (4) права частина рівності (9) прямує до $+\infty$, коли $k \to \infty$. Оцінимо ліву частину (9). Для цього зауважимо, що $\mu_{m_k}^{(\alpha_1)} = \dfrac{\lambda_{m_k}}{\sigma_{m_k}^{\alpha_1}}$, $n_k - nh_k \in [m_k; n_k]$ $\forall n \in [0; \alpha_1] \Rightarrow \lambda_{n_k - nh_k} \asymp \lambda_{m_k} \Rightarrow \lambda_{m_k} W_{n_k - nh_k}^{(g)} = O(1)$.

За лемою 4 $G_n = \sum\limits_{i=0}^{n} g_i = \sum\limits_{i=0}^{n} E_{n-i}^{(\alpha_1)} b_i = \sum\limits_{i=0}^{\theta} E_{n-i}^{(\alpha_1)} b_i \Rightarrow G_n \asymp E_n^{(\alpha_1)} \asymp n^{\alpha_1}$.

Тому $G_{n_k - nh_k} \asymp n_k^{\alpha_1}$, коли $n \in [0; \alpha_1] \Rightarrow \left| \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\alpha_1} (-1)^n \binom{\alpha_1}{n} G_{n_k - nh_k} \mu_{m_k}^{(\alpha_1)}}{h_k^{\alpha_1} B_\theta(1)} \right| \leq$

$$\leq H \sigma_{m_k}^{\alpha_1} \left(\frac{n_k - m_k - \theta - 1}{\alpha_1 n_k} \right)^{\alpha_1} \leq H_1 (\sigma_{m_k} (1 - \frac{m_k}{n_k}))^{\alpha_1} \leq H_2 \ \forall k.$$

Отже, ліва частина рівності (9) обмежена, в той час як права частина $\to +\infty$, коли $k \to \infty$. Тому припущення про обмеженість $(\lambda_n W_n^{(p)})$ неправильне, тобто
$\lambda_n W_n^{(p)} \neq O(1)$ $(n \to \infty)$. Міркування для точки $z = 0$ аналогічні.

Теорему 1 доведено.

12. Доведення теореми 2 та наслідків 1 — 4. Нехай виконано умови теореми 2. Тоді, припустивши, що $\mu_{m_k}^{(\alpha_1)} S_{m_k} \neq O(1)$ $(\neq o(1))$, дістанемо за лемою 7, що точка $z = \infty$ $(z = 0)$ є $(\mu^{(\alpha_1)})$-точкою послідовності (S_n). Звідси за теоремою 1 випливає, що $\lambda_n W_n^{(p)} \neq O(1)$ $(\neq o(1))$, що неможливо. Теорему 2 доведено.

Виконання умов наслідків 1 — 4 гарантує виконання умов теореми 2 для дійсної та уявної частин послідовності (S_n). Звідси і випливає правильність тверджень наслідків 1 — 4.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською Програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант *№ APU* 071070.

Література

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: “Иностр. лит.”, 1951. — 504 с.

2. *Михалин Г. А.* Тауберовы теоремы с остатком для методов суммирования типа методов Гёльдера и Чезаро. // Укр. мат. журн. — 1989. — 41, № 7. — С. 918 — 923.

3. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов. // Мат. сборник. — 1956. — 38 (80), вып. 4. — С. 509 — 524.

4. *Таргонский Л. Ф.* (C)-свойство положительных полиномиальных методов Вороного и теоремы тауберова типа. // Укр. мат. журн. — 1970. — 22, № 5. — С. 625 — 636.