МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

А. Я. КОВАЛЕНКО

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(003 — дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев — 1968

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

А. Я. КОВАЛЕНКО

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(003 — дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев — 1968

Работа выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор ФЕЩЕНКО С. Ф.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор ВАЛЕЕВ К. Г.;

кандидат физико-математических наук КУРПЕЛЬ Н. С.

Ведущее предприятие: Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко.

Автореферат разослан « . . » . . . . 1968 г.

Защита состоится « . . » . . . . 1968 г. на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института им А. М. Горького (Киев-30, Бульвар Шевченко, 22/24).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь совета

Функциональный анализ, зародившийся в начале нынешнего века и оформившийся в самостоятельную математическую науку в 20—30 годах, развивался и развивается очень бурно и быстро. Его идеи и язык глубоко проникают в самые различные разделы математики и ее приложений, благодаря общей абстрактной форме рассмотрения проблем анализа, позволяющей объединить и подвергать одновременному исследованию далекие на первый взгляд вопросы.

Настоящая работа посвящена применению функционального анализа к одному из важнейших разделов классического анализа — теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа состоит из введения и трех глав.

При написании введения автор старался не уходить далеко от главного русла работы: теории показателей Ляпунова (показателей экспоненциального роста решений), теории приводимости и проблемы возмущений периодических решений дифференциальных уравнений с ограниченным оператором, действующим в некотором банаховом пространстве.

Глава I посвящена изучению показателей экспоненциального роста σ решений дифференциальных уравнений, исследованию расположения их спектра, условиям совпадения старшего σ_s и особого σ^* показателей, а также выяснению роли последнего в некоторых вопросах качественного поведения решений рассматриваемых уравнений.

В § 1 этой главы вводятся основные понятия и раскрывается сущность всех предпосылок и соображений, на которых базируются дальнейшие рассуждения.

Известно [1], что между старшим σ_s и особым σ^* показателями дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

с непрерывно зависящим от t и равномерно ограниченным оператором $A(t)$ ($\| A(t) \| \leq M$), принадлежащим при каждом фиксированном t банаховой алгебре эндоморфизмов пространства E, в общем случае существует соотношение

$$\sigma_s \leqslant \sigma^* \leqslant M.$$

С другой стороны, в силу результатов работы [2]

$$\sigma^* = \sigma_s + \beta_0,$$

где β_0 представляет собой точную нижнюю грань тех действительных чисел $Д_1$, для которых существует число $T(\beta) \geqslant 0$ такое, что для разрешающего оператора $V(t, s)$ уравнения (1) имеет место оценка

$$\| V(t, s) \| \leqslant exp(\sigma_s + \beta)(t - s)$$

при всех $t - s \geqslant T(\beta)$.

Здесь же показано, что для всякого числа $\beta \in Д_1$ существует отрезок $[h, h + H]$ такой, что при всех $t \in [h + 1, h + H]$ справедливо неравенство

$$\| V(t, h) \| > exp(\sigma_s + \beta)(t - h),$$

причем скорость роста длины H этого отрезка можно предполагать сколь угодно большой.

В § 2 доказан критерий совпадения старшего σ_s и особого σ^* показателей уравнения (1) при условии, что для некоторого числа $\eta > 0$ существует последовательность $\{\Lambda_j\} \to + \infty$ при $j \to +\infty$ положительных чисел Λ_j таких, что на каждом отрезке длины Λ_j находится по крайней мере одно значение τ_j, для которого

$$\| A(t + \tau_j) - A(t) \| \leqslant exp(-\eta \Lambda_j).$$

Отсюда, в частности, следует совпадение старшего σ_s и особого σ^* показателей уравнения (1) с постоянным и периодическим оператором A. Этот результат получен также непосредственно путем использования свойств разрешающих операторов соответствующих уравнений.

В § 3 находятся оценки для спектра показателей экспоненциального роста и исследуется устойчивость решений некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве E с дифференцируемой по Гато нормой [3]. Основные результаты содержатся в следующих утверждениях.

Лемма. 1. 3. 1. Если на всех следящих элементах $\varphi = \frac{x}{\|x\|}$ решений $x(t)$ уравнения (1) выполняется неравенство

$$\alpha(t) \leqslant (grad \|\varphi\|, A(t)\varphi) \leqslant \beta(t),$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — интегрируемые функции, то спектр показателей экспоненциального роста лежит на сегменте

$$\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(s)\, ds, \ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \beta(s)\, ds\right].$$

Теорема 1. 3. 2. Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(x, t) \tag{2}$$

линейный оператор $A(t)$ удовлетворяет условию

$$(grad \|x\|, A(t)x) \leqslant \beta(t) \|x\|,$$

а для нелинейного оператора $f(x, t)$ при всех достаточно малых $\|x\|$ и $t \in [0, +\infty]$ справедлива оценка

$$(grad \|x\|, f(x, t)) \leqslant M exp(\alpha t) \|x\|^{1+\gamma}, \ (\alpha, \gamma > 0).$$

Если

$$\alpha + \gamma \cdot \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \beta(s)\, ds < 0,$$

то тривиальное решение уравнения (2) асимптотически устойчиво.

При $\alpha = 0$ подобный результат получен Я. Д. Мамедовым [4].

Теорема 1. 3. 3. Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = F(x, x, t) + f(x, t) \tag{3}$$

нелинейные операторы $F(x, x, t)$ и $f(x, t)$ определены при всех $\|x\| \leqslant d$, $t \in [0, +\infty)$ и, кроме того,

а) $\|F(x, \Theta, t)\| = 0$, $t \in [0, +\infty)$, $\|x\| \leqslant d$, $\|\Theta\| = 0$;

б) для $F(x, y, t)$ по y существует линейный дифференциал Гато $S(x, y, t)h$.

Если существует линейный оператор A, удовлетворяющий условию

$$a\|x\| \leqslant \|Ax\| \leqslant b\|x\| \tag{4}$$

и такой, что при всех $\|h\|$, $\|x\|$, $\|y\| \leqslant d$, $t \in [0, +\infty)$

$$(grad\|Ah\|,\ AS(x, y, t)h) \leqslant -\beta\|h\|,\ (\beta > 0), \tag{5}$$

то найдется $\gamma_0 > 0$ такое, что тривиальное решение уравнения (3) асимптотически устойчиво, как только $\|f(x, t)\| \leqslant \gamma\|x\|$, $\gamma < \gamma_0$.

Отсюда следует, что при условии $f(x, t) = 0$ для асимптотической устойчивости тривиального решения достаточно потребовать

$$(grad\|Ax\|,\ AF) \leqslant \mu(t)\|x\|, \tag{6}$$

где

$$\int_{t_0}^{+\infty} \mu(s)\,ds = -\infty,$$

а для простой устойчивости достаточно ограниченности $\int_{t_0}^{t} \mu(s)\,ds$ при всех $t > t_0$.

В случае вещественного гильбертового пространства получаются результаты работы [5].

В § 4 показано, что односторонние оценки вида (5), (6) для линейного функционала могут быть использованы при изучении диссипативности [6] уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{7}$$

а также для существования ограниченных и почти периодических его решений.

Т е о р е м а 1. 4. 1. Пусть при любых $x, h \in E$ и $t \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство

$$(grad\|Ah\|,\ Af(x+h, t) - Af(x, t)) \leqslant M(\|x\|, t)\|h\|,$$

где $M(\|x\|, t)$ — скалярная функция, а линейный оператор A удовлетворяет условию (4).

Если

1. при всех $\| \lambda \| \geqslant R_0$ и $t \epsilon [0, +\infty)$

$$M(\| x \|, t) \leqslant -\alpha, \quad (\alpha > 0),$$

а при всех $\| x \| < R_0$ и $t \epsilon [0, +\infty)$

$$M(\| x \|, t) \leqslant \beta, \quad (\beta > 0);$$

2. $\| f(\Theta, t) \| \leqslant c < +\infty, \quad \| \Theta \| = 0,$ (8)

то уравнение (7) диссипативно.

Теорема 1. 4. 2. Предположим, что в уравнении (7) нелинейный оператор $f(x, t)$, определенный и непрерывный при всех $x \epsilon E$, $t \epsilon (-\infty, +\infty)$, непрерывно дифференцируемый по x в понимании Гато и, кроме того,

$$\| f(x_1, t) - f(t_2, t) \| \leqslant L \| x_1 - x_2 \|, \quad L = \text{const}.$$

Если существует линейный оператор A, спектр которого не пересекается с мнимой осью, причем справедливы (4), (8) и неравенство

$$(grad \| Ah \|, \; BS(x \; ; \; \Theta h, t) h) \leqslant -\alpha \| h \|, \; (0 < \Theta < 1),$$

то

а) существует единственное ограниченное на всей оси решение $\xi(t)$;

б) любое решение $x(t)$ при $t \to +\infty$ экспоненциально стремится к ограниченному решению $\xi(t)$, а при $t \to -\infty$ экспоненциально от него удаляется;

в) если, сверх того, $f(x, t)$ — почти периодическая (периодическая) по t равномерно относительно $x \epsilon E$ при $\| x \| \leqslant R$, где R — положительное число такое, что $\| \xi(t) \| \leqslant R$, то и ограниченное решение $\xi(t)$ также почти периодично (периодично).

Последний результат для вещественного гильбертового пространства получен А. И. Перовым [7].

В главе II исследуется вопрос о приведении линейных дифференциальных уравнений с переменным оператором к уравнению с постоянными коэффициентами. Обобщению приводимости дифференциальных уравнений в банаховом пространстве посвящены работы [1], [8]—[10]. Так в [10] показано, что представление Флоке

$$V(t) = P(t)\, exp(Bt)$$

для периодического уравнения существует, если норма оператора $A(t)$ в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x \tag{9}$$

меньше $ln\, 4$, а также приводится пример, когда такое представление не имеет места.

В § 1 настоящей главы обсуждается вопрос о приводимости в общих чертах и доказывается

Теорема II. 1. 1. Если оператор $A(t)$ удовлетворяет условию

$$A(t+\omega) = SA(t)\, S^{-1},$$

где S — унитарный оператор, а спектр оператора $S^{-1} V(\omega, 0)$ не окружает нуля, то уравнение (9) приводимо с помощью ω — периодического преобразования.

В последующих параграфах исследуется приводимость уравнения (9) с помощью преобразования неизвестной функции

$$x = P(t)\, y \tag{10}$$

при условии, что $A(t)$ и $P(t)$ — квазипериодические операторы с общим частотным базисом $\beta(\beta_1, \ldots, \beta_k)$.

Следуя В. Х. Харасахалу [11], [12], изучение уравнения (9) в этом случае сводится к исследованию вспомогательного дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial s_k} = F(s_1, \ldots, s_k)\, x, \tag{11}$$

которое на диагонали $s_1 = s_2 = \ldots = s_k = t$ k-мерного параметрического пространства порождает исходное уравнение. Оператор $F(s_1, \ldots, s_k)$ в уравнении (11) периодический по $s_j\, (j = 1, 2, \ldots, k)$ с периодами $\omega_j = \dfrac{2\pi}{\beta_j}\, (j = 1, 2, \ldots, k)$.

В § 2 устанавливается вид фундаментального оператора уравнения (11) в случаях, когда ограниченный оператор F

постоянный, когда оператор F непрерывно зависит от s_j $(j=1, 2,\ldots, k)$ или от разностей вида $s_j - s_1$ $(j=2, 3, \ldots, k)$. При условии, что оператор $F(s_1,\ldots, s_k)$ периодический по s_j $(j=1, 2,\ldots, k)$ с периодами $\omega_j = \frac{2\pi}{\beta_j}$ $(j=1, 2,\ldots, k)$ для фундаментального оператора $V(s_1,\ldots, s_k)$, получено соотношение

$$V(s_1 + n_1\omega_1, \ldots, s_k + n_k\omega_k) = V(s_1, \ldots, s_k)B, \tag{12}$$

в котором ограниченный оператор B не зависит от s_j $(j=1, 2,\ldots, k)$ или дифференцируемый по $s_j - s_1$ $(j=2, 3,\ldots, k)$.

В § 3 сначала устанавливается критерий приводимости вспомогательного уравнения, который в случае периодического оператора $F(s_1, \ldots, s_k)$ на диагонали $s_1=s_2=\ldots=s_k=t$ дает следующий результат.

Теорема II. 3. 5. *Для приводимости уравнения (9) с квазипериодическим оператором $A(t)$ при помощи квазипериодического преобразования (10) необходимо и достаточно, чтобы в соотношении*

$$V(t+n_1\omega_1, \ldots, t+n_k\omega_k) = V(t, \ldots, t)T$$

ограниченный оператор T был постоянным и имел логарифм.

Соотношение (12) позволяет изучить вид решений приводимого уравнения (9) в зависимости от оператора B. Это проводится в § 4.

В качестве примера в § 5 рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = [A_1(t) + A_2(t)]x$$

с непрерывно зависящими от t операторами $A_1(t)$ и $A_2(t)$, периодическими по t с несоизмеримыми периодами ω_1 и ω_2. Показано, что оно приводимо при условии, что спектр оператора $V_1(\omega_1)V_2(\omega_2)$ не окружает нуля, а

$$A_j(t)A_i(s) = A_i(s)A_j(t), \quad (i, j=1, 2).$$

Глава III посвящена проблеме возмущений периодических решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. В основном на бесконечномерный случай распространяются результаты исследований Д. Льюиса [13], [14].

В § 1 рассматривается некритический случай, т. е. случай, когда спектр оператора монодромии порождающего уравнения не содержит единицы. Основной результат следующий.

Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(x, t, \varepsilon), \quad f(x, t, 0) = 0 \tag{13}$$

нелинейный оператор $f(x, t, \varepsilon)$ определен и непрерывен при всех $\|x\| \leqslant \delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $t \in [0, +\infty)$, периодический по t с периодом, равным единице.

Предположим, что в области $0 \leqslant \eta \leqslant \delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ существуют неотрицательные скалярные функции $X(t)$, $Y(\eta, t, \varepsilon)$, $Z(\eta, t, \varepsilon)$ такие, что:

1. $\lim\limits_{\substack{\eta \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} Y(\eta, t, \varepsilon) = 0$ равномерно относительно t, причем $Y(\eta, t, \varepsilon)$ — монотонно возрастающая функция η;

2. $\int\limits_0^1 X(s)\,ds$, $\int\limits_0^1 Y(\eta, s, \varepsilon)\,ds$ и $\int\limits_0^1 Z(\eta, s, \varepsilon)\,ds$ существуют для $\eta \leqslant \delta$ и $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$;

3. $\|f(x, t, \varepsilon)\|^2 \leqslant Y(\|x\|, t, \varepsilon)\|x\|^2 + X(t)\varepsilon^2$ как только $\|x\| \leqslant \delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ при всех $t \in [0, 1]$;

4. $\|f(x_1, t, \varepsilon) - f(x_2, t, \varepsilon)\|^2 \leqslant Z(\eta, t, \varepsilon)\|x_1 - x_2\|^2$ как только $\|x_1\|, \|x_2\| \leqslant \delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ при всех $t \in [0, 1]$;

5. $\lim\limits_{\substack{\eta \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} Z(\eta, t, \varepsilon) = 0$ равномерно по $t \in [0, 1]$.

Теорема III. 1. 1. Если спектр $\sigma(U_1)$ оператора монодромии U_1 уравнения

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U$$

не содержит единицы и выполняются условия 1—5, то уравнение (13) при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon^*$ имеет единственное периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ такое, что $\|x(t, \varepsilon)\| \leqslant \Delta$, где $\varepsilon^* \leqslant \varepsilon_0$, $\Delta \leqslant \delta$ — некоторые положительные числа, выбранные так, что при всех $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon^*$ и $\eta \leqslant \Delta$ справедливы неравенства

$$K\left[\eta_0^2 \int_1^1 Y(\eta, s, \varepsilon)\, ds + \varepsilon^2 \int_0^1 X(s)\, ds\right] \leqslant \Delta^2,$$

$$K \int_0^1 Z(\Delta, s, \varepsilon)\, ds \leqslant \gamma^2 < 1.$$

Постоянная K оценивает некоторый оператор, специально построенный для представления решения $x(t, \varepsilon)$ на промежутке $[0, 1]$.

На первый взгляд может показаться, что вообще не существует операторов, удовлетворяющих условиям 1—5. Поэтому в § 2 приводятся некоторые сведения из теории операторов, зависящих от параметров, и указывается класс таких операторов, для которых условия 1—5 справедливы.

В § 3 рассматривается проблема возмущений периодических решений в случае, когда спектр оператора монодромии порождающего уравнения содержит единицу. В основном исследуется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + \varepsilon h(t, \varepsilon) + \sigma q(x, t, \varepsilon) + p(x, t, \varepsilon) \qquad (14)$$

с двумя параметрами ε и σ, причем $A(t, \varepsilon)$ $h(t, \varepsilon)$, $q(x, t, \varepsilon)$ и $p(x, t, \varepsilon)$ периодические по t с периодом, равным единице. Кроме того, нелинейные операторы $q(x, t, \varepsilon)$ и $p(x, t, \varepsilon)$, дифференцируемые по x (в понимании Фреше) и ε в области $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\|x\| \leqslant \eta$, $t \in [0, +\infty)$ и

$$q(\varepsilon y, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 Q(y, t, \varepsilon), \quad p(\varepsilon y, t, \varepsilon) = \varepsilon^3 P(y, t, \varepsilon).$$

При условии, что спектр $\sigma(U_1)$ оператора монодромии U_1 порождающего уравнения при всех $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, за исключением $\varepsilon = 0$, не содержит единицы, причем

$$(I - U_1(\varepsilon))^{-1} = \frac{K}{\varepsilon} + L(\varepsilon),$$

где K не зависит от ε, а оператор $L(\varepsilon)$ аналитический относительно ε ($|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$), доказана теорема, гарантирующая существование единственного периодического решения, принадлежащего некоторой сфере и стремящегося к нулю при $\varepsilon \to 0$. Для установления последнего факта на функцию $h(t, \varepsilon)$ наложено следующее условие: считается, что $h(t, \varepsilon)$ такова, что множество значений

$$U_1(0) \int_0^1 U^{-1}(t, 0)\, h(t, 0)\, dt$$

принадлежит пространству нулей оператора K.

Приведенные в § 3 примеры показывают, что уравнения вида (14) не всегда допускают малые периодические решения или же имеют несколько таковых. С другой стороны, доказанная теорема гарантирует единственность, если ограничиться некоторой областью в банаховом пространстве. Поэтому в § 4 обсуждается вопрос единственности возмущенных периодических решений при наличии более широкой области в банаховом пространстве, но в то же время на меньшем отрезке изменения параметра ε.

Основные результаты работы изложены в [15]—[17] и были доложены на Второй (апрель 1965 г.), Третьей (апрель 1966 г.) и Четвертой (апрель 1968 г.) конференциях молодых математиков Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Ин-т математики АН УССР, К., 1964.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. Изд-во «Мир», М., 1966.

3. Вайнберг М. М. О сходимости процесса наискорейшего спуска для нелинейных уравнений. Сиб. мат. журн., т. 11, № 2, 1961, 201—221.

4. Мамедов Я. Д. Односторонние оценки в условиях асимптотической устойчивости. ДАН СССР, т. 166, № 3, 1966, 533—535.

5. Валиков В. К. Некоторые критерии устойчивости движений в гильбертовом пространстве. УМН, т. XIX, вып. 4, 1964, 179—184.

6. Демидович Б. П. О некоторых нелинейных системах с D-свойством Левинсона. Тр. межд. симп. по нелинейным колеб., т. 11, К., 1963.

7. Перов А. И. Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 132, № 3, 1960, 531—534.

8. Schäffer J. J. Lincar differential eguations and functional analisys. III. Ann. Math., (2), 69, 1959, 88—104.

9. Schäffer J. J. On Floget's theorem in Hilbert spaces. Bull. Amer. Math. Soc., v. 70, n. 2, 1964, 243—245.

10. Schäffer J. J. On Floget's theorem in Banach spaces. Bol. Fac. ingr. y agriment, Montevideo, v. 8, n. 12, 1964, 395—403.

11. Харасахал В. Х. О квазипериодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XXIV, вып. 4, 1963, 672—682.

12. Харасахал В. Х. О квазипериодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. высш. уч. завед., Мат., № 2, 1964, 152—164.

13. Lewic D. C. Periodic solutions of differential equations containing a parameter. Duke Math. Z., v. 22, n. 1, 1955, 39—56.

14. Lewic D. C. On the perturbation of a periodic solution when the variantial system has nontrivial periodic solutions. J. Rat. Mech. and Anal., v. 4., n. 5, 1955, 795—815.

15. Коваленко А. Я., Мисак В. В. Об одном классе дифференциальных уравнений в пространстве Банаха. Вторая научная конференция молодых математиков Украины. «Наукова думка», К., 1966, 286—291.

16. Коваленко А. Я. Обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и возмущения периодических решений. Третья научная конференция молодых математиков Украины, К., 1966.

17. Коваленко А. Я. О старшем и особом показателях некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Диф. уравн., т. III, № 8, 1967, 1259—1265.

БФ 16501. Подписано к печати 19.VI 1968 г. Формат бумаги $60 \times 84^1/_{16}$.
Объем 1 печ. л. Заказ 2834. Тираж 150.

Киев, тип. № 3, цех 2