**О.Б. Красножон**
Бердянський державний
педагогічний університет

## Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання математики у вищому педагогічному навчальному закладі

Реалії сьогодення вимагають від працівників освіти пошуків більш гнучких, досконалих, ефективних прийомів організації навчально-виховного процесу у закладах середньої, середньої спеціальної та вищої освіти. Лавиноподібна інформатизація суспільства вимагатиме від сьогоднішнього студента вищого педагогічного навчального закладу і завтрашнього вчителя уміння оперативно, своєчасно реагувати на зміни у напрямках розвитку системи освіти взагалі і методиках навчання окремих навчальних дисциплін зокрема. Як досягти ефективного засвоєння студентами навчального матеріалу, розвити їх розумові і творчі здібності, підвищити зацікавленість, активність в опануванні знаннями? Ці питання залишаються актуальними і сьогодні для викладача вищого навчального закладу. Час, передбачений в навчальному плані на вивчення того чи іншого навчального курсу, повинен використовуватися із максимальною віддачею і ефективністю. Степінь реалізації цієї вимоги є найголовнішим критерієм професіоналізму педагога, його майстерності і компетентності як фахівця. Звичайно, не слід пропонувати "заощаджувати" навчальний час шляхом поверхового висвітлення окремих тем навчальної дисципліни або, навпаки, занадто заглиблюватися в окремі її аспекти за рахунок самостійної чи індивідуальної роботи із студентами. Самостійна робота студентів, наполегливе опрацювання ними теоретичного матеріалу, робота з книгою в бібліотеці чи над певною науковою проблемою під час написання курсової чи дипломної роботи – це найголовніші передумови розвитку їх інтелектуальних здібностей, формування міцного характеру, навичок самостійного здобування знань. Економії часу, запобігання неефективних його витрат можна досягти впровадженням у навчально-виховний процес комп'ютерно-орієнтованих методик навчання, які дозволяють перекласти на комп'ютер виконання обчислень, графічних побудов, перевірку отриманих розв'язків тощо. Дійсно, при наявності відповідного програмного забезпечення можливості використання комп'ютера практично невичерпні. Чи використовуються вони у повному обсязі у навчально-виховному процесі? Мабуть, ні. Сьогодні важко уявити освічену людину, фахівця у будь-якій галузі знань без вміння використовувати комп'ютерну техніку для розв'язування виробничих, наукових чи педагогічних проблем. Комп'ютеризація настільки глибоко інтегрувалась у діяльність людини, пов'язану із управлінням виробництвом, забезпеченням надійного зв'язку, зберіганням та опрацюванням інформації, організацією фінансових, матеріальних та інтелектуальних потоків, що стала практично невід'ємною її частиною. І система освіти у цьому аспекті не є винятком. Якщо під час підготовки фахівців у закладах вищої освіти у студентів не буде сформовано умінь та навичок роботи з комп'ютером принаймні на рівні використання останнього при розв'язуванні практичних задач та користування всесвітньою мережею Інтернет, то такі фахівці не будуть затребувані суспільством і не зможуть претендувати на роботу, відповідну до своєї кваліфікації. Отже, якщо прагнути готувати у вищих педагогічних навчальних закладах освіти справжніх фахівців в галузі педагогіки і методики навчання, потрібно забезпечити формування відповідної комп'ютерної грамотності, яка повинна формуватися, поглиблюватися і удосконалюватися з першого по п'ятий курс незалежно від профілю і напрямку підготовки фахівця.

У навчальному процесі можна виділити два основні напрямки використання комп'ютера – як об'єкт вивчення і як засіб навчання. Перший з них передбачає засвоєння знань, умінь та навичок, які дозволяють усвідомити можливості використання комп'ютера і успішно використовувати його при розв'язуванні різноманітних задач. Другий напрямок передбачає підвищення ефективності навчального процесу за рахунок його комп'ютерної підтримки. Для працюючих в системі освіти, як загальної, так і професійної, комп'ютерна грамотність – це основна частина не тільки загальноосвітньої, але й професійної підготовки. Мова йде про формування у педагогів умінь розв'язувати за допомогою комп'ютера різні задачі, з якими вони мають справу у своїй діяльності [7, с. 124].

Інформаційні технології навчання (ІТН) значною мірою сприяють розв'язанню проблеми інтенсифікації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення студентів, інших завдань, які постають перед системою освіти. На основі комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання можна суттєво підвищити продуктивну діяльність студентів, сприяти індивідуалізації і диференціації процесу навчання, реалізації діяльнісного підходу, раціоналізувати працю викладача. Запровадження ІТН не повинно бути самоціллю. Воно має бути педагогічно виправданим, розглядатись передусім з погляду педагогічних переваг, які воно може забезпечити в поєднанні з традиційними методиками навчання.

Під час формування комп'ютерної грамотності вчителів важливо розкрити роль комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання у розв'язанні завдань виховання та розвитку особистості учнів. Цей аспект загальної підготовки вчителів має виняткове значення, оскільки багато з них і досі вважають комп'ютерну техніку у школі тільки засобом розв'язування математичних задач та проведення різноманітних обчислень. Отже, мета оволодіння комп'ютерною грамотністю для педагогів – це насамперед формування системи знань, умінь та навичок, які потрібні для роботи з комп'ютером у своїй діяльності. Зміст комп'ютерної грамотності для вчителів має свою специфіку. Невід'ємним компонентом його є психолого-педагогічні особливості застосування комп'ютера у навчанні [9].

Сьогодні є всі підстави вважати комп'ютер невід'ємною частиною навчального процесу. Він може набути важливого значення і як засіб оцінки знань і вмінь студентів, і як міра ефективності обраних стратегій навчання. Рішення приймає педагог, а нові засоби інформаційної технології лише покликані оперативно забезпечувати його по можливості вичерпними “фоновими” відомостями у найбільш зручній формі [3, с. 203].

Наведені висловлювання відомих фахівців в галузі педагогіки підтверджують ідею про доцільність впровадження комп'ютерно-орієнтованих методик навчання. Але на якому етапі вивчення чи закріплення кожної теми і у якій практичній формі використання комп'ютерних засобів буде найбільш ефективним – відповіді на ці питання доведеться шукати викладачеві самостійно, в залежності від специфіки дисципліни, яка вивчається, підготовленості студентів, доцільності використання ІТН до розв'язування конкретних задач навчання і виховання.

На Україні, у системі вищої і середньої освіти, найбільш поширеними програмними продуктами, які використовуються у навчально-виховному процесі, є комплект педагогічних програмних засіб *Gran1, Gran-2D, Gran-3D* та відповідне науково-методичне забезпечення у вигляді навчальних посібників, розроблені у Національному педагогічному університеті ім. М.П. Драгоманова під керівництвом академіка АПН України, доктора педагогічних наук, професора Жалдака М.І., а також програмний засіб *Derive*. Детально можливості використання зазначених програмних продуктів у навчальному процесі розкрито в роботах [1], [2].

Вищевказані програмні засоби використовуються, зокрема, у Бердянському державному педагогічному університеті при вивченні таких навчальних дисциплін, як геометрія, алгебра і геометрія, математичний аналіз, основи інформатики та обчислювальної техніки, теорія ймовірностей і математична статистика. Студенти із задоволенням працюють із ППЗ *Gran1* та програмним засобом *Derive*, виконують за їх допомогою різноманітні обчислення, побудови фігур на площині, геометричних тіл у просторі, графіків функцій, проводять повне дослідження функцій методами вищої математики із паралельною перевіркою отриманих результатів на комп'ютері. Як позитивний можна відзначити наступний момент: при розв'язуванні задач відбувається розвиток розумових і творчих здібностей студентів, безпосереднім проявом якого є переформулювання змісту задач з метою їх ускладнення чи більш змістовного дослідження, спостереження за змінами величин в динаміці. Наочне подання умов задач за допомогою комп'ютера сприяє більш повному усвідомленню їх суті, змісту, дозволяє виявити і зафіксувати за допомогою формул відношення між величинами. Виконані за допомогою комп'ютера рисунки просторових фігур дозволяють встановити співвідношення між їх елементами, зумовлюють розвиток просторових уявлень і уяви.

Зупинимося ще на одному аспекті комп'ютерно-орієнтованого навчання. Студенти фізичних спеціальностей вивчають навчальну дисципліну “Алгебра і геометрія”. Зміст цієї дисципліни групується навколо наступних провідних змістових ліній: визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, алгебра матриць, векторна алгебра, векторні простори, евклідові простори, лінійні оператори, квадратичні форми в евклідовому просторі. Розв'язування більшості практичних задач із зазначеного курсу потребує виконання великої кількості обчислювальних операцій над матрицями, визначниками, числами тощо. Рутинні обчислювальні операції швидко стомлюють студентів, зменшують їх активність і зацікавленість у розв'язуванні задачі. Крім того, доречним, з точку зору методики, було б надання можливості студентам безпосередньо переконатися у правильності отриманого розв'язку. Наприклад, задачі на знаходження невиродженого лінійного перетворення змінних, за допомогою якого квадратична форма зводиться до нормального виду. Загальновідомим є той факт, що шукане невироджене лінійне перетворення змінних визначається неоднозначно, і отримане студентом перетворення, яке відрізняється від вказаного у відповіді, може тлумачитись ним як помилкове, хоча насправді може бути правильним. Тут за допомогою комп'ютера можна швидко і наочно розвіяти будь-які сумніви щодо правильності розв'язання задачі. Для цього достатньо лише обчислити за відомою формулою матрицю квадратичної форми у знайденому канонічному базисі і встановити, чи буде вона діагональною з числами $1$, $-1$ та $0$ на головній діагоналі. При позитивній відповіді отримане студентом перетворення змінних вважається правильним. Наведемо приклад розв'язування такої задачі за допомогою програмного засобу *Derive*.

**Приклад 1**. Звести за методом Лагранжа квадратичну форму, яка у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ простору $E_3$ має вигляд

$$\varphi = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

до нормального виду. Записати відповідне лінійне перетворення змінних [8, с. 155].

**Розв'язування**. Діятимемо за методом Лагранжа, викладеним у [5]. Серед коефіцієнтів $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ даної квадратичної форми є відмінні від нуля. Так, $a_{11} = 1 \neq 0$, отже,

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = x_1 + x_2 + 2x_3,$$

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{1}{a_{11}}\psi^2 =$$
$$= x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 =$$
$$= -3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Отже,

$$\varphi = \frac{1}{a_{11}}\psi^2 + \varphi_1 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Міркуючи аналогічно, квадратичну форму $\varphi_1 = -3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_2x_3$ від змінних $x_2$ та $x_3$ подамо у вигляді:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{3}(3x_2 + x_3)^2 - \frac{8}{3}x_3^2.$$

Таким чином,

$$\varphi = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{3}(3x_2 + x_3)^2 - \frac{8}{3}x_3^2.$$

Здійснимо наступне лінійне перетворення змінних $x_1$, $x_2$, $\boldsymbol{x_3}$: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 3x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки $\det A = 3$. Отже, канонічний вид даної квадратичної форми знайдений:

$$\varphi = y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 - \frac{8}{3}y_3^2.$$

Для отримання нормального виду даної квадратичної форми $\varphi$ виконаємо наступне лінійне перетворення змінних:

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = \sqrt{3}z_2, \\ y_3 = \dfrac{\sqrt{24}}{8}z_3. \end{cases}$$

Його матриця

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{24}}{8} \end{pmatrix}$$

діагональна і невироджена: $\det D = \dfrac{3\sqrt{8}}{8}$. У результаті останнього лінійного перетворення змінних дана квадратична форма $\varphi$ набуває нормального виду: $\varphi = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$. Запишемо остаточне лінійне перетворення змінних. Зазначимо, що

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \left( D \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = (A^{-1} \cdot D) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Добуток матриць $T = (A^{-1} \cdot D)$ обчислимо за допомогою комп'ютера і програми *Derive* (рис. 1):

$$\#16:\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{24}}{8} \end{bmatrix}$$

$$\#17:\quad \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{5\cdot\sqrt{6}}{12} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{6}}{12} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix}$$

Рис. 1

Таким чином, шукане лінійне перетворення змінних $z_1$, $z_2$, $z_3$, яке зводить дану квадратичну форму $\varphi$ до нормального виду $\varphi = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$, наступне:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} z_2 - \dfrac{5\sqrt{6}}{12} z_3, \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} z_2 - \dfrac{\sqrt{6}}{12} z_3, \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{4} z_3. \end{cases}$$

Перевірку отриманого розв'язку виконаємо за допомогою комп'ютера. Отже, ми повинні переконатися у наступному:

у базисі

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1,\ \ \vec{e}_2' = -\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_2,\ \ \vec{e}_3' = -\frac{5\sqrt{6}}{12}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{6}}{12}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{e}_3,$$

який отримано із базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ простору $E_3$ за допомогою матриці переходу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{5\sqrt{6}}{12} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{6}}{12} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix},$$

квадратична форма $\varphi$ має нормальний вид

$$\varphi = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Таким чином, добутком матриць

$$T^T \cdot S \cdot T,$$

де $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матриця квадратичної форми $\varphi$ у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ простору $E_3$, повинна стати діагональна матриця $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матриця квадратичної форми $\varphi$ у базисі

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1,\ \vec{e}_2' = -\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_2,\ \vec{e}_3' = -\frac{5\sqrt{6}}{12}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{6}}{12}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{e}_3.$$

Перевірку обчислень подано на рис. 2.

$$\#19:\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\dfrac{5\cdot\sqrt{6}}{12} & -\dfrac{\sqrt{6}}{12} & \dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{5\cdot\sqrt{6}}{12} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{6}}{12} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\#20:\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Рис. 2

Таким чином, обчислення виконано правильно.

**Відповідь**: $\varphi = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$; $\begin{cases} x_1 = z_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} z_2 - \dfrac{5\sqrt{6}}{12} z_3; \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} z_2 - \dfrac{\sqrt{6}}{12} z_3; \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{4} z_3. \end{cases}$

Наведемо приклади використання педагогічного програмного засобу Gran1 для перевірки розв'язку практичної задачі курсу “Алгебра і геометрія” розділу “Лінії другого порядку на площині”.

**Приклад 2**. Записати рівняння дотичних, проведених з точки $A(-6;3)$ до еліпса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ [10, с. 88].

**Розв'язування**. Безпосереднім обчисленням встанов-люємо, що точка $A(-6;3)$ еліпсу $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ не належить. Рівняння дотичних матимуть вигляд $\frac{x_o}{15} x + \frac{y_o}{9} y = 1$, де точка $(x_0; y_0)$ є точкою дотику до заданого еліпса. Точка $A(-6;3)$ належить шуканим дотичним, отже,

$$\frac{x_o}{15} \cdot (-6) + \frac{y_o}{9} \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow y_o = \frac{3(5 + 2x_o)}{5}.$$

Точка дотику належить еліпсу $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$, отже, її координати – $\left( x_o; \frac{3(5 + 2x_o)}{5} \right)$ – повинні задовольняти рівняння даного еліпса. Отже,

$$\frac{x_o^2}{15} + \frac{(5 + 2x_o)^2}{25} = 1 \Leftrightarrow 17x_o^2 + 60x_o = 0 \Leftrightarrow x_o(17x_o + 60) = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x_o = 0, \\ x_o = -\dfrac{60}{17}. \end{array} \right.$$

Таким чином, координати точок дотику наступні:

$$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x_o = 0, \\ y_o = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x_o = -\dfrac{60}{17}, \\ y_o = -\dfrac{21}{17}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Маючи координати двох точок дотику дотичних до еліпса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$, записуємо їх рівняння:

$$\left[ \begin{array}{l} \dfrac{1}{3} y = 1, \\ -\dfrac{4}{17} x - \dfrac{7}{51} y = 1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} y = 3, \\ 12x + 7y + 51 = 0. \end{array} \right.$$

Перевірку отриманого розв'язку виконаємо за допомогою програмного засобу Gran1 (рис. 3).

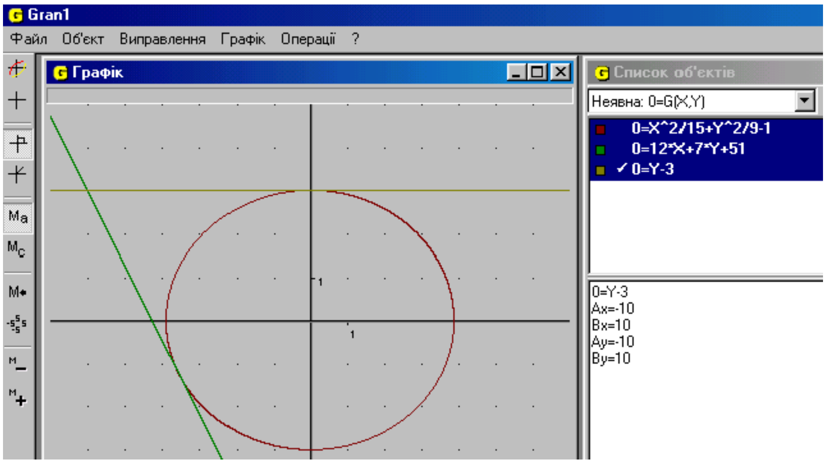

Рис. 3

Отже, побудови, виконані за допомогою програмного засобу Gran1, підтвердили правильність виконаних обчислень.

**Відповідь**: $12x+7y+51=0$, $y=3$.

**Приклад 3**. Записати рівняння гіперболи, яка дотикається двох прямих: $5x-6y-16=0$ та $13x-10y-48=0$ при умові, що її осі співпадають з осями координат [4, с.86].

**Розв'язування**. Рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Рівняння дотичних до цієї гіперболи мають вигляд: $\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y-1=0$, де $M(x_0; y_0)$ – точка дотику. Відомо, що пряма $5x-6y-16=0$ є дотичною до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, отже, повинна задовольнятися система рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{x_0}{a^2}=\frac{5}{16},\\ \frac{y_0}{b^2}=\frac{6}{16},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\frac{5a^2}{16},\\ y_0=\frac{6b^2}{16}.\end{cases}$$

Нехай $M'(x_0'; y_0')$ – точка дотику прямої $13x-10y-48=0$ до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, тоді повинна задовольнятися система рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{x_0'}{a^2}=\frac{13}{48},\\ \frac{y_0'}{b^2}=\frac{10}{48},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0'=\frac{13a^2}{48},\\ y_0'=\frac{10b^2}{48}.\end{cases}$$

Обидві точки – $M(x_0; y_0)$ та $M'(x_0'; y_0')$ – належать гіперболі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, тобто

$$\begin{cases}\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1,\\ \frac{(x'_0)^2}{a^2}-\frac{(y'_0)^2}{b^2}=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{25a^2}{256}-\frac{36b^2}{256}=1,\\ \frac{169a^2}{2304}-\frac{100b^2}{2304}=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25a^2-36b^2=256,\\ 169a^2-100b^2=2304.\end{cases}$$

Визначник системи $\Delta=\begin{vmatrix}25 & -36\\ 169 & -100\end{vmatrix}=3584$. Далі,

$$\Delta_a=\begin{vmatrix}256 & -36\\ 2304 & -100\end{vmatrix}=57344,\ a^2=\frac{\Delta_a}{\Delta}=\frac{57344}{3584}=16,\ \Delta_b=\begin{vmatrix}25 & 256\\ 169 & 2304\end{vmatrix}=14336,\ b^2=\frac{\Delta_b}{\Delta}=\frac{14336}{3584}=4.$$

Перевірку отриманого розв'язку виконаємо за допомогою ППЗ Gran1 (рис. 4).

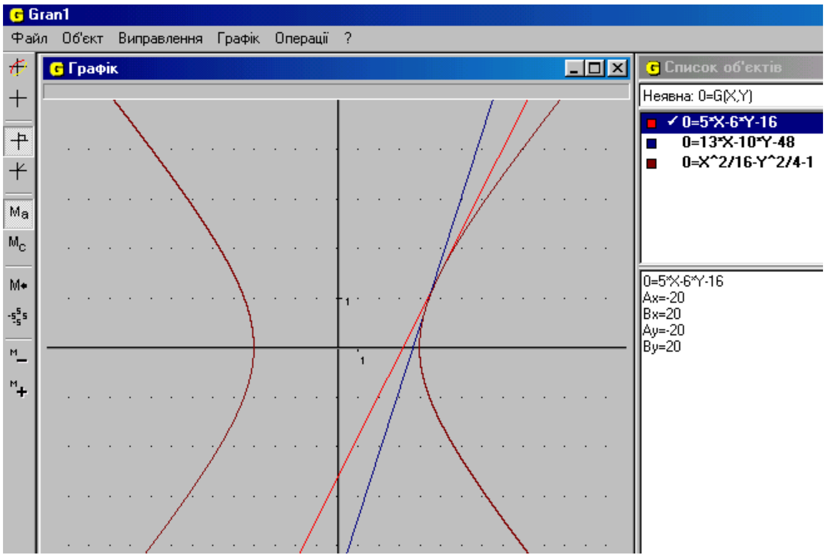


Рис. 4

Таким чином, обчислення виконані правильно.

**Відповідь**: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$.

Найбільш важливим і суттєвим в розв'язуванні задач за допомогою комп'ютера, особливо нових практичних задач, є усвідомлення задачі людиною, її розуміння і аналіз, правильне визначення відповідних засобів її розв'язування. Саме від цього залежить ефективність використання комп'ютера. Оволодіння узагальненими прийомами розв'язування задач – одна з важливих цілей навчання в цілому і формування основ інформаційної культури зокрема. Від того, як людина розв'язує задачу, значно залежить ефективність використання комп'ютера. Крім того, головна мета використання комп'ютера – зробити людину інтелектуально багатшою і сильнішою, розширити і розкрити її творчий потенціал [7, с. 97-98].

Використання комп'ютера у навчальному процесі обумовлює формування більш економного та раціонального мислення студентів, так званого операційного, розвиває логічні здібності, вміння планувати свою діяльність, здійснювати контроль і самоконтроль, моделювати різноманітні явища та процеси. Таким чином, розкривається і реалізується істотний вплив комп'ютерно-орієнтованого навчання на формування загальної культури мислення студентів.

При вивченні розділу "Лінійні оператори" курсу "Алгебра і геометрія" розглядається тема "Зв'язок між матрицями лінійного оператора у різних базисах". Задачі з теми передбачають обчислення добутків матриць із матрицею, оберненою до деякої матриці. Розв'язок задачі значно ускладнюється, коли умова сформульована у загальному виді, тобто замість числових значень величин містить літерні змінні. Уникнути пов'язаних з цим обчислювальних труднощів можна за допомогою програмного засобу Derive.

**Приклад 4**. У лінійному просторі $B_2$ задано пряма, яка у прямокутній декартовій системі координат $Oij$ визначається рівнянням $y=kx$, а також лінійний оператор $\varphi$, який переводить довільний вектор $a\in B_2$ у вектор $b$, симетричний до вектора $a$ відносно прямої $\boldsymbol{y=kx}$. Знайти матрицю лінійного оператора $\varphi$ у базисі $Oij$ [6, с.73].

**Розв'язування**. Виберемо спочатку зручний базис. Рівняння прямої, яка проходить через початок координат та перпендикулярна до даної прямої, має вигляд: $y=-\frac{1}{k}x$. Вектор $a=(1;k)$ належить, очевидно, прямій $y=kx$, а вектор $b=(-k;1)$ – прямій $y=-\frac{1}{k}x$. Зазначимо, що $a\perp b$, оскільки $(a,b)=0$. У базисі $Oab$ зручніше шукати матрицю даного оператора $\varphi$. Зазначимо, що матриця переходу T від базису $Oij$ до базису $Oab$ має наступний вид: $T=\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix}$. Очевидно, що $\varphi(a)=a=1\cdot a+0\cdot b$, тобто вектор $\varphi(a)$ в базисі $Oab$ має координатний стовпчик $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Далі, $\varphi(b)=-b=0\cdot a+(-1)b$, тобто вектор $\varphi(b)$ має в базисі $Oab$ координатний стовпчик $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$. Таким чином, матриця A лінійного оператора $\varphi$ в базисі $Oab$ має наступний вигляд: $A^{\varphi}_{(Oab)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Використавши відому рівність $A^{\varphi}_{(Oij)}=T\cdot A^{\varphi}_{(Oab)}T^{-1}$, яка пов'язує матриці оператора $\varphi$ у базисах $Oij$

та $Oab$, остаточно матимемо: $A^{\varphi}_{Oij} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Для виконання зазначених дій над матрицями скористаємося програмою Derive (рис.5):

$$\#4: \quad \begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\#5: \quad \begin{bmatrix} \dfrac{2}{k^2 + 1} - 1 & \dfrac{2 \cdot k}{k^2 + 1} \\ \dfrac{2 \cdot k}{k^2 + 1} & 1 - \dfrac{2}{k^2 + 1} \end{bmatrix}$$

Рис. 5

**Відповідь**: $A^{\varphi}_{Oij} = \dfrac{1}{k^2+1} \begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$.

Отже, використання ППЗ *Gran1* та програмного засобу *Derive* дозволяяє значно скоротити час на виконання обчислювальних операцій та надає можливість здійснити перевірку отриманих розв'язків задач навчальної дисципліни “Алгебра і геометрія”.

**ЛІТЕРАТУРА**


1. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів – К.: Техніка, 1997. – 303 с.
2. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії: посібник для вчителів. – Київ. ДІНІТ. 2002. – 170 с.
3. Вильямс Р., Маклин К. Компьютеры в школе: Пер. с англ./ Общ. ред. и вступ. ст. В.В.Рубцова. – М.: Прогресс, 1988.– 336 с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1958.– 240 с.
5. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри. К., “Вища школа”, 1969.– 540 с.
6. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов по спец. “Физика” и “Прикл. математика”. – М.: Высш. шк., 1985. – 120 с.
7. Основы компьютерной грамотности / Е.И. Машбиц, Л.П. Бабенко, Л.В. Верник и др.; Под ред. А.А. Стогния и др. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 215 с.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М., «Наука», 1967.– 384 с.
9. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., 1964.