

**Kuz'mich V. I., Kuzmych L. V. Construction of straight-line and flat sets, when studying metric spaces.**

The article discusses the notion of straight-line and flat placement of points of a metric space. In the overwhelming majority of textbooks and manuals, there are practically no tasks revealing the geometric properties of an arbitrary metric space. In this paper, an attempt has been made to introduce such tasks for the notions of straightness and flat placement of points. The conditions for straight-line and flat placement of points are given, examples of such placements in specific metric spaces are considered. In this case, the authors rely on the concept of angle, as an ordered triple of points of a metric space. Such an approach makes it possible to generalize this concepts, and increases the possibility of their application.

In the work on six examples, the properties of straight-line and flat location of points in two concrete metric spaces are demonstrated. It is shown that the metric of space significantly affects the geometric properties of this space. Examples are given showing that the concepts of straight-line and flat location of points of a metric space admit elements of non-Euclidean geometry in this space. The paper presents an example of functions which are straight-line placement in space, but are not flat placement in this space. An example of two sets of functions is built in the paper, each of which is flat placement, these sets have three common points, but the union of these sets is not flat placement.

The results of the work can be used in higher educational institutions in practical classes on the study of the properties of metric spaces, in extracurricular work with students of general educational institutions, as well as during advanced training of teachers of mathematics.

**Keywords:** point, space, metric, straight line, plane, angle, determinant, tetrahedron.

УДК 37.016:514

Ленчук І. Г., Працьовитий М. В.

## МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ З КУТАМИ У СТЕРЕОМЕТРІЇ

Розглядається задача елементарної “нарисної” геометрії, що має дидактичну цінність для конструктивної складової шкільної стереометрії, наводиться три способи її розв’язання і доводиться теорема, корисна при розв’язуванні подібного роду задач. Пропонуються методичні рекомендації та поради.

**Ключові слова:** двограний кут, лінійний кут двогранного кута, кут між прямою і площиною, прикладна геометрична задача, лінія рівня, лінія найбільшого нахилу, правило-орієнтир, графічний та графоаналітичний методи розв’язування задач.

Розвиток просторової уяви, конструктивно-образного мислення, візуалізації алгоритмічних міркувань – одне із завдань шкільного курсу геометрії. До основних об’єктів елементарної стереометрії відносяться многогранники та тіла обертання, які конструктивно-синтетичними засобами вивчаються в шкільному курсі математики. При цьому в теорії продуктивними є поняття двогранного кута та кута між прямою і площиною. У класичному, випробуваному часом, підручнику стереометрії (майже у тридцять років), означення кута між прямою і площиною та кута між двома площинами вводяться **конструктивно** ([3], пп. 32, 33, 37), що дозволяє в найбільш загальному вигляді, строго за кроками алгоритмізувати базові позиційно-метричні задачі “на кути” у просторі (рис. 1, 2). Це надто важливо для наочно-образного розуміння суті розглядуваного питання. Нижче ми пропонуємо задачу, корисну в згаданому аспекті, три способи розв’язування її й обґрунтовуємо теорему, на якій можуть базуватись міркування та розв’язки.

**Задача.** У правильній трикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює  $60^\circ$ . Побудуйте лінійний кут двогранного кута при її бічному ребрі.

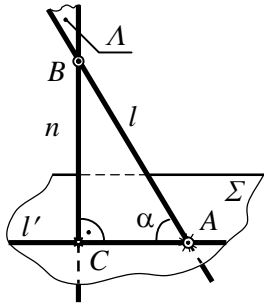


Рис. 1

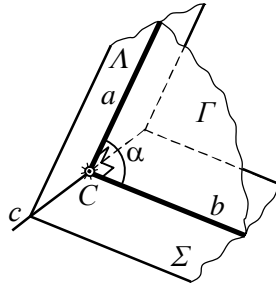


Рис. 2

**Перший спосіб розв'язування.**  
Нехай  $L$  – будь-яка точка бічного ребра  $SC$  піраміди  $SABC$  (рис. 3). Як через обрану точку провести допоміжну в побудові площину, перпендикулярну до  $SC$ ? Очевидно, що найбільш доречно задати її двома прямими  $a$  і  $b$ , які перетинаються у вибраній точці  $L$  і належать

відповідно граням  $SAC$  та  $SBC$ . Такі міркування просторову метричну задачу звужують до площинної, тобто зараз цілком достатньо хоча б у одній із граней ( $SAC$ ) провести пряму  $a$ , перпендикулярну  $SC$  у точці  $L$ . Після чого пряму  $b$  в іншій грані ( $SBC$ ) побудувати буде зовсім неважко, адже дана трикутна піраміда правильна, й тому площина  $\Sigma$  ( $a \cap b$ ), яка містить будь-де взятую точку  $L$  на ребрі  $AC$  і перпендикулярна до цього ребра, висіче на поверхні піраміди рівнобедрений трикутник  $DLQ$  ( $DL = QL$ ), бо прямокутні трикутники  $DLC$  і  $QLC$  рівні, що очевидно:  $\angle QLC = \angle DLC = 90^\circ$  ( $\Sigma \perp AC$ ),  $\angle QCL = \angle DCL$  (усі бічні грані піраміди рівні), а катет  $LC$  – спільний.

У стандартній ситуації, що склалася, пропонується провести ретельний аналіз умови задачі та, врахувавши вихідні дані, подбати про відшукання таких взаємних залежностей між елементами грані  $SAC$ , які шляхом виконання певної послідовності **алгебричних і побудовних** дій забезпечать очікуваний результат.

Для зручності в роботі введемо таке позначення:  $AC = a$ . Тоді  $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , а  $OM = \frac{BM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ . Далі, у прямокутному трикутнику  $SOM$  ( $\angle OSM = 30^\circ$ )  $SM = 2 \cdot OM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Крім того,  $MC = \frac{a}{2}$  й урахувавши, що трикутник  $SMC$  теж є прямокутним, остаточно матимемо:  $SC = \sqrt{SM^2 + MC^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ . (\*)

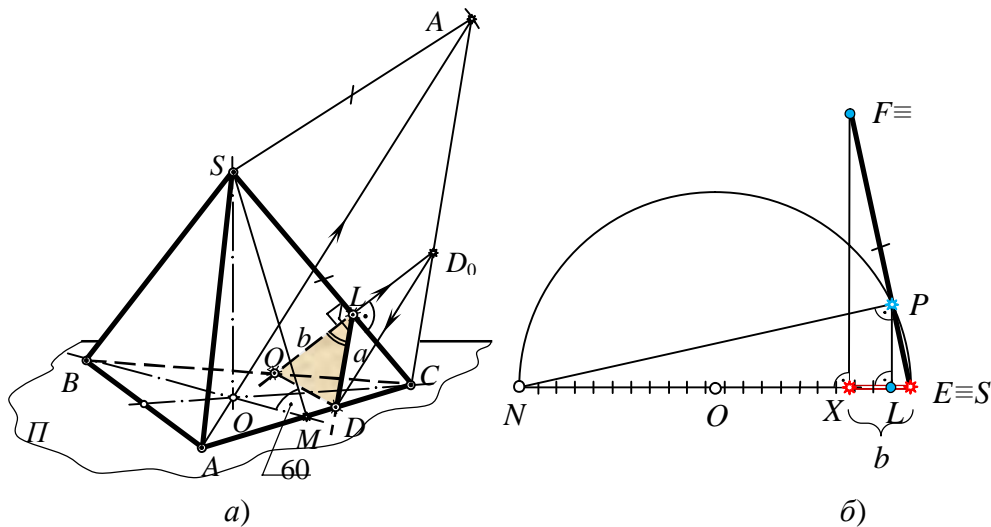


Рис. 3

Далі, з метою встановлення істинної форми грані  $SAC$ , а отже, проведення в точці  $L$  перпендикуляра  $LD(LD_0)$ , сумістимо трикутник  $SAC$  із площиною рисунка шляхом обертання однієї з його вершин або навколо ребра  $AC$ , або навколо ребра  $SC$ . Зупинимося на другому варіанті й побудуємо відрізок  $a$ , за відомим відрізком  $SC$  (див. формулу (\*) і рис. 3, б).

Отже,  $SC = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ . Для відшукування відрізка  $a$  спочатку варто побудувати відрізок  $b$

такий, що  $SC = b\sqrt{21}$ , а потім взяти 6 (шість) таких відрізків. Тут середнім геометричним відрізком буде катет  $EP$  прямокутного трикутника  $EPN$  із гіпотенузою у 21 одиничний

відрізок, а  $EF = SC$  на промені  $MP$ . Очевидно, що  $\triangle EPL \sim \triangle EFX$ . Звідси  $\frac{EX}{EL} = \frac{EF}{EP}$ . Однак,

$EL=1$ , а  $EP = \sqrt{21}$ . Тому  $EX = \frac{SC}{\sqrt{21}} = b$ . Остаточо маємо:  $CA_0 = 6 \cdot b$  (рис. 3, а).

Завершуючи етап побудови, посилаємося лише до відомої теореми про пропорційні відрізки та до твердження про те, що відношення відрізків на прямій є інваріантом паралельного проєкціювання.

Для виконання в грані  $SAC$  графічних операцій, що дозволяють подати на метрично визначеному зображенні піраміди ( $A'B' = B'C'$ ,  $B'C' = A'C'$ ,  $S'A' = S'B'$ ,  $S'B' = S'C'$ ,  $\angle S'M'B' = 60^\circ$ ) шукану геометричну фігуру, довелося попередньо виконати порівняно прості аналітичні розрахунки і скористатися їх результатом графічно. Тому зараз стереометричну задачу на побудову розв'язано *графоаналітичним* методом.

**Другий спосіб розв'язування.** Все ж, як тепер з'ясувалося, наведений шлях до рисункового розв'язку дещо непевний у виборі точки  $L$  і операційно складніший, ніж очікувалося. Чи не корисніше тісніше пов'язати точку  $L$  з елементами піраміди, й цим конкретизувати, хоч трохи спростити, оптимізувати та пришвидшити процес виконання побудов? І чи можливо спланувати побудову так, щоб відразу (або ж додавши найменші зусилля) на проєкційному кресленні можна було б не лише спостерігати зображення шуканого кута, а й заміряти його справжню градусну міру?

Виявляється, що ці проблеми зникають, якщо не слідувати сліпо реалізованому щойно алгоритму і, додавши творчості, точку  $L$  на ребрі  $SC$  (рис. 4) вибирати не будь-де, а в такій площині  $\Omega$ , перпендикулярній  $SC$ , яка містить, скажімо, ребро  $AB$  в основі піраміди.

Обґрунтуємо ці міркування. Якщо  $SN$  – апофема бічної грані  $SAB$  ( $SN \perp AB$ ), то  $CN$  (проєкція  $SN$ ) – медіана, бісектриса і висота правильного трикутника  $ABC$  в основі піраміди ( $CN \perp AB$ ) і, згідно з ознакою перпендикулярності прямої та площини,  $AB \perp \mathcal{A}(SNC)$ . Але ж пряма, перпендикулярна площині, перпендикулярна будь-якій прямій цієї площини (за означенням). Тому  $AB \perp SC \in \mathcal{A}$ . Таким чином, на вирішальному етапі побудови площина  $\Omega$  однозначно визначається у просторі заданим ребром  $AB$  і перпендикуляром  $NL$ , який і залишилося опустити з вершини  $N$  трикутника  $SNC$  на його протилежну сторону  $SC$ .

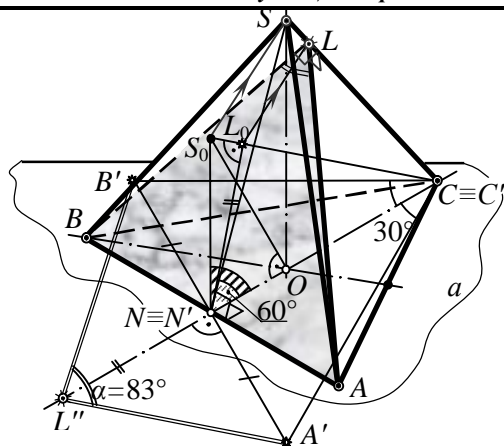


Рис. 4

Реалізувати графічно на зображенні піраміди цю операцію можна надто просто, якщо, наприклад, знайти істинну форму  $S_0NC$  трикутника  $S'N'C'$  шляхом його суміщення із картинною площиною – обертанням навколо осі  $NC \equiv N'C'$ . При цьому точка  $S_0$  є перетином променів  $OS_0$  і  $NS_0$  таких, що  $\angle NOS_0 = 90^\circ$ , а  $\angle S_0NO = 60^\circ$  в оригіналі (відрізок  $NL$  на рисунку не показано).

Зауважимо, що завдяки осмислено проведеному аналізу простих внутрішніх взаємних залежностей у піраміді, класичний алгоритм виконання побудов, залишаючись реально

достовірним, зазнав суттєвих змін як із точки зору його уявлюваної конструкції в загальногеометричній формі, так і у плані оптимізації дій виконавця в даній конкретній ситуації: 1) Через ребро  $A'B'$  проводимо площину  $\Omega'$ , перпендикулярну ребру  $S'C'$ . 2) Шукаємо точку  $L'$  перетину площини  $\Omega'$  і ребра  $S'C'$ . 3) З'єднуємо відрізками точку  $L'$  із точками  $A'$  і  $B'$ . Кут  $ALB$  – зображення шуканого лінійного кута, яким вимірюється двогранний кут при ребрі  $S'C'$ .

Щоб знайти на зображенні справжню градусну міру кута  $ALB$ , потрібно, щонайперше, сумістити з картинною площиною трикутник  $A'B'C'$  в основі піраміди. Причому, віссю обертання і в цьому випадку обов'язково має бути та ж сама пряма  $NC \equiv N'C'$  (див. перше суміщення), яка, як наголошувалося, є висотою ( $N'C' \perp A'B'$ ) і, звичайно, медіаною ( $A'N' = N'B'$ ) розглядуваного рівностороннього трикутника ( $\angle A'C'N' = \angle N'C'B' = 30^\circ$ ). Отже, побудова трикутника  $A'B'C'$  тут майже очевидна. Крім цього, ще одним (наступним) кроком слід сумістити із площиною дошки (зошита) трикутник  $A'B'L'$ , в якого в оригіналі  $N'L' = N'L'' = N'L_0$ , де відрізок  $N'L_0$  відомий з найпершого суміщення (див. рис. 4). Нарешті, скориставшись транспортиром, як засобом вимірювання кутів, встановлюємо результат (з точністю до побудови і вимірювання): градусна міра кута  $A'L'B'$  насправді складає  $83^\circ$ .

Тепер унесемо повну ясність до останніх побудов. Очевидно та безсумнівно, що рівнобедрений трикутник  $A'B'L'$  ( $A'L' = B'L'$ ) цілком визначається своїми основою  $A'B'$  і висотою  $L'N'$ , проведеною до цієї основи. У свою чергу, ці ж елементи шуканого трикутника мають однозначні графічні (і, до речі, аналітичні) вираження через відрізок  $N'C' \equiv NC$ , який вибрано за базову вісь першого та другого суміщень із площиною зображень трикутників  $N'S'C'$  і  $A'B'C'$ . Тому рівнобедрений трикутник  $A'B'L''$ , побудований на відрізках  $A'B'$  і  $N'L_0$ , як на власних основі і висоті до цієї основи відповідно, справді встановлює істинну форму трикутника  $ABL$ .

У цьому випадку ланцюжок логічних умовиводів і відповідних побудовних операцій уособлюють **графічний** метод.

Очевидно також, що суто аналітичних методів розв'язання саме конструктивних пропозицій бути не може, оскільки тут рисунку надається провідна, кардинальна роль і якраз креслярські інструменти фіксують на плоскому екрані замовлений результат.

**Третій спосіб розв'язування.** Чи не можна ще більше урізноманітнити шлях до конструктивного вирішення розглядуваної задачі, зацікавити студентів (учнів) елементарними **прикладними** ситуаціями, активізувати пізнавальну і фахову діяльність, апелюючи до їх уявлень та фантазії, вже достатнього життєвого досвіду (що й не дивно для старшокласника чи студента випускного курсу)? Виявляється, що й це можна зробити, якщо

доречно поставити просте й зрозуміле кожному з них запитання: “Що таке **схил** (нахил) даху?”, а потім дати наукове (геометричне) обґрунтування введеного поняття. Мова при цьому ведеться про традиційний похилий дах звичайного будинку.

Як з’ясувалося, термін, поширений в будівництві та архітектурі, має цілком природне геометричне тлумачення. Адже в будь-якій площині загального розташування можна виділити два сімейства особливих (цікавих) прямих ліній: 1) **лінії рівня**, що розташовуються паралельно основній площині; 2) **лінії найбільшого нахилу** (*схилу*), що утворюють з основною площиною максимально можливий (найбільший) кут. До речі, за основну можна вибрати площину, визначену на кресленні якою завгодно гранню багатогранника. Правильно й те (це легко уявити), що всяку площину можна вщерть заповнити лініями як одного, так і іншого сімейства: кулька з будь-якої вихідної позиції (точки) даху скотиться за траєкторією єдиного напрямку – вздовж лінії найбільшого нахилу.

Як побудувати у вибраній на зображенні багатогранника площині (наприклад, у бічній грані) будь-яку пряму того чи іншого сімейства? Чи існує між прямими обох сімейств внутрішній геометричний взаємозв’язок?

Відповідь на ці запитання дає твердження, яке цілком вписується в рамки курсу елементарної геометрії загально-освітньої школи.

**Теорема.** *Прямі площини загального положення, які розташовані перпендикулярно до її будь-якої лінії рівня (відносно площини основи), є лініями найбільшого нахилу.*

*Доведення* теореми проведемо **аналітико-синтетичним методом**.

Нехай у площині загального розташування  $\Lambda$  ( $A(A_1), s$ ) (рис. 5), яка перетинає площину

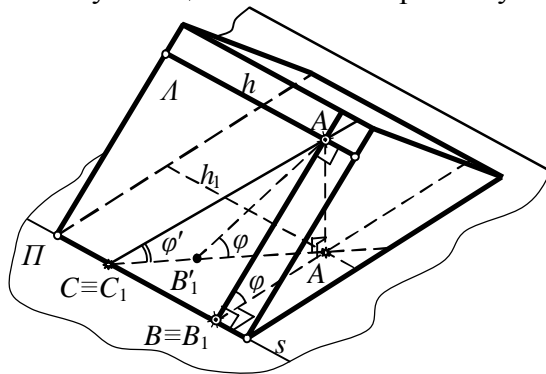


Рис. 5

основи  $\Pi$  уздовж прямої (сліду)  $s$ , проведено будь-яку пряму  $AB(A_1B_1)$ , перпендикулярну прямій  $h(h_1)$ , де  $h$  – лінія рівня площини  $\Lambda$  ( $h \parallel \Pi, h \in \Lambda$ ), а  $A$  – точка перетину цих прямих.

Покажемо, що пряма  $AB$  утворює максимально можливий кут нахилу до площини основи  $\Pi$ , у порівнянні зі всіма іншими кутами, утвореними рештою прямих площини  $\Lambda$ , які вміщують ту ж саму точку  $A$ .

Проаналізуємо **висновок** теореми. Для цього додатково через точку  $A$  у площині  $\Lambda$  проведемо довільно вибрану іншу пряму

$AC(A_1C_1)$ , відмінну від  $AB$ . Кутом між прямою і площиною називається, як уже згадувалося, кут між даною прямою і її проекцією на площину. Нехай  $A_1$  – ортогональна проекція (основа) точки  $A$ . Тоді  $A_1B_1$  і  $A_1C_1$  – проекції (основи) прямих  $AB$  і  $AC$  на площину  $\Pi$  відповідно. За таких обставин  $AB$  буде лінією найбільшого нахилу, якщо з умови теореми логічно випливатиме факт:  $\angle AC_1A_1 = \varphi' < \angle AB_1A_1 = \varphi$ . Отже, доведення теореми зводиться до встановлення істинності записаної нерівності.

Розгорнемо **умову**. Оскільки  $AB \perp h$ , а  $h \parallel \Pi$ , то  $h \parallel s$  (відповідно до ознаки паралельності прямої і площини) і  $AB \perp s$  (за наслідком із властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). Скориставшись теоремою про три перпендикуляри, матимемо  $A_1B_1 \perp s$ . Отже,  $A_1B_1$  – перпендикуляр до прямої  $s$  у площині  $\Pi$ , а  $A_1C_1$  – похила до неї ж, тому  $A_1B_1 < A_1C_1$ . Відкладемо на  $A_1C_1$  відрізок  $A_1B'_1 = A_1B_1$  та з’єднаємо точки  $B'_1$  і  $A$ . У трикутнику  $AC_1B'_1$  кут  $AB'_1A_1$ , рівний  $\varphi$  ( $\triangle AA_1B_1 = \triangle AA_1B'_1$ ), є зовнішнім, а отже, більшим будь-якого внутрішнього не суміжного з ним кута. Що й призводить до очікуваного результату:  $\varphi' < \varphi$ , тобто пряма  $AB$  площини  $\Lambda$ , перпендикулярна до лінії рівня  $h$  цієї

площини, справді є лінією найбільшого нахилу до площини основи  $\Pi$ .

Очевидно, що у практичній стереометрії за лінію рівня тієї чи іншої грані багатогранника доцільно відразу ж обирати їх спільне із гранню основи ребро  $s$ , яке, завдяки особливому розташуванню відносно  $\Pi$ , називають досить часто ребром нульового рівня.

Таким чином, двогранний кут можна також вимірювати лінійним кутом, утвореним прямою найбільшого нахилу однієї грані багатогранника до іншої його грані – основи (за вибором виконавця); точніше, – до проекції лінії найбільшого нахилу певної грані на площину основи. Це, у свою чергу, задачу відшукування двогранного кута зводить до задачі на побудову кута між визначеними прямою і площиною, що геометрично теж важливо.

Отже, повернувшись тепер до умови задачі, знайдемо ще один змістово і візуально привабливий алгоритм побудови лінійного кута заданого двогранного кута при ребрі  $SC$

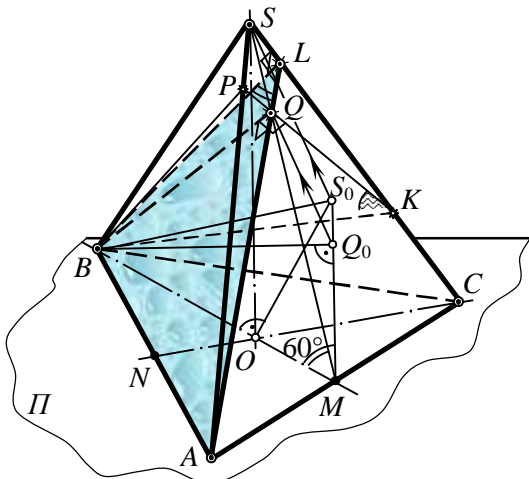


Рис. 6

(рис. 6). Для цього досить, наприклад, із вершини  $B$  опустити перпендикуляр  $BQ$  на грань  $SAC$ , а потім з'єднати точку  $A$  з точкою  $Q$  до перетину з ребром  $SC$  у точці  $L$ . Кут  $ALB$  – шуканий. Тут роль основної площини відіграє грань  $SAC$ , а  $QL$  – ортогональна проекція  $BL$  на цю грань.

Побудову точки  $Q$  на апофемі  $SM$  грані  $SAC$  у метрично визначеному трикутнику  $SBM$ , де  $\angle S_0OM = 90^\circ$ , а  $\angle S_0MO = 60^\circ$ , можна виконати аналогічно попередньому і виключно **графічним** методом; трикутник  $S_0BM$  – суміщення з картинною площиною трикутника  $SBM$ .

У доповнення подаємо кілька **методичних** порад і зауважень.

1. Уміння будувати точку  $Q$  – основу перпендикуляра, опущеного з вершини на протилежну грань *дає*, поряд із цим, **можливість зобразити** на проекційному кресленні **кут нахилу до грані  $SAC$  будь-якої прямої**, що належить іншим граням піраміди (див., напр.,  $\angle BKP$ , де  $K$  – деяка точка на ребрі  $SC$ ).

2. Природно, що в умовах школи висновок цієї задачі мав би дещо інше (більш звичне) звучання, а саме: “Обчислити (а не **побудувати**) лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі”. Чи важко це зробити? Виконати аналітичні обрахунки зовсім неважко, якщо правильно зорієнтуватися у взаємному розташуванні визначальних елементів заданої стереометричної фігури.

Отже, знову звертаємося до правильного і наочного рисунка 6.

Введемо позначення: нехай  $AB = BC = AC = 1$ . Тоді  $NA = \frac{1}{2}$  і (див.  $\triangle NLA$ )  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{NA}{NL}$ ,

тобто відшукування градусної міри  $\angle ALB = \alpha$  зводиться до встановлення висоти рівнобедреного трикутника  $ALB$ . Очевидно, що  $NL$  можна було б обчислити скориставшись, наприклад, теоремою Піфагора у трикутнику  $NSL$  ( $\angle L=90^\circ$ ):  $NL = \sqrt{NS^2 - SL^2}$  (\*). Позначимо (для зручності)  $SL = x$ , тоді  $LC = SC - x$ . Виразимо ще раз відрізок  $NL$  з іншого прямокутного трикутника  $NLC$ :  $NL = \sqrt{NC^2 - LC^2}$ . Із урахуванням (\*) та введених позначень, матимемо:  $NS^2 - x^2 = NC^2 - (SC^2 - x^2)$  (\*\*). Тепер, без зайвих пояснень, знайдемо послідовно (один за другим) довжини трьох відрізків  $NC$ ,  $NS$  і  $SC$ . Отже,  $\triangle NCA$ :

$$NC = \sqrt{AC^2 - NA^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; NO = \frac{1}{3} NC = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \Delta SNO: \quad NS = 2NO = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \Delta SNA:$$

$$SA = \sqrt{NS^2 + NA^2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = SC. \text{ Підстановкою в (**)} \text{ знаходимо: } x = \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}. \text{ Тому (див. (*)),}$$

$$NL = \frac{3}{2\sqrt{7}}. \text{ Нарешті отримаємо: } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,882 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 41^\circ 30' \text{ і } \alpha = 83^\circ.$$

Зрозуміло, що в останньому випадку для виконання завдання, яке носить винятково обчислювальний характер, учителю не обов'язково користуватися кресленням-моделлю. Цілком достатньо мати наочне креслення-картину, на якому точка  $L$  – вершина трикутника  $ABL$  – вибирається виконавцем довільно, за власним розсудом.

3. Хоч ланцюжок умовиводів стосовно візуалізації та графічного і обчислювального відшукування градусної міри двогранного кута при ребрі піраміди  $SC$  й добігає кінця, все ж залишається відчуття незавершеності в роботі. Адже мимохідь було порушено питання про кут між прямою і площиною на поверхні. Очевидно, що вміння обґрунтовано строго *опустити перпендикуляр на проєкційному кресленні з будь-якої вершини піраміди на протилежну грань (проводити висоту; напр., відрізок  $BQ$  на рис. 6)* тепер уже налаштовує на швидку та якісну побудову зображення такого кута ( $\angle BKP$ ). А чи не можна, до того ж, графічно циркулем і лінійкою одержати його оригінальне представлення? Виявляється, що й це можна зробити, якщо однозначно визначитися з розташуванням точки  $K$  на ребрі  $SC$ , відмітивши її візуально або ж задавши певним відношенням відрізків  $SK : KC$ , де  $KC = 2:1$ ).

4. Результат обчислень градусної міри кута  $BKP$  дозволяє стверджувати, що явно *неочевидні графічні операції*, достатньо кваліфіковано проведені на картинній площині, **точні**, хоч незначна похибка ( $\sim 1,17\%$ ) в побудовах “від руки” все ж має місце. Із цим ще раз переконуємося, що на проєкційних кресленнях, як і на двокартинних кресленнях, досить складні геометричні побудови можна виконувати з надзвичайно високим ступенем точності.

5. Суб'єкту навчання суть важливо усвідомити, що в розмаїтті способів розв'язання розглянутої типової задачі із зображенням двогранного кута слід найперше звернути увагу на загальногеометричний підхід у *проведенні перпендикуляра з будь-якої точки на яку завгодно грань чи на який завгодно переріз* метрично визначеного багатогранника. Адже таку графічну операцію кваліфікують як одну з основних у метричній стереометрії.

6. Варто із низки основних метричних задач у просторі окремим видом вирізнити задачі на встановлення (побудову) **відрізка-відстані** від точки до площини за умови, що картинна площина метрично визначена зображенням деякого стереометричного тіла. Беручи до уваги хід поданих міркувань, сформулюємо **узагальнююче правило-орієнтир** строгого розв'язання таких (та схожих до них) пропозицій: **1) Встановлюємо напрям шуканого перпендикуляра, як-от, візуально на рисунку вибираємо точку, з якої порівняно просто (за вже відомим чи майже очевидним побудовним алгоритмом) проводимо пряму, перпендикулярну заданій площині. 2) Через задану точку проводимо пряму, паралельну знайденому напрямку. 3). Будуємо перетин цієї прямої із заданою площиною.**

7. Привертаємо також увагу до **графічного та графоаналітичного методів** розв'язування задач. Конструктивний підхід у пошуку результату в жодному разі не виключає обчислювальну складову, якщо лише такий результат передбачено висновком задачі.

#### Використана література:

1. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах : навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. пед. навч. закл. / І. Г. Ленчук. – Житомир : видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2010. – 367 с.

2. *Ленчук І. Г.* Система навчання майбутнього вчителя конструктивної геометрії: монографія / І. Г. Ленчук. – Житомир: видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2011. – 356 с.
3. *Погорелов О. В.* Геометрія: Стереометрія: підручник для 10-11 класів серед. шк. / О. В. Погорелов. – Київ: Освіта, 1998. – 128 с.

#### **References:**

1. *Lenchuk I. H.* Konstruktyvna stereometriia v zadachakh: navch. posib. dlia stud. mat. spets. vyshch. ped. navch. zakl. / I. H. Lenchuk. – Zhytomyr: vydavnytstvo ZhDU imeni I. Franka, 2010. – 367 s.
2. *Lenchuk I. H.* Systema navchannia maibutnoho vchytelia konstruktyvnoi heometrii: monohrafiia / I. H. Lenchuk. – Zhytomyr: vydavnytstvo ZhDU imeni I. Franka, 2011. – 356 s.
3. *Pohorielov O. V.* Heometriia: Stereometriia: pidruchnyk dlia 10-11 klasiv sered. shk. / O. V. Pohorielov. – Kyiv: Osvita, 1998. – 128 s.

#### **Ленчук И. Г., Працевитый Н. В. Метрические задачи с углами в стереометрии.**

*Рассматривается задача элементарной “начертательной” геометрии, которая имеет дидактическую ценность для конструктивной составляющей школьной стереометрии, приводятся три способа ее решения и доказывается теорема, полезная при решении подобного рода задач. Предлагаются методические рекомендации и советы.*

**Ключевые слова:** *двугранный угол, линейный угол двугранного угла, угол между прямой и плоскостью, прикладная геометрическая задача, линия уровня, линия наибольшего наклона, правило-ориентир, графический и графоаналитический методы решения задач.*

#### **Lenchuk I. G., Pratsiovytyi M. V. Metric problems with angels and corners in stereometry.**

*The elementary descriptive geometry problem having didactic value for constructive component of school stereometry is considered and three ways to solve it are given in the paper. The theorem useful for solving such problems is proved. Methodical recommendations and tips are offered.*

**Keywords:** *two-sided corner, linear angle of a two-sided corner, angle between a straight line and a plane, applied geometric problem, line of a level, line of the largest inclination, guide rule, graphical method and graphical and analytical method of solving problems.*

УДК 378-057.875

**Працьовитий М. В., Василенко Н. М., Лисенко І. М.**

#### **ТЕМА: “ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ” У КУРСІ “ВСТУП ДО СПЕЦІАЛЬНОСТІ МАТЕМАТИКА”**

*Пропонується змістовне наповнення теми “Лінійні простори числових послідовностей: двовимірний простір послідовностей Фібоначчі” у курсі “Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА” з аргументацією її доцільності вивчення першокурсниками математичних спеціальностей педагогічних університетів.*

**Ключові слова:** *числова послідовність, послідовність Фібоначчі, двовимірний лінійний простір числових послідовностей, навчальна дисципліна “Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА”, математичні спеціальності у педагогічному університеті.*