М.І. Жалдак,

Н.М. Кузьміна,

Г.О. Михалін

ЗБІРНИК ЗАДАЧ І ВПРАВ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

для студентів фізико-математичних спеціальностей
педагогічних університетів

Полтава

«Довкілля-К»

2010

М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін

ЗБІРНИК ЗАДАЧ І ВПРАВ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

для студентів фізико-математичних спеціальностей
педагогічних університетів

ББЛ 22.3я 721

Ж24

Затверджено Міністерством освіти і науки України

(Лист від 03.11.08 №1.4/18-Г-2303)

Рецензенти:

Доктор педагогічних наук, професор Клочко В.І.

Доктор фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.

Доктор педагогічних наук, професор Триус Ю.В.

М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін

Ж24 Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. Для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін.

ISBN 966-8791-19-3

Наведено основні теоретичні відомості та ілюстративні приклади і рисунки, зразки розв’язування задач і задачі для самостійного розв’язування. Для побудови графічних зображень, обчислення значень виразів, визначених інтегралів, аналізу статистичних даних, визначення числових характеристик розподілів ймовірностей, в тому числі статистичних, передбачається використання відповідних комп’ютерних програм, зокрема Gran1.

Збірник задач і вправ розроблений у точній відповідності до підручника «Теорія ймовірностей і математична статистика», затвердженого Міністерством освіти і науки України (Лист від 03.11.08 №1.4/18-Г-2303).

Посібник призначений для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Може стати в нагоді також студентам технічних, економічних та інших спеціальностей, вчителям математики та учням старших класів середніх навчальних закладів.

ББК 22.3я 721

ISBN 966-8791-19-3.

Передмова

Даний збірник задач і вправ з курсу “Теорія ймовірностей і математична статистика” призначено для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Значна частина задач присвячена формуванню ймовірнісно-статистичного мислення, яке неможливе без розуміння сутності основних понять теорії ймовірностей: стохастичний експеримент і простір елементарних подій, випадкова подія та її ймовірність, ймовірнісний простір та його будова, випадкова величина та розподіл ймовірностей на множині її значень, числові характеристики такого розподілу ймовірностей тощо. Основну увагу приділено побудові ймовірнісного простору, тобто ймовірнісної моделі стохастичного експерименту. Задачі технічного характеру, пов’язані з обчисленням певних характеристик, передбачається розв’язувати за допомогою відповідно комп’ютерних програм, наприклад, GRAN1.

Навчальний матеріал поділено на розділи та підрозділи. Розділи нумеруються однозначними числами (від 1 до 5), а підрозділи мають подвійну нумерацію, наприклад, номер 2.5 означає п’ятий підрозділ другого розділу. Задачі кожного підрозділу мають свою нумерацію, починаючи з номера 1.

У відповідях наведено номер підрозділу і після нього номери задач цього підрозділу.

Структура кожного параграфа збірника задач така: спочатку наведено основні теоретичні відомості та ілюстративні приклади і рисунки, потім – зразки розв’язування задач, і далі – задачі для самостійного розв’язування. Значна частина задач є оригінальними. Ідеї інших задач запозичено із різних збірників задач і вправ з теорії ймовірностей та математичної статистики.

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. СТАТИСТИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

1.1. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій

Експерименти, точні результати яких передбачити неможливо, називають *стохастичними* або *випадковими.* Кожному стохастичному експерименту відповідає певна множина Ω його можливих наслідків. Ця множина Ω називається *множиною* або *простором елементарних подій*, а її елементи називають *елементарними подіями*. При цьому в кожному *випробуванні* (проведенні експерименту) має місце один єдиний наслідок – відбувається одна єдина елементарна подія із множини Ω всіх елементарних подій. Іншими словами, в результаті випробування із множини Ω немов би навмання вибирається один єдиний елемент E – відбувається елементарна подія E.

Приклад 1.1. На гранях шестигранного грального кубика нанесено цифри від 1 до 6. Експеримент полягає в підкиданні кубика і фіксації грані, якою кубик впаде догори. Множина Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} є множиною можливих наслідків експерименту, тобто простором елементарних подій. Поява на верхній грані кубика однієї з цифр від 1 до 6 означає, що відбувається відповідна елементарна подія.

Приклад 1.2. Підкидається кубик, як і в прикладі 1.1, але фіксується лише парна чи непарна цифра на грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина Ω = {”парна”, “непарна”} є множиною двох можливих наслідків експерименту, тобто простором із двох елементарних подій.

У розглянутих прикладах простір елементарних подій був скінченним. Проте часто трапляються випадки, коли множина Ω нескінченна.

Приклад 1.3. В круглу мішень радіуса 1, яку можна вважати множиною точок (x, y) таких, що $x^2+y^2\le 1$, виконується один постріл. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Множина елементарних подій $\Omega=\{(x, y): x^2+y^2\le 1\}$ характеризує можливі результати експерименту: точки (x, y), в які може влучити куля, визначають відповідні елементарні події в даному експерименті.

Поняття елементарної події та простору елементарних подій належать до основних понять теорії ймовірностей і не означаються через простіші поняття, аналогічно до того, як в теорії множин до основних понять належать поняття елемента множини та множини, в геометрії – поняття точки та площини, в теорії алгоритмів – поняття алгоритму і т. д.

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Грані шестигранного кубика пофарбовано різними кольорами: одна грань біла, ще одна грань червона, інші чотири грані зелені. При підкиданні кубика фіксується колір грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина Ω = {”біла”, “червона”, “зелена”} є множиною можливих наслідків експерименту, тобто простором із трьох елементарних подій.

Вправа 2. З підкиданням кубика можна пов'язати і інші простори елементарних подій з одним, двома, трьома, чотирма, п'ятьма, шістьма можливими наслідками випробовування. Якщо поділити множину $\{"1","2","3","4","5","6"\}$ на деяку кількість підмножин $H_1, H_2, \ldots, H_k$, $1 \le k \le 6$, таких, що $H_i H_j = \varnothing$ при $i \ne j$, тобто дві різні множини H_i та H_j не містять спільних елементів, а об'єднання усіх множин H_i, $i \in \overline{1, k}$, вичерпує дану множину $\{"1","2","3","4","5","6"\}$, та вважати єдино можливими наслідками випробування попадання в такі підмножини H_i, тоді простір Ω елементарних подій міститиме k елементарних подій $E_1, E_2, \ldots, E_k$ (k можливих наслідків випробовування, $1 \le k \le 6$).

Вправа 3. Один за одним підкидаються два гральні кубики і фіксується пара чисел: число очок, що випало на першому кубику, і число очок, що випало на другому кубику. Тоді простором елементарних подій є множина

$$\Omega = \{(i, j) : i \in \overline{1,6};\ j \in \overline{1,6}\}.$$

У цьому разі елементарні події можна інтерпретувати як усі можливі впорядковані пари цілих чисел (i, j), де $1 \le i \le 6,\ 1 \le j \le 6$. Так, елементарна подія $(3, 5)$ полягає в тому, що на першому кубику випало три очка, а на другому – п'ять очок.

Якщо фіксувати як результат випробування сумарну кількість очок на двох кубиках, тоді простором елементарних подій буде множина $\Omega = \{2,\ 3,\ 4,\ \ldots, 11,\ 12\}$.

Вправа 4. Експеримент полягає в тому, що з відрізка $[t_1, t_2]$ навмання вибирається два числа. Тоді множину

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [t_1, t_2],\quad y \in [t_1, t_2]\},$$

що складається з усіх пар дійсних чисел (x, y) – елементів так званого *декартового добутку* $[t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$, можна розглядати як простір елементарних подій у даному випробуванні.

Вправа 5. Якщо результатом експерименту вважати траєкторію частинки в броунівському русі, що починається в певній точці, то простором елементарних подій буде нескінченна множина всіх можливих траєкторій руху частинки, які починаються в заданій точці.

Задачі

1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Кожен експеримент є випадковим.
2. Кожному експерименту відповідає певний простір елементарних подій.
3. Кожна множина Ω є простором елементарних подій для деякого експеримента.
4. Елементарні події можна позначати по різному.

5. Простори $\Omega_1=\{Г, Ц\}$ і $\Omega_2=\{1, 0\}$ відповідають різним експериментам.

6. З одним і тим самим експериментом можна пов’язати як скінченний, так і нескінченний простір елементарних подій.

7. Поняття елементарної події і простору елементарних подій є означуваними поняттями.

2. Для даного експерименту вказати множину Ω елементарних подій:

1. Підкидання монети двічі.
2. Підкидання монети тричі.
3. Підкидання шестигранного кубика двічі.
4. Підкидання шестигранного кубика тричі.
5. Підкидання шестигранного кубика m разів.
6. Розміщення трьох предметів, що не розрізняються (наприклад, однакові кульки), у трьох скриньках.
7. Фіксація віку окремої людини.
8. Фіксація часу приходу на зустріч кожної з двох осіб, які домовилися зустрітися на проміжку часу $[t_1;t_2]$.

3. Визначити, скільки різних просторів елементарних подій можна пов'язати з підкиданням шестигранного кубика.

4. Чи можна стверджувати, що з кожним з експериментів 2.1-2.8 пов’язаний єдиний простір елементарних подій?

5. Експеримент полягає у тому, що один учень відгадує двозначне натуральне число, задумане іншим учнем. Яким є простір Ω елементарних подій?

6. Розв’язати попередню задачу із додатковою умовою: цифри натурального числа є: 1) однаковими; 2) різними.

7. У скриньці лежать дві червоних кульки, дві чорних і три білих. Експеримент полягає у тому, що із скриньки навмання беруть одну кульку і фіксують її колір. Побудувати простір Ω елементарних подій. Чи обов’язково він містить 7 елементів?

8. Чотири футбольних команди K_1, K_2, K_3 і K_4 утворили півфінальні пари (K_1, K_2) і (K_3, K_4). Експеримент полягає у тому, щоб вгадати фінальну пару команд. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

9. З чотирьох студентів K_1, K_2, K_3 і K_4 жеребкуванням утворюються пари для дебатів. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

10. Чи може бути простором елементарних подій множина $\Omega=\{0,1\}$ для експерименту, пов’язаного з відгадуванням, чи є навмання вибране натуральне число: 1) непарним; 2) кратним 3; 3) таким, що при діленні на 5 утворюється залишок 3.

11. Експеримент полягає у фіксації кількості братів і сестер у навмання вибраної людини. Яким є простір елементарних подій?

12. Експеримент полягає у виборі навмання пари чисел з відрізка $[18;120]$. Яким є простір елементарних подій?

13. Навмання вводиться 4-х розрядний PIN-код мобільного телефона. Яким є простір елементарних подій, якщо відомо, що: 1) цифри у коді можуть повторюватися; 2) цифри у коді не повторюються.

14. З 10 претендентів на вакантні посади навмання вибирають трьох. Яким є простір елементарних подій?

15. Для контролю якості 1000 виробів навмання вибирають 5 виробів. Яким є простір елементарних подій?

16. Зі 100 екзаменаційних теоретичних питань і 100 задач учень навмання вибирає 2 теоретичних питання і 3 задачі. Яким є простір елементарних подій?

17. Навмання називають два простих числа, що не перевищують 20. Яким є простір елементарних подій, якщо: 1) числа різні; 2) числа можуть бути однаковими.

18. Навмання вибирають точку з області визначення функції $f(x,y)=\ln(1-x)-\ln(1+y)$.

1. Зобразити простір елементарних подій.

2. Чи зміниться він, якщо розглянути функцію $f(x,y)=\ln\dfrac{1-x}{1+y}$?

19. Шістнадцять футбольних команд жеребкуванням ділять на чотири групи. Яким є простір елементарних подій?

20. З басейну, у якому є m мічених коропів і n немічених, послідовно дістають по одній рибині доти, поки не з'явиться мічений короп. Описати простір елементарних подій, коли: 1) спійману рибину не випускають у басейн; 2) спійману рибину випускають у басейн.

1.2. Поняття випадкової події. Вірогідна та неможлива події

Нехай Ω – множина елементарних подій, що відповідає певному експерименту.

Деяку (не будь-яку) *підмножину A множини* Ω називають *подією* (або *випадковою подією*).

Елементарні події E такі, що $E\in A$, називаються *елементарними подіями, що сприяють події A.*

Кажуть, що в результаті *випробування подія A відбулася*, якщо в цьому випробуванні відбулася елементарна подія, така, що $E\in A$. Множини $A=\Omega$ (*вірогідна подія*) та $B=\varnothing$ (*неможлива подія*) завжди вважаються подіями (на відміну від інших підмножин множини Ω).

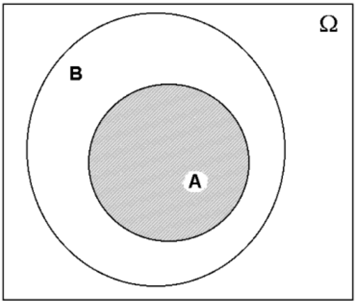
Приклад 2.1. Експеримент полягає у підкиданні монети один раз, $\Omega=\{Г,Ц\}$. Тоді подіями можуть бути підмножини множини Ω: $A=\{Г\}$, $B=\{Ц\}$, $C=\{Г,Ц\}$, $D=\varnothing$, які означають відповідно, що монета впаде догори гербом, цифрою, гербом або цифрою, ні гербом, ні цифрою. Елементарна подія $Г$ сприяє події $A=\{Г\}$ і події $C=\{Г,Ц\}$, але не сприяє події $B=\{Ц\}$ і події

$D=\varnothing$. Аналогічно елементарна подія *Ц* сприяє події $B=\{Ц\}$ і $C=\{Г,Ц\}$, і не сприяє події $A=\{Г\}$ і події $D=\varnothing$.

Нехай підмножини *A* і *B* множини Ω є подіями. Говорять, що *подія A спричинює подію B* або *подія B спричинюється подією A*, коли з відбуванням події *A* відбувається і подія *B* (Рис. 2.1). В такому разі кожен елемент множини *A* є в той же час і елементом множини *B*, тобто $A\subset B$.

Події *A* і *B* називають *рівними*, або *рівносильними*, або *еквівалентними*, якщо $A\subset B$ і $B\subset A$, тобто кожна з них спричинює іншу і спричинюється іншою. Отже, події *A* і *B* рівні тоді і тільки тоді, коли вони одночасно або відбуваються, або не відбуваються.

Приклад 2.2. Якщо Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}, то подія *A*={“3”, “6”} спричинює подію *B*={“1”, “3”, “6”}, яка в свою чергу спричинює подію *C*={“1”, “2”, “3”, “6”}. Подія *C* еквівалентна події *D*, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає число, відмінне від 4 і 5.



A ⊂ B

Рис. 2.1.

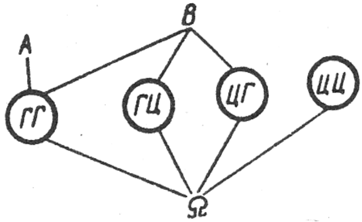


Рис. 2.2

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Експеримент полягає у підкиданні шестигранного кубика один раз, Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}. Нехай одна з випадкових подій *A*={“3”, “6” } полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає число, кратне 3. Елемент “3”∈ Ω сприяє події *A*={“3”, “6”}, а елемент “2”∈ Ω не сприяє цій події, оскільки “2” $\overline{\in}$ *A*={“3”, “6”}.

Вправа 2. Монету підкидають тричі. Нехай подія *A* полягає в тому, що принаймні двічі випаде герб. Множиною елементарних подій у даному експерименті можна вважати впорядкований набір результатів першого, другого й третього підкидань монети, тобто

$$\Omega=\{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ГЦЦ, ЦГГ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ\}.$$

Тоді

$$A=\{ГГГ,\ ГГЦ,\ ГЦГ, ЦГГ\}.$$

Події *A* сприяють елементарні події *ГГГ*, *ГГЦ*, *ГЦГ* і *ЦГГ*, а всі інші елементарні події не сприяють події *A*.

Вправа 3. На стіл (з бортами) навмання кидається більярдна куля. Нехай подія A полягає в тому, що куля опиниться в певній області у площині стола. Тут множина Ω нескінченна (кожній можливій точці зупинки кулі відповідає елементарна подія, яка полягає в тому, що куля зупиниться саме в цій точці). Так само нескінченна й підмножина A, що визначає розглядувану подію.

Вправа 4. Виконується постріл в круглу мішень одиничного радіуса, причому куля не може влучити за межі мішені. В даному разі $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$. Одна з подій $A = \Omega$ полягає в тому, що куля влучає в мішень. Кожен елемент множини Ω сприяє події A і не сприяє події $B = \varnothing$. Якщо множина $C = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 0{,}2\}$ – подія, то елемент (0; 0) сприяє події C, а елемент $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ не сприяє цій події.

Вправа 5. Двічі підкидають монету. Подія A, яка полягає в тому, що двічі випаде герб, спричинює появу події B, яка полягає в тому, що принаймні один раз випаде герб. Тут

$$A = \{ГГ\},$$

$$B = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$$

і таким чином $A \subset B$, тобто подія A спричинює подію B (Рис. 2.2).

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Множина елементарних подій – це будь-яка множина.
2. Подія – це будь-яка підмножина множини Ω елементарних подій.
3. Елементарна подія є подією.
4. Кожен елемент множини елементарних подій сприяє певній події.
5. Кожна подія є вірогідною.
6. Існують неможливі події.
7. Існує елементарна подія, яка не сприяє жодній події.
8. Кожна подія спричинює себе і спричинюється собою.
9. Для будь-якої множини елементарних подій існують нерівні події.
10. Для будь-яких подій A і B принаймні одна з них спричинює іншу.

2. Вказати всі можливі події, якщо задано множину Ω елементарних подій:

1. Ω – множина наслідків експерименту, який полягає в підкиданні відразу двох монет (1 і 2 копійки). При цьому як наслідки розглядаються:

1) усі можливі пари появ герба і цифри на двох монетах, якщо першою вказується монета 1 копійка;

2) кількість появ герба на обох монетах.

2. Ω – множина наслідків експерименту – пострілу в мішень, на якій зазначені можливі кількості отриманих очків: 0, 1, 2, 3, 4, 5 у залежності від відстані точки влучення від центра мішені. При цьому розглядаються наступні наслідки – менше чи не менше 3-х очків отримується після пострілу.

3. Ω – множина наслідків експерименту, що полягає в підкиданні відразу двох гральних кубиків (червоного та білого кольору), на гранях кожного з яких нанесені цифри від 1 до 6. При цьому як наслідки розглядаються:

1) можливі пари $(i,\ j)$ очок, що випали,

2) можливі суми $i+j$ очок, що випали,

де i – цифра, що випала на верхній грані білого кубика, j – цифра, що випала на грані чорного кубика.

3. Довести, що для подій $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$ і $C\subset\Omega$ мають місце такі властивості.

1. $A\subset A,\ A\subset\Omega,\ \varnothing\subset A$.
2. Якщо $A\subset B$ і $B\subset C$, то $A\subset C$.
3. $A=A$.
4. Якщо $A=B$, то $B=A$.
5. Якщо $A=B$, а $B=C$, то $A=C$.

4. Навести приклади подій $A\subset\Omega$ і $B\subset\Omega$, для яких:

1) *A* спричинює *B*, а *B* не спричинює *A*;

2) *A* спричинює *B* і *B* спричинює *A*;

3) *A* не спричинює *B* і *B* не спричинює *A*.

5. Довести, що кожен стохастичний експеримент визначає принаймні дві події.

6. Що можна сказати про експеримент, з яким пов’язано лише дві події?

7. Навести приклад стохастичного експеримента, відповідного простору елементарних подій і події *A* та вказати: 1) усі елементарні події, що сприяють *A*; 2) усі елементарні події, що не сприяють *A*.

8. Чи існує подія, що: 1) спричинює будь-яку подію; 2) спричинюється будь-якою подією?

9. Чи завжди існують події *A* і *B*, кожна з яких не спричинює іншу з них?

10. Скільки елементів містить простір елементарних подій, якщо з цим простором можна пов’язати лише дві події?

11. Одночасно підкидають два гральних кубики і фіксують пару чисел очок, що випали. Подія *A* полягає у тому, що сума очок дорівнює 9, а *B* – така сума дорівнює 10. Якій з цих двох подій сприяє більша кількість елементарних подій?

12. Сформулювати і розв’язати задачу, аналогічну до попередньої, коли підкидають три гральних кубики.

13. Нехай експеримент полягає у тому, що монету підкидають доти, доки не випаде герб. Подія *A* – герб випав не раніше, ніж при третьому підкиданні, *B* – герб випав не пізніше, ніж при другому підкиданні, *C* – при першому і другому підкиданні випала цифра, *D* – герб випав при підкиданні, номер якого є простим числом, що не перевищує числа 20.

1. Вказати можливий простір Ω елементарних подій.

2. Визначити, з яких елементарних подій складаються *A*, *B*, *C* і *D* та знайти співвідношення між ними.

3. Навести приклад вірогідної та неможливої події для даного стохастичного експерименту.

14. Нехай експеримент полягає у тому, що з відрізка $[18; 100]$ навмання вибирають два числа x та y і фіксують точку (x, y).

1. Навести геометричне подання подій: 1) $x > y$; 2) $x = y$; 3) $x < y$; 4) $x \ge 60$; 5) $y \ge 55$; 6) $x \ge 60$, а $y \ge 55$; 7) $x \ge 60$, а $y \le 30$.

2. Виконати попереднє завдання, за умови, що x та y цілі числа.

1.3. Операції над подіями

Нехай $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ – деякі події.

Сумою подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій *A* або *B*. Суму C події A і B позначають $C = A \bigcup B$ або $C = A + B$.

Аналогічно визначається *сума довільної кількості подій* A_k, $k \in K$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A_k, $k \in K$. Зокрема, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ – *сума скінченної кількості n* подій A_k, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – *сума зчисленної кількості подій* A_k (тут номер події набуває значень з множини N натуральних чисел). Суму скінченної або зчисленної кількості подій позначають $\bigcup\limits_{k} A_k$, а також $\sum\limits_{k} A_k$.

Геометричне тлумачення суми подій *A* і *B* подане на Рис. 3.1а), де прямокутником зображено множину елементарних подій Ω, один з кругів – подія *A*, інший – подія *B*, заштрихована множина – подія *A*+*B*= $A \bigcup B$.

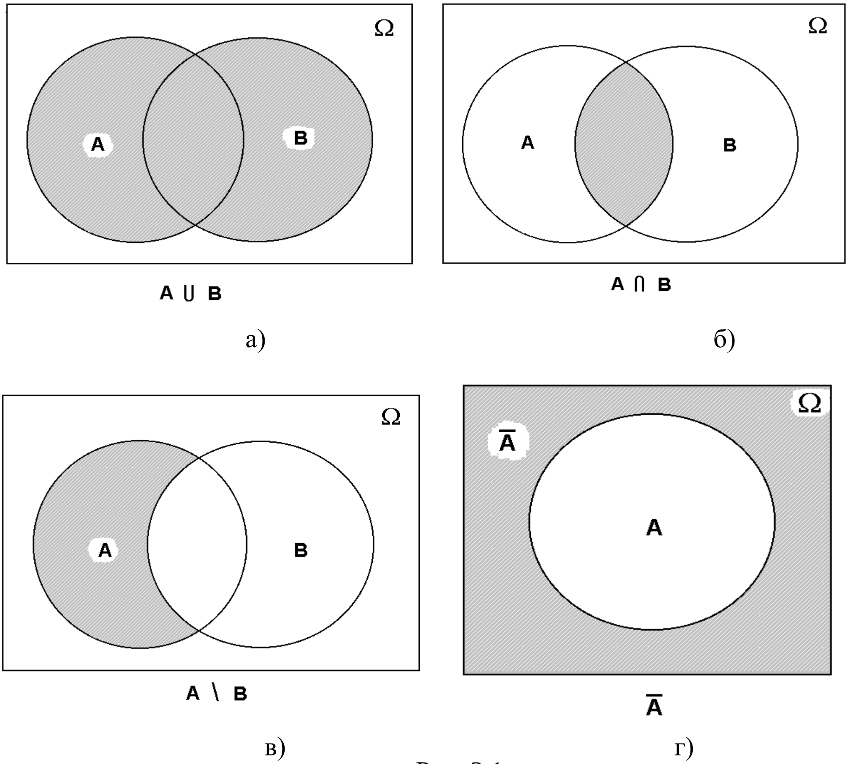


Рис. 3.1

Приклад 3.1. Нехай Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} – множина елементарних подій, що відповідає підкиданню шестигранного кубика один раз, A={“3”, “6”} – подія, що полягає у випаданні на верхній грані числа, кратного 3, а B={“2”, “4”, “6”} – подія, що полягає у випаданні парного числа. Тоді $A+B=A\cup B$={“2”, “3”, “4”, “6”} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде або число, кратне 2 (відбувається подія B), або число, кратне 3 (відбувається подія A) (Рис. 3.2).

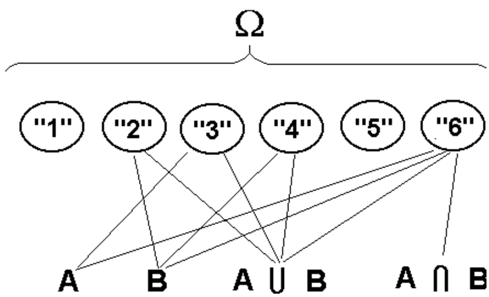


Рис. 3.2

Добутком подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B. Позначають $C = A \bigcap B$ або $C = A \cdot B$.

Аналогічно визначається *добуток довільної кількості подій* A_k, $k \in K$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбуваються всі події A_k, $k \in K$. Зокрема $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ – *добуток скінченної кількості n подій,* $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – *добуток зчисленної кількості подій.* Добуток скінченної або зчисленної кількості подій позначають $\bigcap\limits_{k} A_k$, а також $\prod\limits_{k} A_k$.

Геометричне тлумачення добутку подій A і B подане на Рис. 3.1б), де заштрихована множина точок – подія $A \cdot B = A \bigcap B$.

Приклад 3.2. Якщо A і B – події з прикладу 3.1, то $A \cdot B = A \bigcap B$={“6”} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде число, кратне 3 (відбувається подія A) і парне (відбувається подія B) (Рис. 3.2).

Події A і B називають *несумісними,* якщо $A \cdot B = \varnothing$, тобто якщо вони не можуть відбутися обидві в одному і тому ж випробуванні.

Приклад 3.3. Якщо для Ω із прикладу 3.1 C={”1”, “3”, “5”}, а D={”2”, “4”, “6”}, то C і D несумісні події, оскільки не існує елементарної події, яка належить як до множини C, так і до множини D.

Різницею подій A і B (A мінус B) називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B. Позначають $C = A \setminus B$ або $C = A - B$.

Геометричне тлумачення різниці подій $A \setminus B$ подано на Рис. 3.1 в), де заштрихована множина точок – подія $A \setminus B$.

Подією, протилежною до події А, називають різницю $\Omega \setminus A$, яку позначають $\overline{A}$.

Геометричне тлумачення протилежної події подано на Рис. 3.1г), де заштрихована множина точок – подія $\overline{A}$, протилежна до події A.

Приклад 3.4. Якщо A={“3”,”6”} і B={“2”,”4”,”6”} (див. приклад 3.1), то $A \setminus B =$ {“3”} – подія, що полягає у випаданні непарного числа, кратного 3, подія $B \setminus A =$ {“2”,”4”} полягає у випаданні парного числа, не кратного 3. Подія $\overline{A} = \Omega \setminus A =$ {“1”,”2”,”4”,”5”} – полягає у випаданні числа, не кратного 3, а $\overline{B} = \Omega \setminus B =$ {“1”,”3”,”5”} – подія, що полягає у випаданні непарного числа.

Подія $\overline{\Omega} = \varnothing$, протилежна до вірогідної, є неможливою. Неможливій події відповідає порожня множина можливих наслідків випробування. Зрозуміло, що $\overline{\varnothing} = \Omega$.

Якщо $A_1, A_2, \ldots$ – нескінченна послідовність множин $A_i \subset \Omega$, то множину A^*, що складається з елементів, які належать нескінченній кількості множин цієї послідовності, називають *верхньою границею даної послідовності* і позначають $\overline{\lim_{i\to\infty}} A_i = A^*$.

Множину A_*, що складається з елементів, кожен з яких належить усім множинам послідовності A_i, $i \in N$, крім, можливо, скінченного числа їх, називають *нижньою границею даної послідовності* множин A_i і позначають $\underline{\lim_{i\to\infty}} A_i = A_*$.

Якщо $\underline{\lim_{i\to\infty}} A_i = \overline{\lim_{i\to\infty}} A_i$, то говорять, що послідовність $A_1, A_2, \ldots$ має границю, яку позначають $\lim_{i\to\infty} A_i$.

Коли множини $A_1, A_2, \ldots$, де $A_i \subset \Omega$, $i \in N$, довільні, то

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \quad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i. \tag{3.1}$$

Приклад 3.5. Нехай задано послідовність множин $A_i = (-\infty, (-1)^i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Надаючи n значень $1, 2, 3, \ldots$, отримаємо

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, -1], \quad \bigcap_{i=2}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, -1], \quad \bigcap_{i=3}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, -1], \ \ldots,$$

тому $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, -1]$.

Аналогічно

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, 1]; \quad \bigcup_{i=2}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, 1]; \quad \bigcup_{i=3}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, 1]; \ \ldots,$$

тому $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} (-\infty, (-1)^i] = (-\infty, +1]$.

Оскільки $A_* \neq A^*$, то розглядувана послідовність множин $A_i = (-\infty, (-1)^i]$, $i \in N$, границі не має.

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибране ціле додатне однозначне число ділиться на 3, а подія B – навмання вибране однозначне число є парним. Елементарна подія E_i – навмання вибране однозначне число є i, де $i = 1,\ 2,\ \ldots, 9,\ (E_i = "i")$.

Тоді

$$\Omega = ("1",\ "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9"),$$
$$A = ("3",\ "6",\ "9"),$$

$$B = ("2",\ "4",\ "6",\ "8")\,.$$

Події $C = A + B$ відповідає множина

$$C = (\ "2","3","4","6","8","9")\,.$$

Кількість елементів у множині $C = A + B$ не обов’язково дорівнює сумарній кількості елементів у множинах A і B, оскільки спільні елементи враховуються лише один раз.

Зазначимо, що кожна множина (подія) є об’єднанням (сумою) одноелементних множин, кожна з яких містить одну елементарну подію, якими визначається дана множина (подія). Так, у наведеному прикладі

$$A = \{E_3\} + \{E_6\} + \{E_9\}, \quad B = \{E_2\} + \{E_4\} + \{E_6\} + \{E_8\},$$

$$\Omega = \{E_1\} + \{E_2\} + \{E_3\} + \{E_4\} + \{E_5\} + \{E_6\} + \{E_7\} + \{E_8\} + \{E_9\}\,.$$

Вправа 2. Серед учнів 11 класу навмання вибирається група з п’яти учнів. Подія A полягає в тому, що в групі не більше трьох спортсменів, подія B – спортсменів не менше одного. Можливими наслідками цього експерименту щодо кількості спортсменів у групі очевидно є: E_0 – 0 спортсменів, E_1 – 1 спортсмен, E_2 – 2 спортсмени, ..., E_5 – 5 спортсменів. Тоді

$$\Omega = \{E_0,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots,\ E_5\};$$

$$A = \{E_0,\ E_1,\ E_2,\ E_3\};$$

$$B = \{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5\}\,.$$

Подія $C = AB$ полягає в тому, що в групі з п’яти учнів спортсменів є не менше одного і не більше трьох, тобто

$$C = \{E_1,\ E_2,\ E_3\}\,.$$

Подія $A \setminus B$ полягає в тому, що в групі з п’яти учнів спортсменів немає, а $B \setminus A$ – спортсменів не менше чотирьох (4 або 5).

Вправа 3. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами r_k, $k \in \{1,\ 2, \ldots, 10\}$, причому $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_{10}$. Подія A_k полягає у влученні в круг з радіусом r_k. Події $B = \bigcup\limits_{k=1}^{6} A_k$ і $C = \bigcap\limits_{k=1}^{10} A_k$ зображені відповідно на Рис. 3.3, а, б.

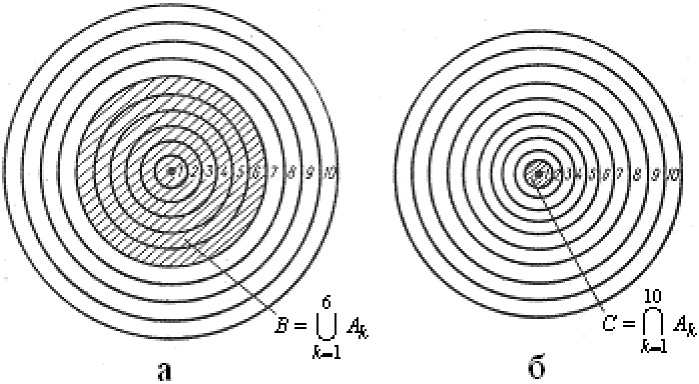


Рис. 3.3

Вправа 4. Нехай подія A полягає в тому, що при підкиданні шестигранного грального кубика на верхній грані випаде не менше, ніж три очка. Нехай можливими наслідками цього випробування є елементарні події $E_i = "i"$, $i = 1,\ldots,6$, які полягають в тому, що на верхній грані випаде i очок. Тоді

$$\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\};$$

$$A = \{"3", "4", "5", "6"\};$$

$$\overline{A} = \{"1", "2"\}.$$

Таким чином, тут подія $\overline{A}$ означає, що на верхній грані кубика випаде менше, ніж три очка.

Вправа 5. Довести другий дистрибутивний закон, тобто рівність $AB + C = (A+C)(B+C)$ Геометрично цей закон можна проілюструвати так, як показано на Рис. 3.4, а, б.

Сумістивши ці зображення, можна впевнитися, що множини $AB + C$ і $(A+C)$ $(B+C)$ співпадають.

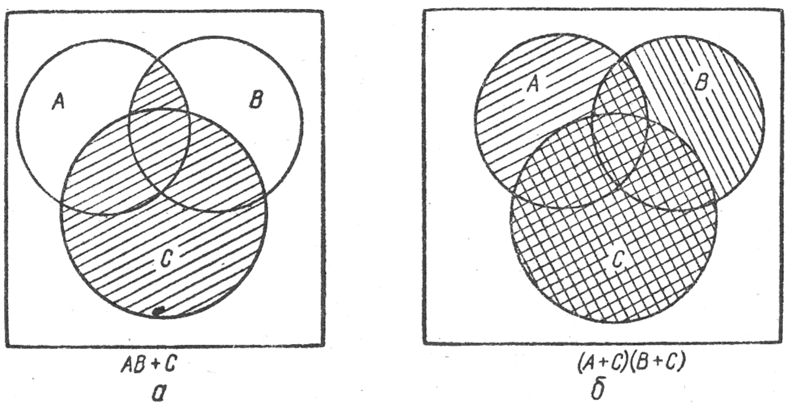


Рис. 3.4

Аналітичне доведення рівності $AB + C = (A + C)(B + C)$ може бути таким.

Нехай E – довільна елементарна подія і $E \in AB + C$. Тоді справджується принаймні одне з двох – або $E \in AB$, або $E \in C$. Якщо $E \in AB$, то $E \in A$ і $E \in B$. Проте тоді $E \in A + C$ і $E \in B + C$ (за означенням суми подій), тобто $E \in (A + C)\ (B + C)$. Якщо $E \in C$, то $E \in C + A$ і $E \in C + B$, тобто $E \in (A + C)\ (B + C)$.

Таким чином, довільний елемент множини $AB + C$ належить множині $(A + C)(B + C)$, тобто

$$(AB + C) \subset (A + C)\ (B + C).$$

Нехай, навпаки, $E \in (A + C)\ (B + C)$. Це означає, що $E \in A + C$ і $E \in B + C$. Якщо $E \in C$, то $E \in C + AB$. Якщо $E \overline{\in} C$, то $E \in A$ і $E \in B$, тобто $E \in AB$, а отже $E \in AB + C$.

Таким чином, довільний елемент множини $(A + C)\ (B + C)$ є елементом множини $AB + C$, тобто $(A + C)\ (B + C) \subset AB + C$. Звідси і з того, що ($AB + C) \subset (A + C)\ (B + C)$, слідує

$$AB + C = (A + C)\ (B + C).$$

Вправа 6. Довести, що $A^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, де $A_i \subset \Omega$, $i \in N$, задані події (підмножини простору Ω), а $A^* = \overline{\lim\limits_{i \to \infty}} A_i$.

Нехай $E \in A^*$, тоді E належить до нескінченної кількості множин A_i. Позначимо ці множини A_{i_k}, $k \in N$, де $i_1 < i_2 < \ldots < i_n < \ldots$. Оскільки для кожного $n \in N$ існує $i_k \geq n$, то $E \in A_{i_k} \subset \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, тобто $E \in \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i \quad \forall n \in N$, а тому $E \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, коли $E \in A^*$. Таким чином, $A^* \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$.

Навпаки, якщо $E \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, то $E \in \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i \quad \forall n \in N$. Припустимо, що E належить лише до скінченної кількості множин A_i. Тоді можна вказати найбільший номер n_0, для якого $E \in A_{n_0}$ і $E \notin A_i \ \ \forall\, i > n_0$, а тому $E \notin \bigcup\limits_{k=n_0+1}^{\infty} A$, що неможливо. Отже, E належить до нескінченної кількості множин A_i, а тому $E \in A^*$, коли

$E \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$. Таким чином, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i \subset A^*$, а оскільки раніше доведено, що $A^* \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, то $A^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$.

Вправа 7. Нехай задано *зростаючу послідовність множин* A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, тобто таку, що $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$.

Тоді

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1, \ \bigcap_{i=2}^{\infty} A_i = A_2, \ \bigcap_{i=3}^{\infty} A_i = A_3, \ \ldots,$$

тому

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

З іншого боку

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=3}^{\infty} A_i \subset \ldots,$$

тому

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Отже $A_* = A^* = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Таким чином, якщо послідовність множин A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ зростає, тобто $A_i \subset A_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то така послідовність має границю

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Аналогічно, нехай задано *спадаючу послідовність множин* A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, тобто таку, що $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$.

Тоді $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1$, $\bigcup\limits_{i=2}^{\infty} A_i = A_2$, $\bigcup\limits_{i=3}^{\infty} A_i = A_3$, $\ldots$,

тому

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i .$$

З іншого боку

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcap_{i=2}^{\infty} A_i \supset \bigcap_{i=3}^{\infty} A_i \supset \ldots, \text{ тому } A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Отже $A_* = A^* = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Таким чином, якщо послідовність множин A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, спадає, тобто $A_i \supset A_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то така послідовність має границю $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Зростаючі або спадні *послідовності* множин називають *монотонними*. Таким чином, границя монотонної послідовності множин завжди існує.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо відбувається подія A, то відбувається подія $A+B$.
2. Подія $A+B$ спричинює подію A.
3. Якщо відбувається подія $A \cdot B$, то відбувається і подія A.
4. Подія A спричинює $A \cdot B$.
5. Подія $A \cdot B$ спричинює подію A.
6. Якщо не відбувається подія $A \setminus B$, то відбувається подія B.
7. Якщо відбувається подія A, то відбувається і подія $A \setminus B$.
8. Якщо $C = A - B$, то $A = C + B$.
9. $(A+B) - B = A$; $(A-B) + B = A$.
10. $A + \overline{A} = \Omega$.
11. Неможлива подія – це добуток протилежних подій.
12. Якщо $A = \overline{B}$, то $\overline{A} = B$, тобто події $\overline{\overline{B}}$ і B рівносильні.
13. $A \bigcap B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$.
14. $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$.
15. $\bigcap\limits_k A_k = \overline{\bigcup\limits_k \overline{A_k}}$.
16. Правильні наступні співвідношення:

1) $\overline{\sum\limits_i A_i} = \prod\limits_i \overline{A}_i$;

2) $(A+B) - B = A$;

3) $(A+B) - B = A\overline{B}$;

4) $(A-B) + B = A$;

5) $(A-B) + B = A + B$;

6) $(A+B) - AB = A\overline{B} + \overline{A}B$;

7) $\overline{\prod\limits_i A_i} = \sum\limits_i \overline{A}_i$;

8) $(A+B)C = AC + BC$;

9) $(A+B) - C = A + (B - C)$;

10) $ABC = AB(C+B)$;

11) $A + B = A + (B - AB)$;

12) $ABC \subset AB - BC = CA$;

13) $(AB + BC + CA) \subset (A + B + C)$;

14) $A\overline{B}C \subset A + B$;

15) $(\overline{A+B})C \subset \overline{A}C + \overline{B}C$;

16) $(\overline{A+B})C = \overline{A}\,\overline{B}C$;

17) $(A+B)C \subset C - (A+B)C$.

2. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами $r_k : r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Подія A_k полягає у влученні в круг радіуса r_k. Що означають події:

1. $B = \sum_{k=1}^{6} A_k$; 2. $C = \prod_{k=1}^{10} A_k$;

3. $A_{k+1} \setminus A_k$, $k \in \overline{1,9}$; 4. $A_1 \setminus A_2$;

5. $\overline{A_k}$, $k \in \overline{1,\ 10}$.

3. Довести: 1) рівність $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$; 2) включення $A_* \subset A^*$; 3) рівність $\overline{A_*} = B^*$, де $A_* = \underline{\lim} A_i$, $B^* = \overline{\lim} \overline{A_i}$.

4. Довести, що з рівності $A + B = AB$ випливає рівність $A = B$.

5. Довести, що:

1) події A_1 і $A_2 \setminus (A_2 \cap A_1)$ несумісні і $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus (A_2 \cap A_1))$;

2) якщо A_1, A_2, ... – деяка послідовність подій, то події A_1, $A_2 \setminus (A_2 \cap A_1)$, $A_3 \setminus (A_3 \cap (A_1 \cup A_2))$, ... попарно несумісні і сума їх дорівнює сумі подій A_i;

3) події $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$ є попарно несумісними, і сума їх дорівнює сумі подій A_i.

6. Довести, що коли події $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ несумісні, то A спричинює $\overline{B}$ і B спричинює $\overline{A}$. Навести відповідну геометричну ілюстрацію.

7. Чи можна здійснювати операції над подіями A і B, коли вони пов’язані з різними просторами елементарних подій?

8. За допомогою операцій над подіями записати подію, яка полягає у тому, що відбувається подія $A \subset \Omega$ і при цьому не відбувається подія $B \subset \Omega$.

9. Яка умова сумісності подій $A + B$, $\overline{A} + B$, $A + \overline{B}$?

10. Довести, що коли A і B – події, що відповідають одному стохастичному експерименту, то $A + B = A + (B - AB)$, причому події A і $(B - AB)$ несумісні.

11. Нехай дано попарно різні події $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ і $C \subset \Omega$. Записати подію, яка полягає у тому, що:

1) відбувається тільки подія *A* з подій *A*, *B* і *C*;
2) відбувається принаймні одна з подій *A*, *B* і *C*;
3) відбувається лише події *A* і *B* з подій *A*, *B* і *C*;
4) відбувається принаймні дві події з подій *A*, *B* і *C*;
5) відбуваються рівно дві події з подій *A*, *B* і *C*;
6) відбуваються не більше двох подій з подій *A*, *B* і *C*;

7) не відбувається жодна з подій A, B і C.

12. Експеримент полягає у підкиданні монети до першого випадання герба, подія A_i – випадання герба при підкиданні, номер якого непарний і не менший за i.

1. Знайти: 1) $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$; 2) $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$; 3) $\overline{A_i}$; 4) $A_1 \setminus A_2$; 5) $A_2 \setminus A_1$; 6) A_*; 7) A^*.

2. Визначити, чи є: 1) події A_i, $i \in N$, попарно несумісними; 2) послідовність A_i, $i \in N$, збіжною.

13. У партії з m виробів є n, $(0 < 2n < m)$, бракованих. Експеримент полягає у тому, що один за одним навмання вибирають (і не повертають) вироби до появи бракованого виробу. Подія A – вибрано більше, ніж $m-n$ виробів; B – бракований виріб з’явився не раніше, ніж у ($m-n$)-й спробі; C – бракований виріб не з’явився при будь-якій спробі.

1. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

2. Визначити, які елементарні події сприяють відповідно подіям A, B і C.

3. Знайти: 1) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$; 2) $A+B$, $A+C$, $B+C$ і $A+B+C$; 3) $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$ і $A \cdot B \cdot C$; 4) $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus B$; 5) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$; 6) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$; 7) $\overline{A+B+C}$; 8) $\overline{A \cdot B \cdot C}$; 9) $A \setminus (B+C)$, $B \setminus (A+C)$ і $C \setminus (A+B)$; 10) $A \setminus (B \cdot C)$, $B \setminus (A \cdot C)$ і $C \setminus (A \cdot B)$.

14. Навмання вибирається одне з чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Подія A= “навмання вибране число ділиться на три без залишку”. Подія B= “взяте навмання число парне”. Записати як множини події A, B, $A+B$, AB.

15. Підкидається гральний кубик, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Нехай – “випала парна цифра”; B – “випала одна з цифр 1, 2”. Описати за допомогою елементарних подій події $\overline{A}$, $\overline{B}$, AB, $A+B$, $\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{AB}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$.

16. Перевіряються три пристрої. Подія – “хоча б один з трьох пристроїв, що перевіряються, бракований”, B – “всі три перевірені пристрої якісні”. Побудувати простір Ω елементарних подій. Описати і події A, B за допомогою елементарних подій. Що означають події $A+B$ і AB?

17. Перевіряються чотири пристрої. Подія A – “хоча б один з чотирьох перевірених виробів є бракованим”. Подія B – “бракованих виробів не менше двох”. Побудувати простір Ω елементарних подій. Записати події A, B за допомогою елементарних подій. Що означають протилежні події $\overline{A}$ і $\overline{B}$?

18. 1. Коли можливі рівності: 1) $A+B=\overline{A}$; 2) $AB=\overline{A}$; 3) $A+B=AB$?

2. Знайти подію $X\subset\Omega$, якщо відомі події $A\subset\Omega$ і $B\subset\Omega$ та правильна рівність

1) $(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+(\overline{X+A})+(\overline{X+\overline{A}})=B$; 2) $\overline{X+A}+\overline{X+\overline{A}}=B$.

19. Судно має одне кермо, чотири котли та дві турбіни. Подія A означає справність керма, B_k ($k=1,2,3,4$) – справність k-го котла, а C_j ($j=1,2$) – справність j-ої турбіни. Подія D – “судно кероване”, що означає – справне кермо, хоча б один з котлів і хоча б одна з турбін. Виразити D і $\overline{D}$ через A, B_k, C_j.

20. Підкидаються два гральних кубики. Побудувати три різні простори елементарних подій. Нехай подія A – сума очок, що випали на обох кубиках, непарна. Подія B – “хоча б на одному з кубиків випала 1”. Описати події AB, $A+B$, $A\overline{B}$ для кожного з побудованих просторів елементарних подій.

21. Нехай $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$, $C\subset\Omega$ – попарно різні події. Знайти умови та вирази для подій, які визначаються тим, що відбувається:

1) тільки подія A; 2) тільки A і B; 3) всі три події; 4) принаймні одна з подій; 5) принаймні дві події; 6) одна і тільки одна; 7) дві і тільки дві; 8) жодна; 9) не більше двох.

22. Нехай A, B, C – випадкові події. З’ясувати зміст рівностей:

1) $ABC=A$; 2) $A+B+C=A$.

23. Спростити вирази:

1) $AC+C$; 2) $AC+BC+C$; 3) $(A+C)(B+C)$; 4) $(A+B)(A+\overline{B})$;

5) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$; 6) $A-(A-B)$;

7) $(A-B)(A-\overline{B})$; 8) $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)\bigcup AB$;

9) $(A+B)(B+C)$; 10) $A+\overline{A}B+(\overline{A+B})$;

11) $A\overline{B}+AB+\overline{A}B$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, якщо $A_n=[\frac{1}{n};1)$;

13) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}B_n$, якщо $B_n=[a;b-\frac{1}{n}]$.

24. Нехай $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$, $C\subset\Omega$ – довільні події. Довести рівності:

1) $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=A+B$; 2) $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$;

3) $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$;

4) $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n$.

5) $A + B = A + (B \setminus AB)$; 6) $AB = B \setminus (B \setminus A) = A \setminus (A \setminus B)$;

7) $(A \setminus B)C = AC \setminus BC$; 8) $AC - B = AC - BC = AC - ABC$;

9) $\overline{A}B + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$; 10) $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$;

11) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; 12) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$;

13) $AB + C = (A+C)(B+C)$; 14) $\overline{B \setminus AB} = \overline{B} + AB$;

15) $\Omega \setminus (A+B) = (\Omega \setminus A)(\Omega \setminus B)$; 16) $A + \overline{A}B + (\overline{A+B}) = \Omega$.

25. Нехай $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ – довільні події. Довести, що події A, $\overline{A} \cdot B$, $\overline{A+B}$ попарно несумісні і сума їх є вірогідною подією.

26. Нехай $A \subset B$. Спростити вирази:

1) AB; 2) $A + B$; 3) ABC; 4) $A + B + C$.

27. Довести, що дані події вірогідні:

1) $(A+B)(A+\overline{B}) + (\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$;

2) $(A+B)(\overline{A}+\overline{B}) + (A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

28. Довести, що подія $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$ неможлива.

29*. У певному будинку мешкають люди, одні з яких завжди говорять правду, а інші можуть сказати й неправду, проте ніколи не визнають, сказали вони неправду, чи ні. Для визначення кількості таких мешканців проведено експеримент, який полягав у тому, що кожен мешканець повинен був відповісти “так” або “ні” на питання “Чи правдива Ви людина?”. Перш ніж відповісти на це питання, кожен мешканець підкидав монету. Якщо випадав герб, то він повинен був сказати “так” (незалежно від того, ким він є насправді). Якщо ж випадала цифра, то мешканець повинен був правдиво відповісти на питання. При цьому, що випало: герб чи цифра, знав лише сам мешканець. Результатом експерименту є кількість відповідей “так” та кількість відповідей “ні”.

1. Чи є кожна з відповідей “так” правдивою?

2. Чи є кожна з відповідей “ні” правдивою?

3. Чи дозволить проведений експеримент розв’язати задачу визначення кількості мешканців, які можуть сказати неправду?

4. Чи можна розв’язати поставлену задачу, аналізуючи подію A, яка полягає у тому, що у мешканців, які можуть сказати неправду, кількість випадань герба дорівнює кількості випадань цифри?

1.4. Простір подій. Уточнення поняття випадкової події

Нехай Ω – простір елементарних подій, що відповідає певному експерименту, а S – *деяка* (не будь-яка, див. п.1.6) *сукупність підмножин* Ω, що задовольняє умови:

1_s) $\Omega \in S$;

2_s) якщо $A \in S$, то $\overline{A} \in S$;

3_s) якщо $A_k \in S$, $k \in N$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$.

Тоді кожну підмножину $A \subset \Omega$, що належить до сукупності S, називають *випадковою подією* або просто *подією*, а сукупність S називають *простором подій*, що відповідає даному простору Ω елементарних подій.

Таким чином, поняття події вводиться не само по собі, а лише у зв'язку з поняттям простору подій.

Приклад 4.1. Для будь-якої множини Ω елементарних подій покладемо $S=\{\varnothing, \Omega\}$. Тоді S задовольняє умови 1) - 3), тобто є простором подій (*найвужчим* з можливих), а тому можлива ситуація, коли подіями вважаються лише неможлива та вірогідна події. Зокрема, для експерименту однократного підкидання монети, коли $\Omega=\{Г, Ц\}$, простір S випадкових подій може складатися лише з неможливої події $\varnothing$, яка полягає в тому, що не випаде ні герб, ні цифра, та з вірогідної події Ω, яка полягає у тому, що випаде або герб, або цифра.

Зауважимо, що коли для множини $\Omega=\{Г, Ц\}$ покласти $S=\{\varnothing, \Omega, \{Г\}\}$, то ця сукупність підмножин простору Ω не задовольняє умову 2), а тому в цьому випадку S не може бути простором подій. Отже, не кожна сукупність S підмножин простору Ω елементарних подій може бути простором подій.

Приклад 4.2. Для будь-якого простору Ω елементарних подій покладемо $S=\{A: A\subset \Omega\}$, тобто елементами сукупності S вважатимемо будь-які підмножини простору Ω. Тоді S задовольняє умови 1) – 3), тобто є простором подій (*найширшим* з можливих), а тому можлива ситуація, коли подіями будуть будь-які підмножини простору Ω. Зокрема, якщо $\Omega=\{Г, Ц\}$ є простором елементарних подій, що відповідає однократному підкиданню монети, то простір S випадкових подій може складатися з подій $A=\varnothing$ – неможливої, $B=\{Г\}$– випадання герба, $C=\{Ц\}$ – випадання цифри та $D=\{Г, Ц\}$ – випадання або герба, або цифри.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} – простір елементарних подій, що відповідає експерименту – однократному підкиданню шестигранного кубика. Покладемо S={$\varnothing$, Ω, {“6”}, {“1”, “2”, “3”, “4”, “5”}}. Тоді S задовольняє умови 1)–3), тобто розглядувана сукупність S підмножин множини Ω може бути простором подій, а елементи сукупності S – подіями.

Зауважимо, що сукупність S можна було визначити інакше: наприклад, S={$\varnothing$, Ω, {“1”}, {“2”, “3”, “4”, “5”, “6”}}, або визначити S як у прикладі 4.2: $S=\{A: A \subset \Omega\}$.

Отже, одному і тому ж простору Ω *елементарних подій може відповідати кілька просторів* S *випадкових подій. Множина*

$A \subset \Omega$ *залежно від обраного простору* S *подій може бути подією, а може й не бути. Лише множини* $\varnothing$ *та* Ω *є подіями для будь-якого простору* S *випадкових подій.*

Вправа 2. Нехай $\Omega=[-r; r]$ – простір елементарних подій, який характеризує результати експерименту: положення точки, в яку влучив снаряд, відносно цілі (якщо $x<0$ – недоліт на відстань $(-x)$; $x>0$ – переліт на відстань x; $x=0$ – влучення).

Розглянемо сукупність $\tilde{S}$ підмножин $A\subset[-r; r]$, кожна з яких є об'єднанням скінченної кількості проміжків $\langle \alpha_k; \beta_k \rangle \subset \Omega$. При цьому кожен проміжок $\langle \alpha_k; \beta_k \rangle$ може бути або відрізком $[\alpha_k; \beta_k]$, або інтервалом (α_k, β_k), або піввідрізком $[\alpha_k, \beta_k)$, або півінтервалом $(\alpha_k; \beta_k]$.

Тоді $\tilde{S}$ не є простором подій, оскільки не виконується умова 3_s). Проте, виявляється, що існує найменша сукупність $S \supset \tilde{S}$, яка вже може бути простором подій. Цей *простір подій* називають *породженим сукупністю скінченних об'єднань числових проміжків*. Зокрема S містить усілякі об'єднання $\bigcup_k \langle \alpha_k; \beta_k \rangle$, $\langle \alpha_k; \beta_k \rangle \subset [-r; r]$, а також перерізи та різниці таких об'єднань.

Зауважимо, що в останній вправі замість відрізка $[-r; r]$ можна взяти довільний проміжок.

Вправа 3. Нехай простір Ω елементарних подій скінченний або зчисленний, тобто $\Omega=\{x_1, x_2, \ldots\}$, а S-відповідний простір подій. Довести наступні твердження:

1. Об'єднання будь-якої кількості подій з простору S також є подією з цього простору.

2. Переріз будь-якої кількості подій з простору S також є подією з цього простору.

3. Для кожної елементарної події $x_i \in \Omega$ існує найвужча подія $A(x_i)$, що містить у собі x_i.

4. Якщо $i \neq j$, то або $A(x_i)=A(x_j)$, або $A(x_i) \cap A(x_j)=\varnothing$.

5. Існує не більше ніж зчисленна кількість попарно несумісних подій B_j, відмінних від неможливої, які в сумі дають простір Ω.

6. Будь-яка подія простору S, відмінна від неможливої, є сумою деяких подій B_j з твердження 5.

1. Якщо $A_i \in S$, то $A=\bigcup_i A_i \subset \Omega=\{x_1, x_2, \ldots\}$, а тому $A=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$ – скінченна або зчисленна. Для кожної елементарної події x_{i_k} знайдемо подію $A_{i(k)}$, таку що $x_{i_k} \in A_{i(k)}$. Тоді кількість

таких подій скінченна або зчисленна і $A=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}=\bigcup_k A_{i(k)} \in S$ за властивістю 3_s простору подій.

Твердження 1 доведено.

2. Якщо $A_i \in S$, то $A=\bigcap_i A_i = \overline{(\bigcap_i \overline{A_i})} = \overline{(\sum_i \overline{A_i})} \in S$ за властивістю 2_s і доведеним твердженням 1.

Твердження 2 доведено.

3. Для кожного $x_i \in \Omega$ позначимо $X_i = \{A \in S : x_i \in A\}$. Тоді $X_i \neq \varnothing$, оскільки містить у собі принаймні вірогідну подію Ω. Тому, враховуючи твердження 2, дістанемо подію $A(x_i) = \bigcap_{A \in X_i} A$ – найвужчу подію з S, що містить у собі x_i.

Твердження 3 доведено.

4. Нехай $i \neq j$. Тоді можливі два випадки:

1) $A(x_i) = A(x_j)$ і тоді твердження 4 доведено, або
2) $A(x_i) \neq A(x_j)$ і тоді треба довести, що $A(x_i) \bigcap A(x_j) = \varnothing$.

Припустимо, що $x_i \in A(x_j)$. Тоді подія $A^*(x_i) = A(x_i) \bigcap A(x_j)$ є вужчою, ніж $A(x_i)$ і містить у собі x_i, а це неможливо.

Отже, $x_i \notin A(x_j)$ і аналогічно $x_j \notin A(x_i)$. Тому, якщо припустити, що $A(x_i) \bigcap A(x_j) \neq \varnothing$, дістанемо, що подія $A(x_i) \setminus A(x_j) = A^{**}(x_i)$ є вужчою, ніж $A(x_i)$ і містить у собі x_i, а це неможливо.

Отже, у випадку 2) маємо, що $A(x_i) \bigcap A(x_j) = \varnothing$. Твердження 4 доведено.

5. Кількість множин $A(x_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$ скінченна або зчисленна. Якщо вибрати з них лише попарно різні, то дістанемо потрібну сукупність подій $B_j \neq \varnothing$, попарно несумісних, для яких $\sum_j B_j = \Omega$.

6. Візьмемо довільну подію $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots.\} \in S$. Тоді очевидно $A \subset \bigcup_k A(x_{i_k})$. З іншого боку, якщо $x \in \bigcup_k A(x_{i_k})$, то $\exists$ $k = k(x) : x \in A(x_{i_k})$.

Якщо припустити, що $x \notin A$, то подія $A^{***}(x_{i_k}) = A(x_{i_k}) \bigcap A$ є вужчою, ніж $A(x_{i_k})$ і містить x_{i_k}, що неможливо. Тому з умови $x \in \bigcup_k A(x_{i_k})$ випливає умова $x \in A$, тобто $A \subset \bigcup_k A(x_{i_k})$.

Твердження 6 доведено.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Поняття простору подій означається за допомогою поняття події.
2. Поняття події означається за допомогою поняття простору подій.
3. Для кожного простору Ω елементарних подій існує єдиний простір випадкових подій.
4. Існує простір Ω елементарних подій, для якого існує лише один простір S випадкових подій.
5. Якщо простір Ω елементарних подій містить 2 елементи, то відповідний йому простір випадкових подій може містити 3 елементи.
6. Якщо $\Omega=[0;\ 1]$, а S містить елементи $\varnothing$, Ω і довільні скінченні або зчисленні підмножини $A \subset \Omega$ і ніяких інших, то S є простором подій.
7. Для множини $\Omega=\{Г,\ Ц\}$ відповідний йому простір S випадкових подій може містити лише 2 або 4 елементи.
8. Сукупність S довільних проміжків множини $\Omega=(-\infty;\ +\infty)$ та будь-яких їх скінченних або зчисленних об'єднань може бути простором подій.
9. Сукупність S довільних підмножин множини $\Omega=N$ натуральних чисел може бути простором подій.
10. Сукупність S будь-яких скінченних підмножин множини $\Omega=N$ може бути простором подій.
11. Кожна елементарна подія $E \in \Omega$ утворює подію $\{E\} \in S$.

2. Побудувати можливі простори S випадкових подій, що відповідають даним просторам Ω елементарних подій:

1. Ω – множина можливих наслідків експерименту, що полягає в підкиданні монети двічі. При цьому як наслідки розглядаються:

1) однією стороною вгору чи різними упала монета обидва рази?

2) кількість появ герба в обох підкиданнях;

3) усі можливі пари появ герба і цифри в обох підкиданнях.

2. Ω – множина можливих наслідків експерименту, що полягає в підкиданні шестигранного кубика, частина граней якого пофарбовані в білий колір, інша частина - у червоний, третя частина - у зелений. У кожній з частин є не менше однієї грані. При цьому як наслідки розглядаються :

1) колір грані, що виявилася верхньою;

2) зелений чи ні колір виявляється на верхній грані

3. Ω – множина можливих наслідків експерименту, що полягає в підкиданні двічі шестигранного кубика, на гранях якого нанесені цифри від 1 до 6. При цьому як наслідки розглядаються :

1) можливі суми $i+j,\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$

2) чи виконується нерівність $i \le j,\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$,
де i – цифра, що випадає на верхній грані кубика при першому підкиданні, j – цифра, що випадає на верхній грані кубика при другому підкиданні.

3. Визначити, скільки елементів може містити простір S випадкових подій, якщо відповідний йому простір Ω елементарних подій містить:

1) один елемент, 2) два елементи, 3) три елементи.

4. 1. Довести, що коли простір елементарних подій Ω скінченний або зчисленний і для будь-якої елементарної події $E \in \Omega$ множина $\{E\}$ є подією, то простір подій S співпадає із сукупністю усіляких підмножин множини Ω.

2. Чи буде правильним попереднє твердження, коли $\Omega = [a;b]$.

5. 1. Чи можна стверджувати, що коли $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ є подіями, то подіями також є: 1) $\overline{A} \cdot \overline{B}$; 2) $\overline{A} + \overline{B}$; 3) $\overline{A} \setminus \overline{B}$.

2. Чи можна з простором елементарних подій $\Omega = \{"Г","Ц"\}$ пов’язати простір подій, що міститиме: 1) лише одну подію; 2) лише дві події; 3) лише три події; 4) лише чотири події; 5) більше чотирьох подій, що попарно різні.

6. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Побудувати сукупність S підмножин простору Ω, яка не буде простором подій.

7. Для простору елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ побудувати простір подій S, відмінний від найвужчого і від найширшого.

8. Для простору елементарних подій $\Omega = [0;1]$ побудувати простір подій S, що містить чотири події. Скільки таких просторів можна побудувати?

9. Нехай A, B_1 і B_2 – події з простору S, причому $A = B_1 + B_2$. Довести, що існують несумісні події $B_1^* \subset B_1$ і $B_2^* \subset B_2$, для яких $A = B_1^* + B_2^*$.

10. Узагальнити задачу **9** на випадок, коли $A = \sum_{i=1}^{n} B_i$.

11. Нехай простір елементарних подій містить n елементів. Скільки подій містить відповідний найширший простір подій S?

12. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ відповідає експерименту з підкиданням грального кубика. Перевірити, чи можливо, що при цьому:

1. Випадання i очок є подією для кожного $i \in \overline{1,5}$, проте випадання 6 очок не є подією.

2. Випадання i очок є подією для кожного $i \in \overline{1,4}$, проте випадання 5 очок та випадання 6 очок не є подіями.

3. Випадання менше 4-х очок та більше 4-х очок є подіями, проте випадання 4-х очок не є подією.

13*. Відомо, що $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ є подіями. Побудувати найвужчий простір подій S, для якого $A \in S$ і $B \in S$.

14*. Монету підкидають доти, поки два рази поспіль не випаде герб або цифра.

1. Визначити, яким є відповідний простір елементарних подій.

2. Визначити, з яких елементарних подій складається подія A, яка полягає у тому, що:

1) монету підкидали не більше, ніж шість разів;

2) монету підкидали парну кількість разів;

3) монету підкидали непарну кількість разів.

15. Довести, що простір подій S є замкненим відносно операцій суми, добутку та різниці подій, тобто коли $A_k \subset \Omega$, $k \in N$, є подіями, то подіями також є: 1) $A_1 + A_2$; 2) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $n \in N$; 3) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 4) $A_1 \cap A_2$; 5) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, $n \in N$; 6) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$; 7) $A_i \setminus A_j$, $i \in N$, $j \in N$.

16*. Нехай S_1 і S_2 – простори подій, що відповідають просторам елементарних подій Ω_1 і Ω_2, а $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ – декартів добуток множин A і B, причому за означенням $\varnothing \times B = A \times \varnothing = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$. Перевірити, чи є множина $S = \{A \times B : A \in S_1, B \in S_2\}$ простором подій, що відповідає простору елементарних подій $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

17*. Нехай простір Ω елементарних подій зчисленний, а простір S подій нескінченний.

1. Чи обов'язково простір S є зчисленним?

2. Чи обов'язково S є найширшим простором подій?

18*. Нехай простір елементарних подій Ω пов'язаний з підкиданням монети до першого випадання герба. Чи може відповідний простір подій S складатися з: 1)однієї події; 2) двох подій; 3) трьох подій; 4) n подій; 5) зчисленної кількості подій; 6) мати стільки подій, скільки точок у множині R дійсних чисел?

1.5. Статистична ймовірність події

Розглянемо деякий простір S випадкових подій, що відповідає простору Ω елементарних подій.

Нехай проведено серію із n випробувань (спостережень), в яких відбулися так звані спостережені елементарні події $E_{\text{сп } i} \in \Omega,\ \ i \in \overline{1,\ n}$. Візьмемо довільну подію $A \in S$. Тоді:

1) число $K_n(A)$, що дорівнює кількості тих спостережених елементарних подій $E_{\text{сп } i}$, які належать до A (сприяють події A), називається *абсолютною частотою події* $A \in S$ в даній серії із n випробувань;

2) число $P_n^*(A) = \dfrac{K_n(A)}{n}$ називається *статистичною ймовірністю* або *відносною частотою події* $A \in S$ в даній серії із n випробувань.

Статистична ймовірність (або відносна частота) характеризує середню кількість відбувань певної події в одному (кожному з n) випробуванні.

Підкреслимо, що аргументами функцій K_n і P_n^* є деякі підмножини простору Ω, включаючи множини $\varnothing$ і Ω.

Приклад 5.1. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{Г, Ц\}$, простір подій $S=\{\varnothing, \Omega, \{Г\}, \{Ц\}\}$ і подія $A_0 = \{Г\}$ – випадання герба при однократному підкиданні монети.

Припустимо, що проведено $n = 100$ підкидань монети, в результаті яких герб випадав 45 разів. Тоді $K_{100}(\{Г\})=45$, $K_{100}(\{Ц\})=100–45=55$, $K_n(\varnothing)=0$, $K_n(\Omega)=100$ – абсолютні частоти відповідних подій. Числа $P_{100}^*(\{Г\}) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$, $P_{100}^*(\{Ц\}) = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$, $P_{100}^*(\varnothing)=0$, $P_{100}^*(\Omega)=1$ – це статистичні ймовірності (відносні частоти) відповідних подій у даній серії із $n = 100$ підкидань монети. Зокрема, $K_{100}(A_0) = 45$, $P_{100}^*(A_0) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.

Зауважимо, що коли провести іншу серію із 100 підкидань монети, то дістанемо значення $P_n^*(A),\ A \in S$, які не обов'язково співпадатимуть з попередніми. Проте, якщо провести досить велику кількість досить довгих серій підкидань, то часто серед одержаних значень $P_n^*(A)$ можна виділити досить велику групу близьких між собою значень. Переважна більшість з них у певному розумінні групуються одне біля одного, а тому й біля певного фіксованого числа. Саме тому *статистична ймовірність* $P_n^*(A)$ при досить великих n *характеризує міру можливості відбування події* A *не тільки у кожному з* n *проведених випробувань, а й у тих, що можуть бути проведеними.*

Безпосередньо з означення випливають *основні властивості статистичної ймовірності:*

$1_р$. $P_n^*(A) \geq 0,$ тобто статистична ймовірність довільної події $A \in S$ невід'ємна;

$2_р$. $P_n^*\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P_n^*(A_k)$, коли $A_k \in S$ і $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (події A_k попарно несумісні), тобто статистична ймовірність скінченної або зчисленної суми попарно несумісних подій дорівнює сумі статистичних ймовірностей цих подій. Це так звана *властивість повної* (*або зчисленної*) *адитивності* статистичної ймовірності.

$3_р$. $P_n^*(\Omega) = 1,$ тобто статистична ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

Властивості $1_р$-$3_р$ називають *основними або визначальними*. З них випливають усі інші властивості статистичної ймовірності.

Приклад 5.2. Довести, що $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$. Справді,

$$A \cdot \overline{A} = \varnothing \text{ і } A + \overline{A} = \Omega.$$

Тому за основними властивостями $2_р$ і $3_р$ маємо:

$$P_n^*(A + \overline{A}) = P_n^*(A) + P_n^*(\overline{A}) = P_n^*(\Omega) = 1.$$

Звідси

$$P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A).$$

Нехай простір $\Omega = \{E_1, \ldots, E_k\}$ скінченний і кожна множина $\{E_i\}$, $i \in \overline{1, k}$, є подією. Якщо для n випробувань виявлено, що статистичні ймовірності $P_n^*(\{E_i\})$ однакові (з певною точністю) для усіх $i \in \overline{1, k}$, то тоді кажуть, що *наслідки* (*результати*) *випробувань статистично рівноможливі*.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{Г, Ц\}$, простір подій $S = \{\varnothing, \Omega\}$, а серія випробувань така ж, як і у прикладі 5.1. Тоді про абсолютні (чи відносні) частоти подій $A=\{Г\}$ і $B=\{Ц\}$ говорити не можна, оскільки таких подій немає в просторі подій S, а тому множини $A=\{Г\}$ і $B=\{Ц\}$ подіями не вважаються.

Отже, про абсолютні і відносні частоти в даній серії із n випробувань можна говорити лише для будь-якої події A, що належить даному простору S випадкових подій.

Вправа 2. Нехай підкидається шестигранний гральний кубик і простір елементарних подій $\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}$, простір S подій – сукупність будь-яких підмножин простору Ω, а подія $A_1 = \{"3", "6"\}$ – випадання при однократному підкиданні кубика числа, кратного 3. Припустимо, що проведено n=15 таких підкидань і спостерігалися такі результати:

$$E_{\text{сп }1}=\text{"5"},\ \ E_{\text{сп }2}=\text{"6"},\ \ E_{\text{сп }3}=\text{"6"},\ \ E_{\text{сп }4}=\text{"6"},\ \ E_{\text{сп }5}=\text{"4"},$$
$$E_{\text{сп }6}=\text{"3"},\ \ E_{\text{сп }7}=\text{"5"},\ \ E_{\text{сп }8}=\text{"2"},\ \ E_{\text{сп }9}=\text{"6"},\ \ E_{\text{сп }10}=\text{"4"},$$
$$E_{\text{сп }11}=\text{"5"},\ \ E_{\text{сп }12}=\text{"6"},\ \ E_{\text{сп }13}=\text{"3"},\ \ E_{\text{сп }14}=\text{"3"},\ \ E_{\text{сп }15}=\text{"5"}.$$

Тоді абсолютні частоти $K_{15}(E_i)$ елементарних подій $E_i=\text{"}i\text{"},\ i\in\overline{1,6}$, дорівнюють:

$$K_{15}(E_1)=K_{15}(\text{"1"})=0,\ \ K_{15}(E_2)=K_{15}(\text{"2"})=1,\ \ K_{15}(E_3)=K_{15}(\text{"3"})=3,$$
$$K_{15}(E_4)=K_{15}(\text{"4"})=2,\ \ K_{15}(E_5)=K_{15}(\text{"5"})=4,\ \ K_{15}(E_6)=K_{15}(\text{"6"})=5.$$

Тепер можна обчислити абсолютну частоту $K_{15}(A)$ для довільної події $A\in S$.

Зокрема, $K_{15}(A_1)=K_{15}(\{\text{"3"},\text{"6"}\})=K_{15}(\{\text{"3"}\})+K_{15}(\{\text{"6"}\})=3+5=8$ – абсолютна частота випадання числа, кратного 3, в даній серії із n=15 підкидань кубика.

Статистична ймовірність або відносна частота події A_1 – це число $P_{15}^*(A_1)=\dfrac{K_{15}(A_1)}{15}=\dfrac{8}{15}$. Аналогічно можна підрахувати статистичні ймовірності елементарних подій:

$$P_{15}^*(\text{"1"})=0,\quad P_{15}^*(\text{"2"})=\frac{1}{15},\quad P_{15}^*(\text{"3"})=\frac{3}{15},$$
$$P_{15}^*(\text{"4"})=\frac{2}{15},\quad P_{15}^*(\text{"5"})=\frac{4}{15},\quad P_{15}^*(\text{"6"})=\frac{5}{15}.$$

Вправа 3. Нехай простір елементарних подій $\Omega=[a;b]$, а простір подій S породжується сукупністю скінченних об’єднань проміжків, що є частинами $[a;b]$. Припустимо, що проведена серія із n випробувань, в результаті яких спостерігалися елементарні події $E_{\text{сп }i}\in[a;b]=\Omega,\ i\in\overline{1,n}$. Тоді цілком можливо, що для кожної елементарної події $E=x\in[a;b]$ її абсолютна частота $K_n(E)=K_n(x)$ дорівнює 0 або 1, а $P_n^*(E)=0$ в межах точності обчислень, якщо n – досить велике число. В подібних випадках для визначення $P_n^*(A)$ слід користуватися формулою $P_n^*(A)=\dfrac{K_n^*(A)}{n}$.

Вправа 4. Довести, що $P_n^*(\varnothing)=0$, тобто статистична ймовірність неможливої події дорівнює нулю.

Справді, оскільки $\varnothing\cdot\varnothing=\varnothing$ і $\varnothing=\varnothing+\varnothing$, то за властивістю 2р $P_n^*(\varnothing)=P_n^*(\varnothing)+P_n^*(\varnothing)$, і тому $P_n^*(\varnothing)=0$.

Вправа 5. Якщо $A\subset B$, то $P_n^*(B)=P_n^*(A)+P_n^*(B\setminus A)$, а тому $P_n^*(A)\le P_n^*(B)$. Зокрема, $P_n^*(A)\le 1$ для будь-якої події A.

Справді, якщо $A \subset B,$ то $B = A + (B \setminus A)$ і $A \cdot (B \setminus A) = \varnothing$. Тому за основними властивостями $2_р$ і $1_р$ маємо:

$$P_n^*(B) = P_n^*(A) + P_n^*(B \setminus A) \geq P_n^*(A).$$

Зокрема, якщо $B = \Omega$, то $A \subset \Omega$, і тому $P_n^*(A) \leq P_n^*(\Omega) = 1$ для будь-якої події A.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Число $K_n(A)$ появ події A може набувати будь-якого значення з проміжку $[0; n]$.

2. Відносна частота $P_n^*(A)$ події A може набувати будь-якого значення з проміжку $[0; 1]$.

3. Якщо $P_n^*(A) = 1$, то A – вірогідна подія.

4. Якщо $P_n^*(A) = 0,$ то A – неможлива подія.

5. Якщо $P_n^*(A + B) = P_n^*(A) + P_n^*(B)$, то A і B несумісні події.

6. Якщо $P_n^*(A) + P_n^*(B) = 1,$ то A і B протилежні події.

7. Якщо $P_n^*(A + B) \neq P_n^*(A) + P_n^*(B),$ то A і B сумісні події.

8. Якщо подія A спричинює подію B, то $P_n^*(A) < P_n^*(B)$.

9. Якщо $P_n^*(A) < P_n^*(B)$, то подія A спричинює подію B.

10. Для будь-яких подій $A \in S$, $B \in S$ і $C \in S$:

$$P_n^*(A + B + C) = P_n^*(A) + P_n^*(B) + P_n^*(C) -$$
$$- P_n^*(AB) - P_n^*(AC) - P_n^*(BC) + P_n^*(ABC).$$

11. Якщо $A \subset B,$ то $P_n^*(B \setminus A) = P_n^*(B) - P_n^*(A).$

12. Для кожного стохастичного експерименту його наслідки статистично рівноможливі.

13. Якщо Ω – нескінченна множина, то наслідки відповідного стохастичного експерименту не є статистично рівноможливими.

14. Якщо усі наслідки стохастичного експерименту статистично рівноможливі, то $\Omega = \{E_1, \ldots, E_k\}$ і для будь-якої події $A \subset \Omega$, $A = \{E_{i_1}, \ldots, E_{i_m}\}$ правильна рівність $P_n^*(A) = \dfrac{m}{k}$.

2. Монету підкидали 10 разів. Якими можуть бути при цьому абсолютні і відносні частоти появ герба і цифри?

3. Шестигранний кубик, частину граней якого пофарбовано в білий колір, другу частину – у червоний колір, третю частину – у зелений колір, підкидали 5 разів. Якими при цьому можуть бути абсолютні і відносні частоти випадань на верхній грані кожного з трьох кольорів?

4. Шестигранний кубик, частину граней якого пофарбовано в білий колір, другу частину – у червоний колір, третю частину – у зелений колір, підкидали 1000 разів. При цьому як результати випробувань розглядали колір верхньої грані. Виявилося, що в 1000 випробуваннях білою гранню догори кубик падав 500 разів, червоною – 300, зеленою – 200. Побудувати всі можливі простори подій, що відповідають даному експерименту, і визначити статистичні ймовірності всіх подій кожного з просторів, виходячи з зазначених даних.

5. Шестигранний кубик підкидали 1000 разів, при цьому з'ясувалося, що 6 очок випадали 600 разів, 5 – 300 разів, 4 – 50 разів. Виходячи з наведених даних, побудувати всі можливі простори подій та визначити статистичні ймовірності всіх подій кожного з просторів.

6. Сформулювати і довести властивості абсолютної частоти аналогічно до властивостей статистичної ймовірності.

7. Довести (двома способами), що:

1. $0 \le P_n^*(A) \le 1$, тобто статистична ймовірність довільної події може набувати значення лише з відрізка $[0; 1]$.

2. Для довільних подій $A \in S$, $B \in S$ мають місце рівності:

$$1)\ K_n(A+B) = K_n(A) + K_n(B) - K_n(AB);$$

$$2)\ P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB).$$

8. У таблиці 5.1 наведено результати серії випробувань, проведених Ж. Бюффоном та К. Пірсоном стосовно експерименту з підкиданням монети.

Табл. 5.1

	Кількість підкидань	Кількість випадань герба
Ж. Бюффон	4040	2048
К. Пірсон	12000	6019
К. Пірсон	24000	12012

1. Обчислити для кожної серії $P_n^*(Г)$ – відносну частоту випадання герба та $P_n^*(Ц)$ – відносну частоту випадання цифри.

2. Знайти середнє арифметичне відносних частот $P_{4040}^*(Г)$, $P_{12000}^*(Г)$ та $P_{24000}^*(Г)$.

3. З наведених серій утворити нову серію довжиною $n = 4040 + 12000 + 24000$ і обчислити для неї $P_n^*(Г)$.

4. Порівняти, що ближче до $\frac{1}{2}$: результат завдання 2, чи результат завдання 3.

9. Для експерименту з підкиданням монети провести серію випробувань довжиною $n = 50$ підкидань і обчислити $P_n^*(Г)$ та $P_n^*(Ц)$. Порівняти цей результат з результатами із задачі **8**.

10. Для експерименту з підкиданням грального кубика провести серію довжиною $n=50$ підкидань.

1) Підрахувати $P_n^*(i), i \in \overline{1,6}$ – відносну частоту випадання “і” очок.

2) Скласти відповідну таблицю.

3) Утворити усі можливі події та підрахувати їх статистичні ймовірності.

11. Відносна частота влучення у мішень, визначена за серією із 150 пострілів, виявилася рівною 0,92. Скільки разів стрілець влучив у мішень?

12. Довести, що статистична ймовірність завжди є раціональним числом з проміжку $[0;1]$.

13. Довести основні властивості статистичної ймовірності.

14. Побудувати приклад події A, для якої $P_n^*(A)=1$, проте A не є вірогідною подією.

15. Відомо, що $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ є подіями. Утворити ланцюги нерівностей, що пов’язують статистичні ймовірності цих подій, а також подій $A \bigcup B$, $\varnothing$, Ω, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \bigcup B}$, $\overline{A \bigcap B}$.

16. Заданий стохастичний експеримент проведено n разів (n – досить велике) і виявлено статистичну рівноможливість його результатів. Побудувати відповідний простір елементарних подій і знайти статистичну ймовірність даної події A, якщо:

1. Експеримент полягав у діставанні навмання монети зі скарбнички і фіксації її номіналу. Скарбничка містить певну кількість монет номіналом по дві і по десять копійок. Подія A – навмання взята монета мала номінал 10 копійок. Відомо, що монет номіналом дві копійки у скарбничці було втричі більше, ніж номіналом 10 копійок.
2. Експеримент полягав у діставанні навмання однієї за одною 2-х монет із гаманця і фіксації номіналів тільки тих пар монет, коли другою була монета 25 копійок. В гаманці містилися 3 монети по 25 копійок і 7 монет по 5 копійок. Подія A – перша монета була 25 копійок.
3. Експеримент полягав у тому, що колода у 52 карти ділилася навпіл і фіксувався зміст кожної половини. Подія A – у навмання розділеній навпіл колоді карт число чорних і червоних карт в обох частинах колоди було однаковим.
4. З колоди з 32-х карт навмання діставали 10 карт і фіксували колір кожної з 10 карт. Подія A – серед 10 навмання взятих карт було 8 одного кольору.
5. Експеримент полягав в тому, що з колоди із 32 карт навмання вибирали 4. Подія A – серед них була хоча б одна шестірка.
6. Експеримент полягав в тому, що навмання набирався п’ятизначний телефонний номер. Подія A – всі цифри у навмання набраному номері були різними.

7. Експеримент полягав у тому, що дитина переставляла кубики. На кубиках зображено літери “А”, “А”, “А”, “М”, “М”, “Т”, “Т”, “Е”, “И”, “К”. Подія A – на навмання складених кубиках утворилося слово “МАТЕМАТИКА”.

8. Кожна із літер О, Н, Е, С, Ц записана на одній з 5 карток. Експеримент полягав у діставанні навмання карток і розташовуванні їх одна за однією. Подія A – утворювалося слово «СОНЦЕ».

9. Експеримент полягав в тому, що окремі томи чотиритомного твору розташовували на полиці у випадковому порядку. Подія A – томи розташовані у правильному порядку зліва направо.

10. Експеримент полягав у тому, що 10 книг розставляли навмання. Подія A – 3 певні книжки були поставлені поруч.

11. Буквений замок містить на загальній осі п’ять дисків, кожен з яких поділено на шість секторів з нанесеними на них різними літерами. Замок відкривається тільки в тому випадку, якщо кожний диск займає одне певне положення відносно корпусу замка. Експеримент полягав у встановленні навмання набору з п’яти літер. Подія A – замок відкривався.

12. Експеримент полягає у тому, що навмання вказувався місяць та число деякого (невисокосного) року. Подія A – вказаний день був неділею. Всього в цьому році 53 неділі, а відповідність чисел дням тижня невідома.

13. Числа 1, 2, 3, 4, 5, написані на п’яти картках. Експеримент полягав в тому, що навмання послідовно вибиралися три картки. Вибрані таким чином цифри розставлялися зліва направо. Подія A – отримане тризначне число було парним.

14. На 10 однакових картках написані цифри від 0 до 9. Експеримент полягав у діставанні навмання: 1) двох карток, 2) трьох карток. Подія A – утворене за допомогою цих карток:

1) Двозначне число ділилося на 18.

2) Тризначне число ділилося на 36.

15. На картках написані цілі числа від 1 до 15. Експеримент полягав у тому, що навмання діставали 2 картки. Подія A – сума чисел, написаних на цих картках, дорівнювала 10.

16. При запису прізвищ учасників деяких зборів, загальна кількість яких дорівнювала 360, з’ясувалось, що початковою літерою у 7 учасників була «А», у 2 – «Ю», у 5 – «Е», у 8 – «І», у 9 – «О», у 4 – «У», а в інших прізвище починалось з приголосних. Подія A – прізвище навмання вибраного учасника зборів починалося з голосної літери.

17. В урні 2 білих і 4 чорних кульки. Експеримент полягав у тому, що з урни одна за однією діставали усі кульки. Подія A – остання кулька чорна.

18. Експеримент полягав у підкиданні двох гральних кубиків. Подія A – на обох кубиках випало:

1) однакове число очок;

2) різне число очок.

19. В стародавній грі необхідно було для виграшу отримати при підкиданні трьох гральних кубиків суму очків, більшу 10. Експеримент полягав у підкиданні трьох гральних кубиків і фіксації суми очок, що випали. Подія A:

1) випало 11 очок;
2) випало 12 очок;
3) виграш.

20. В шаховому турнірі брали участь 20 гравців. Експеримент полягав в поділі гравців на 2 групи по 10 гравців. Подія A: 1) двоє найбільш сильних гравців попали в різні групи; 2) четверо найбільш сильних гравців попали по 2 в різні групи.

21. Експеримент полягав в тому, що m осіб сідали за круглий стіл, причому кількість стільців дорівнює m. Подія A – дві певних особи опинялися поруч.

22. В лотереї 100 білетів. Серед них один виграш в 50 грн., 3 виграші по 25 грн., 6 виграшів по 10 грн., 15 виграшів по 3 грн. Експеримент полягав в тому, що навмання вибирався один білет. Подія A: 1) виграш не менше 25 грн., 2) виграш не більше 25 грн.

23. В умовах попередньої задачі експеримент полягав у тому, що навмання купували 3 білети. Подія A – хоча б який-небудь виграш.

24. Було 5 білетів вартістю 1 грн., 3 білети – 3 грн., 2 білети – 5 грн. Експеримент полягав в тому, що навмання брали 3 білети. Подія A: 1) хоча б 2 білети мали однакову вартість; 2) всі 3 білети коштували 7 грн.

25. Лотерею, випущено на суму n гривень. Ціна одного білета r гривень. Цінні виграші припадали на m білетів. Експеримент полягав в купівлі білета. Подія A – білет виграшний.

26. Серед 10 білетів 2 виграшних. Експеримент полягав у тому, що навмання брали 5 білетів. Подія A – серед них були:

1) один виграшний;
2) два виграшних;
3) хоча б один виграшний.

27. Було $n+m$ білетів, серед яких n – виграшних. Експеримент полягав у купівлі k білетів. Подія A – серед k куплених білетів було s виграшних.

28. Загін, що нараховував 25 чоловік, бав участь у військовій грі. В загоні 5 розвідників та 4 зв'язкових. Експеримент полягав у тому, що вибирали навмання 4-х чоловік, яких потрібно відправити у розвідку. Подія A – в групу розвідки потрапляли 2 зв'язкових та 2 розвідники.

29. Експеримент полягав в тому, що в залі, де є $n+k$ місць, випадковим чином займали місця n осіб. Подія A – були зайняті фіксовані $m \le n$ місць.

1.6. Ймовірнісні простори. Уточнення поняття випадкової події

Нехай Ω – деякий простір елементарних подій, і задана деяка сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. Якщо $A \in S$, то і $\overline{A} \in S$;

3_s. Якщо $A_i \in S$, $i = 1,2,\ldots$, то і $\bigcup\limits_i A_i \in S$.

Будь-яку задану на S дійсну функцію $V(A)$, $A \in S$, що задовольняє вимоги:

1_v. $V(A) \geq 0$, $A \in S$;

2_v. Якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$V\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i V(A_i),$$

називають *мірою, заданою на сукупності* S.

При цьому сукупність S називають *простором вимірних за мірою* V *множин*, кожну множину $A \in S$ називають *вимірною відносно міри* V, а значення $V(A)$ називають *мірою множини* A. Якщо ж $A \subset \Omega$, але $A \overline{\in} S$, то таку множину A називають *невимірною відносно міри* V.

Прикладами мір можуть бути об'єми просторових тіл і їх об'єднань, площі плоских фігур і їх об'єднань, довжини відрізків і їх об'єднань на прямій, кількості елементів у скінченних множинах і їх об'єднаннях, маси тіл та їх об'єднань тощо.

Якщо $V(\Omega) = 1$, тоді міру V називають *ймовірнісною мірою* або *ймовірністю, визначеною на сукупності* S *підмножин множини* Ω.

Таким чином, ймовірнісна міра (ймовірність) $P(A)$, визначена на сукупності S, повинна задовольняти вимоги (мати властивості):

1_p. $P(A) \geq 0$, $A \in S$;

2_p. Якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

3_p. $P(\Omega) = 1$;

Якщо задано простір елементарних подій Ω, сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги 1_s–3_s, і на цій сукупності визначена числова функція $P(A)$, що задовольняє вимоги 1_p–3_p, тоді говорять, що задано *ймовірнісний простір* (Ω, S, P).

При цьому *елементи множини* Ω *називаються елементарними подіями, елементи сукупності* S – *подіями, а числа* $P(A)$, $A \in S$, – *ймовірностями подій* A.

Властивості 1_p-3_p функції $P(A)$, $A \in S$, називаються *основними* чи *визначальними*. З них випливають всі інші властивості ймовірності $P(A)$.

Властивість 2_p називають *властивістю повної адитивності функції* $P(A)$.

Будь-яку дійсну функцію $P(A)$, $A \in S$, *що задана на просторі подій* S *і задовольняє вимоги* 1_p-3_p, називають *ймовірністю подій* $A \in S$.

Вимоги (властивості) 1_s-3_s, 1_p-3_p називають *системою аксіом теорії ймовірностей* (системою аксіом А.М. Колмогорова).

У випадку, коли $\Omega = \{E_1, \ldots, E_k\}$, множина $\{E_i\}$ є подією для кожного $i \in \overline{1, k}$ і $P(\{E_i\}) = \dfrac{1}{k}$, $i \in \overline{1, k}$, кажуть, що *наслідки* відповідного стохастичного експерименту є *рівноможливими*.

Легко бачити, що статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$, $A \in S$, визначена на сукупності S підмножин множини Ω, є імовірнісною мірою (оскільки задовольняє вимоги 1_p-3_p).

Приклад 6.1. Нехай дуже велику кількість разів підкидали шестигранний гральний кубик і фіксували лише частоти випадання на верхній грані кубика цифри “6”, цифри “5” і цифр не більше “4”. Нехай при цьому з'ясувалося, що $P_n^*(\text{"6"}) = 0.60$, $P_n^*(\text{"5"}) = 0.30$, $P_n^*(\{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"}\}) = 0.10$.

Введемо позначення: $H_1 = \{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"}\}$, $H_2 = \{\text{"5"}\}$, $H_3 = \{\text{"6"}\}$. Очевидно $H_i H_j = \varnothing$, $i \ne j$, $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$, тобто підмножини H_1, H_2, H_3 утворюють розбиття множини Ω на підмножини, що попарно не перетинаються.

Розглянемо таку сукупність S підмножин множини $\Omega = \{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"},\text{"5"},\text{"6"}\}$:

$$S = \{\varnothing,\ H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_1 + H_2,\ H_1 + H_3,\ H_2 + H_3,\ H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\} =$$
$$= \{\varnothing, \{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"}\}, \{\text{"5"}\}, \{\text{"6"}\}, \{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"},\text{"5"}\},$$
$$\{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"},\text{"6"}\}, \{\text{"5"},\text{"6"}\}, \{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"},\text{"5"},\text{"6"}\} = \Omega\}.$$

Очевидно, ця сукупність S задовольняє вимоги 1_s-3_s. В подібних випадках говорять, що сукупність S породжена системою підмножин H_1, H_2, H_3. Очевидно також, що $P_n^*(A)$ визначена на всіх елементах сукупності S:

$P_n^*(\varnothing) = 0$; $P_n^*(\{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"}\}) = 0.10$;

$P_n^*(\{\text{"5"}\}) = 0.30$; $P_n^*(\{\text{"6"}\}) = 0.60$;

$P_n^*(\{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"},\text{"5"}\}) = 0.40$; $P_n^*(\{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"},\text{"6"}\}) = 0.70$;

$P_n^*(\{\text{"5"},\text{"6"}\}) = 0.90$; $P_n^*(\{\text{"1"},\text{"2"},\text{"3"},\text{"4"},\text{"5"},\text{"6"}\}) = 1$,

і задовольняє вимоги 1_p-3_p.

Тому в розглянутому випадку сукупність S є простором подій (вимірних за мірою $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω), а трійка (Ω, S, P_n^*) є ймовірнісним простором.

Разом з тим підмножини, наприклад, $\{"1","2"\}$, $\{"1","3","5"\}$, $\{"2","4","6"\}$, і деякі інші підмножини множини $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ виявляються невимірними відносно розглянутої міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, і тому такі підмножини не включені до простору подій S, вони не вважаються подіями.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай Ω з попереднього прикладу 6.1 і нехай $H_1 = \{"1","2","3"\}$, $H_2 = \{"4"\}$, $H_3 = \{"5"\}$, $H_4 = \{"6"\}$. Тоді $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = \Omega$.

Розглянемо таку сукупність S_1 підмножин множини Ω:

$$S_1 = \{\varnothing,\ H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4,\ H_1+H_2,\ H_1+H_3,\ H_1+H_4,\ H_2+H_3,\ H_2+H_4,\ H_3+H_4,$$
$$H_1+H_2+H_3,\ H_1+H_2+H_4,\ H_1+H_3+H_4,\ H_2+H_3+H_4,\ H_1+H_2+H_3+H_4=\Omega\} =$$
$$= \Big\{\ \varnothing,\ \{"1","2","3"\},\ \{"4"\},\ \{"5"\},\ \{"6"\},\ \{"1","2","3","4"\},\ \{"1","2","3","5"\},$$
$$\{"1","2","3","6"\},\ \{"4","5"\},\ \{"4","6"\},\ \{"5","6"\},\ \{"1","2","3","4","5"\},$$
$$\{"1","2","3","4","6"\},\quad \{"1","2","3","5","6"\},\quad \{"4","5","6"\},$$
$$\{"1","2","3","4","5","6"\}\ \Big\}.$$

Очевидно ця сукупність S_1 задовольняє вимоги 1_s-3_s. Разом з тим, якщо функція (ймовірнісна міра) $P_n^*(A)$ задана так, як у прикладі 6.1, то вона виявляється неузгодженою із сукупністю S_1, оскільки підмножини $\{"1","2","3"\}$, $\{"4"\}$, $\{"1","2","3","5"\}$, $\{"4","5"\}$, $\{"1","2","3","6"\}$, $\{"4","6"\}$, $\{"4","5","6"\}$ виявляються невимірними. Якщо при цьому є підстави вважати, що відносна частота попадання в множину $\{"4"\}$ дорівнює, наприклад, 0.06, а в множину $\{"1","2","3"\}$ – 0.04, то тоді одержуємо нову функцію $\tilde{P}_n^*(A)$, $A \in S_1$, визначену на всіх елементах S_1. Зокрема,

$$\tilde{P}_n^*(\{"1","2","3"\}) = 0.04,\ \tilde{P}_n^*(\{"4"\}) = 0.06,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"1","2","3","5"\}) = 0.34,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"4","5"\}) = 0.36,\ \tilde{P}_n^*(\{"1","2","3","6"\}) = 0.64,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"4","6"\}) = 0.66,\ \tilde{P}_n^*(\{"4","5","6"\}) = 0.96,$$

а на елементах сукупності $S \subset S_1$

$$\tilde{P}_n^*(A) = P_n^*(A),\ A \in S.$$

Таким чином ймовірнісна міра $\tilde{P}_n^*(A)$ є продовженням ймовірнісної міри $P_n^*(A)$ із сукупності S на сукупність $S_1 \supset S$.

Разом з тим, якщо немає ніяких коректних міркувань щодо того, як слід продовжувати міру $P_n^*(A)$ із сукупності S на сукупність S_1, тоді слід із сукупності S_1 вилучити всі підмножини множини Ω, невимірні відносно міри $P_n^*(A)$, для того, щоб мати можливість побудувати сукупність S вимірних відносно міри $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω, яка буде задовольняти вимоги 1_s-3_s, і в такий спосіб побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Вправа 2. Нехай Ω – скінченна множина точок x_i з відрізка $[0,1]$, причому $x_i = x_{i-1} + h$, $x_0 = 0$, $h = 10^{-1000000}$, $i \in \{1, 2, \dots, 10^{1000000}\}$. Тоді (як і у випадку неперервної множини Ω типу $\Omega = \langle a,b \rangle$), на практиці швидше за все недоцільно розглядати всі підмножини розглянутої скінченної множини Ω. У подібних випадках доцільно множину Ω поділити на деяку практично прийнятну кількість k підмножин H_i таких, що $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, і як події разом з $\varnothing$ розглядати лише всілякі об'єднання підмножин H_i. Визначивши статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$, для довільної події $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1,2,\dots,k\}$, будемо мати $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i)$.

При цьому сукупність S подій (підмножин множини Ω) містить неможливу подію $\varnothing$, усі події H_i, усі суми виду $H_i + H_j$ по дві події, $i \in \overline{1,k}$, $j \in \overline{1,k}$, $i \neq j$, усі суми виду $H_i + H_j + H_l$ по три події, $i \in \overline{1,k}$, $j \in \overline{1,k}$, $l \in \overline{1,k}$, $i \neq j \neq l$, усі суми по чотири події H_i, усі суми по п'ять подій H_i, і т.д., усі суми по $(k-1)$ подій H_i, суму всіх k подій H_i, тобто $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$. Очевидно, так побудована сукупність S підмножин множини Ω задовольняє вимоги 1_s-3_s, а так введена ймовірнісна міра $P_n^*(A)$ задовольняє вимоги 1_p-3_p. У такий спосіб побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), причому простір подій S і ймовірнісна міра P_n^* виявляються узгодженими.

Множину Ω можна поділити, наприклад, на 10 підмножин H_i у такий спосіб:

$H_1 = \{x_i \mid 0 \le x_i < 0.1\}$, $H_2 = \{x_i \mid 0.1 \le x_i < 0.2\}$,

$H_3 = \{x_i \mid 0.2 \le x_i < 0.3\}$, $H_4 = \{x_i \mid 0.3 \le x_i < 0.4\}$,

$H_5 = \{x_i \mid 0.4 \le x_i < 0.5\}$, $H_6 = \{x_i \mid 0.5 \le x_i < 0.6\}$,

$H_7 = \{x_i \mid 0.6 \le x_i < 0.7\}$, $H_8 = \{x_i \mid 0.7 \le x_i < 0.8\}$,

$H_9 = \{x_i \mid 0.8 \le x_i < 0.9\}$, $H_{10} = \{x_i \mid 0.9 \le x_i \le 1.0\}$.

Отже, остаточно сказати, які саме підмножини A множини Ω вважаються подіями, можна лише після того, як побудовано ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Поняття міри множини узагальнює поняття кількості елементів у множині, довжини лінійної множини, площі плоскої фігури, об'єму тіла, маси тіла.

2. Міру можна задати на будь-якій сукупності множин.

3. Абсолютна частота $K_n(A)$ події A, $A \in S$, є мірою, заданою на S.

4. Кожна міра є ймовірнісною.

5. Статистична ймовірність є ймовірнісною мірою.

6. Кожна ймовірнісна міра є статистичною ймовірністю.

7. Для того, щоб задати ймовірнісну міру $P_n^*(A),\ A \in S$, потрібно спочатку задати простір подій S.

8. Для того, щоб задати простір подій S, потрібно спочатку задати ймовірнісну міру на деяких підмножинах $A \subset \Omega$.

9. Якщо сукупність S підмножин $A \subset \Omega$ входить у простір подій S_1, тобто $S \subset S_1$, і на S_1 задана ймовірнісна міра $P(A),\ A \in S_1$, то $(\Omega,\ S,\ P)$ ймовірнісний простір.

10. Якщо $(\Omega,\ S,\ P)$ – ймовірнісний простір, $S \subset S_1$, і S_1 задовольняє вимоги 1_s – 3_s, то міру $P(A)$ можна продовжити із сукупності S на сукупність S_1: 1) безліччю способів; 2) єдиним чином.

11. Ймовірність події – це будь-яка невід'ємна функція, що визначена на просторі подій.

12. Якщо $P(A) \in [0;1]$ для будь-якої події $A \in S$, то $P(A)$ – ймовірність події $A \in S$.

13. Якщо подія A спричинює подію B, то ймовірність події A менша за ймовірність події B.

14. Якщо $C = A + B$, то $P(C) = P(A) + P(B)$.

15. Якщо функція $P(A),\ A \in S$, задовольняє властивості повної адитивності, то вона є ймовірністю подій $A \in S$.

16. Усі події з простору подій S можуть мати однакову ймовірність.

17. Усі одноелементні події простору S можуть мати однакову ймовірність.

18. Існує подія $A \in S$, для якої $P(A) = 0$.

19. Існує простір S подій, в якому усі одноелементні події мають нульову ймовірність.

20. На кожному просторі подій можна визначити ймовірність, причому єдиним чином.

2. Нехай $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, і відомі статистичні ймовірності $P_n^*(\{"5","6"\}) = 0.70;$ $P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = 0.30$. Чи буде трійка $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ ймовірнісним простором, якщо:

1) $S = \{\varnothing, \{"1","2","3","4"\}, \{"5","6"\}, \Omega\}$?

2) $S = \{\varnothing, \Omega\}$?

3) $S = \{\varnothing, \{"5","6"\}, \Omega\}$?

4) $S = \{\varnothing, \{"1","2"\}, \{"3","4","5","6"\}, \Omega\}$?

5) $S = \{\{"1"\}, \{"2"\}\}$?

3. Довести, що статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$, $A \in S$, визначена на сукупності S підмножин множини Ω, є ймовірнісною мірою.

4. Довести такі властивості ймовірності:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$;
4. Якщо $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;
5. $0 \le P(A) \le 1$;
6. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

5. Для кожного із вказаних стохастичних експериментів виявлено рівноможливість його наслідків. Знайти ймовірність $P(A)$ заданої події A:

1. Однократне підкидання грального кубика та фіксація кількості очок на верхній грані. Подія A – випадання числа очок, що є простим числом.

2. Вибір навмання двох чисел x та y з відрізка $[-a; a]$. Подія A – точка $(x; y)$ лежить у крузі з центром у початку координат і радіусом r, $r \le a$.

3. Є 2 монети по 50 коп., 4 монети по 25 коп. і 10 монет по 10 коп. Навмання вибирається 5 монет і фіксується відповідна грошова сума. Подія A – грошова сума не перевищує 1 грн.

4. Цифри двозначного числа вибираються навмання. Подія A – обидві цифри однакові.

5. Утворення навмання фінальної пари команд із футбольних команд K_1, K_2, K_3 і K_4, що вийшли у півфінал і таких, що жодна з них не є вищою за класом від будь-якої іншої. Подія A:

1) команди K_1 і K_2 вийдуть у фінал;

2) команда K_1 вийде у фінал;

3) команда K_2 вийде у фінал;

4) команда K_3 вийде у фінал;

5) команда K_4 вийде у фінал.

6. Вибір жеребкуванням остаточного розподілу місць серед футбольних команд K_1, K_2, K_3 і K_4, що вийшли у півфінал за умови, що ці команди рівні за класом. Подія A:

1) команда K_1 стане чемпіоном;

2) команда K_2 стане чемпіоном, а команда K_1 – срібним призером;

3) команди K_3, K_2 і K_4 стануть відповідно чемпіоном, срібним призером і бронзовим призером;

4) як призери команди розташуються в порядку: K_4, K_1, K_3, K_2.

6. Банк надав кредит 500 позичальникам. У таблиці наведено кількість вкладників з відповідною сумою кредиту та його терміну.

Термін кредитування (місяці)	Сума кредиту K у тисячах грн.			
	$K<20$	$20\le K<50$	$50\le K<80$	$K>80$
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
48	0	31	99	37
60	0	0	110	50

Експеримент полягає у тому, що вибирається сума та термін кредиту (у відповідній клітинці в таблиці вказано абсолютну частоту такої пари).

1. Побудувати простір Ω елементарних подій, простір подій S, ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), вважаючи, що S містить всі підмножини множини Ω.

2. Знайти статистичну ймовірність події A, яка полягає в тому, що: 1) сума кредиту є не меншою за 50 тис. грн.; 2) термін кредиту є меншим за 3 роки; 3) видано кредит на суму, що менша за 50 тис. грн. і на термін, що не перевищує 2 роки.

7. Банк склав таблицю, що характеризує кількість вкладників за сумою їх вкладів та віком:

Вік вкладників у роках	Сума вкладу B у тисячах грн.			
	$B<2$	$2\le B<5$	$5\le B<10$	$B\ge 10$
<30	5%	15%	5%	3%
від 30 до 50	8%	25%	10%	5%
>50	7%	10%	5%	2%

Експеримент полягає у тому, що навмання вибирається вкладник та фіксується його вік і сума вкладу (у відповідній клітинці таблиці вказано абсолютну частоту такої пари).

1. Побудувати простір Ω елементарних подій, простір подій S та ймовірнісний простір.

2. Знайти статистичну ймовірність: 1) події A, яка полягає у тому, що сума вкладу є не меншою за 5 тис. грн.; 2) події B, яка полягає у тому, що вік вкладника не менший за 30 років; 3) події $A \bigcup B$; 4) події $A \bigcap B$.

3. Визначити, з яких елементарних подій складаються події A, B, $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \bigcup B}$, $\overline{A \bigcap B}$, $\overline{A \setminus B}$, $\overline{B \setminus A}$.

8. На підприємстві працює 200 співробітників, розподіл яких за віком, освітою та стажем роботи на підприємстві наведено у вигляді таблиці:

Вік у роках	Не більше 5 років роботи на підприємстві		Більше 5 років роботи на підприємстві	
	Середня освіта	Вища освіта	Середня освіта	Вища освіта
<30	25	40	5	50
≥30	10	50	5	15

Експеримент полягає у тому, що навмання вибирається вік, освіта та стаж роботи співробітників на підприємстві.

1. Побудувати простір Ω елементарних подій, простір подій S та ймовірнісний простір, вважаючи, що S містить всі підмножини множини Ω.

2. Визначити, з яких елементарних подій складається: 1) подія A, яка полягає у тому, що вік працівника є не меншим за 30 років; 2) подія B, яка полягає у тому, що працівник має вищу освіту; 3) подія C, що полягає у тому, що працівник працює більше 5 років на даному підприємстві.

3. Знайти статистичні ймовірності подій:1) A; 2) B; 3) C; 4) $A \bigcup B$, 5) $A \bigcap C$; 6) $\overline{A}$; 7) $\overline{B}$; 8) $\overline{C}$; 9) $\overline{A \bigcup B}$.

9. Експеримент полягає у тому, що з 10 осіб, серед яких 6 чоловіків і 4 жінки, навмання вибирається 7 осіб.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій, простір подій S та ймовірнісний простір, якщо всі можливі наслідки експерименту відбувалися з однаковою частотою.

2. Визначити скільки елементарних подій сприяють події A, яка полягає у тому, що серед 7-ми вибраних осіб є 3 жінки.

3. Знайти статистичні ймовірності подій A та $\overline{A}$.

10. Відомо, що статистичні ймовірності подій $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ і $C \subset \Omega$ дорівнюють відповідно $P_n^*(A) = 0{,}51$, $P_n^*(B) = 0{,}45$, $P_n^*(C) = 0{,}05$. Чи можна стверджувати, що ці події попарно несумісні?

11. Відомо, що статистичні ймовірності $P_n^*(A) = P_n^*(B) = \dfrac{1}{2}$. Чи можна стверджувати, що події A і B несумісні?

12. Відомо, що для подій $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$, $P_n^*(A) > 0{,}7$ і $P_n^*(B) > 0{,}5$. Довести, що $P_n^*(AB) > 0{,}2$.

1.7. Умовна статистична ймовірність. Ймовірність добутку подій. Залежні і незалежні події. Події, незалежні в сукупності

Умовною статистичною ймовірністю події A за умови, що подія B мала місце, називають число

$$P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}, \ P_n^*(B) \neq 0. \qquad (7.1)$$

При цьому $P_n^*(A) = P_n^*(A/\Omega)$ називають *безумовною статистичною ймовірністю події A*. У випадку $P_n^*(B) = 0$ вважають $P_n^*(A/B) = P_n^*(A)$.

Якщо в механічній інтерпретації $P_n^*(B)$ – це маса, що припадає на множину B, а $P_n^*(AB)$ – маса, що припадає на множину AB, то $P_n^*(A/B) = \dfrac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ – частка від маси, що є у множині B, яка припадає на множину A.

З означення умовної статистичної ймовірності випливає, що

$$P_n^*(AB) = P_n^*(B)\, P_n^*(A/B) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B/A).$$

Приклад 7.1. Шестигранний гральний кубик підкидали дуже велику кількість n разів. При цьому виявилось, що статистична ймовірність (відносна частота) випадання на верхній грані кубика цифри “1” дорівнює 0.01, цифри “2” – 0.02, цифри “3” – 0.03, цифри “4” – 0.04, цифри “5” – 0.30, цифри “6” – 0.60.

Позначимо можливі наслідки (елементарні події) “*i*”, $i \in \overline{1,6}$, через E_i, $i \in \overline{1,6}$. Тоді простір елементарних подій $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. Як події розглядатимемо будь які підмножини множини Ω, тобто розглянемо простір S подій, який містить події $\varnothing$ і Ω, всі одноелементні підмножини множини Ω, всі двохелементні, всі триелементні, всі чотириелементні, всі п’ятиелементні підмножини множини Ω. Нехай подія A полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає парна цифра, B – непарна цифра, C – одна із цифр “4”, ”5”, ”6”, D – одна із цифр “1”, ”2”, ”3”, ”4” (Рис.7.1). Враховуючи заданий *розподіл статистичних ймовірностей на множині елементарних подій*:

E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
$P_n^*(E_i)$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.30	0.60

та формулу $P_n^*(A) = \sum\limits_{E_i \in A} P_n^*(E_i)$, для розглядуваних подій *A, B, C, D* дістанемо:

$$P_n^*(A) = 0.66, \ \ P_n^*(B) = 0.34, \ \ P_n^*(C) = 0.94, \ \ P_n^*(D) = 0.10.$$

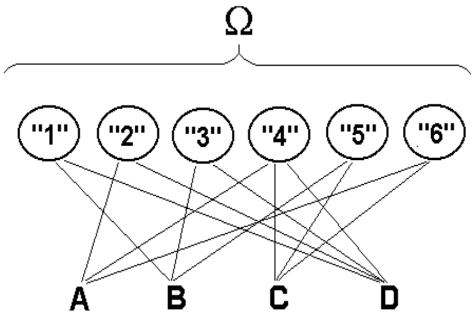


Рис. 7.1.

Оскільки $AB=\varnothing$, $AC=\{E_4,E_6\}$, $AD=\{E_2,E_4\}$, то за формулою (7.1) для умовних статистичних ймовірностей матимемо:

$$P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_1,\,E_3,E_5\})}=\frac{0}{0.34}=0\,,$$

$$P_n^*(B/A)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_2,E_4,E_6\})}=\frac{0}{0.66}=0\,,$$

$$P_n^*(A/C)=\frac{P_n^*(AC)}{P_n^*(C)}=\frac{P_n^*(\{E_4,E_6\})}{P_n^*(\{E_4,E_5,E_6\})}=\frac{0.64}{0.94}=0.68\,,$$

$$P_n^*(A/D)=\frac{P_n^*(AD)}{P_n^*(D)}=\frac{P_n^*(\{E_2,E_4\})}{P_n^*(\{E_1,E_2,E_3,E_4\})}=\frac{0.06}{0.10}=0.6\,.$$

Статистична ймовірність добутку довільної скінченної кількості подій обчислюється за формулою:

$$P_n^*(A_1A_2\ldots A_{m-1}A_m)= \\ =P_n^*(A_1)P_n^*(A_2/A_1)P_n^*(A_3/A_1A_2)\cdots P_n^*(A_m/A_1A_2\cdots A_{m-1}). \tag{7.2}$$

Події A і B називаються незалежними (щодо ймовірнісної міри P_n^*), якщо

$$P_n^*(AB)=P_n^*(A)P_n^*(B)\,.$$

Події $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ називаються незалежними в сукупності (щодо ймовірнісної міри P_n^*), якщо

$$P_n^*(\prod_{i\in I}A_i)=\prod_{i\in I}P_n^*(A_i)$$

для довільної множини $I\subset\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, $I\neq\varnothing$.

Коли замість ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, на тому самому просторі S подій задати іншу ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A\in S$, то події, що були незалежні (чи незалежні в сукупності) щодо ймовірнісної міри P_n^*, не обов'язково залишатимуться такими ж щодо ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$.

Приклад 7.2. Якщо події A і B несумісні, то вони залежні відносно міри P_n^*, для якої $P_n^*(A) > 0$ і $P_n^*(B) > 0$, оскільки $P_n^*(AB) = 0 \neq P_n^*(A) P_n^*(B)$.

Ці події незалежні відносно міри $\tilde{P}_n$, для якої $\tilde{P}_n^*(A) = 0$ або $\tilde{P}_n^*(B) = 0$, оскільки $\tilde{P}_n^*(AB) = 0 = \tilde{P}_n^*(A) \cdot \tilde{P}_n^*(B)$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. В урні є 49 кульок, які пронумеровані від 1 до 49. Дуже велику кількість n разів проводились такі випробування (тиражі спортлото) – навмання одна за однією без повернення в урну обирались шість кульок. При цьому виявилось, що статистична ймовірність появи будь якої із 49 кульок першою дорівнює $\frac{1}{49}$. Після того, як першу кульку вийнято, статистична ймовірність появи будь якої із решти 48 кульок дорівнює $\frac{1}{48}$ незалежно від номера першої кульки. Після того, як вийнято дві кульки, статистична ймовірність появи будь якої із решти 47 кульок дорівнює $\frac{1}{47}$ незалежно від номерів двох вийнятих кульок. Після того, як вийнято три кульки, статистична ймовірність появи будь якої із решти 46 кульок дорівнює $\frac{1}{46}$ незалежно від номерів трьох вийнятих кульок. Після того, як вийнято чотири кульки, статистична ймовірність появи будь якої із решти 45 кульок дорівнює $\frac{1}{45}$ незалежно від номерів чотирьох вийнятих кульок. Після того, як вийнято 5 кульок, статистична ймовірність появи будь якої із решти 44 кульок дорівнює $\frac{1}{44}$ незалежно від номерів п'яти вийнятих кульок.

Потрібно обчислити статистичну ймовірність (відносну частоту) відбування події A, яка полягає в тому, що на кожній із шести навмання вибраних в одному випробуванні кульок був один із шести задуманих номерів.

Припустимо, що задумали номери $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$. Позначимо через A_1 подію, яка полягає в тому, що першою вийнято кульку з номером m_1, який є серед задуманих, тобто $m_1 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$. Зрозуміло, що ця подія спричинюється шістьма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в тому, що першою вийнято кульку, номер якої дорівнює одному із задуманих, тобто дорівнює або i_1, або i_2, або i_3, або i_4, або i_5, або i_6.

За умовою задачі статистична ймовірність кожної із цих шести подій дорівнює $\frac{1}{49}$, а тому $P_n^*(A_1)=\frac{6}{49}$.

Позначимо через A_2 – подію, яка полягає в тому, що номер m_2 кульки, яку вийнято другою, є одним із шести задуманих номерів, тобто $m_2 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$.

Якщо подія A_1 відбулася, тобто першою вийнято кульку з номером $m_1 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$, то кулька з номером m_1 не може бути вийнята вдруге. Отже за умови, що подія A_1 відбулася, подія A_2 спричинюється п'ятьма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в тому, що другою вийнято кульку, номер якої m_2 є одним із задуманих, але $m_2 \neq m_1$, тобто

$$m_2 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\} \setminus \{m_1\}.$$

За умовою задачі умовна статистична ймовірність кожної з цих п'яти подій дорівнює $\frac{1}{48}$. Тому $P_n^*(A_2/A_1)=\frac{5}{48}$.

Аналогічно, якщо A_3, A_4, A_5, A_6 події, які полягають в тому, що відповідно третьою, четвертою, п'ятою, шостою вийнято кульку з номерами m_3, m_4, m_5, m_6, кожний з яких є одним із задуманих номерів і крім того не співпадає з номерами раніше вийнятих кульок, які теж належать до задуманих, то

$$P_n^*(A_3/A_1 A_2)=\frac{4}{47}, \qquad P_n^*(A_4/A_1 A_2 A_3)=\frac{3}{46},$$

$$P_n^*(A_5/A_1 A_2 A_3 A_4)=\frac{2}{45}, \qquad P_n^*(A_6/A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)=\frac{1}{44}.$$

Очевидно, що подія A відбувається тоді, коли в одному й тому ж випробуванні (тиражі спортлото) відбуваються всі шість подій $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, тобто

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6.$$

Враховуючи формулу (7.2), одержимо

$$P_n^*(A)=P_n^*(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6)=$$
$$=P_n^*(A_1)P_n^*(A_2/A_1)P_n^*(A_3/A_1 A_2)P_n^*(A_4/A_1 A_2 A_3)\cdot$$
$$\cdot P_n^*(A_5/A_1 A_2 A_3 A_4)P_n^*(A_6/A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)=$$
$$=\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{1}{44}\approx\frac{7}{100000000}.$$

Отже, в наведеній серії дуже великої кількості n випробувань 6 номерів із 49 можливих вдавалося вгадати в середньому 7 разів у 100 мільйонах спроб.

Вправа 2. Нехай $\Omega=\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ (Рис. 7.2). При цьому відомо, що

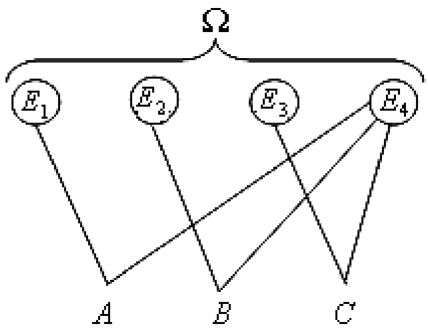


Рис. 7.2

$$P_n^*(\{E_1\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_2\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_3\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_4\})=\frac{1}{4}.$$

Нехай події A, B, C визначені так: $A=\{E_1, E_4\}$, $B=\{E_2, E_4\}$, $C=\{E_3, E_4\}$.

Тоді $P_n^*(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Оскільки $AB=\{E_4\}$, $AC=\{E_4\}$, $BC=\{E_4\}$, то

$$P_n^*(AB)=\frac{1}{4}=P_n^*(A)P_n^*(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},\qquad P_n^*(AC)=\frac{1}{4}=P_n^*(A)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

$$P_n^*(BC)=\frac{1}{4}=P_n^*(B)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Таким чином події A, B, C попарно незалежні. При цьому подія A відбувалася в половині всіх n випробувань, а також в половині тих випробувань, коли відбувалася подія B, оскільки

$$P_n^*(A)=\frac{1}{2},\ P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}.$$

Те саме можна сказати про безумовні статистичні ймовірності $P_n^*(B)$, $P_n^*(C)$ та умовні статистичні ймовірності $P_n^*(B/A)$, $P_n^*(A/C)$, $P_n^*(C/A)$, $P_n^*(B/C)$, $P_n^*(C/B)$.

Разом з тим $ABC=\{E_4\}$, тому

$$P_n^*(ABC)=\frac{1}{4}\neq P_n^*(A)P_n^*(B)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Той факт, що, наприклад, подія A залежить від добутку подій B і C, очевидний, оскільки у всіх тих випробуваннях, коли відбувалася подія BC (добуток подій B і C), відбувалася і подія A, тобто

$$P_n^*(A/BC)=1\left(=\frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(BC)}=\frac{1/4}{1/4}\right).$$

Оскільки $P_n^*(A/BC)=1\neq P_n^*(A)=\frac{1}{2}$, то подія A залежить від добутку подій B і C.

Отже, в розглядуваному випадку події A, B, C попарно незалежні, але залежні в сукупності.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Умовна статистична ймовірність $P_n^*(A/B)$ існує для будь-яких подій A та B.
2. Безумовну статистичну ймовірність можна вважати умовною.
3. Змінюючи простір елементарних подій Ω і простір подій S, умовну статистичну ймовірність $P_n^*(A/B)$ можна перетворити у безумовну.
4. Статистична ймовірність добутку подій дорівнює добутку статистичних ймовірностей цих подій.
5. Умовна статистична ймовірність потрібна для знаходження статистичної ймовірності добутку подій.
6. $P_n^*(AB)=1-P_n^*(\overline{A}+\overline{B})$.
7. Будь-які події A і B є незалежними, якщо $P_n^*(A)=0$ або $P_n^*(B)=0$.
8. Події A, B і C незалежні в сукупності, якщо вони попарно незалежні.
9. Твердження, обернене до 8, є правильним.
10. Якщо події незалежні відносно однієї ймовірнісної міри, то вони незалежні і відносно будь-якої іншої ймовірнісної міри.

2. Відомо, що подія A полягає у випаданні не менше ніж k очок при підкиданні грального кубика, причому $P_n^*("i")=\frac{1}{6}$, $i\in\overline{1,\ 6}$. Знайти $P_n^*(A/B)$, де подія B полягає у випаданні 4 очок, коли

1) $k=1$, 2) $k=2$, 3) $k=3$, 4) $k=4$, 5) $k=5$, 6) $k=6$.

3. Нехай $\Omega=\{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}=\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ – простір елементарних подій, що відповідає одночасному підкиданню двох монет номіналом 2 коп. і 10 коп., причому $P_n^*(E_k)=\frac{1}{4}$, $k\in\overline{1,\ 4}$. Подія A полягає у випаданні герба на першій монеті (2 коп.), подія B – випадання герба на другій монеті (10 коп.).

1. Чи є події A і B є незалежними?
2. Чи можна визначити ймовірнісну міру P_n^* так, щоб A і B стали залежними (незалежними) подіями?
3. Чи існує подія C така, що події A, B і C будуть незалежні в сукупності?

4. Довести формулу (7.2).

5. Довести, що події A і B незалежні тоді й тільки тоді, коли $P_n^*(A/B) = P_n^*(A)$, тобто умовна статистична ймовірність $P_n^*(A/B)$ події A, знайдена за умови, що подія B мала місце, співпадає з безумовною статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$ події A.

6. Довести, що для того, щоб події A_1, A_2, …, A_k були незалежні в сукупності, потрібно, щоб кожна з них не залежала від будь-якої сукупності інших подій, тобто щоб мали місце рівності

$$P_n^*(A_i / \prod_{j \in I \setminus \{i\}} A_j) = P_n^*(A_i),\ I \subset \{1,\ 2,\ \dots,\ k\},\ I \setminus \{i\} \neq \varnothing .$$

7. Знайти двома способами статистичну ймовірність вгадування потрібного номера квартири, якщо відомо, що цей номер лежить у межах від 1 до 48 і кратний 7. У першому способі ця статистична ймовірність безумовна, у другому – умовна. Відомо, що номери всіх квартир у великій серії випробувань з’являлися однаково часто.

8. Для експерименту з підкиданням грального кубика подія A полягає у випаданні певного числа очок, подія B – у випаданні 4, або 5, або 6 очок, подія C – у випаданні 5 очок.

1. Вважаючи, що $P_n^*("i") = \dfrac{1}{6}$, $i \in \overline{1,6}$, знайти двома способами: 1) $P_n^*(AB)$; 2) $P_n^*(AC)$; 3) $P_n^*(BC)$.

2. Чи є попарно незалежними події A, B і C?

9*. Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) відповідає експерименту з підкиданням грального кубика, причому простір подій S – найширший, а $P_n^*(\{i\}) = \dfrac{1}{6}$, $i \in \overline{1,6}$. Знайти усі можливі пари незалежних подій.

10. Довести, що:

1. Для будь-якого ймовірнісного простору можна вказати принаймні одну пару незалежних подій.

2. Події A і B незалежні, коли принаймні одна з них є вірогідною подією.

3. Події A і B незалежні (відносно міри P_n^*), коли принаймні одна з них має нульову статистичну ймовірність.

4. Якщо $P_n^*(A) \neq 0$ і $P_n^*(B) \neq 0$, причому події A і B несумісні, то вони є залежними відносно міри P_n^*.

5. Події A, B і C незалежні в сукупності (відносно міри P_n^*) тоді і тільки тоді, коли вони попарно незалежні і $P_n^*(ABC) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B) \cdot P_n^*(C)$.

6. Події *A, B, C* і *D* незалежні в сукупності (відносно міри P_n^*) тоді і тільки тоді, коли будь-які три з них є незалежними в сукупності і $P_n^*(ABCD) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B) \cdot P_n^*(C) \cdot P_n^*(D)$.

7*. Узагальнити твердження 10.5 і 10.6 на випадок довільної кількості подій.

11. Нехай події A_1, A_2, A_3 незалежні в сукупності, а сукупність подій B_1, B_2, B_3 утворюється шляхом заміни деяких (або усіх) подій A_1, A_2, A_3 на протилежні події. Довести, що події B_1, B_2, B_3: 1) попарно незалежні; 2) незалежні в сукупності.

12. Експеримент полягає у тому, що студент з 25 екзаменаційних питань навмання вибирає 3 питання (одне за одним).

Знайти статистичну ймовірність події *A*, яка полягає у тому, що студент знає відповіді на кожне з трьох вибраних питань, якщо він вивчив лише 20 з 25 питань, вважаючи, що будь які із наявних питань з'являються з однаковою частотою незалежно від того, які питання вже вибрані.

13. Абонент не пам'ятає лише останньої цифри телефонного номера і тому набирає її навмання доти, поки не з'єднається з потрібним абонентом. При кожному новому наборі попередньо випробувані цифри не набираються, а кожна інша цифра має однакові шанси бути набраною.

1. Побудувати відповідний ймовірнісний простір.
2. Знайти статистичну ймовірність того, що кількість наборів останньої цифри не перевищує 3-х.
3. Виконати завдання 1 та 2 за умови, що абонент пам'ятає, що остання цифра непарна.

14. Товариство, яке складається з 5 чоловіків і 10 жінок, велику кількість разів ділили на 5 груп по 3 людини і при цьому виявлено статистичну рівноможливість всіх можливих наслідків даного експерименту. Знайти статистичну ймовірність того, що в кожній групі було по одному чоловікові і по дві жінки.

15. Для заданих подій $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$:

1. Знайти умовну статистичну ймовірність $P_n^*(A/(A+B))$.
2. Як зміниться результат, коли події *A* і *B* несумісні?
3. З'ясувати, коли події *A* і (*A*+*B*) будуть незалежними.

16. Що можна сказати про залежність подій *A* і *B*, коли $P_n^*(A/B) + P_n^*(\overline{A}) = 1$?

17. Відомо, що $P_n^*(ABC) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B) \cdot P_n^*(C)$.

1. Чи є події *A, B* і *C* незалежні у сукупності?
2. Чи зміниться відповідь, коли події *A, B* і *C* попарно незалежні?

18. Експеримент полягав у тому, що два стрільці одночасно стріляли в одну мішень і фіксували результат (влучення чи промах) кожного з них.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Визначити, з яких елементарних подій складаються події A_i – влучення i-го стрільця, $i \in \overline{1,2}$.

3. Довести, що кожна елементарна подія $E \in \Omega$ є подією, тобто $\{E\} \in S$, коли відомо, що подіями є A_i – влучення i-го стрільця, $i \in \overline{1,2}$.

4. Вважаючи відомими $P_n^*(A_1) = p_1$ і $P_n^*(A_2) = p_2$, а події A_i, $i \in \overline{1,2}$, незалежними відносно P_n^*, обчислити статистичну ймовірність:

1) влучення у мішень принаймні одного стрільця;

2) будь-якої елементарної події простору Ω;

5. Перевірити, чи є елементарні події простору Ω статистично рівноможливими.

19. Статистична ймовірність виготовлення першосортної деталі на першому верстаті дорівнює 0,7, а на другому – 0,8. На першому верстаті виготовлено дві деталі, а на другому – три.

1. Знайти статистичну ймовірність події A, яка полягає у тому, що усі виготовлені деталі є першосортними.

2. Описати відповідний стохастичний експеримент та простір Ω елементарних подій, для якого $A \subset \Omega$.

3. Визначити, з яких елементарних подій складається подія A.

4. Чи є елементарні події простору Ω рівноможливими?

20. Знайти статистичну ймовірність того, що навмання взята деталь є першосортною, якщо 4% усіх деталей є бракованими, а 75% небракованих деталей є першосортними.

21. Статистичні ймовірності вибрати навмання будь-який з 4-х бракованих виробів однакові. На трьох виробах було по одному дефекту – або ушкоджена краска, або були вм'ятини, або були тріщини, а на четвертому виробі були всі три дефекти. Події A, B, C полягають відповідно у тому, що на навмання взятому виробі була ушкоджена краска, була вм'ятина, була тріщина. Чи є ці події:

1. Незалежними попарно.

2. Незалежними в сукупності.

22. У скриньці є 6 карток з літерами, що утворюють слово "карета" (на кожній картці – одна літера). Експеримент полягав у тому, що навмання по черзі виймали п'ять карток і розташовували їх одну за одною. При цьому статистичні ймовірності появи будь-якої, ще не витягнутої картки, виявилася однаковою. Знайти статистичну ймовірність того, що в порядку появи літер утворювалося слово "катер".

23. Команда для участі у студентській олімпіаді з математики складалося з 12 студентів, 5 з яких відмінники. На перший тур жеребкуванням з команди обирали трьох осіб, причому статистична ймовірність бути обраним у кожного із ще не обраних студентів була однаковою. Знайти статистичну ймовірність того, що:

1) усі обрані студенти були відмінниками;
2) усі обрані студенти не були відмінниками;
3) серед обраних студентів був принаймні один відмінник;
4) серед обраних студентів принаймні один не був відмінником.

1.8. Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса

Нехай простір Ω елементарних подій поділено на m підмножин $H_1, H_2, \ldots, H_m$ таких, що $H_i \in S$, $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $H_1 + H_2 + \ldots + H_m = \Omega$, і нехай подія $A \subset \Omega$ (Рис. 8.1). Події H_i називають *гіпотезами*, за яких може відбуватися подія A.

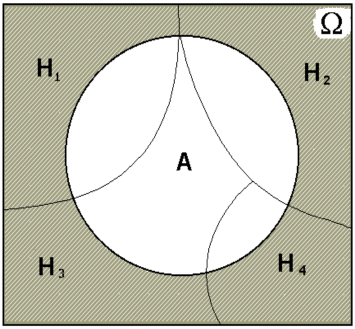


Рис. 8.1

Якщо відомі статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$ гіпотез H_i, а також умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A/H_i)$ події A за кожною з гіпотез H_i, тоді статистичну ймовірність $P_n^*(A)$ події A можна обчислити за формулою:

$$P_n^*(A) = \sum_{i=1}^{m} P_n^*(H_i) P_n^*(A/H_i), \qquad (8.1)$$

яка називається *формулою повної статистичної ймовірності*.

Приклад 8.1. Є дві урни, в яких є білі і чорні кульки. Експеримент полягає в тому, що навмання вибирається урна, а з неї навмання вибирається кулька, яка потім повертається в урну. Із n випробувань m_1 разів була взята перша урна, при цьому в $k_1 < m_1$ цих випадків кулька була біла, і $m_2 = n - m_1$ разів була взята друга урна, при цьому в $k_2 < m_2$ випадків кулька була біла.

Природно вважати, що простір елементарних подій $\Omega = \{(1,б),(1,ч),(2,б),(2,ч)\}$, де елементарна подія $E_{kб} = (k,б)$ ($E_{kч} = (k,ч)$), $k \in \overline{1,2}$, означає, що з k-тої урни вийнято білу (чорну) кульку. Подія $H_k = \{(k,б),(k,ч)\}$ означає, що кульку вийнято з k-тої урни, $k \in \overline{1,2}$. За умовою задачі $P_n^*(H_1) = \frac{m_1}{n}$, $P_n^*(H_2) = \frac{m_2}{n}$. Очевидно $H_1 \cdot H_2 = \varnothing$ і $H_1 + H_2 = \Omega$.

Нехай подія $A=\{(1,б),(2,б)\}$ – поява білої кульки. За умовою задачі $P_n^*(A/H_1)=\dfrac{k_1}{m_1}$, $P_n^*(A/H_2)=\dfrac{k_2}{m_2}$ і в n випробуваннях подія A відбулася k_1+k_2 разів.

Тому за формулою (8.1) статистична ймовірність (відносна частота) появи білої кульки в цих n випробуваннях дорівнює

$$P_n^*(A)=P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)+P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)=\frac{m_1}{n}\cdot\frac{k_1}{m_1}+\frac{m_2}{n}\cdot\frac{k_2}{m_2}.$$

Якщо в умовах, коли відомі $P_n^*(H_i)$ і $P_n^*(A/H_i)$, потрібно визначити, чому дорівнює $P_n^*(H_i/A)$, тобто відносну частоту відбування події H_i серед тих випробувань, коли відбувалася подія A, то використовують *формулу Байєса*:

$$P_n^*(H_i/A)=\frac{P_n^*(AH_i)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{m}P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Одні і ті ж деталі вироблялися трьома виробниками і пакувалися окремо деталі першого виробника, окремо деталі другого і окремо деталі третього виробника. Для контролю продукції велику кількість n разів із трьох можливих пакунків навмання вибирався один і потім з нього навмання вибиралася одна деталь. При цьому виявилось, що відносна частота появи пакунків будь якого із трьох виробників дорівнює $\dfrac{1}{3}$. Серед тих випадків, коли було вибрано пакунок першого виробника, жодного разу не було виявлено браковану деталь. Серед тих випадків, коли було вибрано пакунок другого виробника, так само жодного разу не було виявлено браковану деталь. Коли ж для контролю вибиралися пакунки третього виробника, то в $\dfrac{2}{3}$ від кількості таких випадків деталь виявлялася бракованою. Потрібно обчислити статистичну ймовірність (відносну частоту) відбування події A, яка полягає в тому, що брак виявлено.

Природно вважати, що простір елементарних подій $\Omega=\{(1,б),(1,я),(2,б),(2,я),(3,б),(3,я)\}$, де елементарна подія $E_{kб}=(k,б)$ $(E_{kя}=(k,я))$, $k\in\overline{1,3}$, означає, що вибрана деталь виготовлена k-тим робітником і є бракованою (якісною). Подія $A=\{(1,б),(2,б),(3,б)\}$ полягає в тому, що вибрана деталь є бракованою.

Позначимо через $H_1=\{(1,б),(1,я)\}$ – подію, яка полягає в тому, що для контролю було вибрано пакунок з деталями першого виробника, $H_2=\{(2,б),(2,я)\}$ – для контролю вибрано пакунок з деталями другого виробника, $H_3=\{(3,б),(3,я)\}$ – вибрано пакунок з деталями третього виробника. Очевидно, $H_i H_j=\varnothing$ при $i\neq j$, причому $H_1+H_2+H_3=\Omega$, оскільки інші припущення відносно того, який із робітників виготовив деталь, неможливі.

Як видно з умов задачі,

$$P_n^*(H_1)=\frac{1}{3},\quad P_n^*(H_2)=\frac{1}{3},\quad P_n^*(H_3)=\frac{1}{3},$$

$$P_n^*(A/H_1)=0,\ P_n^*(A/H_2)=0,\ P_n^*(A/H_3)=\frac{2}{3}.$$

Тому за формулою повної статистичної ймовірності:

$$P_n^*(A)=P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)+P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)+P_n^*(H_3)P_n^*(A/H_3)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

Отже, в наведеній серії вказаних контрольних заходів вдавалося виявити брак в середньому в двох спробах із кожних дев’яти, а в кожних інших семи спробах із дев’яти брак виявити не вдавалося.

Вправа 2. При багатократному передаванні телеграфних повідомлень за допомогою двох знаків “•” (крапка) і “–” (тире) було з’ясовано, що відносна частота спотворення знака “•” дорівнює $\frac{2}{5}$, а відносна частота спотворення знака “–” дорівнює $\frac{2}{3}$. Крім того було помічено, що у повідомленнях, які треба передавати, відносна частота появи знака “•” дорівнює $\frac{5}{8}$, а відносна частота появи знака “–” дорівнює $\frac{3}{8}$. Потрібно обчислити відносну частоту випадків, коли передавали знак “•”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “•”.

Природно вважати, що простором елементарних подій є $\Omega=\{"\bullet\bullet", "\bullet-", "-\bullet", "--"\}$, де кожній елементарній події $E\in\Omega$ відповідає сукупність двох знаків: першим вказано переданий знак, а другим – прийнятий.

Нехай подія $A=\{"\bullet\bullet","-\bullet"\}$ полягає в тому, що прийнято знак “•”. Така подія може відбутися як за умови, що передавали знак “•”, так і за умови, що передавали знак “–”. Отже є дві гіпотези: $H_1=\{"\bullet\bullet","\bullet-"\}$ – передавали знак “•”, $H_2=\{"-\bullet","--"\}$ – передавали знак “–”. Очевидно $H_1 H_2=\varnothing$, $H_1+H_2=\Omega$ (оскільки інші припущення відносно того, який знак передавали, неможливі). За умовами задачі $P_n^*(H_1)=\frac{5}{8}$, $P_n^*(H_2)=\frac{3}{8}$. Крім того, оскільки відносна частота спотворення знака “•” дорівнює $\frac{2}{5}$, а знака “–” – $\frac{2}{3}$, то подія A за гіпотези H_1 відбувається тоді, коли знак “•” не спотворюється, тобто $P_n^*(A/H_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, а за гіпотези H_2 подія A відбувається, коли спотворюється знак “–”, тобто, $P_n^*(A/H_2) = \frac{2}{3}$.

Тоді за формулою повної статистичної ймовірності одержуємо

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2) =$$
$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{8}.$$

Щоб визначити статистичну ймовірність того, що передавали знак “•” за умови, що прийнято знак “•”, тобто $P_n^*(H_1/A)$, скористаємось означенням умовної статистичної ймовірності $P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ або формулою Байєса.

Для розглядуваного випадку дістанемо:

$$P_n^*(H_1/A) = \frac{P_n^*(AH_1)}{P_n^*(A)} = \frac{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)}{P_n^*(A)} =$$
$$= \frac{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)}{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.$$

Задачі

1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Якщо $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, то H_i – гіпотези.
2. Якщо $H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то H_i – гіпотези.
3. Твердження, обернені до 1 або 2, є правильними.
4. Для кожної події A існує єдина формула повної статистичної ймовірності.
5. Для кожної гіпотези H_i існує подія A така, що $P_n^*(H_i/A) = P_n^*(H_i)$.
6. Кожна гіпотеза у даному ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) має єдину статистичну ймовірність, яка не залежить від того, відбулася чи ні якась подія A.

7. Кожна гіпотеза у даному ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) може мати багато різних умовних статистичних ймовірностей.

2. За даними вправи 2 обчислити:

1) відносну частоту випадків, коли передавали знак “–”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “•”;

2) відносну частоту випадків, коли передавали знак “•”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “–”;

3) відносну частоту випадків, коли передавали знак “–”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “–”.

3. Довести, що коли події H_i, $i \in \overline{1, m}$, є гіпотезами, то $P_n^*(H_i) \geq \frac{1}{m}$ принаймні для однієї з гіпотез.

4. У трьох однакових урнах містяться білі і чорні кульки. У першій урні – 3 білих, 1 чорна, у другій – 6 білих, 4 чорних, у третій – 9 білих, 1 чорна. Деяку кількість разів навмання вибирали урну, а з неї навмання вибирали кульку, яку потім повертали в урну. Статистичні ймовірності вибору будь-якої урни виявилися однакові. Однакові і статистичні ймовірності вибору будь-якої кульки з кожної урни. Знайти: 1) статистичну ймовірність того, що таким чином вибрана кулька була білою; 2) статистичну ймовірність того, що біла кулька вибрана з другої урни.

5. Розрив електричного ланцюга може відбуватися внаслідок виходу з ладу елемента K або двох елементів K_1 і K_2, які виходять з ладу незалежно один від одного відповідно з статистичними ймовірностями $0{,}3$; $0{,}2$ і $0{,}2$. Визначити статистичну ймовірність розриву електричного ланцюга.

6. Розрив електромережі відбувався тоді, коли виходив з ладу принаймні один з трьох послідовно з’єднаних електричних елементів. Знайти статистичну ймовірність того, що розриву електромережі не було, якщо кожен з цих трьох елементів виходив з ладу незалежно від інших із статистичними ймовірностями відповідно $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$ та $\frac{6}{10}$.

7. Статистична ймовірність того, що протягом доби виходить з ладу k-й блок радіопристрою, дорівнює p_k, $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Знайти статистичну ймовірність того, що протягом доби радіопристрій виходить з ладу, тобто виходить з ладу принаймні один блок, якщо кожен блок виходить з ладу незалежно від інших.

8. Для руйнування моста достатньо влучення однієї авіаційної бомби. Знайти статистичну ймовірність того, що міст було зруйновано, коли на нього було скинуто чотири бомби, статистичні ймовірності влучення яких відповідно дорівнюють: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7, і ці влучення незалежні у сукупності.

9. Статистична ймовірність успішного виконання вправ для кожного з двох спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени виконували вправи по черзі доти, поки хтось не виконав вправи успішно або обидва не зроблять по дві спроби. Той, хто успішно виконував вправу першим, одержував приз. Знайти статистичні ймовірності одержання призу кожним спортсменом.

10. Статистична ймовірність того, що продукція, вироблена на заводі, є стандартною, дорівнює 0,95. Спрощена система контролю заносить продукцію до стандартної із статистичною ймовірністю 0,98, коли вона справді є стандартною, та із статистичною ймовірністю 0,06, коли вона насправді не є стандартною. Знайти статистичну ймовірність того, що навмання взятий зразок продукції:

1) був занесений до стандартних;

2) був насправді стандартним, коли він: а) був занесений до стандартних; б) не був занесений до стандартних.

11. Комплект із 100 деталей містив 5% бракованих деталей. Вибірковий контроль полягав у тому, що з цього комплекту навмання вибирали 5 деталей і комплект вважали придатним до використання, якщо усі 5 вибраних деталей не були бракованими. Знайти статистичну ймовірність того, що даний комплект деталей було визнано придатним до використання.

12. Пристрій містить два елементи, статистична ймовірність відмови яких відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Знайти статистичну ймовірність відмови пристрою, якщо для цього досить:

1) відмови хоча б одного елемента; 2) відмови обох елементів.

13. Три дослідники незалежно один від одного знімають покази приладу. Статистична ймовірність того, що дослідник припускає при цьому помилку дорівнює для кожного дослідника відповідно $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{20}$ та $\frac{1}{50}$. Знайти статистичну ймовірність того, що при однократному зніманні показників приладу:

1) усі дослідники припускалися помилок;

2) хоча б один дослідник припускався помилки;

3) два дослідники припускалися помилки;

4) принаймні один дослідник не припускався помилки.

14. Статистичні ймовірності влучення в мішень при кожному пострілі однакові. Відомо, що статистична ймовірність принаймні одного влучення при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти статистичну ймовірність влучення при одному пострілі.

15. Студент, знав відповіді на 15 білетів з 20, і проводив такий експеримент. Багато разів він навмання брав один білет, а потім другий. Причому будь які із наявних білетів з'являлися однаково часто. В якому випадку статистична ймовірність взяти вивчений білет виявилась більшою – коли студент брав перший білет, чи коли брав другий?

16. (Задача Банаха). У коробці 50 сірників. Статистична ймовірність того, що сірник запалюється, дорівнює $\frac{1}{2}$. Двоє друзів по черзі намагалися запалювати сірник доти, поки сірник не запалиться або не скінчаться сірники.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що першим запалить сірник той, хто:

1) починав першим; 2) починав другим; 3) запалював п'ятий сірник.

2. Знайти статистичну ймовірність того, що жоден сірник не запалиться.

1.9. Поняття дискретного розподілу статистичних ймовірностей

Простір Ω елементарних подій називають *дискретним,* якщо кількість елементарних подій $E_i \in \Omega$ скінченна або зчисленна, тобто якщо $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, або $i \in N$. Якщо кожну елементарну подію $E_i \in \Omega$ ототожнювати з деякою точкою на числовій прямій, тобто з деяким дійсним числом x_i, причому $i \in \overline{1, k}$ або $i \in N$, а числа x_i попарно різні: $x_i \neq x_j$, коли $i \neq j$, то для дискретного простору Ω можна вважати, що $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Приклад 9.1. Якщо ототожнювати випадання цифри з числом 0, а випадання герба – з числом 1, то замість простору $\Omega = \{Ц, Г\}$, можна розглядати простір $\Omega = \{0, 1\}$.

Приклад 9.2. Нехай експеримент полягає у підкиданні монети до першого випадання герба. Тоді замість простору елементарних подій $\Omega = \{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, \ldots\}$ можна розглядати простір $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Припустимо, що проведено n випробувань, в результаті яких спостерігалися елементарні події $x_{\text{сп}\, i} \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, $i \in \overline{1, n}$. Ці значення $x_{\text{сп}\, i}$, $i \in \overline{1, n}$, називають *спостереженими значеннями* або *варіантами*.

Якщо n_i – абсолютна частота елементарної події E_i, тобто елементарна подія E_i спостерігалася в n випробуваннях n_i разів, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то число n_i є абсолютною частотою появи значення x_i, а число $P_n^*(E_i) = \dfrac{n_i}{n} = P_n^*(x_i)$ – статистична ймовірність або відносна частота появи значення x_i.

Таблиці виду 9.1 і 9.2 називають відповідно *рядом розподілу абсолютних частот* та *рядом розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот)* на дискретній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Говорять також, що таблиці 9.1 і 9.2 задають *дискретний розподіл частот* (відповідно абсолютних та відносних). При цьому якщо $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\},\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, то $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(x_i)$.

Коли Ω нескінченна дискретна множина, то таблиці 9.1 та 9.2 нескінченні, але $n_i \neq 0$ і $P_n^*(x_i) \neq 0$ лише для скінченної кількості елементів x_i, і на практиці до таблиць записують лише такі елементи.

Табл. 9.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 9.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(x_i)$	$P_n^*(x_1)$	$P_n^*(x_2)$	...	$P_n^*(x_k)$

Для полегшення підрахунку чисел n_i, а отже і чисел $P_n^*(x_i)$, спостережені значення $x_{\text{сп}\,i}$ розташовують у порядку їх зростання, в результаті чого одержують так званий *варіаційний ряд*.

У фізичній інтерпретації ряд розподілу абсолютних частот можна розглядати як розподіл маси n на множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, а ряд розподілу відносних частот – як розподіл одиничної маси на тій самій множині.

Якщо точки $(x_i, P_n^*(x_i))$ зобразити на координатній площині, то ламану з вершинами у цих точках називають *полігоном відносних частот* або *многокутником розподілу статистичних ймовірностей* (відносних частот).

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Варіаційний ряд для спостережених значень 5, 6, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 4, 5, 6, 3, 3, 5 має вигляд 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, а відповідні ряди розподілу абсолютних та відносних частот подані в таблицях 9.3 і 9.4.

Табл. 9.3

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	0	1	3	2	4	5

Табл. 9.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

Вправа 2. На Рис. 9.1 зображено полігон відносних частот, що визначається таблицею 9.4.

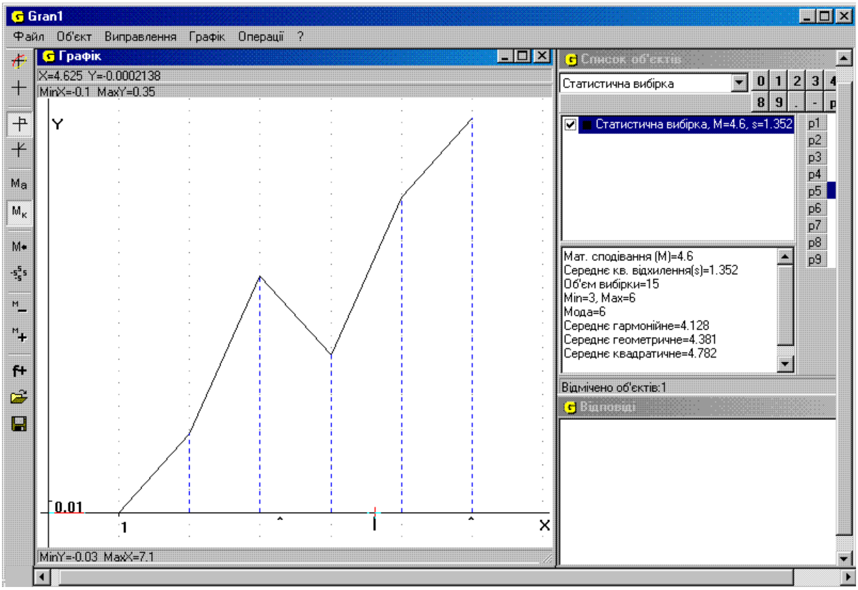


Рис. 9.1

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Елементарні події довільної множини Ω можна ототожнювати з натуральними числами.

2. Спостережені елементарні події E_i – це те саме, що й спостережені значення x_i.

3. В заданій серії з n випробувань кожне спостережене і неспостережене значення має свою абсолютну і відносну частоти.

4. Дискретний розподіл частот можна задати таблицею.

5. Будь-які таблиці виду 9.1 та 9.2 задають дискретний розподіл частот.

6. Варіаційний ряд цілком визначає дискретний розподіл частот.

7. Сукупність чисел 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, *5* можна вважати варіаційним рядом.

8. Статистичні ймовірності можна інтерпретувати як маси.

9. Кожен простір елементарних подій є дискретним.

10. Полігон відносних частот цілком визначає дискретний розподіл частот.

11. Будь-яку ламану на координатній площині можна вважати многокутником розподілу статистичних ймовірностей.

2.1. Побудувати варіаційний ряд спостережених значень, що відповідають спостереженим відхиленням точки падіння снаряда від цілі: -50, 20, -10, 20, 10, 20, -50, -20, -10, 40, -20,-30, -10, 10, 20, -40, 50, -10, 10, 50.

2. Використовуючи варіаційний ряд з 2.1, побудувати ряди розподілу абсолютних та відносних частот на множині можливих значень {-50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50}.

3. Побудувати полігон відносних частот для розподілу з 2.2.

4. Підрахувати відносну частоту появи події A, яка полягає в тому, що відхилення точки падіння снаряда від цілі не перевищує 20.

3. Відомо, що 50 абітурієнтів отримали на вступних іспитах такі оцінки:

10, 1, 3, 5, 11, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 3, 2, 11, 0, 5, 8, 7, 8, 5, 4,
3, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 7, 9, 8, 10, 9, 1.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд та розподіли частот.

2. Побудувати полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що оцінка абітурієнта лежить в межах від 5 до 9.

4. За результатами контрольної роботи, написаної 30-ма студентами, складено таблицю

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	3	9	15	3

1. Скласти відповідний варіаційний ряд та розподіл відносних частот.

2. Побудувати відповідний полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що оцінка була позитивною (тобто 3, 4 або 5).

5. Досліджуючи, скільки разів на тиждень студенти даної групи із 30 чоловік працюють у бібліотеці, дістали такі дані:

5, 6, 5, 6, 6, 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 5, 6.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд та розподіли абсолютних та відносних частот.

2. Побудувати полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що навмання обраний студент працював у бібліотеці не менше 4-х днів на тиждень.

6. В одному універмазі продано за зміну 100 пар взуття, розміри яких розподілилися таким чином:

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	5	5	10	15	25	20	15	5

1. Скласти відповідний розподіл відносних частот.

2. Побудувати полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що розмір купленого взуття лежить в межах від 39 до 42 (включаючи ці розміри).

7. Медична комісія подала дані про зріст 320 призивників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призивників	10	28	72	98	69	31	12

1. Скласти відповідний розподіл відносних частот.

2. Побудувати полігон відносних частот.

3. Знайти статистичну ймовірність того, що зріст призивників більший за 175см і не більший за 190см.

8. Навмання вибрано 50 колосків ячменю і підраховано кількість зерен у кожному з них. Дістали такі результати:

21, 17, 27, 20, 22, 12, 24, 13, 20, 19, 22, 16, 22, 9, 21, 16, 23,
16, 21, 24, 18, 11, 22, 15, 23, 21, 10, 15, 18, 15, 21, 14, 15,
18, 22, 15, 17, 19, 17, 18, 17, 24, 18, 19, 16, 17, 15, 17, 25, 16.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд та розподіли абсолютних і відносних частот.
2. Побудувати полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність того, що кількість зерен у колоскові була не меншою за 20.

9. 1. Чи може дискретний розподіл статистичних ймовірностей спостережених значень задаватися таблицею:

1)

x_i	1	2	3	4
$P_n^*(x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,05

2)

x_i	0	2	4	6
$P_n^*(x_i)$	0,15	0,25	0,37	0,23

2. Якщо відповідь на запитання ствердна, то побудувати відповідний полігон відносних частот.
3. Поділити навпіл множину спостережених значень і порівняти статистичні ймовірності попадання спостережених значень в такі множини.

10. Студент є абонентом 4-х бібліотек. Статистична ймовірність того, що потрібна студенту книга є у бібліотеці, дорівнює 0,3 для кожної з 4-х бібліотек. Експеримент полягає у тому, що студент відвідує бібліотеки у наперед заданому порядку доти, поки не знайде потрібної книги або не відвідає усі чотири бібліотеки, та підраховує кількість відвіданих бібліотек. Ця кількість відвіданих студентом бібліотек є спостереженими значеннями.

1. Знайти розподіл статистичних ймовірностей на множині спостережених значень.
2. Побудувати відповідний полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність того, що студент відвідає: 1) не менше двох бібліотек; 2) не більше трьох бібліотек.

11. Експеримент полягає у тому, що монету підкидають тричі, а спостереженими значеннями є кількість випадань герба. Статистична ймовірність випадання герба при кожному підкиданні дорівнює $\frac{1}{2}$.

1. Знайти розподіл статистичних ймовірностей спостережених значень.
2. Побудувати відповідний полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність випадання герба: 1) не менше двох разів; 2) не більше одного разу.

12. Експеримент полягає у тому, що фіксується кількість світлофорів (спостережені значення), пройдених автомобілем до першої зупинки з причини забороняючого проїзд червоного світла світлофора. Статистична ймовірність наявності червоного світла для кожного світлофора дорівнює $\frac{1}{2}$, кількість світлофорів на шляху автомобіля дорівнює 5.

1. Знайти розподіл статистичних ймовірностей спостережених значень.
2. Побудувати відповідний полігон відносних частот.
3. Знайти статистичну ймовірність того, що кількість пройдених світлофорів до першої зупинки: 1) не більше трьох; 2) не менше двох.

13*. Сформулювати і розв'язати аналогічну до **12** задачу, коли фіксується кількість зупинок біля світлофорів.

14. У поліклініці вели реєстрацію виданих карток: X – до хірурга, T – до травматолога, E – до ендокринолога, $П$ – до терапевта, O – до окуліста, H – до онколога, I – до інфекціоніста. В реєстратурі вирішили записати картки, що видавалися, і отримали такі дані:

X, T, E, $П$, H, X, O, T, I, O, X, O, H, $П$, T, X, X, E, T, T, T, E, $П$, E, T, X, E, X, O, E, O, X, X, $П$, E, T, O, X, I, O, H, X, I, I, $П$, T, T, H, X, X, T, E, $П$, E, $П$, X, T, X, E, O, $П$, H, T, H, E, X, $П$, T, E, X, T, O, O, T, E, X, T, T, X, H, E, X, T, O, $П$, X, E, T, X, I.

Скласти таблицю відносних частот відвідувань кожного лікаря.

Побудувати графічне подання розподілу відносних частот.

1.10. Поняття неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Щільність розподілу статистичних ймовірностей

Простір Ω елементарних подій, який можна ототожнювати з числовим проміжком $\langle a;b \rangle$, називають *неперервним.* В цьому випадку кожне число $x \in \langle a;b \rangle$, яке ототожнюється з відповідною елементарною подією, може бути спостереженим значенням в результаті експерименту, що пов'язаний з множиною Ω.

Приклад 10.1. Нехай випробування – постріл в круглу мішень радіуса $r=1$, а кожна елементарна подія ототожнюється з відстанню точки влучення від центра мішені. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Тоді $\Omega = [0; 1]$ – неперервна множина елементарних подій, кожна з яких ототожнюється з певним числом (точкою) $x \in [0; 1]$.

У випадку неперервної множини $\Omega = \langle a,\ b\rangle$ елементарних подій подіями найчастіше вважають так звані вимірні (тобто такі, яким можна приписати довжину) підмножини множини Ω, до яких відносять, зокрема, будь які проміжки $\langle \alpha;\beta\rangle \subset \langle a;b\rangle$, а також об'єднання таких проміжків $\bigcup\limits_k \langle \alpha_k;\beta_k\rangle$ та різниці $\Omega \setminus \bigcup\limits_k \langle \alpha_k;\beta_k\rangle$. Як виявляється, будь-який проміжок $\langle a;b\rangle$ містить невимірну підмножину (якій неможливо приписати довжину), а тому не завжди кожну підмножину $A \subset \Omega$ можна вважати подією.

Приклад 10.2. Якщо Ω з прикладу 10.1, то подія A може полягати у тому, що відстань точки влучення від центра мішені – число (точка), що є елементом певної вимірної підмножини $A \subset [0;1]$. Наприклад, такими подіями можуть бути підмножини

$$A = \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right],\ B = \left(0;\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4};1\right).$$

Нехай проведено n спостережень (n досить велике), в результаті яких дістали спостережені значення $x_{\text{сп}\,1},\ x_{\text{сп}\,2},\ \dots,\ x_{\text{сп}\,n}$, кожне з проміжка $\langle a;\ b\rangle = \Omega$.

У випадку неперервної множини $\Omega = \langle a;\ b\rangle$ для підрахунку статистичних ймовірностей (відносних частот) $P_n^*(A)$ поступають інакше, ніж у випадку, коли множина Ω дискретна, скінченна і містить не дуже велику кількість точок.

Надалі вважатимемо, що $\Omega = [a;b)$.

Оскільки події $A \subset [a;b)$ так чи інакше пов'язані з проміжками $\langle \alpha;\ \beta\rangle \subset [a;b)$, то для підрахунку статистичних ймовірностей цих подій проміжок $\Omega = [a;b)$ поділимо точками $a_0 = a$, $a_i = a_{i-1} + h,\ h = \dfrac{b-a}{k},\ i \in \overline{1,\ k}$, на k рівних проміжків $[a_{i-1};a_i)$. Число $h = \dfrac{b-a}{k}$ називається *кроком поділу*. Для кожного $i \in \overline{1,\ k}$ підрахуємо кількість спостережених значень $x_{\text{сп}\,j}$, що попадають у проміжок $[a_{i-1};a_i)$. Дістанемо числа n_i – *абсолютні частоти попадання спостережених значень* $x_{\text{сп}\,j}$ *у проміжки* $[a_{i-1};a_i)$, причому $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. Число $P_n^*([a_{i-1};\ a_i)) = \dfrac{n_i}{n}$ називають *статистичною ймовірністю* або *відносною частотою* попадання спостережених значень $x_{\text{сп}\,j}$, $j \in \overline{1,n}$, у проміжок $[a_{i-1};a_i)$, $i \in \overline{1,k}$.

При цьому якщо $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I\subset\{1,2,\ldots,k\}$, то $P_n^*(A)=\sum\limits_{i\in I}P_n^*([a_{i-1},a_i))$. (Порівняйте з вправою 2 з § 1.6).

Таблицю виду 10.1 називають *інтервальним розподілом абсолютних частот*, а таблицю виду 10.2 називають *інтервальним* (*або неперервним*) *розподілом статистичних ймовірностей* (*відносних частот*) *на множині* $\Omega=[a,\ b)$.

Табл. 10.1

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 10.2

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
$P_n^*([a_{i-1};a_i))$	$P_n^*([a_0;a_1))$	$P_n^*([a_1;a_2))$	...	$P_n^*([a_{k-1};a_k))$

Для складання цих таблиць, як і у дискретному випадку, спостережені значення записують у вигляді варіаційного ряду.

У фізичній інтерпретації інтервальний розподіл абсолютних частот – це неперервний розподіл маси n на сукупності заданих проміжків $[a_{i-1};a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, а неперервний розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) – це неперервний розподіл одиничної маси на вказаній сукупності проміжків.

Розглянемо функцію $f_n^*(x)$, що набуває нульового значення за межами проміжка $[a;b)$, тобто $f_n^*(x)=0$ для $x<a$ або $x\ge b$, і значень $\frac{1}{h}P_n^*([a_{i-1};a_i))$ на проміжках $[a_{i-1};a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, де $h=\frac{b-a}{k}$, $a_0=a$, $a_i=a_{i-1}+h=a+i\cdot h$, $i\in\overline{1,k}$. Графік такої функції називають *гістограмою* неперервного розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот), який визначається таблицею 10.2.

У фізичній інтерпретації $f_n^*(x)$ – це щільність розподілу одиничної маси на проміжку $[a;b)$, оскільки на кожному інтервалі $[a_{i-1};a_i)$ значення $f_n^*(x)$ одержується як маса $P_n^*([a_{i-1};a_i))$, що припадає на цей інтервал, поділена на довжину інтервалу $h=a_i-a_{i-1}$, тобто як середня щільність маси на інтервалі $[a_{i-1};a_i)$. Тому $f_n^*(x)$ називають *щільністю розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на проміжку* $[a;b)$.

На Рис. 10.1 зображено гістограму деякого неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

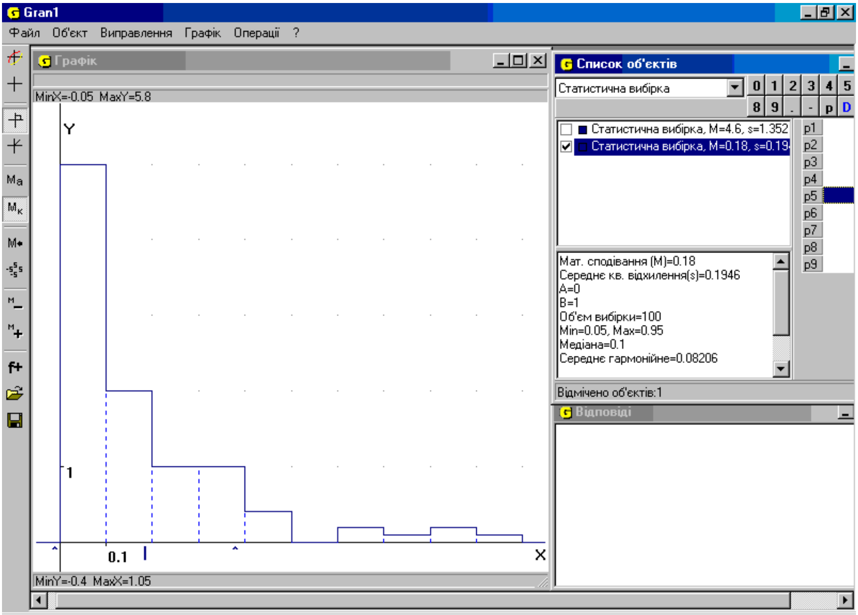


Рис. 10.1

Оскільки в геометричній інтерпретації при $x \in [a_{i-1}; a_i)$ $P_n^*([a_{i-1}; a_i)) = f_n^*(x)h$ – це площа прямокутника з основою $[a_{i-1}; a_i)$ і висотою $f_n^*(x)$, $x \in [a_{i-1}; a_i)$, то

$$P_n^*([a_{i-1};\, a_i)) = \int\limits_{[a_{i-1};\, a_i)} f_n^*(x)\,dx = \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx.$$

Отже, з геометричної точки зору $P_n^*([a_{i-1};\, a_i))$ – це площа вказаного прямокутника, а статистична ймовірність $P_n^*(A)$ попадання спостережуваних значень в множину A, що є об'єднанням деяких проміжків $[a_{i-1}; a_i)$, визначається рівністю

$$P_n^*(A) = \sum_{[a_{i-1};a_i) \subset A} P_n^*([a_{i-1}; a_i)) = \sum_{[a_{i-1};a_i) \subset A} \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx = \int\limits_A f_n^*(x)\,dx.$$

Останнє число називають інтегралом від функції $f_n^*(x)$ на множині A.

Взагалі $P_n^*(A) = \int\limits_A f_n^*(x)\,dx$ для будь-якої події (вимірної множини) $A \subset \Omega$.

Щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей має такі властивості:

1. $f_n^*(x) \ge 0$, $x \in (-\infty;\infty)$; 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)\,dx = 1$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай $\Omega = [0;1]$ з прикладу 10.1 і виконано *n*=100 пострілів, результати яких наведено у таблицях 10.3 і 10.4. Ці таблиці є конкретними інтервальними розподілами абсолютних і відносних частот.

Табл. 10.3

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
n_i	50	20	10	10	4	0	2	1	2	1

Табл. 10.4

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04	0	0.02	0.01	0.02	0.01

Вправа 2. Якщо неперервний розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 10.4, то щільність цього розподілу має вигляд:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0, \\ 5, & \text{коли } 0 \le x < 0.1, \\ 2, & \text{коли } 0.1 \le x < 0.2, \\ 1, & \text{коли } 0.2 \le x < 0.3, \\ 1, & \text{коли } 0.3 \le x < 0.4, \\ 0.4, & \text{коли } 0.4 \le x < 0.5, \\ 0, & \text{коли } 0.5 \le x < 0.6, \\ 0.2, & \text{коли } 0.6 \le x < 0.7, \\ 0.1, & \text{коли } 0.7 \le x < 0.8, \\ 0.2, & \text{коли } 0.8 \le x < 0.9, \\ 0.1, & \text{коли } 0.9 \le x < 1, \\ 0, & \text{коли } x \ge 1. \end{cases}$$

Графік функції $f_n^*(x)$ подано на Рис. 10.1.

Вправа 3. Якщо в експерименті, описаному у вправі 1, подія A – це попадання у множину точок, які віддалені від центра мішені на відстань, не більшу, ніж 0.25, і не меншу, ніж 0.05, то $P_n^*(A)=\int\limits_{[0.05;\ 0.25]} f_n^*(x)\,dx=0.5$ – інтеграл від функції $f_n^*(x)$ на проміжку $[0.05;\ 0.25]$, що дорівнює сумі площ заштрихованих прямокутників на Рис. 10.2.

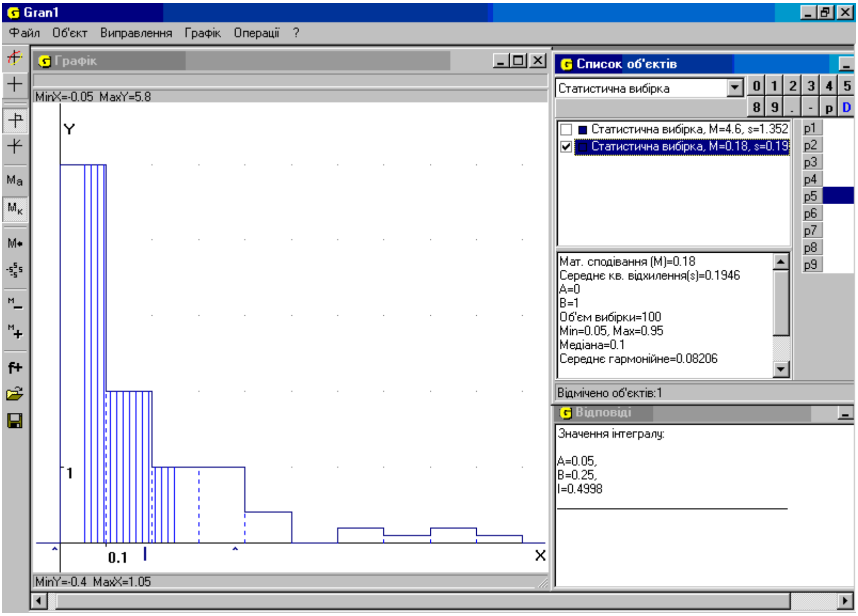


Рис. 10.2

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен простір Ω елементарних подій можна вважати неперервною множиною.

2. Неперервна множина Ω ототожнюється з певним проміжком $\langle a;\ b\rangle$.

3. Для неперервної множини Ω подіями вважаються вимірні підмножини.

4. Кожна підмножина $A\subset[a;b)$ є вимірною.

5. Для неперервної множини Ω статистичні ймовірності подій $A\subset\Omega$ визначаються так само, як і для дискретної множини Ω.

6. Неперервний розподіл статистичних ймовірностей – це те саме, що й інтервальний розподіл.

7. Щоб описати інтервальний розподіл статистичних ймовірностей, підраховують абсолютні та відносні частоти

попадання спостережених значень у проміжки, які попарно не перетинаються і в об'єднанні дають Ω .

8. Гістограма – це графік щільності розподілу статистичних ймовірностей.

9. Якщо відома щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, то можна визначити статистичну ймовірність будь-якої події $A \subset \Omega$.

10. Неперервний розподіл статистичних ймовірностей залежить від поділу проміжка $[a;b)$ на проміжки $[a_{i-1};a_i)$.

2.1. Побудувати варіаційний ряд спостережених значень відхилень точки падіння снаряда від цілі:

-52, -50, 47, 20, 17, 10, 14, 20,-50, -5, -20, 2, -27, -10, -15, 40, -19,
45, 34, -20, -29, -30, 15, -10, 10, 12, 14, 20, -33, -40, 50, 48, -10,
14, 10, -32, 50, -22, 43, 2, -5, 7, 14, -8, -5, 0, 23, -40, 17, 3.

2. Використовуючи цей варіаційний ряд побудувати інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот, взявши інтервали довжиною 10 з центрами в точках –50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50.

3. За одержаними даними визначити функцію $f_n^*(x)$ і побудувати її графік.

4. Використовуючи $f_n^*(x)$, визначити статистичну імовірність (відносну частоту) влучення точки падіння снаряда в інтервал: 1) (-35, 35); 2) (-25, 25);3) (-5, 55).

3. Визначаючи вагу 50 новонароджених, дістали такі результати (у кг):

4,3; 4,4; 2,1; 3,5; 2,5; 3,2; 2,3; 4,1; 2,4; 4,0; 3,3; 2,9; 3,2; 3,0; 2,7; 3,4; 2,2;
3,1; 3,5; 3,7; 2,0; 3,0; 3,7; 3,6; 3,4; 3,3; 3,8; 3,2; 2,8; 2,9; 2,3; 2,5; 2,9; 2,6;
3,1; 3,4; 3,2; 3,9; 2,7; 3,5; 2,6; 2,7; 3,0; 2,9; 3,2; 3,3; 3,4; 3,1; 3,6; 3,9.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд.

2. Знайти проміжок $[a;b)$, в якому лежать усі спостереженні значення.

3. Поклавши крок поділу $h = 0{,}5$, визначити розбиття проміжку $[a;b)$ на проміжки $[a_{i-1};a_i)$.

4. Знайти інтервальні розподіли абсолютних та відносних частот спостережених значень.

5. Визначити щільність знайденого неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

6. Побудувати гістограму знайденого неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

7. Знайти статистичну ймовірність того, що вага новонародженого лежить у проміжку: а) $[2{,}5;\ 3{,}5)$; б) $[2{,}7;\ 4{,}2]$.

4. Визначаючи зріст (у см) кожної з 50 першокурсниць, дістали такі результати

169, 171, 157, 173, 170, 156, 172, 159, 168, 158, 160, 164, 161,
165, 162, 166, 163, 167, 160, 168, 165, 160, 166, 161, 167, 162,

168, 163, 169, 160, 164, 165, 163, 166, 162, 167, 161, 168, 160,
164, 168, 162, 167, 163, 166, 165, 162, 160, 166, 165.

1. Скласти відповідний варіаційний ряд.

2. Знайти проміжок $[a;b)$, в якому лежать усі спостережені значення.

3. Поклавши крок поділу $h=4$ см, визначити розбиття проміжку $[a;b)$ на проміжки $[a_{i-1};a_i)$.

4. Знайти інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот спостережених значень.

5. Визначити щільність знайденого розподілу статистичних ймовірностей.

6. Побудувати відповідну гістограму.

7. Знайти статистичну ймовірність того, що зріст першокурсниці лежить у проміжку $[158;170)$

5. Медична комісія подала дані про зріст 320 призивників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призивників	10	28	72	98	69	31	12

1. Знайти проміжок $[a;b)$, в якому лежать усі спостережені значення.

2. Поклавши крок поділу $h=6$ см, визначити розбиття проміжку $[a;b)$ на проміжки $[a_{i-1};a_i)$.

3. Знайти інтервальний розподіл абсолютних та відносних частот спостережених значень.

4. Визначити щільність знайденого розподілу статистичних ймовірностей.

5. Побудувати відповідну гістограму.

6. Знайти статистичну ймовірність того, що зріст навмання вибраного призивника лежить у проміжку $[181;192)$.

6. Навести приклади статистичних даних і виконати наступні завдання:

1) скласти відповідний варіаційний ряд;

2) побудувати, вважаючи розподіли дискретними, відповідні ряди розподілу абсолютних і відносних частот;

3) зобразити полігон відносних частот;

4) вважаючи розподіли неперервними, побудувати відповідні інтервальні розподіли абсолютних та відносних частот, вважаючи спостережені значення серединами інтервалів;

5) визначити щільності знайдених неперервних розподілів статистичних ймовірностей;

6) побудувати відповідні гістограми;

7) довільно задати проміжки $[\alpha;\beta)$ і підрахувати статистичні ймовірності того, що спостережені значення лежать у таких проміжках.

7. Експеримент полягає у тому, що виконують постріл у круглу мішень радіуса $r = 1$ та вимірюють відстань від точки влучення до центра мішені (невлучення у мішень неможлива). За результатами 100 пострілів побудовано гістограму інтервального розподілу статистичних ймовірностей, подану на Рис. 10.3.

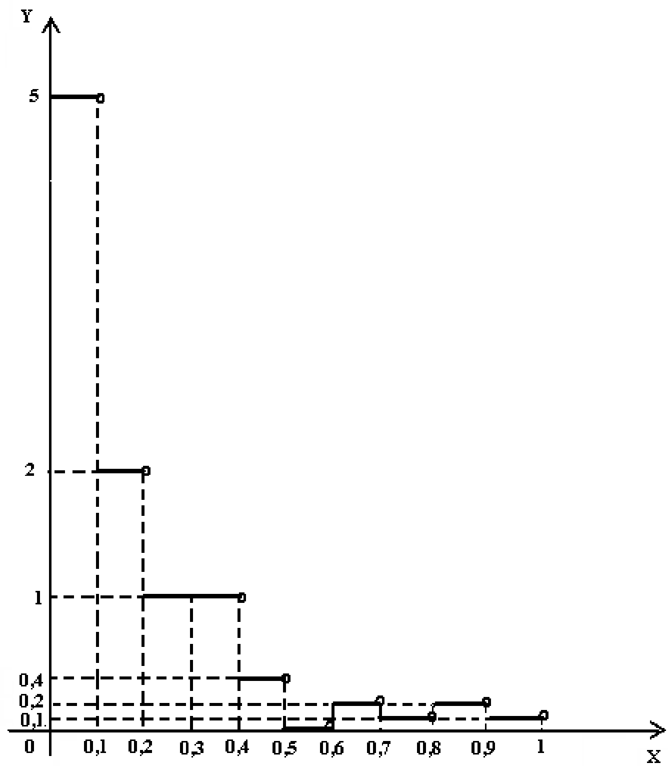


Рис. 10.3

1. Записати аналітичний вираз функції $f_n^*(x)$ – щільності розподілу статистичних ймовірностей.

2. Відновити інтервальні розподіли абсолютних та відносних частот спостережених значень.

3. Визначити статистичну ймовірність того, що відстань точки влучення від центра мішені лежить у проміжку $[0{,}15; 0{,}45)$.

8. 1. Чи може неперервний розподіл статистичних ймовірностей спостережених значень задаватися таблицею:

1)

$[a_{i-1}; a_i)$	$[0; \frac{1}{2})$	$[\frac{1}{2}; \frac{7}{10})$	$[\frac{7}{10}; \frac{9}{10})$	$[\frac{9}{10}; 1)$
$P_n^*([a_{i-1}; a_i))$	0,2	0,1	0,5	0,3

2)

$[a_{i-1}; a_i)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$	$[4; 5)$
$P_n^*([a_{i-1}; a_i))$	0,1	0,2	0,3	0,4

2. Якщо відповідь на питання ствердна, то знайти аналітичний вираз функції $f_n^*(x)$ – щільності розподілу статистичних ймовірностей;

3. Побудувати графік функції $f_n^*(x)$.

4. Поділити навпіл проміжок, у якому лежать усі спостережені значення, та порівняти статистичні ймовірності попадання спостережених значень в одержані проміжки.

1.11. Функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей

Нехай дискретний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ визначається таблицею 11.1:

Табл. 11.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(x_i)$	$P_n^*(x_1)$	$P_n^*(x_2)$	...	$P_n^*(x_k)$

Функцію

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty; \quad x)) = \sum_{x_i \in (-\infty, x)} P_n^*(x_i), \; i \in \overline{1, k}, \; x \in R,$$

називають *функцією дискретного розподілу статистичних ймовірностей* (*відносних частот*) *на множині* $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Приклад 11.1. Нехай розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 11.2.

Табл. 11.2

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

Тоді

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty; x)) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 2, \\ \frac{1}{15}, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \frac{4}{15}, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ \frac{6}{15}, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ \frac{10}{15}, & \text{коли } 5 < x \le 6, \\ 1, & \text{коли } 6 < x. \end{cases}$$

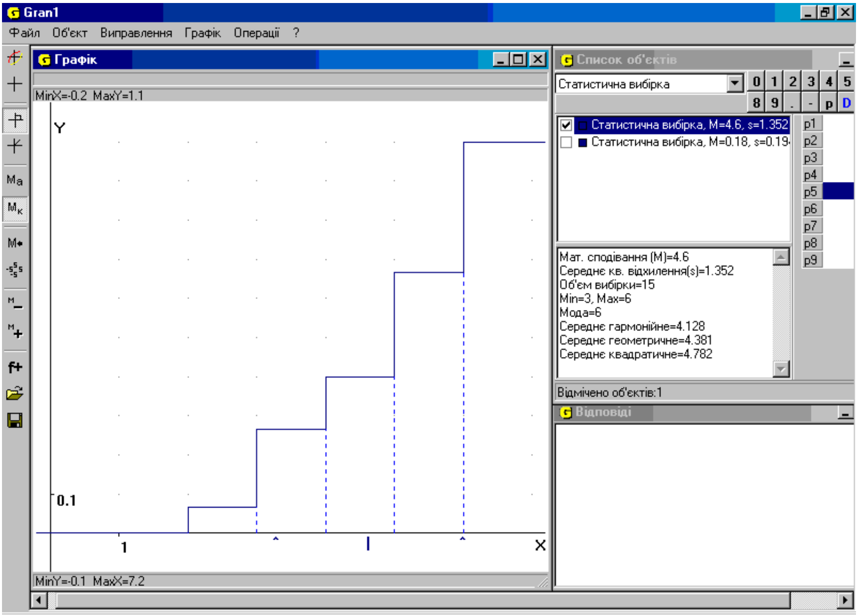


Рис. 11.1

На Рис. 11.1 зображено графік функції розподілу статистичних ймовірностей, що визначається таблицею 11.2.

Основні властивості функції дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k\}$:

1. $F_n^*(x) \geq 0$, як статистична ймовірність події $A = (-\infty; x) \subset \Omega$.

2. $F_n^*(-\infty) = 0$, як статистична ймовірність неможливої події $\varnothing = \{x: x < -\infty\}$.

3. $F_n^*(+\infty) = 1$, як статистична ймовірність вірогідної події $\Omega = (-\infty;\ \infty)$.

4. Якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$.

5. На кожному проміжку $(\alpha; x_i]$, що не містить інших точок множини $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$, функція розподілу статистичних ймовірностей стала, причому $F_n^*(x) = F_n^*(x_i)$ при $x \in (\alpha; x_i]$.

Будь-яку функцію, що задовольняє умови 1–5, називають *функцією розподілу статистичних ймовірностей на дискретній множині* $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$ або *функцією дискретного розподілу статистичних ймовірностей*.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Довести, що $F_n^*(-\infty) = 0$, а $F_n^*(+\infty) = 1$.

Оскільки $-\infty < x_i$ для всіх i, то в сумі $\sum\limits_{x_i < -\infty} P_n^*(x_i)$ немає жодного доданку і така сума дорівнює 0, тобто $F_n^*(-\infty) = P_n^*(\varnothing) = 0$ як статистична ймовірність неможливої події, яка полягає у появі значення $x_{\text{сп}\,i}$, меншого за $-\infty$.

Так само, оскільки $x_i < +\infty$ для всіх i, то

$$F_n^*(+\infty) = \sum_{x_i \in (-\infty, \infty)} P_n^*(x_i) = P_n^*((-\infty; +\infty)) = P_n^*(\Omega) = 1$$

як статистична ймовірність вірогідної події, яка полягає у попаданні точки $x_{\text{сп}\,i}$ на проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Вправа 2. Довести, що

$$P_n^*([u;\ v)) = \sum_{x_i \in [u, v)} P_n^*(x_i) = F_n^*(v) - F_n^*(u),$$

тобто статистична ймовірність попадання точок $x_{\text{сп}\,i}$ на проміжок $[u; v)$ дорівнює приростові функції розподілу статистичних ймовірностей на цьому проміжку.

Нехай $u < v$. Тоді

$$F_n^*(v) = P_n^*((-\infty, v)) = P_n^*((-\infty, u) \cup [u, v)) =$$
$$= P_n^*((-\infty, u)) + P_n^*([u, v)) = F_n^*(u) + P_n^*([u, v)),$$

звідки

$$P_n^*([u, v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u).$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо задано ряд розподілу статистичних ймовірностей, то можна побудувати відповідну функцію розподілу.

2. Якщо задано функцію розподілу статистичних ймовірностей на дискретній множині $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, то можна підрахувати статистичні ймовірності появи кожного значення $x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

3. Якщо подія A полягає у попаданні точок в проміжок $(-\infty; \alpha]$, тобто $A = (-\infty; \alpha]$, то статистична ймовірність цієї події дорівнює значенню відповідної функції розподілу в точці α.

4. Функція розподілу статистичних ймовірностей є зростаючою.

5. Функція розподілу статистичних ймовірностей є невід'ємною неспадною функцією.

6. Кожна невід‘ємна неспадна функція є функцією деякого дискретного розподілу статистичних ймовірностей.

7. Функція розподілу статистичних ймовірностей може набувати лише двох значень.

8. Множина значень функції дискретного розподілу статистичних ймовірностей скінченна.

2. Побудувати функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та її графік, якщо задано:

1) ряд розподілу статистичних ймовірностей

x_i	-1	0	1
$P_n^*(x_i)$	0.25	0.50	0.25

2) можливі значення x_i відхилення точки падіння снаряда від цілі – -50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, $P_n^*(x_i)$ – визначаються за серією спостережених значень: 10, 0, -20, -10, 20, 0, -10, 20, -30, 10, -20, 0, 0, 10, -10, 30, 0, 10, 0, -20, 10, 10, -20, -10, 0, -10, -10, 0, -10, 20, 0, 0, 10, 10, 20, -30, 20, -20, -10, 10, 0,10, -10, 0, 10, -10, 0, 0, 0, 20.

3. Довести властивості 1-4 функції розподілу статистичних ймовірностей.

4. Довести, що функція $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей: 1) неперервна зліва в будь-якій точці $x \in R$; 2) скрізь, крім точок x_i, диференційовна і $\frac{d}{dx} F_n^*(x) = 0$, $x \neq x_i$, $i \in \overline{1,\ k}$.

5. Для заданих спостережених значень, побудувати функцію дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік і визначити, де вона розривна і якого роду точки розриву:

1. Відомо, що 50 абітурієнтів отримали на вступних іспитах такі оцінки:

10, 1, 3, 5, 11, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 3, 2, 11, 0, 5, 8, 7, 8, 5, 4, 3, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 7, 9, 8, 10, 9, 1.

2. За результатами контрольної роботи, написаної 30-ма студентами першокурсниками, складено таблицю

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	3	9	15	3

3. Досліджуючи, скільки разів на тиждень студенти даної групи із 30 чоловік працюють у бібліотеці, дістали такі дані:

5, 6, 5, 6, 6, 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 5, 6.

4. В одному універмазі продано за зміну 100 пар взуття, розміри яких розподілилися таким чином:

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	5	5	10	15	25	20	15	5

5. Медична комісія подала дані про зріст 320 призивників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призивників	10	28	72	98	69	31	12

6. Навмання вибрано 50 колосків ячменю і підраховано кількість зерен у кожному з них. Дістали такі результати:

21, 17, 27, 20, 22, 12, 24, 13, 20, 19, 22, 16, 22, 9, 21, 16, 23,
16, 21, 24, 18, 11, 22, 15, 23, 21, 10, 15, 18, 15, 21, 14, 15,
18, 22, 15, 17, 19, 17, 18, 17, 24, 18, 19, 16, 17, 15, 17, 25, 16.

6. За даним полігомом відносних частот (Рис. 11.2 а, б):

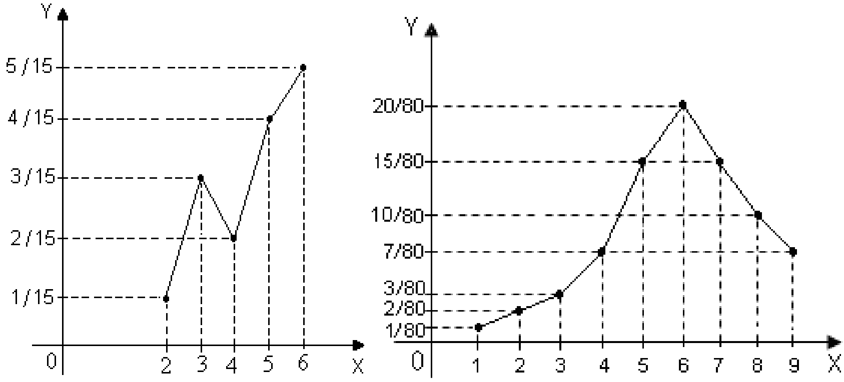


Рис. 11.2 а) Рис. 11.2 б)

1. Побудувати функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей.

2. Зобразити графік функції $F_n^*(x)$.

3. Визначити, де функція $F_n^*(x)$: неперервна і де розривна та який характер точок розриву.

7. Функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

а)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \frac{1}{15}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ \frac{4}{15}, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ \frac{6}{15}, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \frac{10}{15}, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{коли } x > 4. \end{cases}$$

б)

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le -1,\\ 0{,}1, & \text{коли } -1<x\le 1,\\ 0{,}3, & \text{коли } 1<x\le 3,\\ 0{,}5, & \text{коли } 3<x\le 5,\\ 0{,}7, & \text{коли } 5<x\le 7,\\ 1, & \text{коли } x>7.\end{cases}$$

1. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$;

2. Відновити відповідні спостережені значення та ряд розподілу статистичних ймовірностей.

3. Вважаючи, що кількість спостережених значень $n=30$, відновити ряд розподілу абсолютних частот.

8. Дискретний розподіл статистичних ймовірностей заданий таблицею:

x_i	1	2	3	4
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	C	$\frac{1}{6}$

1. Визначити число C.

2. Побудувати відповідну функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік.

3. Визначити, де ця функція: 1) неперервна; 2) розривна і який характер точок розриву; 3) диференційовна і чому дорівнює її похідна.

9. Дискретний розподіл статистичних ймовірностей заданий таблицею:

x_i	1	2	3	4
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{3}$	C_1	C_2	$\frac{1}{9}$

1. Визначити, якими можуть бути числа C_1 та C_2.

2. Побудувати відповідну функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік для конкретних значень C_1 та C_2.

3. Визначити, де ця функція неперервна та де розривна і який характер точок розриву, та перевірити, чи можна позбавитися деяких точок розриву за рахунок вибору сталих C_1 та C_2; 2) визначити, де функція $F_n^*(x)$ диференційовна і чому дорівнює її похідна.

10. Функція розподілу статистичних ймовірностей задана графічно:

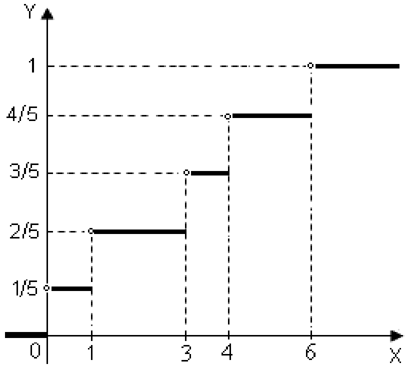


Рис. 11.4

1. Записати аналітичний вираз цієї функції.

2. Відновити відповідні спостережені значення та ряд розподілу статистичних ймовірностей.

3. Вважаючи, що кількість спостережених значень $n = 30$, відновити ряд розподілу абсолютних частот.

11. Побудувати варіаційний ряд для спостережених значень 5, 6, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 4, 5, 6, 3, 3, 5. Знайти ряди розподілу абсолютних та відносних частот. Побудувати полігон відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

12. При зважуванні 35 кроликів отримано результати:
3,0; 2,7; 1,6; 1,2; 1,6; 2,2; 2,1; 2,3; 1,5; 1,3; 2,2; 2,5; 2,4; 1,9; 2,3; 2,1; 1,0; 1,8; 1,9; 1,8; 3,2; 2,1; 2,9; 3,0; 1,3; 1,9; 2,6; 2,5; 1,9; 2,7; 2,4; 2,0; 1,1; 2,6.

Побудувати полігон відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

1.12. Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей

Нехай неперервний розподіл статистичних ймовірностей визначається таблицею 12.1:

Табл. 12.1

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
$P_n^*([a_{i-1};a_i))$	$P_n^*([a_0;a_1))$	$P_n^*([a_1;a_2))$	...	$P_n^*([a_{k-1};a_k))$

а $f_n^*(x)$ – щільність розподілу статистичних ймовірностей.

Функцію $F_n^*(x)$, що визначається рівністю

$$F_n{}^*(x) = P_n^*((-\infty;x)) = \int_{-\infty}^{x} f_n{}^*(t)\,dt\,,\ x \in \overline{R}\,,$$

називають *функцією неперервного розподілу статистичних ймовірностей*.

Приклад 12.1. Якщо неперервний розподіл статистичних ймовірностей визначається таблицею 12.2:

Табл. 12.2

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
$P^*_{100}([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04	0	0.02	0.01	0.02	0.01

то

$$F_n^*(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ 5x, & \text{коли } 0<x\le 0.1,\\ 0.5+2(x-0.1), & \text{коли } 0.1<x\le 0.2,\\ 0.7+(x-0.2), & \text{коли } 0.2<x\le 0.3,\\ 0.8+(x-0.3), & \text{коли } 0.3<x\le 0.4,\\ 0.9+0.4(x-0.4), & \text{коли } 0.4<x\le 0.5,\\ 0.94+0\cdot(x-0.5), & \text{коли } 0.5<x\le 0.6,\\ 0.94+0.2(x-0.6), & \text{коли } 0.6<x\le 0.7,\\ 0.96+0.1(x-0.7), & \text{коли } 0.7<x\le 0.8,\\ 0.97+0.2(x-0.8), & \text{коли } 0.8<x\le 0.9,\\ 0.99+0.1(x-0.9), & \text{коли } 0.9<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1. \end{cases}$$

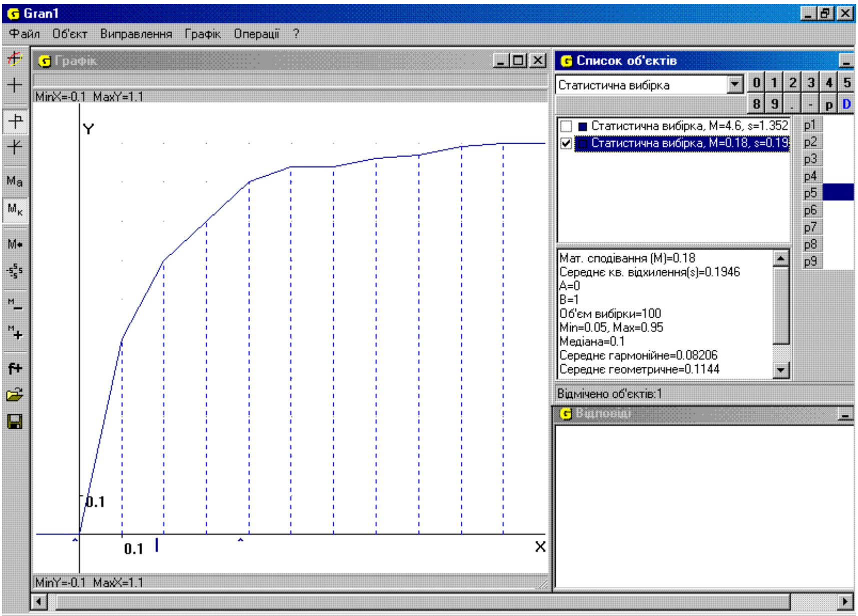


Рис. 12.1

На Рис. 12.1 подано графік функції розподілу статистичних ймовірностей для неперервного розподілу статистичних ймовірностей, що визначається таблицею 12.2.

Основні властивості функції $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей:

1. $F_n^*(x) \ge 0$, як статистична ймовірність події $A = (-\infty;\ x)$.

2. $F_n^*(-\infty) = P_n^*(\varnothing) = 0$, як статистична ймовірність неможливої події.

3. $F_n^*(+\infty) = P_n^*((-\infty;+\infty)) = 1$, як статистична ймовірність вірогідної події.

4. Якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \le F_n^*(v)$.

5. На кожному проміжку $[\,a_{i-1};\ a_i\,]$ функція $F_n^*(x)$ лінійно змінюється від значення $F_n^*(a_{i-1})$ до значення $F_n^*(a_i)$.

Будь яку функцію, яка задовольняє властивості 1 – 5, називають функцією неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Оскільки

$$F_n^*(a_i) = \int_{-\infty}^{a_i} f_n^*(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a_{i-1}} f_n^*(x)\,dx + \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx =$$

$$= F_n^*(a_{i-1}) + P_n^*([\,a_{i-1};a_i)),$$

то

$$P_n^*([\,a_{i-1};a_i)) = F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1}).$$

Таким чином, при заданій функції $F_n^*(x)$ можна визначити статистичні ймовірності $P_n^*([\,a_{i-1};a_i))$ (відносні частоти попадання спостережуваних значень у проміжки $[\,a_{i-1};a_i)$) для будь-яких проміжків $[\,a_{i-1};a_i)$. А тому функція розподілу статистичних ймовірностей $F_n^*(x)$ цілком визначає статистичну ймовірність будь-якої події (вимірної множини) $A \subset \Omega$, $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1,2,\ldots,k\}$.

Вправа 2. Довести, що функція неперервного розподілу, відносних частот визначена таблицею 12.1, є:

а) неперервною на *R*;

б) диференційовною на кожному інтервалі $(a_{i-1};\ a_i)$.

Враховуючи, що при $x \in [a_{i-1};a_i)$ $f_n^*(x)$ стала і

$$F_n^*(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a_{i-1}} f_n^*(t)\,dt+\int_{a_{i-1}}^{x} f_n^*(t)\,dt=F_n^*(a_{i-1})+f_n^*(x)\cdot(x-a_{i-1}),$$

коли $x\in[a_{i-1};a_i)$, легко бачити, що $F_n^*(x)$ неперервна і що в точках будь якого з проміжків $(a_{i-1};a_i)$ правильна рівність

$$\frac{d}{dx}F_n^*(x)=f_n^*(x).$$

У точках $x=a_i$ ця похідна може не існувати.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для кожного неперервного розподілу статистичних ймовірностей існує відповідна функція розподілу.

2. Функція $F_n^*(x)$, що визначається рівністю $F_n^*(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n^*(x)\,dx$, є функцією розподілу статистичних ймовірностей.

3. Щоб задати неперервний розподіл статистичних ймовірностей, досить задати або таблицю виду 12.1, або щільність розподілу $f_n^*(x)$, або функцію розподілу $F_n^*(x)$.

4. Функція $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей при неперевному розподілі є зростаючою.

5. Функція $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей при неперервному розподілі є зростаючою на кожному проміжку $[a_{i-1};a_i)$.

6. Множина значень функції $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей скінченна.

7. Функція $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей є неперервною в кожній точці x_0, тобто $F_n^*(x)\approx F_n^*(x_0)$, коли $x\approx x_0$.

2. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей для неперервного розподілу:

1) визначеного таблицею:

$[a_{i-1},a_i)$	[-35, -25)	[-25, -15)	[-15, -5)	[-5, 5)	[5, 15)	[15, 25)	[25, 35)
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.04	0.06	0.20	0.40	0.20	0.06	0.04

2) визначеного таблицею:

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.02	0.03	0.05	0.15	0.50	0.15	0.05	0.03	0.02

де x_i – центри інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, $a_i = a_{i-1} + h$, $i = \overline{1,9}$.

3. Довести, що функція $F_n^*(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt$ є неперервною у довільній точці $x_0 \in R$.

4. Довести, що похідна функції неперервного розподілу статистичних ймовірностей може не існувати в окремих точках. Визначити, в яких саме.

5. Для заданих спостережених значень знайти функцію неперервного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік; визначити, чи має ця функція точки розриву; визначити, в яких точках ця функція диференційовна і як пов'язана її похідна з щільністю розподілу статистичних ймовірностей:

6. Щільність розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли} \quad 0 \le x < \frac{1}{3}, \\ C, & \text{коли} \quad \frac{1}{3} \le x < \frac{8}{9}, \\ 2, & \text{коли} \quad \frac{8}{9} \le x < 1. \end{cases}$$

1. Визначити сталу C.

2. Знайти відповідну функцію $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

3. Зобразити графіки функцій $f_n^*(x)$ та $F_n^*(x)$.

4. Визначити, у яких точках $f_n^*(x) = (F_n^*(x))'$.

7. Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 2x, & \text{коли} \quad 0 \le x \le \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{3}x + C_1, & \text{коли} \quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}, \\ C_2 x, & \text{коли} \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}, \\ 1, & \text{коли} \quad x > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

1. Визначити сталі C_1 та C_2.

2. Для знайдених значень C_1 та C_2 побудувати графік даної функції.

3. Визначити, де ця функція неперервна і де диференційовна та знайти відповідну щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей.

8. Функція $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей задана графічно (Рис. 12.2):

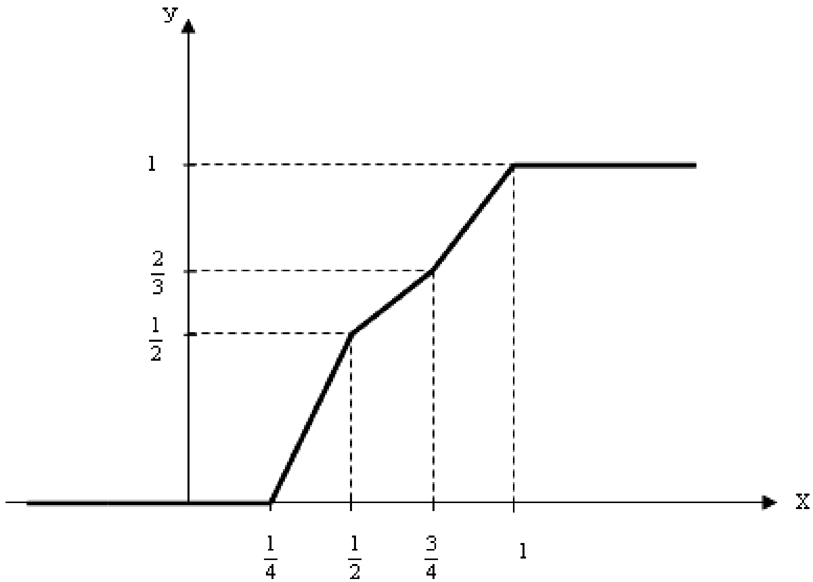


Рис. 12.2

1. Чи можна за графіком даної функції відновити графік щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей?

2. Знайти аналітичний вираз функції $F_n^*(x)$.

3. Знайти аналітичний вираз $f_n^*(x)$ та побудувати її графік.

4. Визначити, де неперервні та де диференційовні функції $F_n^*(x)$ та $f_n^*(x)$.

5. В яких точках $\dfrac{dF_n^*(x)}{dx} = f_n^*(x)$.

9. Експеримент полягає у тому, що фірма, яка ремонтує побутову електротехніку, фіксує причину виходу техніки з ладу (електрична, механічна або зовнішня), а також відбулося це під час дії гарантії чи після гарантійного терміну.

Процентний розподіл кількостей виходу техніки з ладу характеризується таблицею:

Час виходу техніки з ладу	Причина виходу техніки з ладу		
	електрична	механічна	зовнішня
Під час дії гарантії	10	25	17
Після гарантійного терміну	15	30	3

1. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

2. Визначити, що є спостереженими даними і чи можна їх трактувати як числа.

3. Чи є відповідний розподіл статистичних ймовірностей спостережених даних: 1) дискретним; 2) неперервним?

4. Якщо розподіл дискретний, то побудувати відповідні: 1) многокутник розподілу статистичних ймовірностей (полігон відносних частот); 2) функцію розподілу статистичних ймовірностей та її графік.

5. Якщо розподіл неперервний, то побудувати відповідні: 1) щільність розподілу статистичних ймовірностей та гістограму; 2) функцію розподілу статистичних ймовірностей та її графік.

6. Знайти статистичні ймовірності події:

1) A – навмання вибраний електроприлад вийшов з ладу під час дії гарантії;

2) B – причина виходу з ладу електроприладу є механічною;

3) C – електроприлад вийшов з ладу після закінчення гарантійного терміну.

7. З’ясувати, чи є серед подій A, B, і C пари незалежних подій.

8. Чи є події A, B, і C: 1) незалежними у сукупності; 2) попарно незалежними.

10. Функція розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень має вигляд:

1) $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le -1, \\ k(x+1), & \text{коли} \quad -1 \le x \le 3, \\ 1, & \text{коли} \quad x \ge 3. \end{cases}$$ 2) $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ kx, & \text{коли } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{коли } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Знайти значення параметра k і визначити, є відповідний розподіл дискретним чи неперервним.

2. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$.

3. Знайти відповідну щільність розподілу статистичних ймовірностей.

4. Обчислити статистичну ймовірність того, що спостережені значення лежать у проміжку $[2;3]$.

11. Перевірити, чи може функція

$$F_n^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{коли } x \le 0, \\ x + \dfrac{1}{2}, & \text{коли } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{коли } x \ge 1, \end{cases}$$

бути функцією розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень.

12. Нехай випробування – це постріл в круглу мішень радіуса $r=1$, а кожна елементарна подія ототожнюється з відстанню точки влучення від центра мішені. При цьому попадання за межі мішені неможливе. Тоді $\Omega=[0;1]$ – неперервна множина елементарних подій, кожна з яких ототожнюється з певним числом (точкою) $x\in[0;1)$. Виконано $n=100$ пострілів, результати яких наведено у таблиці 12.3. Побудувати гістограму відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

Табл. 12.3

$[a_{i-1};a_i)$	$[0;\ 0{,}1)$	$[0{,}1;\ 0{,}2)$	$[0{,}2;\ 0{,}3)$	$[0{,}3;\ 0{,}4)$	$[0{,}4;\ 0{,}5)$
n_i	50	20	10	10	4

	$[0{,}5;\ 0{,}6)$	$[0{,}6;\ 0{,}7)$	$[0{,}7;\ 0{,}8)$	$[0{,}8;\ 0{,}9)$	$[0{,}9;\ 1)$
	0	2	1	2	1

13. Результати пострілів в мішень: 10 – влучень у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0;\ 0{,}25)$; 5 – влучень у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}25;\ 0{,}50)$; 3 – влучення у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}50;\ 0{,}75)$; 2 – влучення у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}75;\ 1)$.

1. Скласти таблицю розподілу абсолютних та відносних частот.
2. Побудувати гістограму відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

14. За даним інтервальним розподілом абсолютних частот побудувати гістограму відносних частот і графік функції розподілу статистичних ймовірностей:

$[a_{i-1};a_i)$	$[0;\ 8)$	$[8;\ 16)$	$[16;\ 24)$	$[24;\ 32)$	$[32;\ 40)$	$[40;\ 48)$
n_i	10	15	20	25	20	10

1.13. Деякі числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей

Нехай проведено n спостережень, в результаті яких дістали спостережені значення $x_{\text{сп }1}$, $x_{\text{сп }2}$, ..., $x_{\text{сп }n}$, що визначають дискретні розподіли абсолютних частот та відповідних статистичних ймовірностей, подані в таблицях 13.1. та 13.2.

Табл. 13.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 13.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(x_i)$	$P_n^*(x_1)$	$P_n^*(x_2)$	...	$P_n^*(x_k)$

Точку, абсциса якої дорівнює середньому арифметичному спостережених значень:

$$m_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп}i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(x_i),$$

називають *центром розсіювання* статистичних ймовірностей. Очевидно, центр розсіювання буде знаходитися якомога ближче до точок, на які припадає основна маса статистичних ймовірностей. Часто m_n^* позначають також через $\bar{x}$.

Важливою характеристикою розподілу статистичних ймовірностей, окрім центра розсіювання, є також величина, що характеризує розсіювання (чи скупченість) статистичних ймовірностей навколо центра розсіювання. До таких характеристик відносяться *дисперсія* розподілу статистичних ймовірностей, а також *середнє квадратичне відхилення.*

Дисперсією дискретного розподілу статистичних ймовірностей називають число

$$D_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{\text{сп}\,i} - m_n^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - m_n^*)^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - m_n^*)^2 P_n^*(x_i).$$

Середнім квадратичним відхиленням називають число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

Розглянуті характеристики досить важливі при опрацюванні результатів спостережень. Чим менше розсіювання (дисперсія), тим точнішим, вірогіднішим і надійнішим є усереднений результат спостережень (m_n^*) при достатньо великій кількості спостережень.

В фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ так, що на точку x_i припадає маса $P_n^*(x_i)$, а дисперсія – це момент інерції цієї одиничної маси відносно центра розсіювання.

Приклад 13.1. Якщо розподіл визначається таблицями 13.3 чи 13.4,

Табл. 13.3

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	0	1	3	2	4	5

Табл. 13.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

то

$$m_n^* = 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{15} + 3\cdot\frac{3}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 5\cdot\frac{4}{15} + 6\cdot\frac{5}{15} =$$

$$= \frac{1}{15}(1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5) = \frac{69}{15} = 4\frac{3}{5},$$

$$D_n^* = \frac{1}{15}\left[\left(1-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 0+\left(2-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 1+\left(3-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 3+\right.$$

$$\left.+\left(4-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 2+\left(5-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 4+\left(6-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 5\right]\approx 1.7,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}\approx 1.35.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Розглянемо два розподіли статистичних ймовірностей:

a)

x_i	0	1	2
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.8	0.1

b)

$x_i^/$	100	101	102
$P_n^*(x_i^/)$	0.1	0.8	0.1

Ці розподіли відрізняються тим, що кожне із значень $x_i^/$ в розподілі *b*) на 100 більше, ніж в розподілі *a*). В розподілі *a*) статистичні ймовірності розподілені на множині із трьох точок x_1=0, x_2=1, x_3=2, що розташовані не далі, ніж на відстані, рівній 1, від точки *x*=1, а в розподілі *b*) статистичні ймовірності розподілені так само на множині із трьох точок $x_1^/$=100, $x_2^/$=101, $x_3^/$=102, що віддалені не далі, ніж на відстані 1 від точки $x^/$=101. Точки $\bar{x}$=1 та $\bar{x}^/$=101 природно назвати центрами розсіювання статистичних ймовірностей відповідно для розподілів *a*) та *b*). Вони характеризують значення, навколо яких зосереджуються спостережені значення.

Вправа 2. Нехай є два розподіли:

c)

x_i	-1	0	1
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.8	0.1

d)

$x_i^/$	-10	0	10
$P_n^*(x_i^/)$	0.1	0.8	0.1

Очевидно для кожного з цих розподілів $m_n^*=0$, але в розподілі d) розсіювання частот навколо центра розсіювання $m_n^*=0$ помітно більше, ніж в розподілі c).

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен дискретний розподіл статистичних ймовірностей має центр розсіювання.

2. Усі спостережені значення можуть бути натуральними числами.

3. Координата центра розсіювання статистичних ймовірностей є натуральним числом, коли усі спостережені значення – натуральні числа.

4. Для обчислення дисперсії треба спочатку обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

5. Для обчислення дисперсії треба спочатку обчислити середнє квадратичне відхилення.

2. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретного розподілу статистичних ймовірностей:

1)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(x_i)$	0.10	0.20	0.40	0.10	0.10	0.07	0.03

2)

x_i	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$P_n^*(x_i)$	0.02	0.10	0.70	0.08	0.04	0.03	0.01	0.01	0.01

3)

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

4)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(x_i)$	0.30	0.10	0.08	0.04	0.08	0.10	0.30

5) заданого функцією розподілу:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0.25 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0.75 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

3. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для заданих дискретних розподілів статистичних ймовірностей:

1. Відомо, що 50 абітурієнтів отримали на вступних іспитах такі оцінки:

10, 1, 3, 5, 11, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 3, 2, 11, 0, 5, 8, 7, 8, 5, 4, 3, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 7, 9, 8, 10, 9, 1.

2. За результатами контрольної роботи, написаної 30-ма студентами першокурсниками, складено таблицю

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	3	9	15	3

3. Досліджуючи, скільки разів на тиждень студенти даної групи із 30 чоловік працюють у бібліотеці, дістали такі дані:

5, 6, 5, 6, 6, 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 5, 6.

4. В одному універмазі продано за зміну 100 пар взуття, розміри яких розподілилися таким чином:

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	5	5	10	15	25	20	15	5

5. Медична комісія подала дані про зріст 320 призивників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призивників	10	28	72	98	69	31	12

6. Навмання вибрано 50 колосків ячменю і підраховано кількість зерен у кожному з них. Дістали такі результати:

21, 17, 27, 20, 22, 12, 24, 13, 20, 19, 22, 16, 22, 9, 21, 16, 23,
16, 21, 24, 18, 11, 22, 15, 23, 21, 10, 15, 18, 15, 21, 14, 15,
18, 22, 15, 17, 19, 17, 18, 17, 24, 18, 19, 16, 17, 15, 17, 25, 16.

4. Для дискретного розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень відома відповідна функція розподілу $F_n^*(x)$. Знайти формули для обчислення m_n^*, D_n^* та σ_n^* за допомогою значень функції $F_n^*(x)$.

5. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для дискретних розподілів, заданих за допомогою функції розподілу:

1)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{15}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{4}{15}, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ \dfrac{6}{15}, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \dfrac{10}{15}, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{коли } x > 4. \end{cases}$$

2)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ 0{,}1, & \text{коли } -1 < x \le 1, \\ 0{,}3, & \text{коли } 1 < x \le 3, \\ 0{,}5, & \text{коли } 3 < x \le 5, \\ 0{,}7, & \text{коли } 5 < x \le 7, \\ 1, & \text{коли } x > 7. \end{cases}$$

3) функція розподілу статистичних ймовірностей задана графічно:

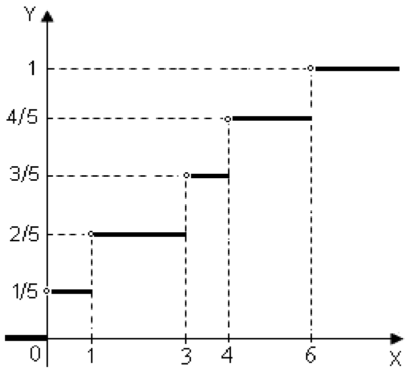


Рис. 13.1

6. Довести, що коли дискретний розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 13.2, то

$$D_n^* = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P_n^*(x_i) - m_n^{*2} .$$

7. Експеримент полягає у підкиданні монети і фіксації числа 0, коли випадає герб, та числа 1, коли випадає цифра. Спостережені значення 0 і 1 мають статистичні ймовірності відповідно p і $q = 1 - p$, де $p \in (0;1)$ – фіксоване число.

1. Знайти m_n^*, D_n^* і σ_n^*.

2. Збільшити спостережені значення на 1, не змінюючи їх статистичні ймовірності, і знову підрахувати m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

8. Експеримент полягає у тому, що з наявних ключів навмання вибирають один, намагаються цим ключем відімкнути двері і підраховують кількість таких спроб. Випробуваний ключ не повертають до набору, з якого вибиратиметься наступний ключ. Статистичні ймовірності вибору будь-якого ключа однакові при будь якій їх кількості (відокремлені ключі не враховуються). Двері відмикає лише один ключ.

1. Вважаючи, що початкова кількість ключів дорівнює 5, знайти дискретний розподіл статистичних ймовірностей згаданих спостережених значень – кількість спроб відімкнути двері.

2. Обчислити відповідні m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

9*. Узагальнити попередню задачу на випадок, коли початкова кількість ключів дорівнює r.

1.14. Деякі числові характеристики неперервного розподілу статистичних ймовірностей

Центром розсіювання статистичних ймовірностей для неперервного розподілу, що описується щільністю розподілу

$f_n^*(x)$, $x \in [a;b)$ ($f_n^*(x) = 0$ при $x \overline{\in} [a;b)$), називають точку на осі Ox, абсциса якої дорівнює $m_n^* = \int\limits_a^b x\, f_n^*(x)\, dx$.

Дисперсією неперервного розподілу статистичних ймовірностей, що визначається щільністю $f_n^*(x)$, $x \in [a;b)$ ($f_n^*(x) = 0$ при $x \overline{\in} [a;b)$), називають число

$$D_n^* = \int\limits_a^b (x - m_n^*)^2 f_n^*(x)\, dx,$$

а число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$ – називають *середнім квадратичним відхиленням* відповідного неперервного розподілу.

У фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на проміжку $[a;b)$ із щільністю $f_n^*(x)$, а дисперсія – момент інерції цієї маси відносно центра розсіювання.

Приклад 14.1 Для розподілу, що визначається таблицею 14.1:

Табл. 14.1

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04	0	0.02	0.01	0.02	0.01

маємо:

$$m_n^* = 0.05 \cdot 0.5 + 0.15 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.1 + 0.35 \cdot 0.1 + 0.45 \cdot 0.04 +$$
$$+ 0.55 \cdot 0 + 0.65 \cdot 0.02 + 0.75 \cdot 0.01 + 0.85 \cdot 0.02 + 0.95 \cdot 0.01 \approx 0.18,$$

$$D_n^* \approx (0.05 - 0.18)^2 \cdot 0.50 + (0.15 - 0.18)^2 \cdot 0.20 + (0.25 - 0.18)^2 \cdot 0.10 +$$
$$+ (0.35 - 0.18)^2 \cdot 0.10 + (0.45 - 0.18)^2 \cdot 0.04 + (0.55 - 0.18)^2 \cdot 0.00 +$$
$$+ (0.65 - 0.18)^2 \cdot 0.02 + (0.75 - 0.18)^2 \cdot 0.01 + (0.85 - 0.18)^2 \cdot 0.02 +$$
$$+ (0.95 - 0.18)^2 \cdot 0.01 \approx 0.0375,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*} \approx \sqrt{0.0375} \approx 0.194.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Правильна наближена рівність:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп}\, i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \sum_{x_{\text{сп}\, i} \in [a_{i-1}, a_i)} x_{\text{сп}\, i} \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n}\bar{x}_i k_n([a_{i-1}, a_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i P_n^*([a_{i-1}; a_i)) = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} x\, f_n^*(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b x\, f_n^*(x)\, dx = m_n^*,$$

де $\bar{x}_i = \frac{1}{h}\int_{a_{i-1}}^{a_i} x\, dx = \frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2h} = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, і це число $\bar{x}_i$ наближено дорівнює середньому арифметичному спостережених значень $x_{cn\, j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1}; a_i)$, $k_n([a_{i-1}, a_i))$ – кількість спостережених значень $x_{cn\, j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1}, a_i)$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен неперервний розподіл статистичних ймовірностей має центр розсіювання.

2. Якщо $x_{\text{сп}\, j}$, $j \in \overline{1, n}$, – спостережені значення, а $\bar{x}$ – координата центра розсіювання статистичних ймовірностей, то

$$\min_{1 \le j \le n} x_{\text{сп}\ j} \le \bar{x} \le \max_{1 \le j \le n} x_{\text{сп}\ j}.$$

3. Координата центра розсіювання статистичних ймовірностей завжди є раціональним числом.

4. Для обчислення дисперсії спочатку треба обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

5. Для обчислення дисперсії спочатку треба обчислити середнє квадратичне відхилення.

2. Знайти центр розсіювання, середнє квадратичне відхилення та дисперсію неперервного розподілу статистичних ймовірностей:

1) заданого таблицею:

$[a_{i-1}, a_i)$	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5, 6)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.10	0.70	0.10	0.06	0.03	0.01

2) заданого щільністю розподілу статистичних ймовірностей:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.20 \text{ при } x \in [0,1) \\ 0.50 \text{ при } x \in [1,2) \\ 0.20 \text{ при } x \in [2,3) \\ 0.10 \text{ при } x \in [3,4) \\ 0 \quad \text{ при } x \overline{\in} [0,4) \end{cases}$$

3) заданого функцією розподілу статистичних ймовірностей:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ 0.2(x+1) & \text{при} \quad -1 \le x \le 0, \\ 0.2 + 0.6x & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 0.8 + 0.2(x-1) & \text{при} \quad 1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

3. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення неперервного розподілу статистичних ймовірностей заданих спостереженими значеннями:

1. Ряд спостережених значень відхилень точки падіння снаряда від цілі:

-52, -50, 47, 20, 17, 10, 14, 20,-50, -5, -20, 2, -27, -10, -15, 40, -19, 45, 34, -20, -29, -30, 15, -10, 10, 12, 14, 20, -33, -40, 50, 48, -10, 14, 10, -32, 50, -22, 43, 2, -5, 7, 14, -8, -5, 0, 23, -40, 17, 3.

2. Визначаючи вагу 50 новонароджених, дістали такі результати (у кг):

4,3; 4,4; 2,1; 3,5; 2,5; 3,2; 2,3; 4,1; 2,4; 4,0; 3,3; 2,9; 3,2; 3,0; 2,7; 3,4; 2,2; 3,1; 3,5; 3,7; 2,0; 3,0; 3,7; 3,6; 3,4; 3,3; 3,8; 3,2; 2,8; 2,9; 2,3; 2,5; 2,9; 2,6; 3,1; 3,4; 3,2; 3,9; 2,7; 3,5; 2,6; 2,7; 3,0; 2,9; 3,2; 3,3; 3,4; 3,1; 3,6; 3,9.

3. Визначиючи зріст (у см) кожної з 50 першокурсниць, дістали такі результати

169, 171, 157, 173, 170, 156, 172, 159, 168, 158, 160, 164, 161, 165, 162, 166, 163, 167, 160, 168, 165, 160, 166, 161, 167, 162, 168, 163, 169, 160, 164, 165, 163, 166, 162, 167, 161, 168, 160, 164, 168, 162, 167, 163, 166, 165, 162, 160, 166, 165.

4. 7, 3, 7, 5, 6, 5, 7, 8, 3, 4, 5, 7, 7, 6, 7, 3, 4, 2, 7, 8, 3, 3, 7, 6, 5.

5. $\underbrace{1,3,\ldots,1,3}_{5\text{ пар }1,3}, \underbrace{1,4,\ldots,1,4}_{10\text{ пар }1,4}, \underbrace{4,6,\ldots,4,6}_{3\text{ пари }4,6}$, 5, 5, 5, 4.

6. $\underbrace{3,4,\ldots,3,4}_{6\text{ пар }3,4}, \underbrace{4,5,\ldots,4,5}_{13\text{ пар }4,5}, \underbrace{6,5,\ldots,6,5}_{8\text{ пар }6,5}$.

7. $\underbrace{0,1,2,3,4,\ldots,0,1,2,3,4}_{5\text{ наборів }0,1,2,3,4}, \underbrace{3,2,1,0,\ldots,3,2,1,0}_{5\text{ наборів }3,2,1,0}, \underbrace{1,2,3,\ \ldots,1,2,3,}_{5\text{ наборів }1,2,3,}$.

4. Для неперервного розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень задана відповідна функція розподілу $F_n^*(x)$. Знайти формули для обчислення m_n^*, D_n^* і σ_n^* за допомогою значень функції $F_n^*(x)$.

5. Знайти m_n^*, D_n^* та σ_n^* для неперервних розподілів статистичних ймовірностей, заданих за допомогою функції розподілу статистичних ймовірностей або відповідної щільності розподілу (з’ясувати, яких значень можуть набувати невідомі константи):

1. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x\le 0, \\ 2x, & \text{коли} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{2}{3}x+C_1, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{1}{2}, \\ C_2 x, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{4}, \\ 1, & \text{коли} \quad x>\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

2. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x<0 \ \text{або} \ x\ge 1, \\ 1, & \text{коли} \quad 0\le x<\dfrac{1}{3}, \\ C, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{8}{9}, \\ 1, & \text{коли} \quad \dfrac{8}{9}\le x<1. \end{cases}$

3. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0, \\ kx, & \text{коли } 0\le x\le 3, \\ 1, & \text{коли } x\ge 3. \end{cases}$

4. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0, \\ kx+b, & \text{коли } 0<x\le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{коли } x>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

6. Довести, що коли неперервний розподіл статистичних ймовірностей задано щільністю $f_n^*(x)$, $x\in[a;b]$, то

$$D_n^*=\int_a^b x^2 f_n^*(x)\,dx-m_n^{*2}.$$

7. Експеримент полягає у тому, що з проміжку $[0,1)$ навмання вибирають число і вважають його спостереженим значенням. Виявлено, що статистична ймовірність того, що спостережене значення належить проміжку $[a;b)\subset[0;1)$, дорівнює $b-a$.

1. Довести, що для будь-якого поділу проміжка $[0\,1)$ на n рівних проміжків, щільність розподілу $f_n^*(x)$ має один і той самий аналітичний вираз.

2. Обчислити відповідні m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

1.15. Повторні незалежні випробування

Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) відповідає певному стохастичному експерименту, де P_n^* – статистична ймовірність, визначена за досить великою серією з n випробувань.

Зафіксуємо подію $A \in S$. Розглянемо серію із m незалежних випробувань серед вказаних n випробувань, в кожному з яких відбувається або подія A, або подія $\overline{A}$. Можливі наслідки такої серії із m випробувань мають вигляд $(E_1, E_2, ..., E_m)$, де або $E_i = A$, або $E_i = \overline{A}$, причому множина Ω_1^m всіх таких наслідків серії із m випробувань містить 2^m елементів: $\Omega_1^m = \{E = \{E_1, E_2, ..., E_m\} : E_i = A$ або $E_i = \overline{A},\ i \in \overline{1, m}\}$. Нехай подія A_k, $k \in \overline{1, m}$, полягає в тому, що подія A відбувається в k-му випробуванні, тобто подія A_k відбувається, якщо подія A відбувається в k-му випробуванні, і A_k не відбувається, якщо в k-му випробуванні подія A не відбувається (а відбувається подія $\overline{A}$). При цьому *випробування* називаються *незалежними*, якщо події A_k, $k \in \overline{1, m}$, незалежні в сукупності. Нехай у кожному з m випробувань подія A відбувалася з статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$ або не відбувалася з статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - p = q$. Елементарні події, з яких складається подія A_k, мають вигляд $E = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$, де $E_k = A$ (подія A відбувається в k-му випробуванні), а всі інші E_i, $i \in \overline{1, m}$, $i \neq k$, можуть дорівнювати як A, так і $\overline{A}$. Наприклад при $m = 3$

$$A_1 = \{(A,\ A,\ A),\ (A,\ A,\ \overline{A}),\ (A,\ \overline{A},\ A),\ (A,\ \overline{A},\ \overline{A})\},$$

$$A_2 = \{(A,\ A,\ A),\ (\overline{A},\ A,\ A),\ (A,\ A,\ \overline{A}),\ (\overline{A},\ A,\ \overline{A})\},$$

$$A_3 = \{(A,\ A,\ A),\ (A,\ \overline{A},\ A),\ (\overline{A},\ A,\ A),\ (\overline{A},\ \overline{A},\ A)\}$$

Події A_k незалежні у сукупності тоді й тільки тоді, коли на просторі

$$\Omega_1^m = \{E = (E_1,\ E_2, ...,\ E_m) : E_i = A \text{ або } E_i = \overline{A},\ i \in \overline{1,\ m}\}$$

імовірнісна міра визначається рівністю

$$\tilde{P}_m^*(\{E\}) = \tilde{P}_m^*((E_1,\ E_2,\ ...,\ E_m)) = p^s \cdot q^{m-s}, \quad s \in \overline{0, m},\ E \in \Omega_1^m, \quad (15.1)$$

за умови, що серед координат E_k рівно s набувають значення A, а інші $(m - s)$ набувають значення $\overline{A}$.

Отже, на основі статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ і серії повторних незалежних випробувань породжується ймовірнісна міра $\widetilde{P}_m^*(\{E\})$ на просторі Ω_1^m елементарних подій $E=(E_1,\ E_2,\ ...,\ E_m)$, а тому й на будь-якому просторі подій, що є підмножинами Ω_1^m, оскільки $\widetilde{P}_m^*(B)=\sum\limits_{E\in B}\widetilde{P}_m^*(\{E\})$, коли подія $B\subset\Omega_1^m$.

Приклад 15.1. Нехай стохастичний експеримент полягає в підкиданні монети і фіксації її верхньої грані. Тоді можна вважати, що $\Omega=\{\Gamma,Ц\}$, подія A – випадання герба, тобто $A=\{\Gamma\}$, а подія $\overline{A}$ – випадання цифри, тобто $\overline{A}=\{Ц\}$, причому $P_n^*(A)=P_n^*(\overline{A})=\dfrac{1}{2}$. Тому простір Ω_1 у даному випадку можна ототожнювати з простором Ω. Якщо $m=10$, то $\Omega_1^{10}=\{E=(E_1,\ E_2,...,\ E_{10}):E_k\in\Omega,\ k\in\overline{1,10}\}$, тобто або $E_k=\{\Gamma\}$, або $E_k=\{Ц\}$ а $\widetilde{P}_{10}^*((E_1,\ E_2,\ ...\ ,\ E_{10}))=(\dfrac{1}{2})^{10}$ для будь-якої елементарної події $E=(E_1,\ E_2,...,\ E_{10})\in\Omega_1^{10}$.

Позначимо через $B_{m,s}$ подію, яка полягає у тому, що в m незалежних випробуваннях подія A відбувається s разів, $s\in\overline{0,m}$. Подія $B_{m,s}$ є об’єднанням (сумою) подій $\{E\}$, де $E=(E_1,\ E_2,\ ...,\ E_m)\in\Omega^m$ – впорядкований набір із m координат E_k, $k\in\overline{1,\ m}$, серед яких рівно s координат E_k дорівнюють A, а інші $(m-s)$ координат дорівнюють $\overline{A}$. Очевидно, таких наборів є C_m^s. Враховуючи, що доданки в сумі $B_{m,s}$ попарно несумісні, та рівність (15.1), дістанемо

$$\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})=\sum_{E\in B_{m,\ s}}\widetilde{P}_m(\{E\})=C_m^s\,p^s q^{m-s},\ \ s\in\overline{0,m}. \tag{15.2}$$

Формулу (15.2) називають *формулою Бернуллі*.

Розподіл статистичних ймовірностей $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, що визначається за формулою (15.2), називають *біноміальним*, оскільки статистичні ймовірності $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$ обчислюються так само, як члени розкладу бінома Ньютона $(p+q)^m$ за степенями p і q:

$$(p+q)^m=\sum_{s=0}^{m}C_m^s p^s q^{m-s}\ .$$

Зауважимо, що коли $B_{m,s}$, $s=0,\ 1,\ ...,\ m$, розглядати як єдино можливі наслідки серії із m випробувань стосовно кількості появ події A в m випробуваннях, тоді породжується ще один простір елементарних подій (наслідків серії випробувань)

$$\hat{\Omega}_m = \{B_{m,0},\ B_{m,1},\ \ldots,\ B_{m,m}\}$$

з імовірнісною мірою $\hat{P}_m^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s q^{m-s} = \tilde{P}_m^*(B_{m,s})$, $s = 0, 1, \ldots, m$, визначеною на всіх підмножинах множини $\hat{\Omega}_m$.

При цьому $\hat{P}_m^*(B) = \sum\limits_{B_{m,s} \in B} \hat{P}_m^*(B_{m,s}),\ B \subset \hat{\Omega}_m$.

Зауважимо, що для простору $\hat{\Omega}_m$ події A_k змісту не мають.

Приклад 15.2. Нехай монета підкидається 10 разів, причому за результатами досить великої серії випробувань статистична ймовірність появи герба в кожному випробуванні дорівнює $\frac{1}{2}$. Тоді подія $B_{10,5}$ означає, що у 10 підкиданнях монети герб випадав 5 разів. Враховуючи формули (15.2) дістаємо

$$\tilde{P}_{10}^*(B_{10,5}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! 5!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024} \approx \frac{1}{4}.$$

Теорема. *Статистичні ймовірності $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$ зростають за змінною s, коли $s \in (0; s_0)$ і спадають за цією змінною, коли $s \in (s_0; m)$, де $s_0 = [(m+1)p]$. Тому $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})$ є найбільшою статистичною ймовірністю, коли $(m+1)p$ не є цілим числом, а коли число $(m+1)p$ – ціле, то $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})$ – дві найбільші статистичні ймовірності. При цьому*

$$(m+1)p - 1 < s_0 \le (m+1)p, \text{ звідки } p + \frac{p-1}{m} < \frac{s_0}{m} \le p + \frac{p}{m}.$$

Останнє означає, що при *досить великих m найчастіше число появ події A в серії із m незалежних випробувань виявляється рівним s_0 і таким, що із збільшенням m число $\frac{s_0}{m}$ стає як завгодно близьким до статистичної ймовірності $P_n^*(A) = p$.*

Приклад 15.3. Якщо $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$ і $m = 10$, то ряд розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$ має вигляд:

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Многокутник цього розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$, $s \in \overline{0, 10}$, подано на Рис. 15.1. При цьому

$$s_0 = [(m+1)p] = \left[\frac{11}{2}\right] = \left[5\frac{1}{2}\right] = 5\,.$$

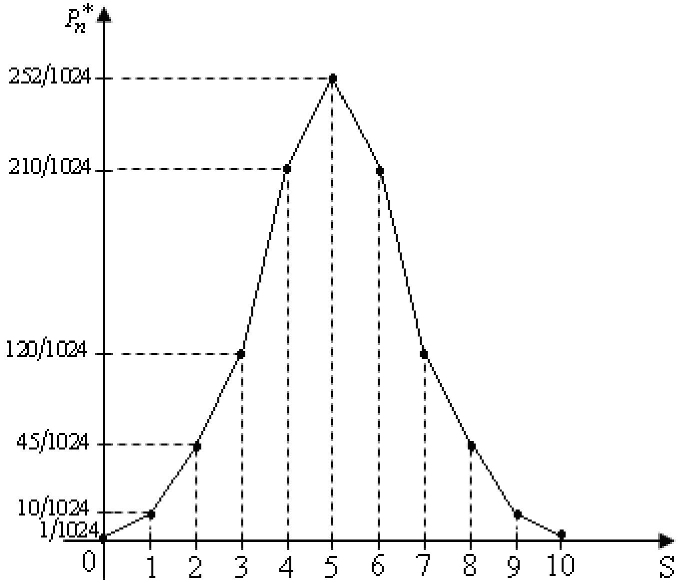


Рис. 15.1

Отже, $\hat{P}_{10}^*(B_{10,5})$ – єдина найбільша статистична ймовірність за змінною $s \in \overline{0,\,10}$. При цьому $\dfrac{s_0}{m} = \dfrac{5}{10} = P_n^*(A) = \dfrac{1}{2}$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Враховуючи, що події $B_{m,s}$ попарно несумісні і в m випробовуваннях принаймні одна з них обов'язково відбувається, дістаємо:

$$\tilde{P}_m^*(\sum_{s=0}^{m} B_{m,s}) = \sum_{s=0}^{m} \tilde{P}_m^*(B_{m,s}) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s p^s q^{m-s} = (p+q)^m = 1\,.$$

Вправа 2. Щоб знайти найбільшу за змінною $s \in \overline{0, m}$ статистичну ймовірність $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$, розглянемо відношення:

$$\frac{\hat{P}_m^*(B_{m,s})}{\hat{P}_m^*(B_{m,s-1})} = \frac{C_m^s p^s q^{m-s}}{C_m^{s-1} p^{s-1} q^{m-(s-1)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{m(m-1)\ \ldots(m-(s-1))}{1\cdot 2\ \ldots s}}{\dfrac{m(m-1)\ \ldots(m-(s-2))}{1\cdot 2\ \ldots\ (s-1)}} \cdot \frac{p^s q^{m-s}}{p^{s-1} q^{m-(s-1)}} = \frac{m-s+1}{s} \cdot \frac{p}{q} < 1,$$

звідки $mp + p - sp < sq$ або $mp + p < s(p + q)$, тобто $s > (m+1)p$.

Отже,

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) < \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s > (m+1)p.$$

Аналогічно дістаємо, що

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) > \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } 1 \le s < (m+1)p.$$

Таким чином, якщо число $(m+1)p$ не є цілим і $s_0 = [(m+1)p]$ – найбільше ціле число, що не перевищує $(m+1)p$, то $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})$ є єдиною найбільшою статистичною ймовірністю, а число появ події A в серії із m незалежних випробувань, яке зустрічається найчастіше, близьке до $mP_n^*(A) = mp$.

У випадку, коли число $(m+1)p = s_0$ є цілим, дістаємо

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) < \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s \ge s_0,$$

а

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) > \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s < s_0, \text{ тобто } s \le s_0 - 1.$$

При цьому

$$\frac{\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})}{\hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})} = \frac{m - s_0 + 1}{s_0} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(m+1) - (m+1)p}{(m+1)p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(m+1)\cdot(1-p)}{(m+1)p} \cdot \frac{p}{q} = 1,$$

тобто $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})$ – дві найбільші статистичні ймовірності.

Вправа 3. *Задача про перехід вулиці*. Статистична ймовірність наявності перед переходом будь-якої секунди машини, що рухається, дорівнює p. Пішоход може перейти вулицю, коли протягом трьох секунд перед ним не буде машини. Знайти статистичну ймовірність того, що пішохід чекав: 1) 0 секунд; 2) 2 секунди.

Нехай подія A_k – наявність машини перед пішоходом у k-у секунду, $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, а $\overline{A}_k$ – відсутність машини перед пішоходом у k-у секунду. Позначимо

$$P_n^*(A_k) = p, \; P_n^*(\overline{A}_k) = 1 - p.$$

Вважаємо, що події A_k незалежні. Тоді пішохід чекатиме переходу 0 секунд, коли виконується подія $B_0 = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$, статистична ймовірність якої

$$P_n^*(B_0) = P_n^*(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = P_n^*(\overline{A}_1) \cdot P_n^*(\overline{A}_2) \cdot P_n^*(\overline{A}_3) = (1-p)^3.$$

Пішохід чекатиме переходу 2 секунди, коли виконується подія

$$B_2 = A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5,$$

для якої

$$P_n^*(B_2) = P_n^*(A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5) + P_n^*(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5) =$$
$$= p^2(1-p)^3 + p(1-p)^4 = p(1-p)^3.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Повторні випробування пов'язані з довільною серією з m випробувань.
2. Повторні випробування пов'язані з одним і тим самим випадковим експериментом.
3. Подія $B_{m,s}$ пов'язана з кількістю появ події A у даній серії з m випробувань і ця подія не залежить від m.
4. Незалежність випробувань означає незмінність умов проведення цих випробувань, тобто незмінність відповідного ймовірнісного простору.
5. Декартів добуток $A \times B$ існує для будь-яких множин A і B.
6. Якщо $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то $A \times B = B \times A$.
7. Якщо $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, то Ω_1^m містить 2^m елементів.
8. Сума усіх статистичних ймовірностей $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$ не залежить від m.

2. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії з m незалежних випробувань подія A відбувається принаймні один раз, якщо статистична ймовірність відбування цієї події у кожному випробуванні дорівнює $p = P_n^*(A) > 0$.

3. 1. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії з $m = 9$ підкидань монети герб випадає: 1) 5 разів; 2) 4 рази, вважаючи, що при кожному підкиданні $P_n^*(\{\Gamma\}) = \dfrac{1}{2}$.

2. Порівняти ці статистичні ймовірності.

3. Побудувати ряд та многокутник розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_9^*(B_{9,s})$, $s \in \overline{0,\ 9}$.

4. Розв'язатити завдання 1-3 за умови, що довжина серії $m = 20$.

4. Довести, що коли $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, то Ω_1^m – декартів m-й степінь простору Ω_1 містить 2^m елементів.

5. Виписати всі елементарні події $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ простору $\Omega = \Omega_1^4$, де $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, а також всі елементарні події $E \in \Omega = \Omega_1^4$, що визначають відповідно події A_1, A_2, A_3, A_4 в серії з 4-х незалежних випробувань, а також події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$ та добутки подій $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, $A_2 A_3$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$, $A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4$, $A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4$, $A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4$.

6. Нехай подія A_k означає відбування події A (із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p > 0$) у k-му випробуванні серед серії з m незалежних випробувань. Знайти:

1) елементарні події, з яких складається подія A_k;

2) елементарні події, з яких складається подія $\overline{A}_k$;

3) елементарні події, з яких складається подія $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$;

4) елементарні події, з яких складається подія $B_{m,s}$;

5) зв'язок події $B_{m,s}$, яка полягає у відбуванні події A s разів у серії з m незалежних випробувань, з подіями A_k та $\overline{A}_k$;

6) статистичну ймовірність $\tilde{P}_m^*(A_1 + A_2 + \ldots + A_m)$;

7) статистичну ймовірність $\tilde{P}_m^*(B_{m,s})$.

7. Нехай $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, $\Omega = \Omega_1^m$ – декартів m-ий степінь простору Ω_1, а подія A_k – відбування події A у k-му випробуванні. Довести, що подія $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$ відрізняється від простору Ω лише однією елементарною подією. Знайти цю елементарну подію.

8. Задача де Мере. Знайти статистичну ймовірність того, що при підкиданні грального кубика 4 рази принаймні один раз випадає 6 очок. Вважати, що при кожному підкиданні $P_n^*\{"6"\} = \dfrac{1}{6}$.

9. Задача Паскаля та Ферма. Знайти статистичну ймовірність того, що при підкиданні двох гральних кубиків 24 рази принаймні один раз випадає пара шісток. Вважати, що $P_n^*(6,6) = \dfrac{1}{36}$, при кожному підкиданні. Порівняти знайдену статистичну ймовірність з результатом попередньої задачі.

10. Нехай $P_n^*(A) = \dfrac{1}{2}$, $m = 10$ і ряд розподілу статистичних ймовірностей $\tilde{P}_m^*(B_{m,s}) = p_s$, $s \in \overline{0,\,10}$ має вигляд

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_s	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Знайти: 1) $\tilde{P}_m^*(|\dfrac{s}{10} - \dfrac{1}{2}| < 0{,}4)$ і 2) $\tilde{P}_m^*(|\dfrac{s}{10} - \dfrac{1}{2}| < 0{,}1)$.

11. Екзаменаційний тест містить 10 завдань, до кожного з яких дано 5 відповідей, лише одна з яких правильна. За допомогою контролюючого засобу оцінюється відповідь учня кількістю балів $i \in \overline{0{,}10}$, що дорівнює кількості правильних відповідей. Учень не готувався до екзамену і вирішив вибирати номери відповідей навмання (при цьому статистична ймовірність кожної правильної відповіді дорівнює $\frac{1}{5}$).

1. Знайти статистичну ймовірність того, що учень дістає оцінку "i", $i \in \overline{0{,}10}$.
2. Яка оцінка за заданих умов зустрічається найчастіше?
3. Знайти статистичну ймовірність того, що оцінка лежить в межах від 1 до 3, включаючи ці числа.

12. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина є "лівшою", дорівнює 0,01.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що серед 200 людей є принаймні 4 "лівші".
2. Яка кількість лівшів з'являється найчастіше серед 200 людей?
3. Що можна сказати про полігон відносних частот для кількості лівшів серед 200 людей?

13. Статистична ймовірність влучення в мішень дорівнює $\frac{1}{5}$ при кожному пострілі.

1. Знайти статистичну ймовірність влучення у мішень двічі при 10 пострілах.
2. Яка кількість влучень у мішень зустрічається найчастіше при: 1) 10 пострілах; 2) 100 пострілах?
3. Знайти дискретний розподіл статистичних ймовірностей кількостей влучень у мішень при 10 пострілах та: 1) побудувати ряд розподілу та полігон відносних частот; 2) знайти відповідну функцію розподілу статистичних ймовірностей; 3) обчислити m_{10}^{*}, D_{10}^{*} та σ_{10}^{*}.

14*. Узагальнити задачу **13** на випадок m пострілів.

15. Нехай статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина народилася у певному місяці, однакова для всіх місяців. Знайти статичну ймовірність того, що:

1) дні народження шістьох випадково зустрінутих людей припадають на один місяць року;
2) серед шістьох випадково зустрінутих людей дні народження трьох припадають на один місяць року;
3) серед шістьох випадково зустрінутих людей кількість таких, дні народження яких припадають на січень місяць, дорівнює i, $i \in \overline{0{,}6}$.

16. Одну й ту саму сторінку книги друкували багато разів. Статистична ймовірність того, що на даній сторінці книги є друкарська помилка, дорівнює 1/500.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що на десяти копіях сторінки книги не менше трьох друкарських помилок.
2. Яка кількість помилок на десяти копіях сторінки зустрічається найчастіше?

17. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина є дальтоніком, дорівнює 0,01. Якою повинна бути кількість n людей, щоб із статистичною ймовірністю не меншою за 0,95 можна було стверджувати, що серед n людей є принаймні один дальтонік?

18. Статистична ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,51. Яка статистична ймовірність того, що в серії з 5 пострілів: 1) три влучення; 2) не більше трьох влучень; 3) не більше двох промахів.

19. Статистична ймовірність того, що відвідувач автомагазину зробить покупку, дорівнює 0,2. Знайти статистичну ймовірність того, що з п'ятьох відвідувачів магазину: 1) лише один зробить покупку; 2) хоча б один зробить покупку; 3) жоден не зробить покупку; 4) усі зроблять покупку.

20. За даними технічного контролю 90% виготовлених виробів є якісними. Знайти статистичну ймовірність того, що в партії із 100 виробів буде: 1) 10 бракованих; 2) не менше 5, але менше 10 бракованих; 3) не менше 80 виробів якісні.

21. За умови задачі про перехід вулиці (див. вправу 2) знайти статистичну ймовірність того, що пішохід чекатиме рівно: 1) 1 секунду; 2) 3 секунди; 3) 4 секунди.

22. На аукціонах продаються за початковою вартістю у середньому 20% виставлених пакетів акцій.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що з 9 виставлених пакетів акцій було продано за початковою вартістю: 1) i пакетів, $i \in \overline{0{,}9}$; 2) не менше 2-х пакетів; 3) не більше 3-х пакетів; 4) принаймні 1 пакет акцій.
2. Знайти кількість пакетів акцій, проданих за початковою вартістю, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність такої події.

23. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана деталь є бракованою, дорівнює 0,01.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що серед 1000 деталей: 1) принаймні одна бракована; 2) три бракованих; 3) не більше трьох бракованих.
2. Знайти кількість бракованих деталей серед 1000, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність того, що було саме стільки бракованих деталей.

24. Статистична ймовірність того, що пакет акцій, придбаний на ринку цінних паперів, принесе прибуток, дорівнює 0,5.

1. Знайти статистичні ймовірності того, що з 5 придбаних пакетів акцій прибуток приносили: 1) i пакетів, $i \in \overline{0{,}5}$; 2) принаймні один пакет; 3) не менше трьох пакетів.
2. Нехай придбано 5 пакетів акцій. Знайти кількість прибуткових пакетів акцій, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність того, що така кількість пакетів приносила прибуток.

3. Визначити, при якій кількості куплених пакетів акцій із статистичною ймовірністю не меншою за 0,95 отримували прибуток принаймні від одного пакету акцій.

25. Відомо, що 80% працівників фірми мають вищу освіту.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що із 10 навмання вибраних працівників вищу освіту мають: 1) i працівників, $i \in \overline{0,10}$; 2) принаймні 9 працівників; 3) не більше 9 працівників.

2. Знайти кількість працівників з вищою освітою, що зустрічається найчастіше серед 10 працівників, та обчислити статистичну ймовірність такої кількості працівників.

26. Статистична ймовірність того, що людина в період страхування буде травмованою, дорівнює 0,006. Застраховано 1000 людей, кожна з яких зробила страховий внесок у 150 грн. У випадку травми застрахована людина отримує 12000 грн. Знайти статистичну ймовірність кількості страхових виплат, що зустрічаються найчастіше на 1000 застрахованих, та відповідну суму виплат.

27. Статистична ймовірність фальшивості купюри номіналом 200 грн. дорівнює 0,0001. Через касу за день проходить біля 20000 купюр номіналом 200 грн.

1. Знайти кількість фальшивих купюр, що зустрічається найчастіше.

2. Якою є статистична ймовірність такої кількості фальшивих купюр?

3. За скільки днів виправдає себе прилад для виявлення фальшивих купюр, якщо він коштує 500 грн. і кожного дня знаходить згадану вище найбільш можливу кількість фальшивих купюр?

1.16. Поняття випадкової величини

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*). Дійсну функцію $X(E), E \in \Omega$, називають *випадковою величиною*, якщо для будь-якого $G \in S_X$ прообраз

$$X^{-1}(G) = \{E : E \in \Omega, X(E) \in G\} \in S,$$

тобто є подією, де $\Omega_X = X(\Omega) = \{x : x = X(E), E \in \Omega\}$ – множина значень функції X (Ω_X – образ множини Ω при відображенні $\Omega \xrightarrow{X} \Omega_X$), S_X – сукупність підмножин множини Ω_X, що задовільняє вимоги 1_s–3_s до простору подій (див. 1.4 або 1.6).

Таку функцію $X = X(E)$, $E \in \Omega$, називають також S/S_X-*вимірною функцією* і покладають $P_{nX}^*(G) = P_n^*(X^{-1}(G))$ для кожного $G \in S_X$. При цьому говорять, що *ймовірнісний простір* $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$ *породжується* (*генерується*) *випадковою величиною* X з ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*).

Приклад 16.1. Нехай

$$\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\},\ H_1=\{"1","2","3","4"\},$$

$$H_2=\{"5"\},\ H_3=\{"6"\},\ P_n^*(H_1)=0.10,$$

$$P_n^*(H_2)=0.30,\ P_n^*(H_3)=0.60,$$

$$S=\{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1+H_2, H_1+H_3, H_2+H_3, H_1+H_2+H_3=\Omega\}.$$

Тоді $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ – ймовірнісний простір. Нехай на множині $\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\}$ задана функція $X(E)$ наступним чином: $X(E)=1$, якщо $E\in\{"1","2","3","4"\}$; $X(E)=2$, якщо $E\in\{"5"\}$; $X(E)=3$, якщо $E\in\{"6"\}$.

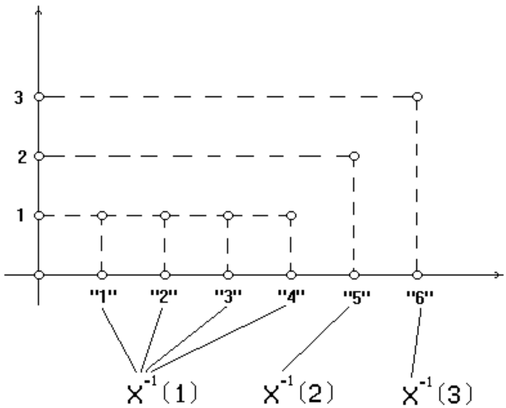


Рис. 16.1

Якщо елементарні події "1", "2", "3", "4", "5", "6" подати як точки на числовій осі Ox, то графічно зазначену залежність можна подати так, як показано на Рис. 16.1.

Таким чином $X(\Omega)=\Omega_X=\{1,2,3\}$.

Розглянемо таку сукупність S_X підмножин множини $\Omega_X=X(\Omega)$:

$$S_X=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}.$$

Очевидно, ця сукупність S_X задовольняє вимоги 1_s-3_s до простору подій.

Оскільки одне і те саме число 1 поставлено у відповідність елементарним подіям і "1", і "2", і "3", і "4", прообразом точки 1 є множина $X^{-1}(\{1\})=H_1=\{"1","2","3","4"\}\in S$. Це означає, що статистична ймовірність (відносна частота) того, що функція $X(E)$ набуває значення 1, дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) попадання в підмножину $H_1=\{"1","2","3","4"\}\in S$, тобто дорівнює 0.10 (бо значення 1 функція $X(E)$ набуває тоді, коли на верхній грані кубика випадає одна з цифр "1", або "2", або "3", або "4").

Аналогічно прообразом точки 2 є одноелементна множина $X^{-1}(\{2\})=H_2=\{"5"\}\in S$, тому статистична ймовірність того, що $X(E)$ набуває значення 2, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "5" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.30. Прообразом точки 3 є одноелементна множина $X^{-1}(\{3\}) = H_3 = \{"6"\} \in S$, а тому статистична ймовірність того, що функція $X(E)$ набуває значення 3, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "6" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.60.

Тепер легко знайти статистичні ймовірності попадання значень $X(E)$ у різні підмножини G множини $X(\Omega) = \Omega_X = \{1, 2, 3\}$, $G \in S_X$. Очевидно, статистична ймовірність попадання значень $X(E)$:

– в підмножину $\{1,2\} \in S_X$ така сама, як статистична ймовірність попадання елементарних подій E в підмножину

$$X^{-1}(\{1,2\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{2\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"5"\} = \{"1","2","3","4","5"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.40;

– в підмножину $\{1,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1,3\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"6"\} = \{"1","2","3","4","6"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.70;

– в підмножину $\{2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{2,3\}) = X^{-1}(\{2\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"5"\} \cup \{"6"\} = \{"5","6"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.90;

– в підмножину $\{1,2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1, 2, 3\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{2\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"5"\} \cup \{"6"\} =$$
$$= \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega \in S,$$

тобто дорівнює 1.00.

Як бачимо, прообрази всіх підмножин $G \in S_X$ належать до простору подій S, тобто $X^{-1}(G) \in S$, коли $G \in S_X$, а тому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S / S_X -вимірною, тобто випадковою величиною.

При заданій дійсній функції $X(E)$ на просторі елементарних подій Ω часто як $X(\Omega)$ розглядають простір $R^1 = (-\infty, \infty)$, покладаючи при цьому $X^{-1}(x) = \varnothing$, якщо значення (точка) $x \in R^1$ не поставлене у відповідність жодній елементарній події $E \in \Omega$.

При цьому як сукупність S_X підмножин простору $R^1 = (-\infty, \infty)$ розглядають сукупність, породжену числовими проміжками та їх скінченними сумами (див. 1.4, вправа 2).

В такому разі дійсну функцію $X(E) \in R^1$, $E \in \Omega$, таку, що $X^{-1}((-\infty, x)) \in S$ для довільного $x \in R^1$, називають S*-вимірною функцією* або *випадковою величиною*. При цьому насправді мається на увазі S / S_X вимірна функція, хоч сукупність S_X явно і не вказується.

Надалі, якщо не сказано іншого, під випадковою величиною розумітимемо S-вимірну функцію.

Зауважимо, що коли простір подій S містить всі підмножини множини Ω, то тоді будь-яка дійсна функція, задана на Ω, буде S-вимірною, тобто випадковою величиною.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ той самий, що і в прикладі 16.1, а на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ задано функцію $X(E)$ наступним чином: $X(E) = 1$, якщо $E \in \{"1","3","5"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає непарна цифра, і $X(E) = 2$, якщо $E \in \{"2","4","6"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає парна цифра (Рис. 16.2).

В цьому випадку $\Omega_X = X(\Omega) = \{1, 2\}$.

Розглянемо таку сукупність S_X підмножин G множини $X(\Omega) = \{1,2\}$: $S_X = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}$.

Оскільки $X^{-1}(\{1\}) = \{"1","3","5"\} \overline{\in} S$, так само, як і $X^{-1}(\{2\}) = \{"2","4","6"\} \overline{\in} S$, то в даному прикладі функція $X(E)$, задана на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, не є S/S_X-вимірною, тобто не є випадковою величиною. Для так заданої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, на заданому ймовірнісному просторі $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ неможливо визначити статистичну ймовірність (відносну частоту) $P_{nX}^*(\{1\}) = P_n^*(X^{-1}(\{1\})) = P_n^*(\{"1","3","5"\})$ чи $P_{nX}^*(\{2\}) = P_n^*(X^{-1}(\{2\})) = P_n^*(\{"2","4","6"\})$, бо множини $X^{-1}(\{1\}) = \{"1","3","5"\}$ і $X^{-1}(\{2\}) = \{"2","4","6"\}$ виявляються невимірними відносно заданої ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A \in S$.

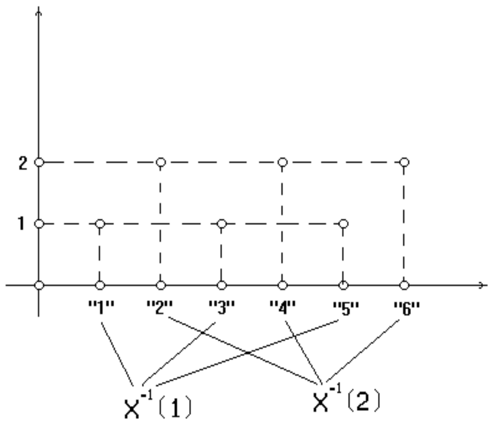


Рис. 16.2

Якщо ж задати таку сукупність S_{1X} підмножин G множини $X(\Omega)$: $S_{1X} = \{\varnothing, \{1,2\}\}$, тоді розглянута функція $X(E)$, $E \in \Omega$, виявляється S/S_{1X} вимірною, а значить випадковою величиною, бо $X^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in S$, $X^{-1}(\{1,2\}) = \Omega \in S$ і

$$P_{nX}^{*}(\varnothing) = P_n^{*}(X^{-1}(\varnothing)) = P_n^{*}(\varnothing) = 0\,,$$

$$P_{nX}^{*}(\{1,2\}) = P_n^{*}(X^{-1}(\{1,2\})) = P_n^{*}(\Omega) = 1\,.$$

Вправа 2. Перевірити чи правильні твердження:

1. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною функцією, то для кожного її значення x_0 множина $X^{-1}(x_0)$ є подією.
2. Твердження 1 є правильним, коли $X(E)$, $E \in \Omega$, є S-вимірною функцією.
3. Якщо для кожного значення x_0 множина $X^{-1}(x_0)$ є подією, то $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною.
4. Твердження 3 є правильним, коли множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$, не більше ніж зчисленна.
5. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною функцією для деякого простору подій S_X, то ця функція є й S-вимірною.
6. Твердження, обернене до 5, є правильним.
7. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, – S-вимірна функція і Ω_X – скінченна або зчисленна множина , то $X(E)$ – S/S_X-вимірна функція для будь якого простору S_X.

1. Вправа 1 показує, що твердження 1 не є правильним.
2. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S-вимірною, то тоді для кожного проміжку $[a;b)$ множина $X^{-1}([a;b)) \in S$, тобто є подією. Тому для будь-якого значення x_0 маємо

$$(X = x_0) = X^{-1}\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(x_0 \le X < x_0 + \frac{1}{n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}([x_0; x_0 + \frac{1}{n})) \in S\,,$$

тобто є подією як переріз подій.

Отже, твердження 2 є правильним.

3. Нехай $A \subset (0;1)$ і A – не має довжини, тобто не є вимірною за Лебегом; $X(E) = 1 + E$, коли $E \in [0;1] \setminus A$, і $X(E) = 1 - E$, коли $E \in A$. Тому $(X < 1) = X^{-1}((-\infty;1)) = \{E \in [0;1] : X(E) < 1\} = A \notin S$, якщо S – сукупність підмножин відрізка $\Omega = [0;1]$, що мають довжину (вимірних за Лебегом).

Це означає, що $X(E)$ не є випадковою величиною (S-вимірною функцією). Разом з тим для кожного значення x_0 маємо два випадки:

а) $x_0 \ge 1$ і тоді $X(E) = 1 + E = x_0 \Leftrightarrow E = x_0 - 1$, або

б) $x_0 < 1$ і тоді $X(E) = 1 - E = x_0 \Leftrightarrow E = 1 - x_0$.

У будь-якому випадку $X^{-1}(x_0)$ складається з однієї точки, а тому має нульову довжину, тобто $P(X^{-1}(x_0)) = 0\ \forall x_0 \in \Omega_X$.

Отже, твердження 3 не є правильним.

4. Якщо $\Omega_X = \{x_1, x_2, ...\}$ – не більш ніж зчисленна множина і для кожної точки x_k множина $X^{-1}(x_k)$ є подією, то для будь-якої множини $B \in S_X$ її прообраз $X^{-1}(B)$ можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зчисленної кількості подій:

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{x_k \in B} X^{-1}(x_k),\ X^{-1}(x_k) \in S .$$

Тому $X^{-1}(B) \in S$ і $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, тобто твердження 4 є правильним.

5. Твердження 5 не є правильним в силу того, що твердження 1 не є правильним, а твердження 2 є правильним.

6. Твердження 6 є правильним, оскільки S_X може бути простором, породженим сукупністю проміжків $[a;b)$.

7. Твердження 7 є правильним в силу того, що правильні твердження 2 і 4.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, кожна елементарна подія $E \in \Omega$ має єдиний образ.

2. Для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, кожне число $x \in R$ має прообраз $X^{-1}(x)$, що містить лише один елемент.

3. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega = [a;b]$, є зростаючою, то прообраз $X^{-1}(x)$ містить лише один елемент для кожного $x \in X([a;b])$.

4. Якщо функція $X(E)$ визначена на просторі Ω елементарних подій, то вона є випадковою величиною.

5. Твердження, обернене до 4, є правильними.

6. Дійсна функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S-вимірною або випадковою величиною, коли множина розв'язків нерівності $X(E) < x$, тобто $X^{-1}((-\infty, x))$, є подією з простору S для будь-якого числа x.

7. Якщо простір подій S не є найширшим простором для даного простору Ω елементарних подій, то існує функція $X(E)$, $E \in \Omega$, що не є випадковою величиною.

2. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, такі що: 1) $X(E)$ є випадковою величиною; 2) $X(E)$ не є випадковою величиною.

3. Нехай задано дискретний розподіл статистичних ймовірностей: $P_n^*(x_i)$, $i \in \overline{1, k}$, причому кожна елементарна подія $E = x_i$ визначає певну подію $\{E\} = \{x_i\} \in S$.

1. Довести, що $Y(E) = P_n^*(E)$, $E \in \Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, є випадковою величиною.

2. Чи буде $Y(E) = P_n^*(E)$ випадковою величиною, коли множина $\{x_i\}$ не є подією для деякого $i \in \overline{1, k}$?

4. Нехай задано неперервний розподіл статистичних ймовірностей з щільністю розподілу $f_n^*(x), x \in R$. Чи є $f_n^*(x)$ випадковою величиною?

5. Чи є випадковою величиною функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей?

6. Навести приклади дискретних та неперервних просторів Ω елементарних подій, відповідних ймовірнісних просторів і функцій $X(E)$, $E \in \Omega$, таких, що є випадковими величинами, і таких, що не є випадковими величинами.

7. Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) є таким, що простір подій S є найширшим з можливих. Довести, що будь-яка функція $X(E), E \in \Omega$, є випадковою величиною.

8. Нехай у ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) простір подій S не є найширшим з можливих. Довести, що існує функція $X(E), E \in \Omega$, така, що не є випадковою величиною.

У задачах **9-16** вважається, що ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) є заданим.

9. Нехай $A \subset \Omega$, а

$$X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A, \\ -1, \text{ коли } E \notin A. \end{cases}.$$

Визначити, коли функція $X(E), E \in \Omega$: 1) є випадковою величиною; 2) не є випадковою величиною; 3) обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

10. Функція $X(E) = E^2, E \in R$, причому кожен проміжок $< \alpha; \beta >$ є подією.

1. Чи є дана функція випадковою величиною?
2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

11*. 1. Довести, що кожна неперервна функція $Y = f(x)$, задана на проміжку $(a; b) = \Omega$, є випадковою величиною (S-вимірною функцією), коли кожний проміжок є подією.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини Y.

12. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$ – простір елементарних подій. Визначити, коли функція $X(E)$, $E \in \Omega$: 1) буде випадковою величиною; 2) не буде випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

13. Нехай статистична ймовірність того, що при пострілі з лука відбувається влучення, дорівнює $\frac{1}{2}$, а X – кількість влучень при трьох пострілах.

1. Знайти: 1) область визначення величини X; 2) множину значень цієї величини; 3) простір подій S, для якого X є випадковою величиною; 4) простір подій S, для якого X не є випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

14. Статистична ймовірність того, що автомат для розміну монет спрацьовує при опусканні монети номіналом 1 грн., дорівнює 0,97. Нехай X – кількість монет, опущених конкретною людиною в автомат до його першого спрацювання.

1. Знайти: 1) область визначення величини X; 2) множину значень цієї величини; 3) простір подій S, для якого X є випадковою величиною; 4) простір подій S, для якого X не є випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

15. Довести, що коли $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, (S-вимірною функцією), то для кожного її значення x_0 множина $(X = x_0) = \{E \in \Omega : X(E) = x_0\} = X^{-1}(x_0)$ є подією, а тому можна обчислити відповідну статистичну ймовірність $P_n^*(X = x_0) = P(X^{-1}(x_0))$.

16*. Нехай функція $X(E)$, $E \in \Omega$, має не більш ніж зчисленну множину значень. Довести, що вона є випадковою величиною (S-вимірною функцією) тоді й тільки тоді, коли для кожного її значення x_0 множина $X^{-1}(x_0) = \{E : X(E) = x_0\} = (X = x_0)$ є подією.

17. Нехай функція $X(E)$, $E \in \Omega_1^m$, – кількість відбувань події $A \subset \Omega_1$ у m незалежних випробуваннях.

1. Яких значень набуває ця функція?

2. Яким повинен бути ймовірнісний простір $(\Omega_1^m, S_m, \widetilde{P}_m^*)$, щоб ця функція була випадковою величиною?

3. Для кожного значення x_0 даної функції знайти подію $X^{-1}(x_0)$ та статистичну ймовірність цієї події $\widetilde{P}_m^*(X^{-1}(x_0))$.

4. Чи можна змінити простір подій S_m або ймовірнісну міру $\widetilde{P}_m^*$ так, щоб функція $X(E)$, $E \in \Omega_1^m$ вже не була випадковою величиною?

1.17. Прості випадкові величини

Випадкову величину (S/S_X-вимірну функцію $X = X(E)$, $E \in \Omega$) називають *простою*, якщо множина значень цієї величини скінченна, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $m \in N$, де числа x_k попарно різні, а $X^{-1}(\{x_i\}) \in S$ для довільного $x_i \in \Omega_X$, $i \in \overline{1, m}$.

Прості випадкові величини надзвичайно важливі, оскільки за їх допомогою можна досліджувати й випадкові величини з нескінченною множиною значень.

Приклади простих випадкових величин

1. Якщо функція $X(E) = c = const$, $E \in \Omega$, то її називають *сталою випадковою величиною*. Множина значень сталої випадкової величини складається з одного елемента c, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{c\}$. При цьому $X^{-1}(c) = \Omega$.

2. Якщо A – випадкова подія і

$$X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A, \\ 0, \text{ коли } E \notin A, \end{cases}$$

то цю випадкову величину називають *індикатором події* A. Множина значень цієї простої випадкової величини складається з двох елементів 1 і 0, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{0,1\}$, при цьому S_X містить всі підмножини множини Ω_X, $X^{-1}(0) = \overline{A}$, $X^{-1}(1) = A$.

3. Якщо X – кількість очок на грані грального кубика, якою кубик падає догори після однократного підкидання, то X – проста випадкова величина з можливими значеннями 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{1,2,3,4,5,6\}$. При цьому $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, $X("k") = k$, $k \in \overline{1, 6}$, кожна множина $\{"k"\}$, $k \in \overline{1, 6}$, є подією, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

4. Кількість $k = k_m(A)$ відбувань події A в серії із m випробувань – проста випадкова величина, що може набувати значень 0, 1, 2, …, $m-1$, m. При цьому $\Omega_X = \{0, 1, 2, ..., m\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

$$\Omega = \Omega_1^m = \{(E_1, E_2, ..., E_n\} : E_k = A \text{ або } \overline{A}, k \in \overline{1,m}\},$$

$X((E_1, E_2, ..., E_m)) = k_m$ – кількість E_i, що дорівнюють A, серед усіх $E_i, i \in \overline{1,m}$, і кожна множина $\{E\} \subset \Omega_1^m$ є подією з імовірнісною мірою $\tilde{P}_m^*(\{E\}) = (P_n^*(A))^k (1 - P_n^*(A))^{m-k}$, $k \in \overline{0,m}$, де k – кількість координат E_k, що дорівнюють A. Тому

$$\tilde{P}_m^*(X^{-1}(k)) = C_m^k (P_n^*(A))^k (1 - P_n^*(A))^{m-k}, \quad k = \overline{0,m}.$$

5. Статистична ймовірність $P_m^*(A)$ події A, визначена за результатами серії із m випробувань – проста випадкова величина $X(E)$, що може набувати значень $\frac{0}{m}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, …, $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m}{m}$. При цьому $\Omega = \Omega_1^m$ і $\tilde{P}_m^*$ такі, як і у прикладі 4, а $X(E) = X((E_1, E_2, ..., E_m)) = \frac{k}{m}$, де k – кількість E_i, що дорівнюють A, серед усіх $E_i, i \in \overline{1,m}$.

Спостережене значення випадкової величини $P_m^*(A)$ позначатимемо $P_{m\ cn}^*(A)$.

Якщо $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$, – *прості випадкові величини, то їх сума* $Z(E) = X(E) + Y(E)$, *різниця* $Z(E) = X(E) - Y(E)$, *добуток* $Z(E) = X(E) \cdot Y(E)$, *частка* $Z(E) = X(E)/Y(E)$, $E \in \Omega$, – *прості випадкові величини. Сума і добуток довільної скінченної кількості простих випадкових величин* $X = X_k(E)$, $E \in \Omega$, $k \in \overline{1,m}$, *також є простою випадковою величиною*.

Узагальненням цього є твердження про те, що *коли* $X_k = X_k(E)$ – *прості випадкові величини для* $k \in \overline{1,m}$, *то будь-яка дійсна функція* $Y = f(X_1(E), X_2(E), \ldots, X_m(E))$, $E \in \Omega$, *також є простою випадковою величиною за умови, що* $(X_1(E), \ldots, X_m(E))$ *належить області визначення* $D(f)$ *функції* f *для кожного* $E \in \Omega$. *Зокрема, якщо* $X = X(E)$ – *проста випадкова величина, то* $X^m(E)$, $\sqrt[m]{X(E)}$ (*для парного* m $X(E)$ *повинна бути невід'ємною*), $e^{X(E)}$, $\ln X(E)$ (*коли* $X(E) > 0$ *для* $E \in \Omega$), $\sin X(E)$, $|X(E)| = \sqrt{X^2(E)}$, $\cos X(E)$ *тощо також є простими випадковими величинами*.

Прості випадкові величини X та Y називають *незалежними відносно міри* P_{nX}^*, коли для будь-яких чисел $a \in X(\Omega)$ та $b \in Y(\Omega)$ події $X^{-1}(a)$ та $Y^{-1}(b)$ є незалежними відносно міри P_n^* з відповідного ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), тобто $P_n^*(X^{-1}(a) \cap Y^{-1}(b)) = P_n^*(X^{-1}(a)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(b))$. В іншому разі X та Y називають *залежними випадковими величинами.*

Залежність чи незалежність випадкових величин суттєво визначається статистичною ймовірністю (*ймовірнісною мірою*) P_n^*.

Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_m$ називаються *попарно незалежними*, коли будь-які дві з них є незалежними.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай $\Omega = [0;1)$, X – індикатор події $A = [0;\,0{,}5) \subset \Omega = [0;1)$, Y – індикатор події $B = [0{,}25;1)$.

Тоді $X^{-1}(1) = A = [0;\,0{,}5)$, $X^{-1}(0) = \overline{A} = [0{,}5;1)$;

$$Y^{-1}(1) = B = [0{,}25;1),\ Y^{-1}(0) = \overline{B} = [0;\,0{,}25).$$

Якщо $Z(E) = X(E) + Y(E)$, то

а) $Z(E) = 2$, коли $E \in X^{-1}(1)$ і $E \in Y^{-1}(1)$ тобто

$$Z^{-1}(2) = X^{-1}(1) \cap Y^{-1}(1) = [0;\,0{,}5) \cap [0{,}25;1) = [0{,}25;\,0{,}5).$$

б) $Z(E) = 1$, коли $E \in X^{-1}(1) \cap Y^{-1}(0)$ або $E \in X^{-1}(0) \cap Y^{-1}(1)$, тобто

$$Z^{-1}(1) = (X^{-1}(1) \cap Y^{-1}(0)) \cup (X^{-1}(0) \cap Y^{-1}(1)) =$$
$$= ([0; 0,5) \cap [0; 0,25)) \cup ([0,5; 1) \cap [0,25; 1)) = [0; 0,25) \cup [0,5; 1).$$

в) $Z(E) = 0$, коли $E \in X^{-1}(0)$ і $E \in Y^{-1}(0)$, тобто

$$Z^{-1}(0) = X^{-1}(0) \cap Y^{-1}(0) = [0,5; 1) \cap [0; 0,25) = \varnothing .$$

Таким чином,

$$Z(E) = X(E) + Y(E) = \begin{cases} 2, \text{ коли } E \in [0,25; 0,5), \\ 1, \text{ коли } E \in [0; 0,25) \cup [0,5; 1). \end{cases}$$

Вправа 2. 1. Нехай X та Y із вправи 1.

Якщо $P_n^*([a, b)) = b - a,\ [a, b) \subset [0,1),$ то

$$P_n^*(X^{-1}(1) \cap Y^{-1}(1)) = 0,5 - 0,25 \neq P_n^*(X^{-1}(1)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(1)) = 0,5 \cdot 0,75 = 0,375.$$

Це означає, що випадкові величини X та Y відносно такої міри P_n^* залежні.

2. Нехай P_n^* визначена так, що $P_n^*([0,25; 0,5)) = 1$. Тоді і

$$P_n^*([0; 0,5)) = P_n^*([0,25; 1)) = 1,\ P_n^*([0; 0,25)) = P_n^*([0,5; 1)) = 0 .$$
$$P_n^*(X^{-1}(1) \cap Y^{-1}(1)) = 1 = P_n^*(X^{-1}(1)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(1)) = 1 \cdot 1,$$
$$P_n^*(X^{-1}(1) \cap Y^{-1}(0)) = 0 = P_n^*(X^{-1}(1)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(0)) = 1 \cdot 0,$$
$$P_n^*(X^{-1}(0) \cap Y^{-1}(1)) = 0 = P_n^*(X^{-1}(0)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(1)) = 0 \cdot 1,$$
$$P_n^*(X^{-1}(0) \cap Y^{-1}(0)) = 0 = P_n^*(X^{-1}(0)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(0)) = 0 \cdot 0 .$$

Це означає, що випадкові величини X та Y незалежні відносно останньої міри P_n^*.

Вправа 3. 1. Якщо X і Y та P_n^* з вправи 2.2, а $Z(E) = 1$, коли $E \in \Omega$, то легко бачити, що X, Y та Z – попарно незалежні прості випадкові величини, оскільки стала випадкова величина з будь-якою випадковою величиною утворює пару незалежних величин, бо $Z^{-1}(1) = \Omega$.

2. Нехай проведено m незалежних випробувань і подія A_k означає відбування події A у k-му випробуванні. Тоді події A_k попарно незалежні, а тому індикатори цих подій $X_k = X_{A_k}(E)$, $k \in \overline{1,\ m}$, $E = (E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_m) \in \Omega_1{}^m$, також попарно незалежні стосовно міри $\tilde{P}_m^*$, оскільки $X_k^{-1}(1) = A_k$, $X_k^{-1}(0) = \overline{A}_k$, $k \in \overline{1, m}$ і тому

$$\tilde{P}_m^*(X_k^{-1}(a) \cap X_i^{-1}(b)) = \tilde{P}_m^*(X_k^{-1}(a)) \cdot \tilde{P}_m^*(X_i^{-1}(b)),$$

коли $k \neq i$, $a \in \{0; 1\}$ і $b \in \{0; 1\}$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$, скінченна, то $X(E)$ є простою випадковою величиною.

2. Твердження, обернене до 1, є правильним.

3. Кожна випадкова величина є простою.

4. Існують випадкові величини, що не є простими.

5. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega$, така, що $P_n^*(\{E \in \Omega : X(E) \neq 1\}) = 0$, то ця функція є випадковою величиною.

6. Функція $X(E)$, $E \in \Omega$, з твердження 5 є простою випадковою величиною.

7. Якщо існують події $A_k \subset \Omega,\ k \in \overline{1,s}$, для яких $\sum_{k=1}^{s} A_k = \Omega$ і $X(E) = c_k$, коли $E \in A_k$, $k \in \overline{1,s}$, то $X(E)$, $E \in \Omega$, – проста випадкова величина.

8. Якщо $X_1(E) + X_2(E),\ E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то $X_1(E)$ і $X_2(E)$ – прості випадкові величини.

9. Твердження, обернене до 8, є правильним.

10. Для будь-якої простої випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, функція $Y(E) = \sqrt{X(E)}$ є простою випадковою величиною.

11. Випадкові величини $X_1(E)$ та $X_2(E)$, $E \in \Omega$, незалежні, коли $P_n^*(X_1^{-1}(a) \cap X_2^{-1}(a)) = P_n^*(X_1^{-1}(a)) \cdot P_n^*(X_2^{-1}(a))$ для деякого числа a.

12. Залежність випадкових величин визначається ймовірнісною мірою, тобто відносно однієї міри випадкові величини можуть бути залежними, а відносно іншої – незалежними.

13. Існує ймовірнісний простір, для якого будь-які дві випадкові величини є незалежними.

14. Прості випадкові величини $X_1(E)$ та $X_2(E)$, $E \in \Omega$, є незалежними тоді й тільки тоді, коли вони *майже сталі*, тобто існують сталі c_i, для яких $P_n^*(\{E \in \Omega : X_i(E) \neq c_i\}) = 0$, $i \in \overline{1,2}$.

2. Нехай X_1 – індикатор події $A = [0;1] \subset R = \Omega$, а X_2 – індикатор події $B = [1;2] \subset \Omega$. Знайти: суму, різницю, добуток і частку X_1 та X_2.

3. Навести приклад випадкової величини, що не є простою.

4. Навести приклад ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) і функції $X(E),\ E \in \Omega$, що має скінченну множину значень, проте не є простою випадковою величиною.

5. Довести, що коли $X(E), E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то й $|X(E)|, E \in \Omega$, також проста випадкова величина. Перевірити, чи правильне обернене твердження.

6*. 1. Довести, що функція $X(E),\ E \in \Omega$ є простою випадковою величиною тоді й тільки тоді, коли існує скінченна кількість попарно несумісних подій $A_k \subset \Omega,\ k \in \overline{1,n}$, така, що $\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, на кожній з яких функція $X(E)$ є сталою.

2. Визначити, чи обов'язково $X(A_k) \neq X(A_i)$, коли $k \neq i$.

3. Чи можна у твердженні 1 опустити умову попарної несумісності подій A_k, $k \in \overline{1,n}$?

7. Відомо, що прості випадкові величини $X(E)$ та $Y(E),\ E \in \Omega$ набувають лише значень 0 та 1. Чи обов'язково сума цих випадкових величин набуває значень: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0 або 1; 5) 0 або 2; 6) 1 або 2; 7) 0 або 1, або 2?

8. Нехай дано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), подія $A \in S$, і проведено три незалежних випробування, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$ та не відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - p = q$. Нехай також X_k – випадкова величина, що є індикатором відбування події A у k-му випробуванні, $k \in \overline{1,3}$.

1. Вказати область визначення кожної випадкової величини X_k та її значення у кожній точці області визначення.

2. Знайти усі можливі значення випадкової величини $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ та статистичні ймовірності цих значень.

3. З'ясувати зв'язок випадкової величини Y із статистичною ймовірністю $P_3^*(A)$.

9. 1. З'ясувати, які функції $X(E),\ E \in \Omega$, є простими випадковими величинами:

1) $X(E) = \begin{cases} 1, & \text{коли } E \in A; \\ -1, & \text{коли } E \notin A, \end{cases}$

A – подія з імовірнісного простору (Ω, S, P_n^*);

2) $X(E) = E^2$, $E \in (-\infty; +\infty) = \Omega$ і кожен проміжок є подією;

3) $X(E) = \begin{cases} 1, & \text{коли } E \in A; \\ -1, & \text{коли } E \notin A, \end{cases}$

A не є подією;

4) X – кількість влучень при трьох пострілах, в кожному з яких влучення відбувається з статистичною ймовірністю 0.8;

5) X – кількість підкидань монети до першого випадання герба;

6) $X(E)$, $E \in \Omega$, – довільна випадкова величина, а Ω є дискретною множиною;

7) $X(E)$, $E \in \Omega_1^m$, – кількість відбувань події A в m незалежних випробуваннях.

2. Розподілом статистичних ймовірностей на множині значень простої випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, для якої $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, а $P(X = x_k) = p_k$, $k \in \overline{1, m}$, називається таблиця

x_k	x_1	x_2	$\dots$	x_m
p_k^*	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_m^*

Вказати розподіл статистичних ймовірностей на множині значень кожної простої випадкової величини із завдання 1) – 7).

10. Довести, що коли $X(E)$, $E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то для кожного її значення x_0 існує $P_m^*(X^{-1}(x_0))$, де $X^{-1}(x_0)) = \{E : E \in \Omega, X(E) = x_0\}$. Перевірити, чи є правильним обернене твердження.

11. Довести, що коли функції $X_k(E)$, $E \in \Omega$, $k \in N$, – прості випадкові величини, то такими є й функції: 1) $\sum_{k=1}^{m} X_k$; 2) $\prod_{k=1}^{m} X_k$; 3) $X_1 - X_2$; 4) X_1 / X_2 ; 5) $f(X_1)$, де f – довільна функція, область визначення якої містить множину $X_1(\Omega)$.

12. Чи може розподіл статистичних ймовірностей на множині значень простої випадкової величини мати вигляд:

1)

x_k	0	1	2	3
p_k	0,2	0,1	0,4	0,5

2)

x_k	0	1	2	3
p_k	0	0,2	0,3	0,5

3)

x_k	0	1	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	C

13. Нехай випадкова величина X – кількість появ герба при трьох підкиданнях монети. Знайти розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини, якщо при кожному підкиданні статистична ймовірність появи герба: 1) є сталою і дорівнює $\frac{1}{2}$; 2) не є сталою, а набуває, наприклад, значень 0,51; 0,49; 0,5.

14. Нехай X – можлива відносна частота відбування події A у чотирьох незалежних випробуваннях X. Знайти область визначення і множину значень цієї величини, а також розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини, якщо у кожному випробуванні статистична ймовірність відбування події A є: 1) однаковою і дорівнює p; 2) не є однаковою, а набуває, наприклад, значень p_1, p_2, p_3 та p_4.

15. Розподіли статистичних ймовірностей на множинах значень випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, мають вигляд:

x_k	-1	0	1
p_k	0,2	0,3	0,5

y_k	0	1	2
q_k	0,1	0,3	0,6

Визначити розподіли статистичних ймовірностей на множинах значень випадкових величин: 1) $X+Y$; 2) $X \cdot Y$ у випадку, коли X і Y а) незалежні випадкові величини; б) залежні випадкові величини.

1.18. Числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей на множинах значень простих випадкових величин

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) та просту випадкову величину $X(E)$, $E \in \Omega$, множина значень якої $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Тоді за означенням *статистичним математичним сподіванням* $M_n^*(X)$ та *статистичною дисперсією* $D_n^*(X)$ цієї випадкової величини є числа:

$$M_n^*[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)), \qquad (18.1)$$

$$D_n^*[X] = M_n^*[(X - M_n^*(X))^2] = \sum_{k=1}^{m} (x_k - M_n^*(X))^2 P_n^*(X^{-1}(x_k)). \qquad (18.2)$$

Число $M_n^*[X]$ називають також *середнім статистичним значенням* простої випадкової величини X, а число $D_n^*[X]$ – *мірою розсіювання* статистичних ймовірностей на множині значень простої випадкової величини навколо середнього статистичного значення.

Приклад 18.1.

1. Якщо $X(E) = c$, $E \in \Omega$, – стала випадкова величина, то

$$\Omega_X = X(\Omega) = \{c\},\ S_X = \{\varnothing, \{c\}\},\ X^{-1}(c) = \Omega,\ P_n^*(X^{-1}(c)) = P_n^*(\Omega) = 1$$

і тому

$$M_n^*[c] = c \cdot 1 = c, \qquad D_n^*[c] = M_n^*[(c-c)^2] = M_n^*[0] = 0.$$

2. Якщо $X_A(E)$, $E \in \Omega$, – індикатор події A, то

$$\Omega_X = X(\Omega) = \{1, 0\},\ S_X = \{\varnothing, \{1\}, \{0\}, \{0,1\}\},\ X^{-1}(1) = A,$$

$$X^{-1}(0) = \overline{A},\ P_n^*(X^{-1}(1)) = P_n^*(A) = p,\ P_n^*(X^{-1}(0)) = P_n^*(\overline{A}) = 1 - p.$$

Тому

$$M_n^*[X_A] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p\,,$$

$$D_n^*[X_A] = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = p(1-p)(1-p+p) = p(1-p)\,.$$

Статистичне математичне сподівання та статистична дисперсія простої випадкової величини мають такі *основні властивості*.

1. *Статистичне математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій* (див. приклад 18.1):

$$M_n^*[c] = c\,.$$

2. *Статистична дисперсія сталої дорівнює нулеві* (див. приклад 18.1):

$$D_n^*[c] = 0\,.$$

3. *Сталу можна виносити за знак статистичного математичного сподівання простої випадкової величини*:

$$M_n^*[cX] = cM_n^*[X]\,.$$

4. *За знак статистичної дисперсії стала виноситься в квадраті*:

$$D_n^*\left[cX\right] = c^2 D_n^*\left[X\right].$$

5. *Статистичне математичне сподівання суми простих випадкових величин дорівнює сумі їх статистичних математичних сподівань*:

$$M_n^*[X+Y] = M_n^*[X] + M_n^*[Y]\,.$$

За методом математичної індукції можна довести, що

$$M_n^*[\sum_{i=1}^{k} X_i] = \sum_{i=1}^{k} M_n^*[X_i],\ k \in N\,.$$

6. *Статистичне математичне сподівання лінійної комбінації простих випадкових величин X та Y дорівнює цій лінійній комбінації їх статистичних математичних сподівань*:

$$M_n^*[aX + bY] = aM_n^*[X] + bM_n^*[Y]\,.$$

7. *Якщо* $X[E] \geq 0,\ E \in \Omega$, то $M_n^*[X] \geq 0$.

8. *Якщо* $X(E) \geq Y(E)\,,\ E \in \Omega$, то $M_n^*[X] \geq M_n^*[Y]$.

9. *Статистичне математичне сподівання добутку незалежних простих випадкових величин X і Y дорівнює добуткові їх математичних сподівань*:

$$M_n^*[X \cdot Y] = M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y]\,.$$

10. *Статистична дисперсія суми незалежних простих випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх дисперсій*:

$$D_n^*[X+Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]\,.$$

11. *Статистична дисперсія лінійної комбінації* (*з коефіцієнтами a і b*) *незалежних простих випадкових величин X*

та Y дорівнює лінійній комбінації їх статистичних дисперсій з коефіцієнтами a^2 і b^2:

$$D_n^*[aX+bY]=a^2 D_n^*[X]+b^2\ D_n^*[Y].$$

Дана властивість має місце для будь-якої скінченної кількості попарно незалежних випадкових величин X_j, $j\in\overline{1,r}$:

$$D_n^*\left[\sum_{j=1}^{r}a_j X_j\right]=\sum_{j=1}^{r}a_j^2\ D_n^*[X_j].$$

12. Якщо X – невід'ємна проста випадкова величина, число $\varepsilon>0$ і множина $A_\varepsilon=\{E:E\in\Omega, X(E)\ge\varepsilon\}$, то A_ε є подією, для якої має місце нерівність П.Л. Чебишова:

$$P_n^*(A_\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon}M_n^*[X].$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Довести, що $M_n^*[cX]=cM_n^*[X]$.

Справді, якщо $\Omega_X=X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ ...,x_s\}$, а $Y=cX$, то для $c\ne 0$

$$\Omega_Y=Y(\Omega)=\{cx_1,\ cx_2,\ ...,cx_s\},\ Y^{-1}(cx_i)=X^{-1}(x_i),$$
$$P_n^*(Y^{-1}(cx_i))=P_n^*(X^{-1}(x_i)),\ i=\{1,2,\ldots,s\},$$

тому

$$M_n^*[Y]=M_n^*[cX]=\sum_{i=1}^{s}cx_iP_n^*(X^{-1}(x_i))=c\sum_{i=1}^{s}x_iP_n^*(X^{-1}(x_i))=cM_n^*[X].$$

Вправа 2. Довести властивість 10 дисперсії.

За означенням статистичної дисперсії

$$D_n^*[X+Y]=M_n^*[(X+Y-M_n^*[X+Y])^2]=$$
$$=M_n^*[((X-M_n^*[X])+(Y-M_n^*[Y]))^2]=$$
$$=M_n^*[(X-M_n^*[X])^2+2(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])+(Y-M_n^*[Y])^2]=$$
$$=M_n^*[(X-M_n^*[X])^2+2M_n^*[(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])]+$$
$$+M_n^*[(Y-M_n^*[Y])^2]]=D_n^*[X]+D_n^*[Y],$$

оскільки

$$M_n^*[(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])]=$$
$$=M_n^*[X\cdot Y-YM_n^*[X]-XM_n^*[Y]+M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]=$$
$$=M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]-M_n^*[Y]\cdot M_n^*[X]-M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]+M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]=0,$$

бо X і Y незалежні прості випадкові величини.

Вправа 3. Довести нерівність П.Л. Чебишова.

Якщо

$$\Omega_X=X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\},\text{ де } 0\le x_1<x_2<\ldots<x_m,$$

то для фіксованого $\varepsilon > 0$ знайдемо найменший номер n_0, для якого $x_{n_0} \geq \varepsilon$. Тоді $x_k \geq \varepsilon$, коли $k \geq n_0$, а множина $A_\varepsilon = \bigcup_{k=n_0}^{m} X^{-1}(x_k)$ і тому є подією. При цьому

$$M_n^*[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)) \geq \sum_{k=n_0}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)) \geq \varepsilon \sum_{k=n_0}^{m} P_n^*(X^{-1}(x_k)) =$$

$$= \varepsilon P_n^*(\bigcup_{k=n_0}^{m}(X^{-1}(x_k)) = \varepsilon P_n^*(A_\varepsilon).$$

Отже,

$$M_n^*[X] \geq \varepsilon P_n^*(A_\varepsilon), \text{тобто } P_n^*(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X].$$

Зауваження. Подію A_ε, яка полягає у тому, що випадкова величина X набуває значення, не меншого за ε, позначають також $(X \geq \varepsilon)$, а тому нерівність П.Л. Чебишова часто записують у вигляді $P_n^*(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X]$. Зокрема,

$$P_n^*(|X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon) =$$

$$= P_n^*((X - M_n^*[X])^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M_n^*[(X - M_n^*[X])^2] = \frac{1}{\varepsilon^2} D_n^*[X].$$

Нерівність

$$P_n^*(|X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_n^*[X]}{\varepsilon^2}$$

також називають нерівністю П.Л. Чебишова.

Вправа 4. Два гравці домовилися, що за результатом гри увесь призовий фонд забере той, хто перший виграє n партій. Проте за непередбачуваних обставин гру закінчили, коли першому гравцеві залишилося до перемоги виграти $n_1 = 3$ партій, а другому – $n_2 = 4$ партій. У якому співвідношенні вони повинні поділити призовий фонд, якщо статистична ймовірність виграшу у кожній партії для кожного гравця дорівнює $\frac{1}{2}$.

Побудуємо ймовірнісну модель для даної задачі. Випадковий експеримент полягає у тому, що гравці грають доти, поки перший гравець виграє 3 партії або другий виграє 4 партії.

Результатами експерименту будемо вважати впорядковані набори цифр 1 та 2, причому якщо на i-му місці стоїть 1 або 2, то це означає, що i-ту партію виграв відповідно перший або другий гравець. Кількість цифр у наборі визначає кількість зіграних партій. Тоді простір Ω елементарних подій складається з наборів:

3 партії: (1,1,1);
4 партії: (2,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (2,2,2,2);
5 партій: (2,1,1,2,1), (1,2,1,2,1), (1,1,2,2,1), (2,2,1,1,1), (2,1,2,1,1), (1,2,2,1,1), (2,2,2,1,2), (2,2,1,2,2), (2,1,2,2,2), (1,2,2,2,2);
6 партій: (2,2,2,1,1,1), (2,1,1,2,2,1), (1,2,1,2,2,1), (1,1,2,2,2,1), (2,2,1,1,2,1), (2,1,2,1,2,1), (1,2,2,1,2,1), (2,2,1,2,1,1), (2,1,2,2,1,1), (1,2,2,2,1,1), (2,2,2,1,1,2), (2,1,1,2,2,2), (1,2,1,2,2,2), (1,1,2,2,2,2), (2,2,1,1,2,2), (2,1,2,1,2,2), (1,2,2,1,2,2), (2,2,1,2,1,2), (2,1,2,2,1,2), (1,2,2,2,1,2).

Вважаючи результати партій, що пов'язані з кожною елементарною подією, незалежними подіями, дістанемо, що

$$P_n^*(1.1.1)=\frac{1}{8},\ P_n^*(E_1,E_2,E_3,E_4)=\frac{1}{16},\ P_n^*(E_1,E_2,E_3,E_4,E_5)=\frac{1}{32}$$

і $P_n^*(E_1,E_2,E_3E_4,E_5E_6)=\dfrac{1}{64}$, де $E_k=1$ або $E_k=2$ для кожного k.

Нехай подія A полягає у тому, що призовий фонд забирає перший гравець. Цій події сприяють 1 елементарна подія, що відповідає трьом партіям, 3 елементарні події, що відповідають чотирьом партіям, 6 елементарних подій, що відповідають п'яти партіям і 10 елементарних подій, що відповідають 6 зіграним партіям. Тому

$$P_n^*(A)=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{6}{32}+\frac{10}{64}=\frac{42}{64}.$$

Аналогічно

$$P_n^*(\overline{A})=\frac{1}{16}+\frac{4}{32}+\frac{10}{64}=\frac{22}{64}.$$

Розглянемо тепер випадкові величини, що є величиною виграшу кожного гравця:

$$X_1(E)=\begin{cases}S, \text{ коли } E\in A,\\ 0, \text{ коли } E\notin A,\end{cases}\quad X_2(E)=\begin{cases}S, \text{ коли } E\in \overline{A},\\ 0, \text{ коли } E\notin \overline{A},\end{cases}$$

де S – призовий фонд. Тоді математичне сподівання (сума, на яку доцільно сподіватися кожному гравцеві):

$$M[X_1]=S\cdot P_n^*(A)+0\cdot P_n^*(\overline{A})=\frac{42}{64}S,$$

$$M[X_2]=S\cdot P_n^*(\overline{A})+0\cdot P_n^*(A)=\frac{22}{64}S.$$

Це означає, що першому гравцеві доцільно сподіватися на $\dfrac{42}{64}$ від призового фонду, а другому – на $\dfrac{22}{64}$ від цього фонду.

У такому співвідношенні, тобто $\dfrac{42}{64}:\dfrac{22}{64}=22:11=2:1$, гравці й повинні поділити призовий фонд.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожна проста випадкова величина має статистичне математичне сподівання і статистичну дисперсію, які можна обчислити єдиним способом.

2. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то $D_n^*[X] = M_n^*[X^2] - (M_n^*[X])^2$.

3. Якщо X – проста випадкова величина і $P_n^*(\{E : E \in \Omega, X(E) \neq c\}) = 0$ для деякої константи c, то $M_n^*[X] = c$.

4. Якщо X – з твердження 3, то $D_n^*[X] = 0$.

5. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $M_n^*[XY] \neq M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y]$.

6. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $M_n^*[X \pm Y] = M_n^*[X] \pm M_n^*[Y]$.

7. Якщо $M_n^*[X] \geq M_n^*[Y]$, то $X \geq Y$.

8. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $D_n^*[X + Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]$.

9. Нерівність Чебишова має місце для будь-якої простої випадкової величини.

2. Знайти статистичне математичне сподівання і статистичну дисперсію випадкової величини X, якщо:

1. $X(E_i) = i$, коли $E_i = "i" \in \{"1", "2", "3", "4", "4", "5", "6"\} = \Omega$, а $P_n^*(E_i) = \dfrac{1}{6}$, $i \in \overline{1, 6}$; $i \in S_X$ для всіх i.

2. $\Omega_X = X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $P_n^*(x_i) = C_n^{x_i} (\frac{1}{2})^{x_i} (\frac{1}{2})^{n - x_i}$, $x_i \in \Omega_X$, $n = 5$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

3. $\Omega_X = X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X, $a = 1$,

$$P_n^*(x_i) = \frac{a^{x_i}}{x_i!} e^{-a}, \ x_i \in \Omega_X, \ i \in \overline{0, 9}, \ P_n^*(x_{10}) = 1 - \sum_{i=0}^{9} P_n^*(x_i).$$

3*. Нехай $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$, – прості випадкові величини, причому $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $\Omega_Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Довести, що:

1. $X(E) = \sum_{i=1}^{k} x_i I_{X^{-1}(x_i)}(E)$, $Y(E) = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{Y^{-1}(y_j)}(E)$, $E \in \Omega$, де $I_A(E)$ – індикатор події A.

2. X і Y – незалежні тоді й тільки тоді, коли $X_i = I_{X^{-1}(x_i)}$ та $Y_j = I_{Y^{-1}(y_j)}$ є незалежними для будь-яких $i \in \overline{1, k}$, $j \in \overline{1, m}$.

3. Випадкові величини $X_i = I_{X^{-1}(x_i)}$ та $Y_j = I_{Y^{-1}(y_j)}$ є незалежними тоді й тільки тоді, коли $M_n^*[X_i \cdot Y_j] = M_n^*[X_i] \cdot M_n^*[Y_j]$.

4. Якщо X і Y – незалежні, то й $(X+a)$ та $(Y+b)$ – незалежні для будь-яких чисел a і b.

4. Довести, що $D_n^*[X] \leq (\max\limits_{1\leq k\leq m} x_k - \min\limits_{1\leq k\leq m} x_k)^2$, коли $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

5. *Задача Паскаля.* Два гравці Γ_1 і Γ_2 домовилися, що за результатом гри усю суму грошей забере той, хто перший виграє 5 партій. Проте за непередбачуваних обставин гру закінчили, коли гравець Γ_1 виграв 4 партії, а гравець Γ_2 – 3 партії. У якому співвідношенні вони повинні поділити суму грошей, якщо статистична ймовірність виграшу кожного гравця у кожній партії дорівнює $\frac{1}{2}$?

6. Сформулювати і розв'язати *задачу Луки Пачолі* (1494 р.), яку можна дістати, замінивши у задачі Паскаля 5 на 3, 4 на 2, а 3 на 1.

7. Сформулювати і розв'язати *задачу П'єра Ферма* (1654), яку можна дістати, замінивши у задачі Паскаля 5 на довільне $n \geq 3$, 4 на $(n-2)$, а 3 на $(n-3)$.

8. Нехай проста випадкова величина $X(E)$, $E \in \Omega$, має m значень та рівномірний розподіл статистичних ймовірностей на множині її значень, тобто $P_n^*(X = x_k) = \frac{1}{m}$ для кожного значення x_k, $k \in \overline{1, m}$. Знайти статистичне математичне сподівання та статистичну дисперсію випадкової величини X.

9. Знайти $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$, коли X – проста випадкова величина, значення якої є:

1) кількість відбувань події A в m незалежних випробуваннях;

2) кількість бракованих виробів у партії з 2000 виробів, якщо навмання взятий виріб є бракованим із статистичною ймовірністю 0,01;

3) кількість пострілів до першого влучення або до закінчення набоїв, кількість яких дорівнює 5, якщо статистична ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює $p \in (0; 1)$.

10. Двоє стрільців незалежно один від одного зробили по одному пострілу у мішень. Нехай X – кількість влучень у мішень. Знайти $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$, коли статистична ймовірність влучення у мішень дорівнює 0,8 для першого стрільця і 0,7 – для другого.

11. Підкидається два гральних кубики і фіксується пара цифр, що випали на верхніх гранях кубиків. На сукупності Ω таких пар (i, j), $i \in \overline{1,6}$, $j \in \overline{1,6}$, визначена функція X, значеннями якої є числа $X(i, j) = i + j$. Всі пари $(i,\ j)$ виявилися статистично рівноможливими.

1. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), для якого X є випадковою величиною, та: 1) знайти розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини; 2) обчислити $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$; 3) для чисел $\varepsilon \in \{2, 6, 12\}$ знайти подію $A_\varepsilon = \{E : E \in \Omega, X(E) \ge \varepsilon\}$ та переконатися, що виконується відповідна нерівність Чебишова.

2. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), для якого X не є випадковою величиною.

12. На просторі Ω із завдання 11.1:

1) визначити дві випадкові величини X та Y;
2) знайти їх суму та добуток;
3) перевірити залежні чи ні ці випадкові величини;
4) перевірити, чи виконуються рівності:

а) $M_n^*[X+Y] = M_n^*[X] + M_n^*[Y]$; $D_n^*[X+Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]$;

б) $M_n^*[X \cdot Y] = M_n^*[X] M_n^*[Y]$; $D_n^*[XY] = D_n^*[X] D_n^*[Y]$.

13*. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і дві прості випадкові величини $X(E),\ E \in \Omega$ та $Y(E),\ E \in \Omega$. Довести *нерівність Коші-Буняковського*:

$$\left| M_n^*[XY] \right|^2 \le M_n^*[X^2] \cdot M_n^*[Y^2].$$

14*. За умов задачі **13** застосувати нерівність Коші-Буняковського до випадкових величин $(X - M_n^*[X])$ та $(Y - M_n^*[Y])$ і довести, що:

1) $M_n^*[(X - M_n^*[X])(Y - M_n^*[Y])] = M_n^*[XY] - M_n^*[X] M_n^*[Y]$;

2) $\left| \dfrac{M_n^*[XY] - M_n^*[X] M_n^*[Y]}{\sqrt{D_n^*[X]}\sqrt{D_n^*[Y]}} \right| \le 1.$

1.19. Закон великих чисел для статистичних ймовірностей

Нехай проводиться серія із m незалежних випробувань і нехай X_i – індикатор події A_i – появи події A в i-тому випробуванні із спостереженою статистичною ймовірністю $P^*_{m\,cn}(A) = p_m$. Очевидно X_i – проста випадкова величина, яка визначена на просторі $\Omega_1{}^m$ з мірою $\tilde{P}_m^*$, породженою мірою p_m (див. п. 1.15), і може набувати двох значень – 0 і 1, причому $X_i^{-1}(1) = A_i$, $X_i^{-1}(0) = \overline{A}_i$. При цьому $P_m^*(A) = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = X(E)$, $E = (E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_m) \in \Omega_1{}^m$, де кожне E_k дорівнює A або $\overline{A}$, а тому

$X(E)=P_m^*(A)$ також проста випадкова величина, визначена на просторі $\Omega_1{}^m$ з мірою $\tilde{P}_m^*$, а значеннями $P_m^*(A)$ є числа $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, 1$ – усі можливі значення статистичної ймовірності події A.

Одним з можливих значень $P_m^*(A)$ є число p_m. За допомогою міри $\tilde{P}_m^*$ можна оцінити можливість досить значного відхилення від числа p_m усіх інших значень статистичної ймовірності $P_m^*(A)$:

$$\tilde{P}_m^*(|\,P_m^*(A)-p_m\,|\ge\varepsilon)\le\frac{D_m^*[P_m^*(A)]}{\varepsilon^2}\le\frac{1}{4m\varepsilon^2} \qquad (19.1)$$

або

$$\tilde{P}_m^*(|\,P_m^*(A)-p_m\,|<\varepsilon)\ge 1-\frac{1}{4m\varepsilon^2}\,. \qquad (19.2)$$

Закон великих чисел для статистичних ймовірностей*: при досить великих m практично всі значення випадкової величини $P_m^*(A)$ групуються біля числа $M_m^*[P_m^*(A)]=p_m$. Тому, якщо числа p_m стабілізуються при досить великих m, тобто із збільшенням m числа p_m практично перестають змінюватись, то практично перестають змінюватись із збільшенням m і спостережені значення випадкової величини $P_m^*(A)$.*

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Довести нерівності 19.1 та 19.2.

У вправі 17.3.2 показано, що випадкові величини X_i попарно незалежні, а у прикладі 18.1.2 обчислено $M_m^*(X_i)=p_m$ і $D_m^*(X_i)=p_m(1-p_m)$, $i\in\overline{1,\,m}$.

Тому за властивостями статистичного математичного сподівання і статистичної дисперсії одержуємо:

$$M_m^*[X]=M_m^*[P_m^*(A)]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}M_m^*[X_i]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p_m=p_m\,.$$

$$D_m^*[X]=D_m^*[P_m^*(A)]=D_m^*\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i\right]=\left(\frac{1}{m}\right)^2 D_m^*\left[\sum_{i=1}^{m}X_i\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{m}\right)^2\sum_{i=1}^{m}D_m^*[X_i]\le\frac{m\cdot p_m(1-p_m)}{m^2}=\frac{p_m(1-p_m)}{m}\le\frac{1}{4m}\,,$$

бо $D_m^*[X_i] = p_m(1-p_m) \le \frac{1}{4}$.

Таким чином, $D_m^*[P_m^*(A)] \to 0$, коли $m \to \infty$.

Оскільки $|P_m^*(A) - p_m| = |X(E) - M_m^*[X]|$, $E \in \Omega_1{}^m$, то за нерівністю П.Л. Чебишова дістаємо

$$\tilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p_m| \ge \varepsilon) \le \frac{D_m^*[P_m^*(A)]}{\varepsilon^2} \le \frac{1}{4m\varepsilon^2}$$

або

$$\tilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p_m| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{4m\varepsilon^2}.$$

Вправа 2. Нехай проведено m незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$, і за цими умовами визначено ймовірнісний простір $(\Omega_1^m, \tilde{S}, \tilde{P}_m^*)$, де $\Omega_1^m = \{E = (E_1, \ldots, E_m) : E_k = A$ або $E_k = \overline{A},\ k \in \overline{1,m}\}$, для кожного $E \in \Omega_1^m$ множина $\{E\} \in \tilde{S}$, тобто є подією, і $\tilde{P}_m^*(\{E\}) = p^s(1-p)^{m-s}$, якщо серед E_k, що утворюють E, рівно s дорівнюють A, а інші $m-s$ дорівнюють $\overline{A}$.

Нехай також $B_{m,\,s}$ означає подію з простору $\tilde{S}$, яка полягає у тому, що в m незалежних випробуваннях подія A відбувається s разів або те саме, що визначена за m незалежними випробуваннями статистична ймовірність $P_m^*(A) = \frac{s}{m} = X(E)$, де $E = (E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_m)$ і серед E_k рівно s дорівнюють A.

Позначимо B_ε^* – сукупність тих $E \in \Omega_1^m$, для яких $X(E) = P_m^*(A) > p + \varepsilon$, де число $\varepsilon > 0$ – довільне, але фіксоване.

Довести, що:

1. $B_{m,\,s} \subset B_\varepsilon^*$ тоді й тільки тоді, коли $s > m(p+\varepsilon)$.

2. Якщо $(p+\varepsilon) < 1$, то існує $s^* = \min\{s \in \overline{0,\ m} : s > m(p+\varepsilon)\}$, причому $s^* - 1 \le m(p+\varepsilon) < s^*$.

3. $1 \le s^* \le m$.

4. Якщо $m(p+\varepsilon) < m-1$, то $s^* \le m-1$.

5. $B_\varepsilon^* = \sum_{s=s^*}^{m} B_{m,\,s}$.

Доведення:

1. Елементарна подія $E = (E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_m) \in B_{m,\,s}$ тоді й тільки тоді, коли серед E_k рівно s дорівнюють A, тобто

$E \in B_{m,\,s} \Leftrightarrow X(E) = P_m^*(A) = \dfrac{s}{m}$. Ця елементарна подія $E \in B_\varepsilon^*$ тоді й тільки тоді, коли $X(E) = P_m^*(A) = \dfrac{s}{m} > p + \varepsilon \Leftrightarrow s > m(p + \varepsilon)$. Твердження 1 доведено.

2. Оскільки $p + \varepsilon < 1$, то множина $\{s \in \overline{0,\ m} : s > m(p + \varepsilon)\}$ не порожня і скінченна, а тому вона містить найменше число, тобто існує $s^* = \min\{s \in \overline{0,\ m} : s > m(p + \varepsilon)\}$.

Геометрично число s^* показано на Рис. 19.1, з якого видно, що $s^* - 1 \le m(p + \varepsilon) < s^*$

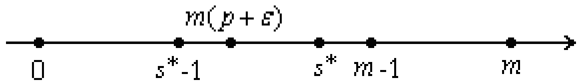


Рис. 19.1

Твердження 2 доведено.

3. Нерівність $s^* \le m$ очевидна, оскільки $p + \varepsilon < 1$ і тому $m > m(p + \varepsilon)$. Оскільки $m(p + \varepsilon) > 0$, то $s^* > 0$, а оскільки s^* – ціле число, то $s^* \ge 1$. Твердження 3 доведено.

4. З Рис. 19.1 також видно, що коли додатково $m(p + \varepsilon) < m - 1$, тобто $m > \dfrac{1}{1 - p - \varepsilon}$, то $s^* \le m - 1$.

5. Нехай $E \in B_\varepsilon^*$, тобто $X(E) = P_m^*(A) = \dfrac{s}{m} > p + \varepsilon$. Тоді $s > m(p + \varepsilon)$, а тому $s \ge s^*$, тобто $E \in B_{m,\,s}$ для деякого $s \ge s^*$. Це означає, що $B_\varepsilon^* \subset \sum\limits_{s=s^*}^{m} B_{m,\,s}$.

Навпаки, якщо $E \in \sum\limits_{s=s^*}^{m} B_{m,\,s}$, то існує $s \ge s^*$, для якого $E \in B_{m,\,s}$, тобто $X(E) = P_m^*(A) = \dfrac{s}{m}$ і $s \ge s^*$, а це гарантує, що $s > m(p + \varepsilon)$, тобто $\dfrac{s}{m} > p + \varepsilon$, отже, $E \in B_\varepsilon^*$.

Цим доведено, що $\sum\limits_{s=s^*}^{m} B_{m,\,s} \subset B_\varepsilon^*$, що разом із оберненим включенням дає потрібну рівність. Твердження 5 доведено.

Задачі

1*. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $X_k, k \in \overline{1, m}$, – попарно незалежні прості випадкові величини, то $Z_m = \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} X_k - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} M_n^*[X_k] \right|$ також є простою випадковою величиною.

2. Випадкова величина Z_m з попереднього твердження при досить великих m може набувати досить великих значень.

3. Статистична ймовірність того, що Z_m набуває досить великих значень, є як завгодно малою, коли m досить велике число, а $D[X_k] \le c$ для всіх k.

4. Значення середнього арифметичного попарно незалежних простих випадкових величин з однаковими статистичними математичними сподіваннями можуть досить сильно відхилятися від спільного статистичного математичного сподівання цих величин.

5. Статистична ймовірність якої завгодно близькості значень середнього арифметичного попарно незалежних простих випадкових величин з однаковими статистичними математичними сподіваннями до їх спільного статистичного математичного сподівання мало відрізняється від 1, коли кількість цих випадкових величин досить велика, а їхні дисперсії не перевищують c.

6. Статистичні ймовірності $P_m^*(A)$ і $P_n^*(A)$ можуть відрізнятися одна від одної більше, ніж на 1.

7. Якщо у кожному k-му випробуванні, $k \in \overline{1, m}$, подія A відбувається з однією і тією самою статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$, то $\tilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - P_n^*(A)| < 0{,}1) \ge 0{,}9$, коли $m \ge 250$, $m < n$.

2*. Нехай за досить великою серією випробувань визначена статистична ймовірність $P_n^*(A)$ події A – випадання герба при підкиданні монети: $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$.

Для заданих чисел ε і δ знайти кількість m підкидань монети таку, що матиме місце нерівність

$$\tilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - \frac{1}{2}| < \varepsilon) > 1 - \delta:$$

1. $\varepsilon = 0{,}1, \ \delta = 0{,}1$;
2. $\varepsilon = 0{,}05, \ \delta = 0{,}02$;
3. $\varepsilon = 0{,}01, \ \delta = 0{,}0001$.

3*. Нехай: m – кількість незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $p = P_n^*(A)$; $B_{m,s}$ – подія, яка полягає у тому, що у даних m випробуваннях подія A відбувалася s разів; B_ε^* – подія, яка полягає у тому, що $P_m^*(A) > p + \varepsilon$, а B_ε^{**} – подія, яка полягає у тому, що $P_m^*(A) < p - \varepsilon$; B_ε – подія, яка полягає у тому, що $|P_m^*(A) - p| > \varepsilon$.

1. Знайти : 1) співвідношення між подіями B_ε^* і $B_{m,s}$; 2) між B_ε та B_ε^* і B_ε^{**}.

2. Довести, що: 1) подія B_ε^{**} відбувається тоді й тільки тоді, коли $P_m^*(\overline{A}) > 1 - p + \varepsilon$; 2) подія $B_{m,s}$ відбувається тоді й тільки тоді, коли $P_m^*(A) = \dfrac{s}{m}$; 3) $B_\varepsilon = B_\varepsilon^* + B_\varepsilon^{**}$, причому події B_ε^* та B_ε^{**} є несумісними.

3. Довести, що для кожної події $B_{m,s}$ існує принаймні одна s-елементна підмножина $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ множини $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ така, що подія A відбувається у кожному i_k-му випробуванні, $k \in \overline{1,s}$, і подія A не відбувається у кожному j_k-му випробуванні, де

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_{m-s}\} = \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}.$$

4. Нехай подія A_{i_k} полягає у відбуванні події A у i_k-му випробуванні, а подія $\overline{A}_{j_k}$ – у невідбуванні події A у j_k-му випробуванні: Довести, що:

1) $B_{m,s} = \sum\limits_{\{i_k\}} \prod\limits_{k=1}^{s} A_{i_k} \prod\limits_{k=1}^{m-s} \overline{A}_{j_k}$, де знак $\sum\limits_{\{i_k\}}$ означає суму стількох доданків, скільки існує s – елементних підмножин $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ у множині $M = \{1, 2, \ldots, m\}$;

2) кількість доданків у сумі для $B_{m,s}$ дорівнює C_m^s;

3) події A_{i_k}, $k \in \overline{1,s}$, $\overline{A}_{j_k}$, $k \in \overline{1, m-s}$, утворюють сукупність незалежних подій;

4) доданки в сумі для $B_{m,s}$ є попарно несумісними;

5) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s (1-p)^{m-s}$;

6) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon^*) = \sum\limits_{s=s^*}^{m} C_m^s p^s (1-p)^{m-s}$.

5. Довести існування такого числа $s_0 \in \overline{0,m}$, що:

1) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s+1}) < \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, коли $s \in [s_0; m]$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s+1}) > \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, коли $s \in [0; s_0 - 1]$;

3) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) > \widetilde{P}_m^*(B_{m,\, s_0-1})$, коли $mp + p - 1$ не є цілим числом;

4) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \widetilde{P}_m^*(B_{m,\, s_0-1})$, коли $mp + p - 1$ є цілим числом;

5) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \max\limits_{0\le s\le m} \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$.

6. Довести, що числа s_0 із завдання 5 та s^* із твердження 2 вправи 2 пов’язані співвідношеннями $m\varepsilon + 2 - p > s^* - s^0 > m\varepsilon - p$, а тому $s^* \ge s_0$, коли $m\varepsilon \ge p_0$.

7. Довести, що коли s^* із завдання 6, то

1) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*}) < \dfrac{1}{m\varepsilon}$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*+k}) \le \lambda_m^k \widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*})$, $k \in \overline{1, m-s^*}$, де $\lambda_m = \dfrac{m-s^*}{s^*+1}\,\dfrac{p}{1-p}$;

3) $0 < \lambda_m < 1 - \dfrac{\varepsilon}{1-p} < 1$ і $1 - \lambda_m > \dfrac{\varepsilon}{1-p}$.

8. Довести, що:

1) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon^*) < \dfrac{1-p}{m\varepsilon^2}$, коли $p + \varepsilon < 1$ і $m > \dfrac{1}{1-p-\varepsilon}$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon^{**}) < \dfrac{p}{m\varepsilon^2}$, коли $1 - p + \varepsilon < 1$ і $m > \dfrac{1}{p-\varepsilon}$;

3) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon) < \dfrac{1}{m\varepsilon^2}$.

9. Довести, що $\widetilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p| > \varepsilon) \to 0$, коли $m \to \infty$.

10. Дослідити, чи можна дістати точнішу оцінку для $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon) = (\left|P_m^*(A) - p\right| > \varepsilon)$, ніж вказану у твердженні 8.3).

1.20. Різні задачі

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. *Рівномірний дискретний розподіл* статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ – це такий розподіл, при якому всі $P_n^*(x_i)$, $i \in \overline{1,k}$, рівні між собою, тобто $P_n^*(x_i) = \dfrac{1}{k}$ для всіх $i \in \overline{1,k}$.

Ряд рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині точок $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ визначається таблицею 20.1.

Табл. 20.1

x_i	x_1	x_2	…	x_k
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	…	$\frac{1}{k}$

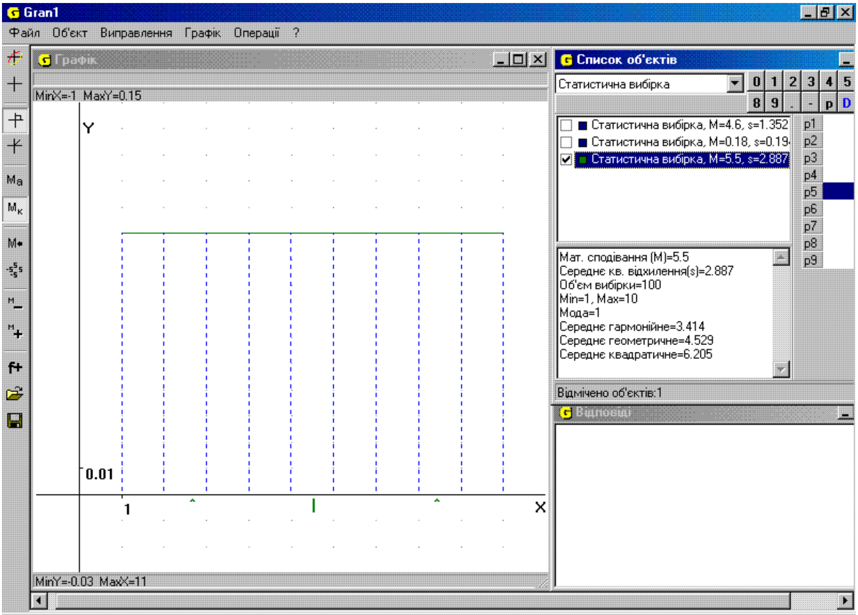


Рис. 20.1.

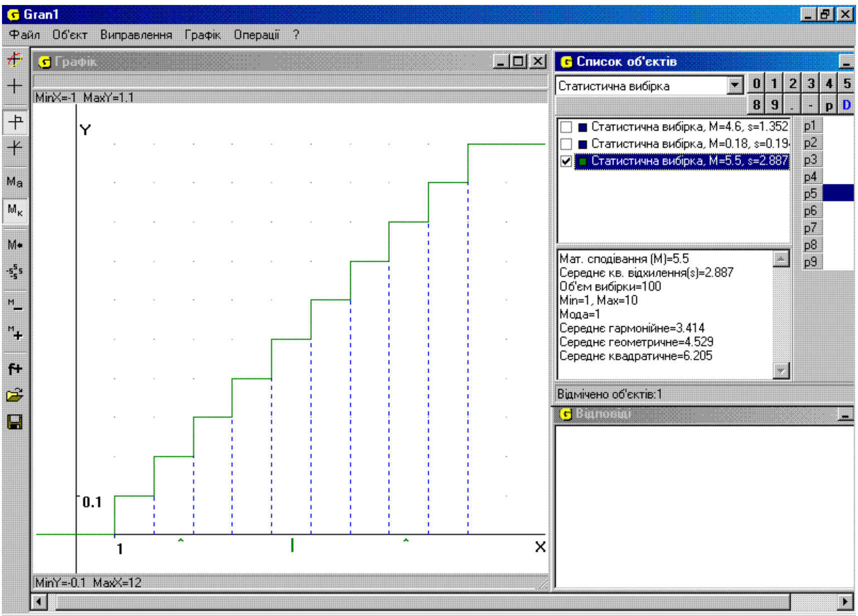


Рис. 20.2.

Відповідний многокутник розподілу подано на Рис. 20.1, а графік функції розподілу $F_n^*(x)$ – на Рис. 20.2

Якщо на множині значень простої випадкової величини X розподіл ймовірностей рівномірний, то її статистичне математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M_n^*[X]=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i\ ,\ D_n^*[X]=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\frac{1}{k^2}(\sum_{i=1}^{k}x_i)^2\ .$$

Вправа 2. *Біноміальний розподіл* статистичних ймовірностей – це дискретний розподіл на множині точок $\{0,1,\ 2,\dots,m\}$, при якому $P_n^*(x_i)=C_m^{x_i}p^{x_i}q^{m-x_i}$, $x_i\in\overline{0,m},$ де $C_m^{x_i}=\dfrac{m!}{x_i!(m-x_i)!}$ – коефіцієнти розкладу бінома $(p+q)^m$ за степенями p і q, p і q – додатні числа такі, що $p+q=1.$ Якщо m досить велике, то многокутник біноміального розподілу досить близький до графіка функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{mpq}}e^{-\frac{(x-mp)^2}{2mpq}}$ (Рис. 20.3).

Якщо $p=q=\dfrac{1}{2},\ m=8,$ то ряд біноміального розподілу буде мати вигляд, поданий у таблиці 20.2:

Табл. 20.2

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Відповідний многокутник розподілу статистичних ймовірностей подано на Рис. 20.4. При цьому числа $0,1,2,\dots,m$ – це можливі кількості появ деякої події A в m випробуваннях, а $\dfrac{0}{m},\dfrac{1}{m},\dfrac{2}{m},\dots,\dfrac{m}{m}$ – можливі значення відносної частоти (статистичної імовірності) відповідної кількості появ події A в m випробуваннях.

Якщо на множині значень $\{0,1,\ 2,\dots,m\}$ простої випадкової величини X розподіл ймовірностей біномінальний, то її статистичні математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M_n^*[X]=\sum_{i=0}^{m}iC_m^i p^i(1-p)^{m-i}=mp\sum_{i=1}^{m}\frac{i}{m}C_m^i p^{i-1}(1-p)^{m-i}=$$

$$=mp\sum_{i=1}^{m}C_{m-1}^{i-1}p^{i-1}(1-p)^{m-i}=mp\sum_{i=0}^{m-1}C_{m-1}^{i}p^{i}(1-p)^{m-1-i}=mp\,,$$

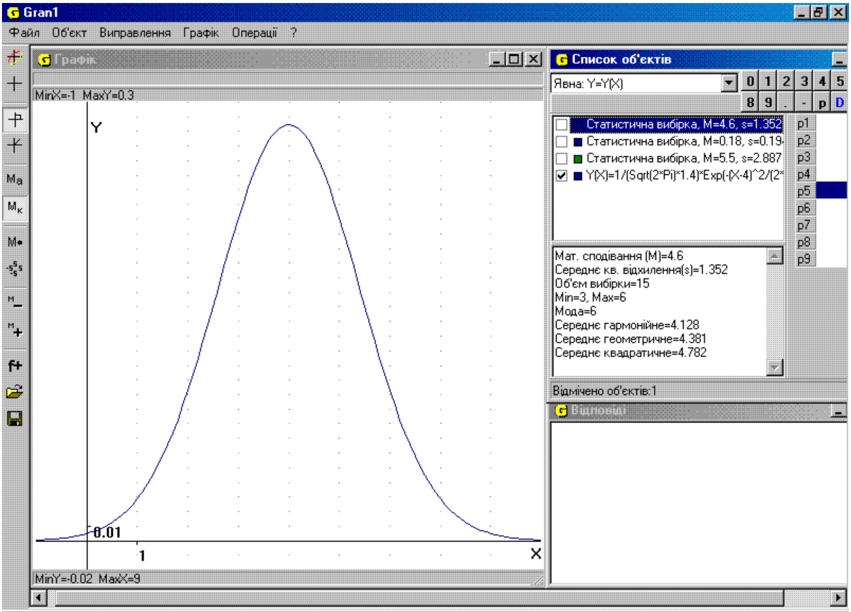


Рис. 20.3.

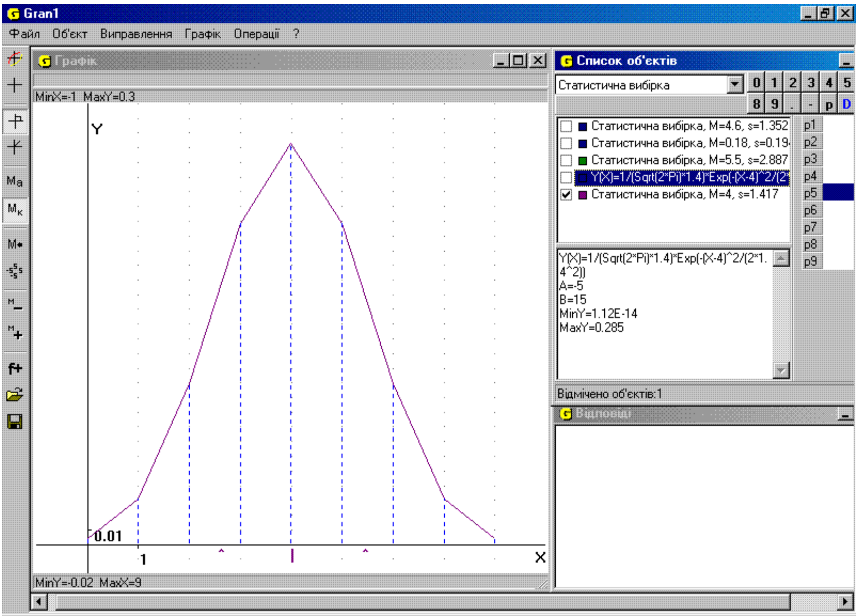


Рис. 20.4.

$$D_n^*[X] = M_n^*[X^2] - (M_n^*[X])^2 = \sum_{i=0}^{m} i^2 C_m^i p^i (1-p)^{m-i} - m^2 p^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} i(i-1) C_m^i p^i (1-p)^{m-i} + \sum_{i=0}^{m} i C_m^i p^i (1-p)^{m-i} - m^2 p^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} i(i-1) C_m^i p^i (1-p)^{m-i} + mp - m^2 p^2 =$$

$$= mp \sum_{i=2}^{m} (i-1) \frac{i}{m} C_m^i p^{i-1} (1-p)^{m-i} + mp - m^2 p^2 =$$

$$= mp \sum_{i=2}^{m} (i-1) C_{m-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{m-i} + mp - m^2 p^2 =$$

$$= mp \cdot (m-1) p \sum_{i=2}^{m} \frac{i-1}{m-1} C_{m-1}^{i-1} p^{i-2} (1-p)^{m-i} + mp - m^2 p^2 =$$

$$= m(m-1) p^2 \sum_{i=2}^{m} C_{m-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{m-i} + mp - m^2 p^2 =$$

$$= m(m-1) p^2 \sum_{i=0}^{m-2} C_{m-2}^{i} p^{i} (1-p)^{m-2-i} + mp - m^2 p^2 =$$

$$= m(m-1) p^2 - m^2 p^2 + mp = mp - mp^2 = mp(1-p).$$

Отже $M[X] = mp$, а $D[X] = mp(1-p)$

Вправа 3. *Рівномірний неперервний розподіл* статистичних ймовірностей на відрізку $[a;b]$ – це такий неперервний розподіл, щільність якого має вигляд

$$f_n^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{коли } x \in [a;b], \\ 0, & \text{коли } x \notin [a;b], \end{cases}$$

Легко бачити, що для даного розподілу функція розподілу $F_n^*(x)$ матиме вигляд

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{коли } a \le x \le b, \\ 1, & \text{коли } b \le x. \end{cases}$$

Графік щільності $f_n^*(x)$ неперервного рівномірного розподілу статистичних ймовірностей на проміжку $[a;b]$ подано на Рис. 20.5, а графік відповідної функції розподілу $F_n^*(x)$ – на Рис. 20.6.

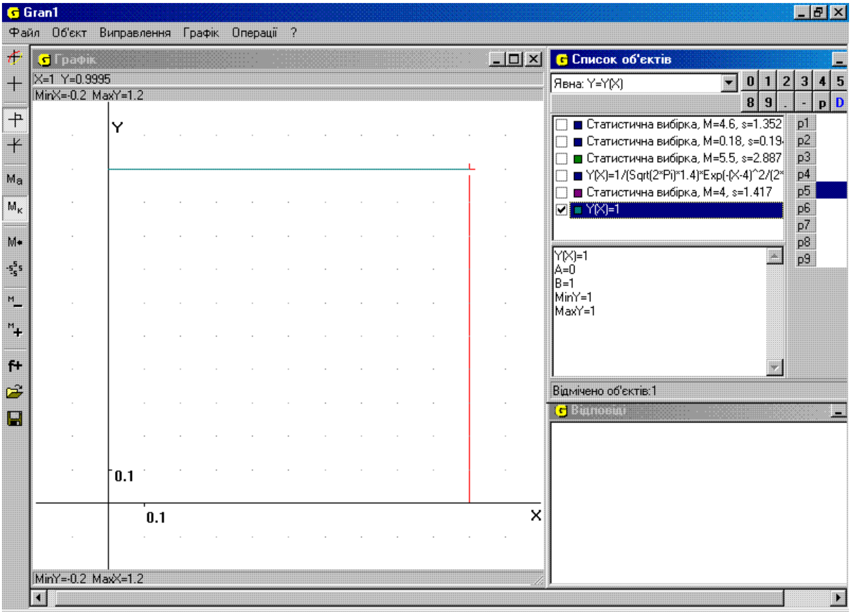


Рис. 20.5.

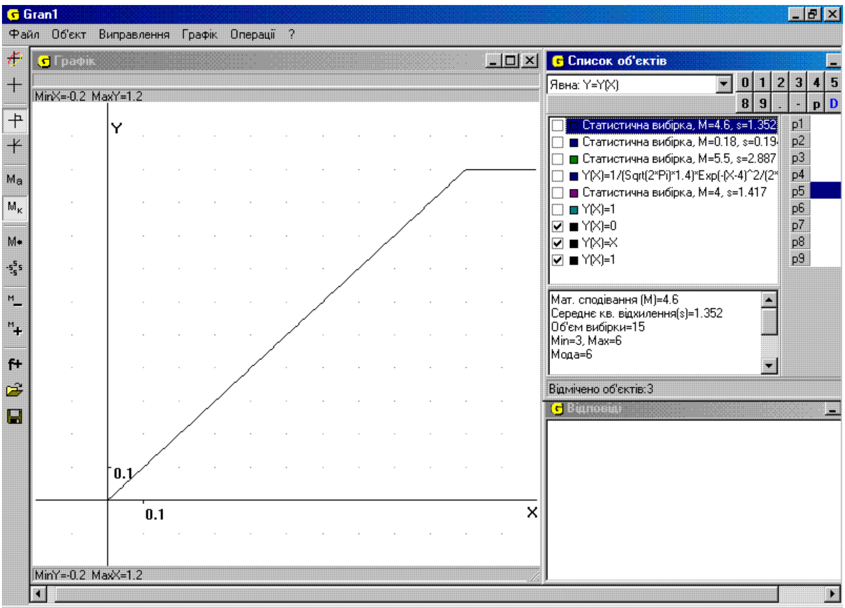


Рис. 20.6.

Для рівномірного неперервного розподілу статистичних ймовірностей центр розсіювання

$$m_n^* = \int_a^b x f_n^*(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2},$$

а дисперсія

$$D_n^* = \int_a^b (x-m_n^*)^2 f_n^*(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-m_n^*)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}((b-m_n^*)^3 - (a-m_n^*)^3) =$$

$$= \frac{1}{24(b-a)}((b-a)^3 + (b-a)^3) = \frac{1}{12}(b-a)^2 .$$

Вправа 4. *Нормальний розподіл з параметрами* a і σ – це неперервний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = R = (-\infty;\ \infty)$, щільність якого $f_n^*(x)$ практично співпадає з функцією

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; \infty),$$

де a і $\sigma > 0$ – задані дійсні числа.

Графік функції $f(x)$ подано на Рис. 20.7

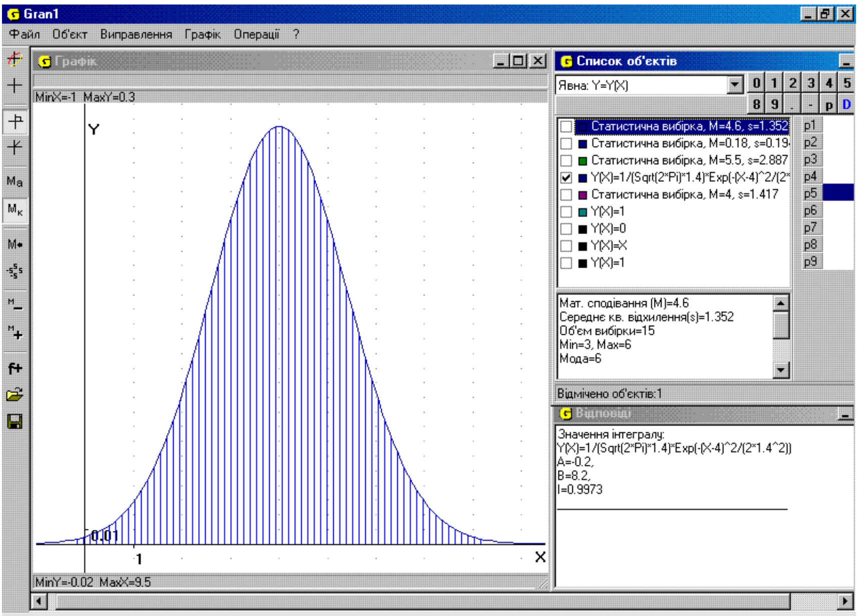


Рис. 20.7.

Виявляється, що для нормального розподілу з параметрами a і σ $P_n^*((a-3\sigma;\ a+3\sigma)) \approx 0.997$ (Рис. 20.7), тобто при нормальному розподілі статистичних ймовірностей спостережені значення $x_{\text{сп}\,i}$ за межами проміжка $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$ практично не зустрічаються (зустрічаються в середньому не частіше, ніж тричі в 1000 випробуваннях).

Крім того виявляється, що середнє арифметичне спостережених значень $x_{\text{сп}\,i}$ (однієї і тієї ж характеристики) у великій серії випробувань має розподіл статистичних ймовірностей, близький до нормального.

Вправа 5. У випадку рівномірного неперервного розподілу для довільного проміжка $\langle\alpha;\beta\rangle \subset [a;\ b]$

$$P_n^*(\langle\alpha;\ \beta\rangle) = \int_\alpha^\beta f_n^*(x)\,dx = F_n^*(\beta) - F_n^*(\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Тому при рівномірному розподілі статистичних ймовірностей на проміжку $[a;\ b]$ для відшукання $P_n^*(A)$ для довільної події A досить визначити міру $m(A)$ (загальну довжину проміжків, з яких утворено множину A), після чого $m(A)$ поділити на $m([a;\ b]) = b-a.$ Зокрема, при рівномірному неперервному розподілі статистичні ймовірності попадання в множини A і B однакової міри однакові.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Полігон рівномірного розподілу відносних частот на множині $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$ є відрізком з кінцями у точках $\left(1, \frac{1}{m}\right)$ і $\left(m, \frac{1}{m}\right)$.

2. Статистична ймовірність події A, пов'язана з рівномірним дискретним розподілом статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, залежить лише від кількості елементів в A.

3. Координата центра розсіювання рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ дорівнює $\bar{x} = \frac{m+1}{2}$.

4. Для біноміального розподілу статистичних ймовірностей $P_n^*(x_k) > P_n^*(x_{k-1})$, якщо $k < (m+1)\,p$, і навпаки.

5. Полігон біноміального розподілу відносних частот може бути відрізком.

6. Полігон *розподілу Пуассона* відносних частот:

$P_n^*(m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, де $m=0,1,2,\ldots,\quad a>0$, може бути променем.

7. Для розподілу Пуассона $P_n^*(k)<P_n^*(k-1)$, якщо $k>a$, і навпаки.

2. Побудувати ряд розподілу, визначити центр розсіювання і дисперсію та побудувати графік функції розподілу статистичних ймовірностей для:

1. Рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=\{1,\ 2,\ \ldots,\ 10\}$.

2. Розподілу Пуассона, коли $a=\dfrac{1}{2}$.

3. Побудувати ряд розподілу і многокутник розподілу Пуассона статистичних ймовірностей для значення $a=1$.

4. Побудувати графіки функції розподілу $F_n^*(x)$ і щільності розподілу $f_n^*(x)$ *показникового розподілу статистичних ймовірностей* з параметром $\lambda>0$, якщо функція такого розподілу практично має вигляд

$$F_n^*(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{коли } x>0,\\ 0, & \text{коли } x\le 0.\end{cases}$$

5. Побудувати графіки функції розподілу $F_n^*(x)$ та щільності розподілу $f_n^*(x)$ для *розподілу Коші*, щільність розподілу якого практично має вигляд

$$f_n^*(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-\infty;\ \infty).$$

6. Нехай в урні є N кульок, серед яких N_1 чорних, $N_1<N$. Експеримент полягає в тому, що навмання дістають з урни n кульок і фіксують кількість чорних серед вийнятих кульок. Нехай $X(E)$, $E\in\Omega$, – кількість чорних серед вийнятих навмання n кульок.

1. Знайти область визначення Ω функції $X(E)$ та побудувати ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$, відносно якого $X(E)$ є простою випадковою величиною з *гіпергеометричним розподілом статистичних ймовірностей*:

$$p_i=\frac{C_{N_1}^{i}\,C_{N-N_1}^{n-i}}{C_N^n},\ i\in\overline{0,\ n}.$$

2. Довести, що коли $N\to\infty$, а числа n і $\dfrac{N}{N_1}$ залишаються фіксованими, то гіпергеометричний розподіл прямує до біноміального.

3. Знайти статистичні математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X з гіпергеометричним розподілом.

7. Нехай експеримент полягає у тому, що r кульок розміщують у s скриньок і фіксують вміст кожної скриньки.

1. Побудувати відповідний ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$.

2. З'ясувати, з яких елементарних подій складається подія $A_{i,\ k}$, яка полягає у тому, що i-та скринька містить k кульок, $i \in \overline{1,\ s}$, $k \in \overline{0,\ r}$.

3. Обчислити статистичні ймовірності $P_n^*(A_{i,\ 1})$, $i \in \overline{1,\ s}$, та $P_n^*(A_{1,\ 1} \cdot A_{1,\ 2})$ і умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A_{1,\ 2} / A_{1,\ 1})$ та $P_n^*(A_{2,\ 1} / A_{1,\ 1})$, якщо всі варіанти розташування кульок статистично рівноможливі.

4. Нехай: а) для кожної елементарної події $E \in \Omega$ множина $\{E\}$ є подією, а $X_1(E)$, $E \in \Omega$, – це кількість порожніх скриньок, що відповідає елементарній події $E \in \Omega$; б) існує елементарна подія $E_0 \in \Omega$, для якої множина $\{E_0\}$ не є подією, а $X_2(E)$, $E \in \Omega$, набуває значення 1, коли $E = E_0$, і значення 0, коли $E \neq E_0$.

З'ясувати, яка з функцій $X_1(E)$ та $X_2(E)$ обов'язково є випадковою величиною, а яка може і не бути випадковою величиною.

5. Знайти функцію розподілу статистичних ймовірностей на множині значень випадкової величини із завдання 4 та визначити тип розподілу.

6. Для події $A = A_{1,\ 1}$ (див. завдання 2) знайти аналітичний вираз випадкової величини X – кількості відбувань події A у m незалежних випробуваннях.

7. Обчислити статистичні математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

8. Знайти значення випадкової величини, що зустрічається найчастіше.

9. Обчислити статистичну ймовірність того, що випадкова величина X набуває додатного значення.

10. Для заданого $\varepsilon > 0$ оцінити за допомогою нерівності Чебишова $\tilde{P}_m^*(|X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon)$ і порівняти одержаний результат з безпосередньо обчисленою величиною $\tilde{P}_m^*(|X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon)$.

Виконати завдання 1-10, вважаючи, що

1) $s = r = 3$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;

2) $s = r = 3$; кульки однакові, (які не можна розрізнити), а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;

3) $s = r = 3$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
4) $s = r = 3$; кульки однакові та скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
5) $s = 2$, $r = 3$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
6) $s = 2$, $r = 3$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
7) $s = 2$, $r = 3$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
8) $s = 2$, $r = 3$; кульки однакові та скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
9) $s = 3$, $r = 2$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
10) $s = 3$, $r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
11) $s = 3$, $r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
12) $s = 3$, $r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
13) $s = r = 2$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
14) $s = r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
15) $s = r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
16) $s = r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
17) $s = 2$, $r = 1$; скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
18) $s = 1$, $r = 2$; кульки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
19) $s = 4$; $r = 2$; кульки попарно різні та скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
20) $s = 4$; $r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
21) $s = 4$; $r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
22) $s = 4$; $r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
23) $s = 2$; $r = 4$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}4$;
24) $s = 2$; $r = 4$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}3$;

25) $s=2$; $r=4$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m=5$; $\varepsilon=0{,}2$;

26) $s=2$; $r=4$; кульки однакові і скриньки однакові; $m=6$; $\varepsilon=0{,}1$;

27) $s=3$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=3$; $\varepsilon=0{,}4$;

28) $s=4$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=4$; $\varepsilon=0{,}3$;

29) $s=5$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=5$; $\varepsilon=0{,}2$.

8. Для заданої щільності розподілу статистичних ймовірностей знайти константу c; побудувати графік щільності розподілу статистичних ймовірностей; знайти функцію розподілу статистичних ймовірностей та побудувати її графік; обчислити статистичну ймовірність попадання в інтервал $[\alpha, \beta]$; знайти центр розсіювання, статистичні дисперсію і середнє квадратичне відхилення даного розподілу, коли:

1. $f_n^*(x)=\begin{cases} c, \ x\in[-2,\ 1] \\ 0, \ x \overline{\in} [-2,\ 1] \end{cases}, \ (\alpha,\ \beta)=(-1,\ 1)$;

2. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0 \\ c \ \ \sin 2x, \ \ 0<x\le\pi \\ 0, \ x>\pi \end{cases}, \ (\alpha,\ \beta)=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$;

3. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 1 \\ x-c, \ \ 1<x\le 2 \\ 0, \ x>2 \end{cases}, \ (\alpha,\ \beta)=(1,\ 1\frac{1}{2})$;

4. $f_n^*(x)=\dfrac{2c}{1+x^2}, \quad x\in(-\infty,\ +\infty), \ (\alpha,\ \beta)=(0,\ 1)$;

5. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x<0 \\ c\cos x, \ \ 0<x\le\frac{\pi}{2} \\ 0, \ x>\frac{\pi}{2} \end{cases}, \ (\alpha,\ \beta)=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$;

6. $f_n^*(x)=\begin{cases} cx^2, \ x\in[-1,\ 1] \\ 0, \ x\le -1, \ x>1 \end{cases}, \ (\alpha,\ \beta)=(0,\ 1)$;

7. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le\frac{\pi}{6} \\ c \ \ \sin 3x, \ \ \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3} \\ 0, \ x>\frac{\pi}{3} \end{cases}, \ (\alpha,\ \beta)=(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4})$;

8. $f_n^*(x) = \begin{cases} c(x+1), & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \overline{\in} [-1, 1] \end{cases}$, $(\alpha,\ \beta) = (0,\ 1)$;

9. Для нормального розподілу ймовірностей з параметрами a, σ знайти статистичну ймовірність попадання у заданий інтервал (α, β), коли:

1. $a = 2$, $\sigma = 1$, $(\alpha;\ \beta) = [-1,\ 2)$;
2. $a = 1$, $\sigma = 3$, $(\alpha;\ \beta) = [-2,\ 2)$;
3. $a = 1$, $\sigma = 1$, $(\alpha;\ \beta) = [-3,\ 1)$;
4. $a = 1$, $\sigma = 4$, $(\alpha,\ \beta) = (a - \sigma,\ a + \sigma)$;
5. $a = 4$, $\sigma = 1$, $(\alpha,\ \beta) = (a - 2\sigma,\ a + 2\sigma)$;

РОЗДІЛ 2. ЙМОВІРНОСТІ

2.1. Ймовірнісні міри. Означення ймовірності

Нехай Ω – деяка фіксована непорожня множина.

Система S підмножин із Ω називається *алгеброю*, якщо: 1_s. $\Omega \in S$; 2_s. $\overline{A} \in S$, коли $A \in S$; 3_s. $A_1 \bigcup A_2 \in S$, коли $A_i \in S,\ i = 1, 2$.

Алгебру S називають *σ–алгеброю*, якщо умова 3_s набуває вигляду: $\bigcup\limits_i A_i \in S$, коли $A_i \in S$, $i \in N$.

Приклади алгебр і σ–алгебр підмножин множини Ω:

1. Сукупність $S_* = \{\varnothing, \Omega\}$ – *тривіальна або "найбідніша" алгебра* (*і σ–алгебра*) *підмножин множини* Ω.

2. $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ – алгебра (і σ–алгебра) множин, що породжується множиною A.

3. Система S^* всіх підмножин множини Ω – "найбагатша" алгебра (і σ–алгебра) підмножин множини Ω.

σ–алгебра $\sigma(W)$ називається *найменшою, що містить систему W* підмножин із Ω, якщо: 1) $W \subset \sigma(W)$; 2) для будь-якої σ–алгебри S, яка також містить систему $W, W \subset S$, має місце включення $\sigma(W) \subset S$.

Нехай $\mathscr{B}(R^1)$ – найменша σ–алгебра, що містить систему проміжків $[a; b)$, $a \in R,\ b \in R$. Елементи $\mathscr{B}(R^1)$ називають *борелівськими множинами*, а сама σ–алгебра $\mathscr{B}(R^1)$ називається *σ–алгеброю борелівських множин в* R^1.

Аналогічно σ–алгебра $\mathscr{B}(R^n)$, що містить систему паралелепіпедів виду

$$\prod_{i=1}^{n}[\, a_i,\, b_i\,) = \{\, x : x = (\, x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n),\ a_i \le x_i < b_i,\ i = \overline{1, n}\},$$

називається *σ–алгеброю борелівських множин в* R^n.

Обмежена борелівська множина називається *$\mathscr{B}$–вимірною (вимірною за Борелем)*.

Нехай V – деяка алгебра підмножин з Ω. Дійсна функція $\mu(A)$, $A \in V$, що набуває значень з $[0, \infty]$, називається *скінченно-адитивною мірою*, заданою на V, якщо для будь-яких $A \in V,\ B \in V$ таких, що $A \bigcap B = \varnothing$,

$$\mu\,(A + B) = \mu(A) + \mu(B)\,.$$

Скінченно-адитивна *міра* називається *скінченною*, якщо $\mu(\Omega) < \infty$. Легко бачити, що $\mu(\varnothing) = 0$ для будь-якої скінченної міри μ.

Якщо $\mu(\Omega)=1$, тоді міра називається скінченно-адитивною *ймовірнісною мірою* або *скінченно-адитивною ймовірністю*.

Простір Ω разом з σ–алгеброю S його підмножин називається *вимірним простором* і позначається (Ω, S).

Скінченно-адитивна *міра* μ, задана на алгебрі V підмножин множини Ω, називається *зчисленно-адитивною* (σ*–адитивною*), якщо для будь-яких $A_1, A_2, \ldots$ з V таких, що $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in V,\ A_i \bigcap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, виконується рівність

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Зчисленно-адитивна міра P на алгебрі V, яка задовольняє умову $P(\Omega)=1$, називається *ймовірнісною мірою*, або *ймовірністю* (визначеною на множинах алгебри V).

Отже ймовірнісна міра (ймовірність) $P(A)$, $A \in V$, визначена на множинах $A \in V$, задовольняє вимоги:

1_{p}. $P(A) \geq 0$, $A \in V$.

2_{p}. $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ для будь яких $A_i \in V$ таких, що $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in V$, $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

3_{p}. $P(\Omega)=1$.

***Теорема* Каратеодорі** (про продовження міри). *Нехай P – зчисленно-адитивна ймовірнісна міра на алгебрі V. Тоді існує єдина зчисленно-адитивна ймовірнісна міра Q, визначена на найменшій σ–алгебрі $\sigma(V)$, що містить V, яка є продовженням міри P, тобто міра Q така, що $Q(A)=P(A)$ для кожного A з V.*

Набір об'єктів (Ω, S, P), де Ω – множина точок E, S – σ–алгебра підмножин множини Ω, P – ймовірнісна міра (ймовірність) на S, називається *ймовірнісним простором* (або *ймовірнісною моделлю* стохастичного експерименту).

При цьому Ω називається *простором наслідків* експерименту або *простором елементарних подій*, елементи множини Ω називаються *наслідками (результатами) експерименту* або *елементарними подіями*, множини A з S називаються *подіями*, сукупність S підмножин множини Ω називається *простором подій*, а числа $P(A)$, $A \in S$, – *ймовірностями подій* A. *Систему* *аксіом* 1_s-3_s, 1_p-3_p, що визначають поняття ймовірнісного простору, запропонував А.М. Колмогоров.

Приклад 1.1. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$, $S = \{\varnothing, \Omega, \{Г\}, \{Ц\}\}$ і $A_0 = \{Г\}$. Покладемо $P(\{Г\}) = p$, $P(\{Ц\}) = q = 1 - p$, $P(\varnothing) = 0$ і $P(\Omega) = 1$. Тоді функція $P(A)$, $A \in S$, задовольняє умови 1_p-3_p, а тому визначає ймовірність довільної події з S. Зокрема, $P(A_0) = p$ – ймовірність події $A_0 = \{Г\}$.

Приклад 1.2. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$, а $S = \{\varnothing, \Omega\}$, і нехай $P(\varnothing) = 0$, а $P(\Omega) = 1$. Тоді функція $P(A)$, $A \in S$, задовольняє властивості 1_p-3_p, отже задає ймовірності довільних подій з S.

Проте простір S не містить множину $A_0 = \{Г\} \subset \Omega$, і тому в даному випадку не можна говорити не тільки про ймовірність події $A_0 = \{Г\}$, а й про подію $A_0 = \{Г\}$.

Таким чином, *щоб говорити про подію* A *та її ймовірність, треба мати*: 1) *простір* Ω *елементарних подій*, 2) *простір* S *подій, кожна з яких є підмножиною простору* Ω, 3) *функцію* P, *що визначена на* S *і задовольняє умови* 1_p-3_p. *Тоді кожна підмножина* $A \subset \Omega$ *така, що* $A \in S$, *називається подією, а значення* $P(A)$ *вказаної функції називається ймовірністю події* A.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай $H_1, H_2, \ldots, H_k$ – деякі підмножини множини Ω такі, що $H_i\ H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, причому

$$H_i \neq \varnothing,\ H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega .$$

Якщо утворити систему множин, до якої входять множина $\varnothing$, усі множини H_i, усі можливі суми множин H_i по два, по три, по чотири і т.д. доданки, то така система подій буде і алгеброю, і σ-алгеброю множин. Така *алгебра* (σ-*алгебра*) множин називається *породженою розбиттям* $D = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *множини* Ω *на множини* H_i, які попарно не мають спільних елементів. Множини H_i при цьому називають *атомами розбиття* D.

Вправа 2. Нехай $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$ – дійсна пряма,

$$[a, b) = \{x \in R^1 : a \leq x < b\}$$

для всіх $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Зокрема $[a, a) = \varnothing$. Позначимо через $[-\infty, b)$ інтервал $(-\infty, b)$ (щоб доповнення проміжка $[-\infty, b)$ було того самого типу, тобто відкритим справа і замкненим зліва). Позначимо через L систему множин з R^1, що складаються із скінченних сум проміжків виду $[a, b)$:

$$A \in L \text{, якщо } A = \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i),\ n < \infty.$$

Система L є алгеброю, але не σ –алгеброю, оскільки якщо $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right) \in L$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1) \overline{\in} L$.

Вправа 3. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо V -алгебра і $A_i \in V$, $i \in N$, то $\sum_{i=1}^{n} A_i \in V \quad \forall n \in N$.

2. Якщо V є алгеброю, проте не є σ -алгеброю, то V - нескінченна множина.

3. Якщо алгебра V є скінченною множиною, то кожна міра на V є зчисленно адитивною.

4. На будь-якому просторі подій S, що відповідає простору елементарних подій $\Omega = (-\infty;+\infty)$, можна задати ймовірність P так, щоб для подій $A \in S$ і $A_\varepsilon \in S$ було $P(A) = P(A_\varepsilon)$, де $A_\varepsilon = \{y = x + \varepsilon : x \in A\}$, тобто A_ε є результатом паралельного перенесення множини A на фіксовану величину $\varepsilon \in (-\infty;+\infty)$.

5. Кожна міра є зчисленно адитивною.

1. Якщо $n=1$, то $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 \in V$, тобто твердження 1 є правильним для $n=1$. Припустимо, що це твердження є правильним для $n=m$, тобто $\sum_{i=1}^{m} A_i \in V$. Тоді $\sum_{i=1}^{m+1} A_i = (\sum_{i=1}^{m} A_i) + A_{m+1} \in V$ за означенням алгебри. Звідси за принципом математичної індукції дістаємо, що $\sum_{i=1}^{n} A_i \in V \quad \forall n \in N$. Отже, твердження 1 є правильним.

2. Нехай V є алгеброю і не є σ -алгеброю. Тоді, порівнюючи означення алгебри і σ -алгебри, дістаємо, що існують множини $A_i \in V$, $i \in N$, для яких $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \notin V$. Припустимо, що V – скінченна множина. Тоді серед множин $A_i \in V$ лише скінченна кількість попарно різних. Нехай це множини A_{i_k}, $k \in \overline{1,n}$, а коли $i \neq i_k$ для будь-якого $k \in \overline{1,n}$, то множина A_i співпадає з якоюсь множиною A_{i_k}. Звідси випливає, що $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k} \notin V$, проте за розглянутим вище твердженням 1 $\sum_{k=1}^{n} A_{i_k} \in V$. Дістали суперечність, з якої слідує,

що припущення про скінченність множини V неправильне. Отже, твердження 2 є правильним.

3. Нехай алгебра V є скінченною множиною, а міра μ визначена на цій алгебрі. Візьмемо довільну сукупність множин $A_i \in V$, $i \in N$, що попарно не перетинаються. Оскільки алгебра V скінченна, то серед множин A_i є лише скінченна кількість непорожніх. Нехай це множини A_{i_k}, $k \in \overline{1,n}$, а коли $i \neq i_k$, $k \in \overline{1,n}$, то $A_i = \varnothing$ і $\mu(A_i) = 0$. Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{i_k}$, то за означенням міри

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{i_k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{i_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Звідси випливає зчисленна адитивність міри μ. Отже, твердження 3 є правильним.

4. Нехай S – найширший простір подій $A \subset (-\infty;+\infty)$. Припустимо, що твердження 4 правильне, тобто на просторі S існує ймовірність P така, що $P(A) = P(A_\varepsilon)$ для будь-якої події $A \in S$ та її паралельного перенесення A_ε. Тоді кожен проміжок $[i; i+1)$, $i \in Z$, є подією, причому $P([i; i+1)) = P([0;1))$.

Можливі два випадки: 1) $P([0;1)) > 0$ і 2) $P([0;1)) = 0$. Якщо має місце випадок 1), то

$$P([0; +\infty)) = P\Big(\sum_{i=0}^{\infty} [i; i+1)\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} P([i; i+1)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} P([0;1)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot P([0;1)) = +\infty,$$

що неможливо.

Отже, повинен мати місце випадок 2). Проте у цьому випадку аналогічно дістаємо

$$P([0; +\infty)) = \lim_{n\to\infty} n \cdot P([0;1)) = 0 \text{ і}$$

$$P((-\infty; 0)) = P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} [-i; -i+1)\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P([-i; -i+1)) = \lim_{n\to\infty} n \cdot P([0;1)) = 0,$$

а тому

$$P(\Omega) = P((-\infty; +\infty)) = P((-\infty; 0)) + P([0; +\infty)) = 0,$$

що також неможливо.

Отже, припущення про правильність твердження 4 привело до суперечності. Тому твердження 4 не є правильним.

5. Нехай $\Omega = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, а сукупність S складається з порожньої множини та усіляких скінченних множин і їх доповнень до N.

Доведемо, що V є алгеброю.

Дійсно, умови 1_s і 2_s виконуються. Розглянемо умову 3_s. Якщо $A \in S$ і $B \in S$, то можливі два випадки:

1) множини A і B є скінченними, тоді й множина $A \bigcup B$ є скінченною, а тому $(A \bigcup B) \in S$;

2) принаймні одна з множин (припустимо, що A) є доповненням до N деякої скінченної множини (наприклад $A = N \setminus \{n_1, n_2, ..., n_k\}$), тоді й $A \bigcup B = (N \setminus \{n_1, n_2, ..., n_k\}) \bigcup B$ є доповненням до N деякої скінченної множини, а тому $(A \bigcup B) \in S$. Отже, V є алгеброю.

Визначимо міру μ на V так: $\mu(A) = 0$, коли A – скінченна множина, і $\mu(A) = 1$, коли A нескінченна. Зрозуміло, що μ є адитивною мірою, проте для множини $N \in S$ маємо:

$$\mu(N) = 1 = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) = 0 .$$

Отже, μ є адитивною, проте не є σ-адитивною мірою.

Тому твердження 5 не є правильним.

Вправа 4. Нехай експеримент полягає в тому, що навмання вибирається точка з проміжка $[0, 1)$, причому всі точки проміжка вважаються “рівноможливими”. У цьому разі неможливо приписати ймовірність кожному елементу простору елементарних подій $\Omega = [0, 1)$ так, щоб за ймовірностями елементарних подій можна було визначити ймовірності попадання в будь-які підмножини множини Ω (оскільки якщо всі точки з $[0, 1)$ рівноможливі, то довелося б покласти $P(E) = 0, \; E \in \Omega = [0,1)$). Тоді ймовірність приписують не окремим елементам, а деяким підмножинам множини Ω. При цьому вимагають, щоб ймовірність задовольняла певним вимогам, наприклад, ймовірності попадання в інтервали однакової довжини були однакові (якщо точки “рівноможливі”), ймовірність попадання в підмножину деякої множини не була більшою, ніж ймовірність попадання в саму множину, і т.п.

Крім того, якщо визначено ймовірності подій A і B, то бажано мати можливість визначити і ймовірності подій

$$\overline{A}, \; \overline{B}, \; A \bigcup B, \; A \bigcap B, \; A \setminus B \; .$$

Нехай ймовірність попадання в проміжок $[a_i, b_i) \subset [0,1)$ дорівнює $(b_i - a_i)$, а в об’єднання скінченної кількості проміжків $[a_i, b_i)$, які не перетинаються, $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i), \; i = \overline{1, n}$. Розглянемо систему L всіх проміжків виду $[a_i, b_i)$ і скінченних сум таких проміжків. Нехай $\mathscr{B} = \sigma(L)$ – найменша σ–алгебра, що містить систему L, тобто σ–алгебра борелівських множин проміжка

$[0,1)$. За теоремою Каратеодорі існує єдина міра $P(A)$ на $\mathscr{B}$ така, що $P([a, b)) = b - a, [a,b) \in L$. Розглядатимемо як випадкові події лише борелівські підмножини множини $\Omega = [0,1)$. Ймовірністю події $A \in \mathscr{B}$ назвемо $P(A)$.

Таким чином, побудовано ймовірнісну модель (ймовірнісний простір) $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ експерименту, який полягає в тому, що з проміжка $[0,1)$ навмання вибирається точка, тобто задано:

1) простір елементарних подій $\Omega = [0,1)$;
2) σ–алгебру $\mathscr{B}$ випадкових подій;
3) ймовірність $P(A)$, $A \in \mathscr{B}$.

Слід підкреслити, що оскільки в $[0,1)$ існують невимірні за вище введеною мірою $P(A)$ підмножини, то неможливо на множині всіх підмножин проміжка $[0,1)$ визначити ймовірність (ймовірнісну міру) вказаним вище способом. Тому в даному разі як випадкові події розглядаються не всі підмножини множини $\Omega = [0,1)$, а тільки частина з них, а саме ті, що утворюють σ–алгебру всіх борелівських множин.

Сукупність борелівських множин $\mathscr{B} = ([0,1])$ відрізка $[0,1]$ можна дістати й як $\{A \bigcap [0,1]\}, A \in \mathscr{B}(R^1)$, де $\mathscr{B}(R^1)$ – сукупність борелівських множин на числовій прямій $(-\infty, \infty)$.

Вправа 5. Довести, що ймовірнісна міра P є σ-адитивною на алгебрі V тоді й тільки тоді, коли P неперервна знизу, тобто для будь-яких подій $A_i \in V$, для яких $A_i \subset A_{i+1}$ і $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in V$ виконується рівність $\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)$.

Оскільки $A_i \subset A_{i+1}$, $i \in N$, то події

$$A_1, (A_2 - A_1), (A_3 - A_2), \ldots, (A_n - A_{n-1}), \ldots,$$

є попарно несумісними, причому $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1})$, де $A_0 = \varnothing$. Тому

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1})) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n - A_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (P(A_n) - P(A_{n-1})) =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{i} (P(A_n) - P(A_{n-1})) = \lim_{i\to\infty} (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) +$$

$$+ \ldots + P(A_i) - P(A_{i-1})) = \lim_{i\to\infty} P(A_i).$$

Отже, якщо ймовірнісна міра P є σ-адитивною, то вона є неперервною знизу.

Припустимо, що ймовірнісна міра P є неперервною знизу на алгебрі V. Доведемо її σ-адитивність. Для цього візьмемо довільні попарно несумісні події B_n, $n \in N$, для яких $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in V$. Тоді події $A_i = \sum\limits_{n=1}^{i} B_n$ задовольняють умову $A_i \subset A_{i+1}$ і $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in V$, а тому за неперервністю знизу

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = \lim_{i\to\infty} P(\sum_{n=1}^{i}(B_n)) = P(\lim_{i\to\infty} A_i) = P(\sum_{n=1}^{\infty}(B_n)).$$

З іншого боку

$$\lim_{i\to\infty} P(\sum_{n=1}^{i}(B_n)) = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{i} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n).$$

Отже, $P(\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(B_n)$, тобто ймовірнісна міра P є σ-адитивною.

Вправа 6. Нехай $a < b$ і $\Omega = [a;b]$ – простір елементарних подій, а простір S випадкових подій породжений сукупністю скінченних об'єднань проміжків, що є частинами $[a;b]$. Тоді кожній події $A \in S$ можна приписати міру (довжину) $m(A)$ (що узагальнює поняття довжини відрізка). Тому існує функція $P(A)$, $A \in S$, така, що $P(A) = \dfrac{m(A)}{b-a}$, і для неї виконуються основні властивості ймовірності. Зокрема, якщо $A = \langle \alpha;\ \beta \rangle \subset [a;b]$, то $P(A) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$, а коли $A = \bigcup\limits_{i} \langle \alpha_i;\ \beta_i \rangle$, де проміжки $\langle \alpha_i;\ \beta_i \rangle \subset [a;b]$ і попарно не перетинаються, то

$$P(A) = \frac{1}{b-a} \sum_{i} (\beta_i - \alpha_i) = \sum_{i} \frac{\beta_i - \alpha_i}{b-a} = \sum_{i} P(A_i), \text{ де } A_i = \langle \alpha_i\ ; \beta_i \rangle.$$

При цьому виявляється, що не кожна підмножина $B \subset [a;b]$ є вимірною множиною, тобто подією. Відомо, що кожен проміжок $\langle \alpha; \beta \rangle$, де $\alpha < \beta$, містить підмножину B, що не є вимірною (якій неможливо приписати довжину), а тому в розглядуваному випадку $B \overline{\in} S$, тобто B не є подією. В той же час до простору S належать події (множини) виду $\bigcup\limits_{i} \langle \alpha_i;\ \beta_i \rangle$, а також перетини та різниці таких множин.

Зауважимо також, що в даному випадку кожна елементарна подія $E = x \in [a;b]$ має нульову ймовірність, оскільки $P(E) = P(\{E\}) = P(\{x\}) = P([x;x]) = 0$.

Отже, якщо простір Ω не є дискретним, то ймовірності елементарних подій можуть не визначати ймовірності усіх подій $A \in S$.

Вправа 7. Нехай при підкиданні шестигранного кубика велику кількість разів фіксувалися наслідки:

E_1 – на верхній грані випадає цифра 6, $\{E_1\} = \{"6"\}$;

E_2 – на верхній грані випадає цифра 5, $\{E_2\} = \{"5"\}$;

E_3 – на верхній грані випадає цифра не більша, ніж 4, $\{E_3\} = \{"1", "2", "3", "4"\}$.

При цьому відомо, що $P(\{E_1\}) = 0{,}6$; $P(\{E_2\}) = 0{,}3$; $P(\{E_3\}) = 0{,}1$.

Тоді для множини $\{"1","2","3","4","5","6"\}$ можна обчислити ймовірності попадання лише в підмножини

$$\{E_1\},\ \{E_2\},\ \{E_3\},\ \{E_1\} + \{E_2\} = \{"5","6"\},$$
$$\{E_1\} + \{E_3\} = \{"1","2","3","4","6"\},$$
$$\{E_2\} + \{E_3\} = \{"1","2","3","4","5"\},\ \Omega = \{E_1\} + \{E_2\} + \{E_3\},\ \varnothing .$$

Разом з тим при наведеному заданні ймовірнісної міри ймовірності попадання в підмножини $\{"1"\}$, $\{"2"\}$, $\{"2","3"\}$, $\{"1","5"\}$, $\{"2","6"\}$ і т.д. обчислити неможливо – такі підмножини виявляються *невимірними* за так заданою мірою і не розглядаються як події.

Вправа 8. Нехай Ω – довільний простір елементарних подій, а S – деякий простір випадкових подій, що відповідає Ω.

Чи завжди можна задати на просторі S функцію, що задовольняє властивості $1_р$-$3_р$?

Для відповіді на це питання виділимо скінченну або зчисленну кількість елементарних подій $E_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots$, і покладемо $P(\{E_i\}) = p_i \in [0;1]$, де $\sum_i p_i = 1$. Після цього вважатимемо, що $P(A) = \sum_{E_i \in A} P(\{E_i\})$ для будь-якого $A \in S$, причому $P(A) = 0$, коли $E_i \overline{\in} A$ для всіх i.

Зокрема, якщо виділити лише одну елементарну подію $E_1 \in \Omega$, то можна вважати, що

$$P(A) = \begin{cases} 1, & \text{коли } E_1 \in A, \\ 0, & \text{коли } E_1 \overline{\in} A. \end{cases}$$

Легко бачити, що так визначена функція $P(A)$, $A \in S$, задовольняє умови $1_р$–$3_р$, тобто є ймовірнісною мірою (ймовірністю) довільної події $A \in S$.

Отже, на будь якому просторі подій S можна задати деяку ймовірнісну міру $P(A)$, $A \in S$. При цьому, якщо простір S містить більше двох подій, то на ньому можна задати більше однієї функції $P(A),\ A \in S$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. а) Система V підмножин множини Ω є алгеброю, якщо і тільки якщо: 1) $(A+B) \in V$ і $(A \cdot B) \in V$ для будь-яких множин $A \in V$ і $B \in V$; 2) $\Omega \in V$ і $A \setminus B \in V$ для будь-яких $A \in V$ і $B \in V$.

2. 1) Якщо V є алгеброю, то вона є й σ–алгеброю; 2) обернене твердження до твердження 2.1, є правильним.

3. Сукупність V усіляких скінченних підмножин множини N натуральних чисел є алгеброю.

4. Сукупність V усіляких скінченних та зчислених підмножин множини N натуральних чисел є σ-алгеброю.

5. Сукупність усіляких континуальних підмножин відрізка $[0;1]$ є σ–алгеброю.

6. Якщо V_1 і V_2 – σ–алгебри підмножин множини Ω, то $V_1 \cap V_2$ також σ-алгебра.

7. Система L, що складається із скінченних сум проміжків виду $[a;b)$, є 1) алгеброю, 2) σ–алгеброю.

8. Кожна підмножина множини $\Omega = (-\infty;+\infty)$ є борелівською множиною.

9. Кожна числова функція, що визначена на алгебрі V і набуває невід'ємних значень, є мірою.

10. Якщо μ – міра, то $\mu(\varnothing) = 0$.

11. Кожну зчисленно адитивну міру можна продовжити з алгебри V, на якій вона визначена, на найменшу σ–алгебру $\sigma(V)$, що містить V.

12. Продовження міри μ з алгебри V на σ–алгебру $\sigma(V)$ не є єдиним.

13. Для будь-якого ймовірнісного простору (Ω, S, P) ймовірність будь-якої події A цілком визначається ймовірностями одноелементних подій $\{E\}$, де $E \in A$.

14. На будь-якому просторі подій можна задати ймовірнісну міру.

15. Для кожного простору елементарних подій Ω можна побудувати єдиний вимірний простір $(\Omega,\ S)$.

2. Побудувати ймовірнісний простір для експерименту, який полягає у підкиданні монети до першого випадання герба, вважаючи, що ймовірність випадання герба для кожного підкидання дорівнює $p \in (0;1)$.

3. Показати, що всі розглянуті операції над скінченною або зчисленною (лише над скінченною) кількістю підмножин не виводять з σ–алгебри (з алгебри) S. Зокрема, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in S$, коли $A_i \in S,\ i \in N$.

4. Нехай $D = (H_1,\ H_2, \ldots)$ – деяке зчисленне розбиття Ω на непорожні підмножини

$$\Omega = H_1 + H_2 + \ldots,\ H_i\ H_j = \varnothing,\ i \neq j,$$

а система $S = \sigma(D)$ утворена з множин, що є сумами скінченної або зчисленної кількості елементів з D, і приєднаною порожньою множиною $\varnothing$. Довести, що S є і алгеброю, і σ–алгеброю.

5. Довести, що для будь-якої системи множин W існує найменша σ–алгебра $\sigma(W)$, що містить систему W.

6. Нехай P – скінченно-адитивна міра, задана на алгебрі V, причому $P(\Omega) = 1$. Довести, що наступні умови еквівалентні:

1) P є σ-адитивною;

2) P неперервна знизу, тобто для будь-яких $A_1, A_2, \ldots$ з V таких, що $A_i \subset A_{i+1}$, $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in V$, виконується рівність

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P(\lim_{i\to\infty} A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right);$$

3) P неперервна зверху, тобто для будь-яких $A_1, A_2, \ldots$ з V таких, що $A_i \supset A_{i+1}$, $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in V$, виконується рівність

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P(\lim_{i\to\infty} A_i) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right);$$

4) P неперервна в $\varnothing$, тобто для будь-яких $A_1, A_2, \ldots$ з V таких, що $A_{i+1} \subset A_i$, $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, виконується рівність $\lim\limits_{i\to\infty} P(A_i) = 0$.

5) P неперервна в Ω, тобто для будь-яких $A_1, A_2, \ldots$ з V таких, що $A_i \subset A_{i+1}$ і $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, виконується рівність $\lim\limits_{i\to\infty} P(A_i) = 1$.

Умови 2) і 3) можна записати так:

$$P(\lim_{i\to\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i).$$

Властивість, що визначається останньою рівністю, називається властивістю неперервності зчисленно-адитивної ймовірнісної міри.

7. Нехай простір Ω елементарних подій є дискретним, тобто скінченним або зчисленним. Довести, що тоді для задання ймовірності $P(A)$, $A \in S$, достатньо задати $P(\{E\})$ для кожного $E \in \Omega$.

8. Нехай експеримент полягає у підкиданні монети до першого випадання герба.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.
2. Утворити алгебру S_1 підмножин множини Ω, що не є σ-алгеброю.
3. Задати на S_1 три функції, перша з яких не є мірою, друга є скінченно адитивною, проте не σ-адитивною ймовірністю, і третя є σ-адитивною ймовірністю.
4. Утворити дві різні σ-алгебри S_2 та S_3 підмножин множини Ω.
5. Задати на S_2 і S_3 ймовірнісні міри (σ-адитивні ймовірності).

9. Монету підкидають доти, поки вона двічі поспіль не впаде однією і тією самою стороною догори.

1. Побудувати простір Ω елементарних подій, кожна з яких вказує, скільки підкидань зроблено, і результати кожного з цих підкидань.
2. Покласти $P(E) = p^k (1-p)^{n-k}$, де $p \in (0;1)$, а $E \in \Omega$ і E вказує, що зроблено n підкидань, причому k разів випав герб і $(n-k)$ разів – цифра. Перевірити, чи може так визначене $P(E)$ задавати ймовірність на будь-якому просторі подій S, події якого є підмножинами множини Ω.
3. Знайти ймовірність події A, яка полягає в тому, що : 1) монету підкидали не більше 7 разів; 2) монету підкидали не менше 8 разів; 3) монету підкидали парну кількість разів; 4) монету підкидали непарну кількість разів.

10. Нехай $\Omega = N$, а V складається з таких підмножин множини Ω, кожна з яких скінченна або має скінченне доповнення до множини Ω.

1. Довести, що V є алгеброю і не є σ-алгеброю.
2. Побудувати найменшу σ-алгебру S, що містить V.
3. Задати на V зчисленно-адитивну ймовірнісну міру P.
4. Продовжити ймовірнісну міру P з алгебри V на σ-алгебру S.
5. Задати на алгебрі V міру μ, що не є σ-адитивною, і вирішити, чи можна її продовжити на σ-алгебру S.

11. З двох монет різного номіналу навмання вибирають одну, підкидають її, а потім підкидають другу монету і фіксують відповідну пару граней монет.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій і підрахувати кількість елементів Ω.
2. Утворити алгебру V підмножин простору Ω, що не є ні найширшою, ні найвужчою.
3. Вирішити, чи може якась алгебра V підмножин простору Ω не бути σ-алгеброю.
4. Утворити найширшу σ-алгебру S, що містить алгебру V.
5. Задати ймовірнісні міри на V і на S.
6. Вирішити, чи може міра на S (що містить у собі V) не бути продовженням міри на V.

12. У двох цехах виготовляють однакові деталі. У першому виготовлено 30%, а у другому – 70% усіх деталей. Ймовірність браку складає 0,1 для першого цеху і 0,2 – для другого. Усі деталі знаходяться на складі, звідки навмання беруть деталь.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій, кожна з яких містить дані про те, у якому цеху зроблена деталь та бракована вона чи ні.
2. Утворити простір подій S, для якого подіями є: A – навмання взята деталь є якісною і B – навмання взята деталь виготовлена у першому цеху.
3. Вирішити, як можна задати на S ймовірнісну міру.
4. Знайти ймовірності подій A, B, AB, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{AB}$, $\overline{A}B$ і $A\overline{B}$.

13. Проміжок $[a;b)$ поділено на три рівні проміжки I_1, I_2, I_3. Експеримент полягає у тому, що з проміжку $[a;b)$ навмання вибирають три точки і фіксують, з яких проміжків I_1, I_2 або I_3 вибрана відповідна точка.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.
2. Побудувати простір подій S, якому належить подія A, яка полягає у тому, що з кожного проміжку I_1, I_2 та I_3 вибрано лише одну точку.
3. Визначити ймовірнісну міру за умови, що попадання точки в будь-які проміжки I_1, I_2 та I_3 рівноймовірні.
4. Знайти ймовірність події A.

14. Для вказаних експериментів побудувати ймовірнісні простори і визначити вказані ймовірності, вважаючи результати експерименту рівноможливими:

1. Навмання вказуються місяць та число деякого (не високосного) року. Яка ймовірність того, що це буде неділя, якщо всього в цьому році 53 неділі?
2. В кишені кілька монет по 2 та 10 коп. Відомо, що монет номіналом 2 коп. втричі більше. Яка ймовірність того, що вийнята навмання монета буде монетою 10 коп.?

3. З повної колоди карт (52) виймають 3 карти. Яка ймовірність того, що серед них буде принаймні одна з карт «3», «7», «10».

4. Чотиритомний твір розташовано на полиці у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що томи стоять в порядку зростання номерів.

5. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написані на п'яти картках. Навмання послідовно вибираються три картки і кожна наступна цифра ставиться праворуч від попередньої. Знайти ймовірність того, що отримане тризначне число буде парним.

6. Колода з 52-х карт ділиться навпіл. Знайти ймовірність того, що число червоних та чорних карт в обох частинах буде однаковим.

7. При запису прізвищ учасників деяких зборів, загальна кількість яких дорівнювала 360, з'ясувалось, що початковою літерою у прізвищах 7 з них була «*А*», у 2 – «*Ю*», у 5 – «*Е*», у 8 – «*І*», у 9 – «*О*», у 4 – «*У*», а в інших прізвище починалось з приголосних. Знайти ймовірність того, що прізвище навмання обраного учасника зборів починається з голосної літери.

8. Кожна із літер *Е, Н, О, С, Ц* записана на одній з 5 карток. Картки розташовують навмання. Знайти ймовірність того, що утвориться слово «*СОНЦЕ*».

9. Є 6 карток, на яких написані букви *А, Е, І, Л, Р, Т*. Знайти ймовірність того, що при вийманні навмання одна за однією 4-х карток утвориться слово *ЛІРА*.

10. Телефонний номер складається з 5 цифр. Знайти ймовірність того, що у навмання вибраному номері всі цифри різні.

11. Буквений замок містить на осі 5 дисків, кожен з яких поділено на 6 секторів, помічених певними літерами. Замок відкривається тільки тоді, коли буде встановлено певний набір із п'яти літер. Яка ймовірність відкрити замок, встановивши набір літер навмання.

12. В урні 2 білих і 4 чорних кульки. З урни одна за однією виймають усі кульки. Знайти ймовірність того, що остання кулька чорна.

13. Дитина грається з 10 картками, на яких написані літери *А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т*. Знайти ймовірність того, що переставляючи картки навмання, вона випадково складе «МАТЕМАТИКА».

14. Кидають 2 гральних кубики. Знайти ймовірність того, що випадуть: 1) однакові числа очок на обох кубиках; 2) різні числа очок на обох кубиках.

15. В стародавній грі для виграшу необхідно отримати при киданні трьох гральних кубиків суму очків, більшу 10. Знайти ймовірності: 1) отримати 11 очків; 2) 12 очків; 3) виграшу.

16. В шаховому турнірі беруть участь 20 чоловік, яких поділили на 2 групи по 10 чоловік. Знайти ймовірність того, що: 1) двоє найбільш сильних гравців будуть грати в різних групах; 2) четверо найбільш сильних гравців попадуть по 2 в різні групи.

17. З колоди у 32 карти навмання вибираються 4 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна «10».

18. З колоди в 32 карти береться навмання 10 карт. Знайти ймовірність того, що серед них буде 8 карт однієї масті.

19. Товариство з m осіб сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що двоє певних людей опиняться поруч.

20. В лотереї 100 білетів. Серед них один виграш 50 грн., 3 виграші по 25 грн., 6 виграшів по 10 грн., 15 виграшів по 3 грн. Навмання вибирається 1 білет. Знайти ймовірність а) виграти не менше 25 грн., б) виграти не більше 25 грн.

21. В умовах попередньої задачі знайти ймовірність якого-небудь виграшу, якщо куплено 3 білети.

22. В залі $n+k$ місць. Випадковим чином займають місця n глядачів. Знайти ймовірність того, що будуть зайняті певні $m \leq n$ місць.

23. Є 5 білетів вартістю 1 грн., 3 білети – 3 грн., 2 білети – 5 грн. Навмання вибираються 3 білети. Знайти ймовірність того, що а) хоч би 2 білети мають однакову вартість; б) всі 3 білети коштують 7 грн.

24. Лотерею випущено на суму n гривень. Ціна одного білета r гривень. Цінні виграші припадають на m білетів. Знайти ймовірність цінного виграшу на один білет.

25. В гаманці містяться 3 монети по 25 копійок і 7 монет по 5 копійок. Навмання вибирається одна монета, а потім друга, яка виявляється монетою 25 копійок. Знайти ймовірність того, що і перша монета була 25 копійок.

26. На 10 однакових картках написані цифри від 0 до 9. Знайти ймовірність того, що навмання утворене за допомогою цих карток: 1) двозначне число ділиться на 18; 2) тризначне число ділиться на 36.

27. Загін, що нараховує 25 чоловік, бере участь у військовій грі. В загоні 5 слідчих та 4 зв'язківці. В розвідку потрібно відправити 4 чоловік. Яка ймовірність того, що в групу розвідки потраплять 2 зв'язківці та 2 слідчі.

28. На картках написані цілі числа від 1 до 15. Навмання вибирають 2 картки. Яка ймовірність того, що сума чисел, написаних на цих картках, дорівнює 10.

29. 10 книг розставляються навмання. Знайти ймовірність того, що 3 певні книжки будуть стояти поруч.

30. З 10 білетів 2 виграшних. Навмання вибирають 5 білетів. Знайти ймовірність того, що серед цих 5 білетів: 1) один виграшний; 2) два виграшних; 3) хоча б один виграшний.

31. Є $n+m$ білетів, серед яких n – виграшних. Знайти ймовірність того, що серед k куплених білетів буде s виграшних.

32. Набираючи номер телефону, абонент забув останні 2 цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.

33. У цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання обрано 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед них будуть 3 жінки.

34. У конверті серед 100 фотокарток знаходиться одна, яку шукають. З конверту навмання беруть 10 карток. Знайти ймовірність того, що серед них буде та, яку шукають.

35. У групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання обрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них 5 відмінників.

15*. Непорожню систему W підмножин множини $\Omega \neq \varnothing$ називають *півалгеброю*, якщо $\Omega \in W$ і для будь-яких множин $A \in W$ і $B \in W$ виконуються умови: 1) $A \bigcap B \in W$ та 2) існують $n \in N$ і множини $B_i \in W$, $i \in \overline{1,n}$, для яких $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

1. Перевірити, чи є сукупність W усіляких проміжків $<\alpha,\beta> \subset <a;b> = \Omega \neq \varnothing$: 1) півалгеброю; 2) алгеброю.

2. Довести, що коли W є півалгеброю, а система множин V складається з усіляких множин вигляду $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, де $n = n(A) \in N$ і $A_k \in W$, $k \in \overline{1,n}$, причому множини A_k попарно не перетинаються, то V є найменшою алгеброю, що містить у собі W.

16*. 1. Утворити найменшу алгебру V, що містить у собі півалгебру W усіляких проміжків $<\alpha,\beta> \subset <a;b> = \Omega \neq \varnothing$.

2. Перевірити, чи є утворена алгебра V σ-алгеброю.

17*. Нехай Ω є множиною раціональних чисел з відрізка $[0;1]$, а W складається з перерізів Ω з усілякими проміжками $<\alpha;\beta> \subset [0;1]$.

1. Довести, що W є півалгеброю.

2. Утворити найменшу алгебру $V = V(W)$, що містить W.

3. Задати міру μ на півалгебрі W умовою $\mu(A_{\alpha\beta}) = b - a$, коли $A_{\alpha\beta} = \Omega \bigcap <\alpha;\beta>$ і визначити, як продовжити цю міру з півалгебри W на найменшу алгебру $V = V(W)$, що містить W.

4. Перевірити, чи є міра μ σ-адитивною.

18*. *Задача про лебегове продовження σ-адитивної міри.* Нехай σ-адитивна міра $m(A)$ визначена на півалгебрі W підмножин множини $\Omega \neq \varnothing$, а S^* – найширша σ-алгебра підмножин множини Ω. *Зовнішньою мірою* множини $A \in S^*$ називають число

$$\mu^*(A) = \inf \sum_k m(B_k),$$

де інфімум береться на всіляких не більш ніж зчисленних сукупностях множин $B_k \in W$, $k \in \overline{1,n}$ або $k \in N$, для яких $A \subset \bigcup_k B_k$.

1. Знайти, чому дорівнює $\mu^*(A)$, коли A належить до найменшої алгебри $V = V(W) \supset W$, і вирішити, як продовжити міру m з півалгебри W на алгебру $V = V(W)$.

2. Множину $A \in S^*$ називають *вимірною* (*за Лебегом*), якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists B \in V(W)$:

$$\mu^*((A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)) < \varepsilon .$$

При цьому число $\mu^*(A)$ називають *мірою* (*Лебега*) множини A і позначають $\mu(A)$. Довести, що кожна множина $A \in V = V(W)$ є вимірною (за Лебегом) і знайти її міру (Лебега).

3. Довести, що сукупність S вимірних за Лебегом множин є алгеброю, а міра Лебега μ є σ-адитивною на цій алгебрі S.

4. Довести, що сукупність S вимірних за Лебегом множин є σ-алгеброю.

Міру Лебега називають *лебеговим продовженням* міри m з півалгебри W на σ-алгебру S.

19*. Нехай W – півалгебра усіляких проміжків $<\alpha; \beta> \subset [a;b] = \Omega$, де $a < b$, а міра $m(<\alpha;\beta>) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$. Здійснити лебегове продовження міри m з півалгебри W на σ-алгебру S вимірних за Лебегом множин і довести, що утворена міра Лебега μ є ймовірнісною мірою.

2.2. Функція та щільність одновимірного розподілу ймовірностей та їх властивості

Нехай задано ймовірнісний простір $(R^1, \mathscr{B}(R^1), P)$. Функція F, визначена рівністю

$$F(x) = P((-\infty, x)), \ x \in R^1,$$

називається *функцією розподілу ймовірностей* на числовій прямій.

Приклад 2.1. Нехай ймовірнісна міра визначена на σ-алгебрі S підмножин дискретного простору елементарних подій $\Omega = \{E_1, E_2, ...\}$ так, що $\{E_k\} \in S$, $k = 1, 2, ...$, тобто існує $P(\{E_k\})$ для кожного $E_k \in \Omega$. Тоді поставивши у взаємно однозначну відповідність елементарним подіям E_k точки x_k на числовій осі, $k = 1, 2, ...$, $x_k \in R^1$, і поклавши $P(\{x_k\}) = P(\{E_k\})$, одержимо $F(x) = P((-\infty; x) = \sum_{x_k < x} P(\{x_k\})$. У випадку, коли $x_1 < x_2 < ...$, функція F буде кусково-сталою.

Функція F розподілу ймовірностей має такі властивості.

1°. $F(x) \ge 0$ – невід'ємна для всіх $x \in R$.

2°. $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$, де

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x),\ F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

3°. $F(x)$ неспадна, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

4°. $F(x)$ неперервна зліва в будь-якій точці $x \in R^1$.

Наведені властивості $1^\circ - 4^\circ$, є *характеристичними для функції розподілу* ймовірностей на числовій прямій R^1 у тому розумінні, що *коли* F *– деяка функція, що задовольняє умови* $1^\circ - 4^\circ$, *то на* $(R^1, \mathscr{B}(R^1))$ *існує, і притому єдина, ймовірнісна міра для якої* $P([-\infty, x)) = F(x)$, *зокрема* $P([x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1)$, *коли* $-\infty < x_1 \le x_2 < \infty$.

Міру P, побудовану за функцією F, називають *мірою Лебега-Стільтьєса.*

Якщо

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ x & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1, \end{cases}$$

то відповідну ймовірнісну міру $\lambda(A) = P(A)$ називають *мірою Лебега* на інтервалі $[0, 1]$. Очевидно, що $\lambda([a, b)) = b - a$, коли $[a; b) \subset [0;1]$. Звідси видно, що міра Лебега проміжків $[a, b), [a, b], (a, b], (a, b)$, що є частинами $[0,1]$, також дорівнює $b - a$.

Розглянемо систему $\overline{\mathscr{B}}([0, 1])$ множин Λ з $[0, 1]$ таких, що для кожного Λ можна знайти борелівські множини A і B такі, що $A \subseteq \Lambda \subseteq B,\ \lambda(B \setminus A) = 0$. Система $\overline{\mathscr{B}}([0, 1])$ є σ-алгеброю, яку називають *системою лебегових множин* відрізка $[0, 1]$. Очевидно, що $\mathscr{B}([0, 1]) \subset \overline{\mathscr{B}}([0, 1])$. Міру λ, визначену поки що лише на множинах з $\mathscr{B}([0, 1])$, можна продовжити на $\overline{\mathscr{B}}([0, 1])$, поклавши $\overline{\lambda}(\Lambda) = \lambda(A)$, якщо

$$\Lambda \in \overline{\mathscr{B}}([0, 1]),\ A \subseteq \Lambda \subseteq B, A \in \mathscr{B}([0,1]),\ B \in \mathscr{B}([0,1]),\ \lambda(B \setminus A) = 0.$$

Визначена так функція від множин з $\overline{\mathscr{B}}([0, 1])$ буде ймовірнісною мірою на $([0, 1], \overline{\mathscr{B}}([0, 1)))$. Її називають також *мірою Лебега* (на системі лебегових множин відрізка $[0, 1]$).

Відповідність між ймовірнісними мірами P і функціями розподілу ймовірностей F, яка визначається рівністю

$$P([x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1), \tag{1.1}$$

дає змогу конструювати різні ймовірнісні міри, задаючи відповідні функції розподілу.

Якщо міра P зосереджена в точках $x_1, x_2, \ldots$:

$$P(\{x_k\}) = F(x_k + 0) - F(x_k) = \Delta F(x_k) \text{ і } \sum_k P(\{x_k\}) = 1,$$

то цю міру і відповідну функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ називають *дискретною*. Розподіл ймовірностей на множині $\Omega = R^1$, що описується дискретною функцією розподілу ймовірностей, також називається *дискретним розподілом* на множині $\Omega_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Приклад 2.2. Якщо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{коли } x > 1. \end{cases}$$

то F є функцією розподілу ймовірностей і задає дискретний розподіл ймовірностей на множині $\Omega = \{0, 1\}$:

$$P(0) = F(0+0) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},\ P(1) = F(1+0) - F(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ називається *абсолютно-неперервною*, якщо її можна подати у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \tag{1.2}$$

де $f(t)$ – деяка невід’ємна функція, $t \in R^1$ (в загальному випадку мається на увазі інтеграл Лебега). При цьому відповідний розподіл ймовірностей також називають *абсолютно неперервним*, і відповідну ймовірнісну міру P також називають *абсолютно неперервною* .

Невід’ємна функція $f(x)$, $x \in R^1$, через яку визначається $F(x)$ за рівністю (1.2), називається *щільністю розподілу ймовірностей*. Для неї має місце рівність $F'(x) = f(x)$ майже скрізь на $(-\infty, +\infty)$.

Відмітимо *основні характеристичні властивості щільності розподілу ймовірностей*:

1. $f(x) \ge 0$ та існує інтеграл (1.2) для кожного $x \in R$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Приклад 2.3. Щільність розподілу міри Лебега на проміжку $[0;1]$ описує функція

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{коли } 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } x>1.\end{cases}$$

Тому ця міра абсолютно неперервна.

Міра, функція розподілу $F(x)$ якої неперервна і $F'(x)=0$ майже всюди (множина точок зростання є множиною нульової міри Лебега), називається *сингулярною*.

Виявляється, що довільну функцію розподілу ймовірностей можна подати у вигляді

$$p_1F_1+p_2F_2+p_3F_3,$$

де F_1 – дискретна, F_2 – абсолютно неперервна, F_3 – сингулярна функції розподілу; $p_1+p_2+p_3=1,\ p_i\ge 0,\ i=1,2,3$.

Приклад 2.4. Якщо $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{6}, & \text{коли } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } 1>x,\end{cases}$ то $F(x)$ – функція розподілу ймовірностей, для якої $F(x)=\frac{1}{2}F_1(x)+\frac{1}{2}F_2(x)+0\cdot F_3(x)$, де $F_1(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{3}, & \text{коли } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } 1<x,\end{cases}$ $F_2(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ x, & \text{коли } 0\le x\le 1,\\ 1, & \text{коли } 1\le x,\end{cases}$ а F_3 – будь-яка сингулярна складова.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Приклад сингулярної функції розподілу ймовірностей.

Нехай множина $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\ \bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,\,k}$ є об'єднанням відрізків $I_{n,\,k}$, де:

$I_{1,1}=[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$ – один відрізок першого рангу;

$I_{2,1}=[\frac{1}{9};\frac{2}{9}]$, $I_{2,2}=[\frac{7}{9};\frac{8}{9}]$ – два відрізки другого рангу;

$I_{3,1}=[\frac{1}{27};\frac{2}{27}]$, $I_{3,2}=[\frac{7}{27};\frac{8}{27}]$, $I_{3,3}=[\frac{19}{27};\frac{20}{27}]$, $I_{3,4}=[\frac{25}{27};\frac{26}{27}]$ – чотири відрізки третього рангу і взагалі для будь-якого $n\in N$;

$I_{n,1}=[\frac{1}{3^n};\frac{2}{3^n}]$, $I_{n,2}=[\frac{7}{3^n};\frac{8}{3^n}]$, …, $I_{n,2^{n-1}}=[\frac{3^n-2}{3^n};\frac{3^n-1}{3^n}]$ – 2^{n-1} – відрізків n-го рангу.

Геометричну ілюстрацію відрізків $I_{n,k}$ наведено на Рис.2.1.

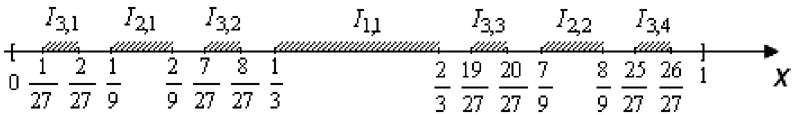


Рис. 2.1

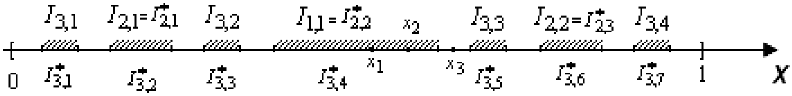


Рис. 2.2

Зауважимо, що між будь-якими двома сусідніми відрізками n-го рангу, $n > 1$, лежить рівно один відрізок рангу, меншого за n (див. Рис. 2.1). При цьому відрізки n-го рангу пронумеровано числами $k \in \overline{1,\ 2^{n-1}}$ у порядку їх розташування на числовій прямій (той відрізок, що розташований правіше, дістає більший номер).

Покладемо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le 0, \\ \dfrac{2k-1}{2^n}, & \text{коли} \quad x \in I_{n,\,k},\ k \in \overline{1,\ 2^{n-1}},\ n \in N, \\ 1, & \text{коли} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Доведемо, що коли всі відрізки, рангу не більшого за n, $n > 1$, перенумерувати у порядку їх розташування на числовій прямій, то дістанемо відрізки $I^*_{n,\,k}$, $k \in \overline{1,\ (2^n - 1)}$, (Рис. 2.2), причому

$$F(x) = \frac{k}{2^n}, \text{ коли } x \in I^*_{n,\,k},\ k \in \overline{1,\ (2^n - 1)},\ n \in N .$$

Справді, для $n = 2$ маємо (див. Рис. 2.2):

$I^*_{2,\,1} = I_{2,\,1}$, $I^*_{2,\,2} = I_{1,\,1}$, та $I^*_{2,\,3} = I_{2,2}$, причому (див. Рис. 2.3)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^2}, & \text{коли} \quad x \in I^*_{2,\,1} = I_{2,\,1}, \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{2^2}, & \text{коли} \quad x \in I^*_{2,\,2} = I_{1,\,1}, \\ \dfrac{3}{2^2}, & \text{коли} \quad x \in I^*_{2,\,3} = I_{2,\,2}. \end{cases}$$

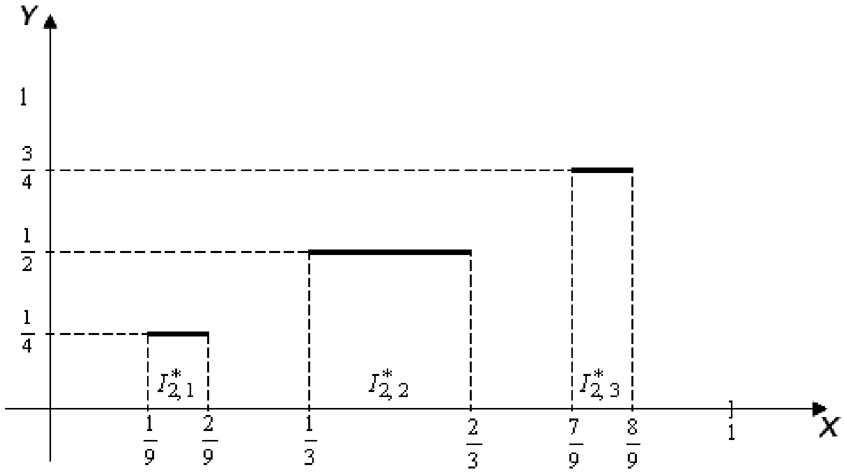


Рис. 2.3

Припустимо, що для $n = m$

$$F(x) = \frac{k}{2^m}, \text{ коли } x \in I^*_{m,\,k},\ k \in \overline{1,\ (2^m - 1)},$$

де $I^*_{m,\,k}$ – відрізки рангу, не більшого за m, перенумеровані у порядку їх розташування на числовій прямій.

Тоді $F(x) = \frac{2k}{2^{m+1}}$, коли $x \in I^*_{m,\,k} = I^*_{m+1,\,2k}$, $k \in \overline{1,\ (2^m - 1)}$, та $F(x) = \frac{2k-1}{2^{m+1}}$, коли $x \in I_{m+1,\,k} = I^*_{m+1,\,2k-1}$, $k \in \overline{1,\ 2^m}$. При цьому між будь-якими двома сусідніми відрізками $I_{m+1,\,k}$ та $I_{m+1,\,k+1}$ лежить рівно один відрізок $I^*_{m,\,k}$. Саме тому ці відрізки дістали відповідно непарні та парні номери, коли всі відрізки рангу не більшого за $m+1$ нумерували у порядку їх розташування на числовій прямій: $I_{m+1,\,k} = I^*_{m+1,\,2k-1}$, $I_{m+1,\,k+1} = I^*_{m+1,\,2k+1}$ та $I^*_{m,\,k} = I^*_{m+1,\,2k}$.

Отже, $F(x) = \frac{k}{2^{m+1}}$, коли $x \in I^*_{m+1,\,k}$, $k \in \overline{1,\ (2^{m+1} - 1)}$, причому відрізки $I^*_{m+1,\,k}$ перенумеровано числами $k \in \overline{1,\ (2^{m+1} - 1)}$ у порядку їх розташування на числовій прямій.

За принципом математичної індукції це твердження є правильним для будь-якого натурального m.

Тепер легко довести, що на множині G функція $F(x)$ неспадна.

Справді, якщо $x_1 < x_2$ і ці точки належать до $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,\,k}$, то існують номери n_1, n_2, k_1 і k_2, для яких $x_1 \in I_{n_1,\,k_1}$, $x_2 \in I_{n_2,\,k_2}$.

Покладемо $n = \max\{n_1,\, n_2\}$ і розглянемо відрізки $I^*_{m,\,k}$, $k \in \overline{1,\,(2^n - 1)}$, серед яких знаходяться й відрізки $I_{n_1,\,k_1}$, $I_{n_2,\,k_2}$. Нехай $I_{n_1,\,k_1} = I^*_{n,\,k_1^*}$, а $I_{n_2,\,k_2} = I^*_{n,\,k_2^*}$. Оскільки $x_1 < x_2$, то $k_1^* < k_2^*$, а тому за доведеним вище твердженням

$$F(x_1) = \frac{k_1^*}{2^n} \le \frac{k_2^*}{2^n} = F(x_2)\,.$$

Покладемо тепер $F(x) = \sup\limits_{x \ge t \in G} F(t)$ для будь-якого $x \in [0;\,1]$. Тоді, якщо $x \in G$, то $F(x) = \dfrac{2k-1}{2^n}$, де k і n однозначно визначаються умовою $x \in I_{n,\,k}$. Отже, нове означення $F(x)$ є коректним, оскільки не змінює вже визначених значень $F(x)$ на множині G.

За властивостями супремума $F(x)$ є неспадною функцією на відрізку $[0;\,1]$, а тому й на $R = (-\infty;\,+\infty)$.

Доведемо, що $F(x)$ рівномірно неперервна (а тому й неперервна) на відрізку $[0;\,1]$, отже і на $R = (-\infty;\,+\infty)$.

Справді, нехай $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване число. Виберемо натуральне число $n > 1$ настільки великим, щоб $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$. Покладемо $\delta = \dfrac{1}{3^n}$ і розглянемо відрізки $I^*_{n,\,k}$, $k \in \overline{1,\,(2^n - 1)}$, ранги яких не перевищують n. Домовимося, що $I^*_{n,\,0} = [0;\,0]$, а $I_{n,\,2^n} = [1;\,1]$. Тоді будь-яка точка $x_1 \in [0;\,1]$ міститься або в одному з відрізків $I^*_{n,\,k}$, $k \in \overline{0,\,2^n}$, або в якомусь інтервалі, що лежить між двома сусідніми відрізками $I^*_{n,\,k}$ та $I^*_{n,\,k+1}$ (див. Рис. 2.2). Довжина цього інтервала дорівнює $\dfrac{1}{3^n}$, а довжина кожного з відрізків $I^*_{n,\,k}$ є не меншою за $\dfrac{1}{3^n}$.

Якщо x_1 і x_2 – довільні точки з відрізка $[0;1]$, для яких $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{1}{3^n}$, то можливі два випадки (див. Рис. 2.2):

1) x_1 і x_2 попадають в якийсь один відрізок $I^*_{n,\,k}$;

2) принаймні одна з точок x_1 або x_2 лежить в інтервалі, суміжному до відрізків $I^*_{n,\,k}$ та $I^*_{n,\,k+1}$.

Тоді у першому випадку $|F(x_1) - F(x_2)| = 0 < \varepsilon$, а у другому $|F(x_1) - F(x_2)| \le \left|\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Отже, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$, коли $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, $x_1 \in [0;1]$ і $x_2 \in [0;1]$.

Цим доведемо рівномірну неперервність, отже й неперервність функції $F(x)$. Окрім цього, легко бачити, що $F(x)$ задовольняє усі характеристичні властивості функції розподілу ймовірностей.

Доведемо, що побудована неперервна функція $F(x)$ розподілу ймовірностей не є абсолютно неперервною.

Припустимо супротивне, тобто що існує невід'ємна інтегровна функція $f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, для якої $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, причому $F'(x) = f(x)$ майже скрізь на $(-\infty; +\infty)$. Проте легко бачити, що $F'(x) = 0$, коли $x \in G_0$, де G_0 – *відкрита множина Кантора*, яку дістають з множини G шляхом вилучення кінців відрізків $I_{n,\,k}$, $k \in \overline{1,\,(2^n - 1)}$, $n \in N$. Окрім цього, міра Лебега множини G_0 дорівнює сумі довжин її складових інтервалів:

$$m(G_0) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Тому $F'(x) = 0 = f(x)$ майже скрізь на відрізку $[0;1]$, в силу чого

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \ne F(x), \text{ коли } x > 0.$$

Дістали суперечність, яка доводить, що $F(x)$ не є абсолютно неперервною функцією розподілу ймовірностей (хоча й є неперервною). Такі функції називають *сингулярними щодо міри Лебега*.

Функція $F(x)$ визначає міру Лебега-Стілтьєса, для якої $\mu(G_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mu(I_{n,\,k}^0) = 0$, оскільки $\mu(I_{n,\,k}^0) = F(\beta_{n,\,k}) - F(\alpha_{n,\,k}) = 0$ для будь-якого складового інтервала $I_{n,\,k}^0 = (\alpha_{n,\,k};\ \beta_{n,\,k})$ відкритої множини Кантора G_0.

Разом з тим $\mu([0;\,1]) = F(1) - F(0) = 1$, а $\mu(F_0) = 1 - \mu(G_0) = 1$, де $F_0 = [0;\,1] \setminus G_0$ – *замкнена* (навіть, *досконала*) множина Кантора.

Таку міру μ також називають сингулярною щодо міри Лебега.

Вправа 2. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей, то вона є зростаючою.
2. Твердження, обернене до попереднього, є правильним.
3. Якщо неперервна функція $F(x),\ x \in (-\infty; +\infty)$, є зростаючою і множиною значень цієї функції є відрізок $[0;1]$, то ця функція є функцією розподілу ймовірностей.
4. Кожна точка розриву функції розподілу ймовірностей є точкою розриву першого роду.

1. Функція

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ коли } x \le 0, \\ 1, \text{ коли } x > 0. \end{cases}$$

є функцією розподілу ймовірностей, оскільки задовольняє усі характеристичні властивості, проте ця функція не є зростаючою, тобто не задовольняє умову $F(x_1) < F(x_2)$ завжди, коли $x_1 < x_2$. Тому твердження 1 не є правильним.

2. Функція $F(x) = x,\ x \in (-\infty; +\infty)$ є зростаючою, проте не є функцією розподілу ймовірностей, оскільки $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty \ne 0$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty \ne 1$. Тому твердження 2 також не є правильним.

3. За умов твердження 3 можна вважати, що $0 = F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$, а $1 = F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. Тому $F(x)$ має усі характеристичні властивості функції розподілу, отже, твердження 3 є правильним.

4. Оскільки для будь-якої точки x_0 існують скінченні ліва та права границі:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0) \text{ і } \lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = F(x_0 + 0),$$

то кожна точка розриву функції F є точкою розриву першого роду. Отже, твердження 4 є правильним.

Вправа 3. Перевірити, чи є функція

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ коли } x \le a, \\ -\cos x, \text{ коли } a < x \le b, \\ 1, \text{ коли } x > b \end{cases}$$

функцією розподілу ймовірностей.

Умови $F(-\infty)=0$ і $F(+\infty)=1$ виконуються. Щоб виконувалася умова $F(x)\ge 0$, потрібно, щоб $(-\cos x)\ge 0$, тобто $(\cos x)\le 0$ або $\frac{\pi}{2}+2\pi n \le x \le \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$. Звідси випливає, що межі відрізка $[a;b]$ повинні задовольняти умову $\frac{\pi}{2}+2\pi n \le a < b \le \frac{3}{2}\pi+2\pi n$ для якогось $n \in Z$.

Оскільки функція розподілу повинна бути неспадною, а функція $(-\cos x)$ є зростаючою на кожному проміжку $[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n]$ і спадною на кожному проміжку $[\pi+2\pi n; \frac{3}{2}\pi+2\pi n]$, то межі відрізка $[a;b]$ повинні задовольняти умову $\frac{\pi}{2}+2\pi n \le a < b \le \pi + 2\pi n$ для якогось цілого n.

Звідси, враховуючи, що для вказаного відрізка $[a;b]$ умови $0 \le (-\cos a) < 1$ і $0 < (-\cos b) \le 1$ виконуються завжди, причому $(-\cos a)=0$ і $(-\cos b)=1 \Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ і $b=\pi+2\pi n,\ n\in Z$, дістаємо, що:

1) задана функція є функцією розподілу, коли $\frac{\pi}{2}+2\pi n \le a < b \le \pi+2\pi n$ для деякого цілого n, причому, ця функція є неперервною тоді й тільки тоді, коли $a=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, а $b=\pi+2\pi n$, тобто кількість точок розриву заданої функції розподілу дорівнює або 0, або 1, або 2;

2) якщо нерівність $\frac{\pi}{2}+2\pi n \le a < b \le \pi+2\pi n$ не є правильною для будь-якого цілого n, то задана функція $F(x)$ не є функцією розподілу ймовірностей.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо, функція $F(x),\ x\in(-\infty;+\infty)$, є неспадною, неперервною і такою, що $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$, то вона є функцією розподілу ймовірностей на числовій прямій.

2. Твердження, обернене до 1, є правильним.

3. Функція розподілу має скінченні ліву та праву границі у будь-якій точці.

4. Множина точок розриву функції розподілу є не більш ніж зчисленною.

5. Кожна функція розподілу визначає єдину міру Лебега-Стілтьєса.

6. Якщо $\lambda = P(A)$ – міра Лебега, то вона є мірою Лебега-Стілтьєса.

7. Твердження обернене до 6, є правильним.

8. Якщо A – лебегова множина, то вона є борелівською множиною.

9. Твердження, обернене до 8, є правильним.

10. Кожну лебегову множину можна як завгодно добре наблизити борелівськими множинами.

11. Кожна функція розподілу ймовірностей є або дискретною, або абсолютно неперервною, або сингулярною.

12. Для кожної функції розподілу ймовірностей існує щільність розподілу ймовірностей.

2. Побудувати функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, для якої $F(0)=0,\ F(1)=\dfrac{1}{2}$ і ця функція є: 1) розривною лише у точках 0 та 1; 2) скрізь неперервною; 3) абсолютно неперервною.

3. Побудувати функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, для якої $F(-1)=0,\ F(x)=ax+b$, коли $x\in(-1;1)$ і $F(x)=1$, коли $x\geq 1$. Якими повинні бути a і b, щоб ця функція була неперервною на R^1? Чи є вона при цьому абсолютно неперервною?

4. Побудувати абсолютно неперервну функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, для якої щільність розподілу має значення $f(0)=1,\ f(1)=2$, а на кожному проміжку $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1)$ та $(1;\ +\infty)$ функція $f(x)$ є сталою. Якими можуть бути ці сталі? У яких точках $F'(x)=f(x)$? Чи існує похідна $F'(x)$ у точках $x=0$ та $x=1$?

5.1. Для заданої функції $F(x)$ побудувати її графік та перевірити, чи є вона функцією розподілу ймовірностей на числовій прямій. Якщо до виразу входять параметри, то дослідити, чи можна визначити їх так, щоб $F(x)$ була функцією розподілу ймовірностей.

1) $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; 2) $F(x)=a+b\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$;

3) $F(x)=\begin{cases} e^{-x}, & \text{коли } x\leq 0,\\ 1, & \text{коли } x>0;\end{cases}$ 4) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\leq 1,\\ \ln x, & \text{коли } x>1;\end{cases}$

5) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } \sin x \le 0, \\ \dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & \text{коли} \sin x > 0; \end{cases}$ 6) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ \dfrac{|\ln x|}{\ln x}, & \text{коли } x > 1; \end{cases}$

7) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ коли } x<0, \\ 1, \text{ коли } x>\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{ коли } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ 8) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{коли} -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{коли } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

9) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, \text{ коли } x<-2, \\ ax+b, \text{коли } |x| \le 2, \\ 1, \quad \text{коли } x>2; \end{cases}$ 10) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<-1, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & \text{коли } |x| \le 1, \\ 1, & \text{коли } x>1; \end{cases}$

11) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}[x], \text{коли } 0 \le x \le 2, \\ 0, \quad \text{коли } x<0, \\ 1, \quad \text{коли } x>2; \end{cases}$ 12) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ коли } x \le 0, \\ \dfrac{k+1}{n+1}, \text{коли } k<x \le k+1, k \in \overline{0,(n-1)}, \\ 1, \text{ коли } x>n, \end{cases}$

де $[x]$ – ціла частина числа x.

13) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ \sum\limits_{k<x} p(1-p)^k, & \text{коли } x>1, \text{ де } p \in (0;1); \end{cases}$

14) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x, & \text{коли } |x|<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{коли } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ 15) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & \text{коли } |x| \le \dfrac{\pi}{2}, \ x \ne 0, \\ -1, & \text{коли } x=0, \\ 1, & \text{коли } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

16) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ \sqrt{ax+b}, & \text{коли } 1<x \le 2, \\ 1, & \text{коли } x>2; \end{cases}$ 17) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{коли } a<x<b, \\ 1, & \text{коли } x \ge b; \end{cases}$

18) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} \sin t^2 dt;$ 19) $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt;$

20) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{коли } x\ge 0, \lambda = const>0;\end{cases}$ 21) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ ax^2, & \text{коли } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{коли } x>2;\end{cases}$

22) $F(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x|x|}{x^2+1}\right);$ 23) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ \sqrt{x}, & \text{коли } 0<x\le \frac{1}{4},\\ 8x^2, & \text{коли } \frac{1}{4}<x\le \frac{\sqrt{2}}{4},\\ 1, & \text{коли } x>\frac{\sqrt{2}}{4};\end{cases}$

24) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le -4,\\ \frac{a(x+4)}{16}, & \text{коли } -4<x\le 0,\\ 1, & \text{коли } x>0;\end{cases}$ 25) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ a\sqrt{2x}, & \text{коли } 0<x\le 8,\\ 1, & \text{коли } x>8;\end{cases}$

26) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le a,\\ \sin x, & \text{коли } a<x\le b,\\ 1, & \text{коли } x>b;\end{cases}$ 27) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le a,\\ tg\, x, & \text{коли } a<x\le b,\\ 1, & \text{коли } x>b;\end{cases}$

28) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le a,\\ \frac{k}{n}, & \text{коли } a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}<x\le a+\frac{k(b-a)}{n},\ k\in\overline{1,n},\\ 1, & \text{коли } x>b;\end{cases}$

29) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le -4,\\ \frac{(x+4)^2}{24}, & \text{коли } -4<x\le 0,\\ 1-\frac{(2-x)^2}{12}, & \text{коли } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{коли } x>2;\end{cases}$ 30) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le -2,\\ \frac{(x+2)^2}{16}, & \text{коли } -2<x\le 0,\\ 1-\frac{(6-x)^2}{48}, & \text{коли } 0<x\le 6,\\ 1, & \text{коли } x>6.\end{cases}$

2. Якщо в розглянутих випадках F є функцією розподілу ймовірностей, то: 1) визначити який розподіл ймовірностей нею описується: дискретний, неперервний чи абсолютно неперервний; 2) знайти ймовірність попадання точки x у: а) відкриту множину з двома складовими інтервалами; б) у замкнену множину з двома доповняльними інтервалами.

3. Для абсолютно неперервної функції розподілу F знайти відповідну щільність розподілу ймовірностей f та побудувати її графік.

6. 1. Перевірити, чи є функція $f(x)$ щільністю розподілу ймовірностей. Якщо до виразу входять параметри, то дослідити, чи можна визначити їх так, щоб $f(x)$ була щільністю розподілу ймовірностей.

1) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \,|x|>1, \\ \frac{3}{2}x^2, & \text{коли} \,|x|\le 1; \end{cases}$ 2) $f(x)=|x|e^{-x^2}$;

3) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли}\, x\le 0, \\ ax^2e^{-2x}, & \text{коли}\, x>0; \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1, \text{ або } x>a, \\ \ln x, & \text{коли } 1<x\le a; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли}\, x\notin[0;\pi], \\ a\sin x, & \text{коли}\, x\in[0;\pi]; \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a \text{ або } x>b, \\ \sin x, & \text{коли } a<x\le b; \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a \text{ або } x>b, \\ \operatorname{tg} x, & \text{коли } a<x\le b; \end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1 \text{ або } x>4, \\ a, & \text{коли } 1<x\le 4; \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли}\, x<a \text{ або } x\ge b, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{коли}\, x\in[a;b); \end{cases}$ 10) $f(x)=a\,e^{-\frac{x^2}{2}}$;

11) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли}\, x\le 0 \text{ або } x\ge R>0, \\ \frac{2x}{R^2}, & \text{коли}\, 0<x<R; \end{cases}$ 12) $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}$;

13) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } x>1, \\ |\ln x|, & \text{коли } 0<x\le 1; \end{cases}$ 14) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } x>2, \\ a, & \text{коли } 0<x\le 1, \\ b, & \text{коли } 1<x\le 2. \end{cases}$

2. Якщо f є щільністю розподілу ймовірностей, то: 1) знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей; 2) знайти ймовірність попадання точки x у: а) відкриту множину з трьома складовими інтервалами; б) у замкнену множину з трьома доповняльними інтервалами; в) у відкриту множину Кантора G_0; г) у замкнену множину Кантора F_0.

7. Підкидають дві монети і фіксують, скільки випало гербів.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Вважаючи, що ймовірність випадання герба для кожної монети однакова і дорівнює $p\in(0;1)$, вирішити, як доцільно визначити ймовірність кожної елементарної події.

3. Побудувати відповідну функцію розподілу ймовірностей.

8.1. Знайти константу c, для якої задана функція $f(x)$ є щільністю рівномірного неперервного розподілу ймовірностей.

2. Побудувати графік заданої щільності розподілу.

3. Знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

4. Визначити ймовірність попадання точки x в інтервал (α,β).

1) $f(x)=\begin{cases} c, & x\in[-2;1], \\ 0, & x\notin[-2;1], \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} c, & x\in[-4;4], \\ 0, & x\notin[-4;4], \end{cases}$

$(\alpha,\ \beta)=(-1,1)$; $(\alpha,\ \beta)=(1,3)$;

3) $f(x)=\begin{cases} c,\ x\in[-2;1], \\ 0,\ x\notin[-2;1], \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} c,\ x\in[-3;0], \\ 0,\ x\notin[-3;0], \end{cases}$

$(\alpha,\ \beta)=(0,1)$; $(\alpha,\ \beta)=(-2,-1)$;

5) $f(x)=\begin{cases} c,\ x\in[-4;2], \\ 0,\ x\notin[-4;2], \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} c,\ x\in[-5;5], \\ 0,\ x\notin[-5;5], \end{cases}$

$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 1)$; $(\alpha,\ \beta)=(-2,2)$;

9.1. Знайти константу c, для якої задана функція $f(x)$ є щільністю неперервного розподілу ймовірностей.

2. Побудувати графік заданої щільності розподілу.

3. Знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

4. Знайти ймовірність попадання точки x в інтервал (α,β):

1) $f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0, \\ c\sin 2x, 0<x\le\pi, \\ 0,\ x>\pi, \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$;

2)

$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\notin[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}], \\ c\cdot\cos 3x,\ x\in(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}), \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4})$;

3) $f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 1, \\ x-c,\ 1<x\le 2, \\ 0,\ x>2, \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(1,\ 1\frac{1}{2})$;

4) $f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le\frac{\pi}{6}, \\ c\cdot\sin 3x,\ \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}, \\ 0,\ x>\frac{\pi}{3}, \end{cases}$

$(\alpha,\ \beta)=(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4})$;

5) $f(x)=\frac{2c}{1+x^2},\ x\in(-\infty,\ +\infty)$,

$(\alpha,\beta)=(0,1)$;

6) $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<0, \\ c\cdot\cos x,\ 0<x\le\frac{\pi}{2}, \\ 0,\ x>\frac{\pi}{2}, \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$;

7) $f(x)=\begin{cases} c\sin 2x,\ x\in[\frac{\pi}{2},\pi], \\ 0,\ x\notin[\frac{\pi}{2},\pi], \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$;

8) $f(x)=\begin{cases} cx^2,\ x\in[-1,1], \\ 0,\ x\le -1,\ x>1, \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(0,1)$;

9) $f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 1, \\ x+c,\ 1<x\le 2, \\ 0,\ x>2, \end{cases}$

$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1\frac{1}{2})$;

10) $f(x)=\begin{cases} c\cdot\sin 2x, \ x\in(0, \ \dfrac{\pi}{2}), \\ 0, \ x\le 0, \ x>\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(0,\dfrac{\pi}{4})$;

11) $f(x)=\begin{cases} c\cdot\sin 3x, \ x\in(0, \ \dfrac{\pi}{3}), \\ 0, \ x\notin(0, \ \dfrac{\pi}{3}), \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3})$;

12) $f(x)=\begin{cases} c\cdot\cos x, \ x\in(-\dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{\pi}{2}), \\ 0, \ x\le -\dfrac{\pi}{2}, \ x>\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4})$;

13) $f(x)=\begin{cases} c\ (x+1), \ x\in(-1, 1), \\ 0, \ x\le -1, \ x>1, \end{cases}$

$(\alpha,\beta)=(0,1)$;

14) $f(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0, \\ cx, \ 0<x\le 1, \\ 0, \ x>1, \end{cases}$

$(\alpha, \ \beta)=(\dfrac{1}{2}, 1)$.

10*. Нехай функція $F(x), \ x\in(-\infty;+\infty)$ задовольняє умови: 1) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, 2) $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$, 3) $F(x)$ є неспадною на $(-\infty;+\infty)$.

1. Довести, що рівність $\mu([a;b))=F(b)-F(a)$ визначає скінченно адитивну ймовірнісну міру на півалгебрі W усіляких проміжків $[a, b)$, (причому вважається, що $(-\infty;b)=[-\infty;b)$).

2. Вирішити, як продовжити міру μ з півалгебри W на найменшу алгебру $V\supset W$.

3. Довести, що коли $F(x)$ задовольняє ще умову неперервності зліва на множині $(-\infty;+\infty)$, то міра μ є σ-адитивною.

4. Здійснити лебегове продовження міри μ на простір подій $S\supset V$ і довести що на цьому просторі μ буде ймовірнісною мірою.

5. Знайти: 1) $\mu([a;b])$, зокрема $\mu(\{a\})=\mu([a;a])$;2) $\mu((a;b))$ і $\mu((a;b])$. Чи завжди $\mu([a;b])=\mu([a;b))=\mu((a;b))=\mu((a;b])$?

6. Знайти міру μ довільної відкритої множини $G\subset(-\infty;\infty)$ та міру довільної замкненої множини $F\subset(-\infty;+\infty)$.

7. Знайти міру $\mu(G_0)$ відкритої множини Кантора (G_0) і $\mu(F_0)$ замкненої множини Кантора F_0.

2.3. Функція та щільність многовимірного розподілу ймовірностей та їх властивості

Нехай P – деяка ймовірнісна міра на вимірному просторі $(R^n, \mathscr{B}(R^n))$. Функцію $F(x)=P((-\infty, \ x))$, де $x=(x_1, \ x_2, \ldots, x_n)$,

$(-\infty, x) = (-\infty, x_1) \times \ldots \times (-\infty, x_n)$, називають n*-вимірною функцією розподілу ймовірностей (в просторі* R^n *).*

Приклад 3.1. Якщо простір Ω дискретний, а ймовірність $P(E_k)$ визначена для будь-якої елементарної події $E_k \in \Omega$, то кожну елементарну подію $E_k \in \Omega$ можна тлумачити як точку простору $R^n : E_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$.

Розглянемо оператор $\Delta_{a_i b_i}$:

$$\Delta_{a_i b_i} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= F(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Тоді:

$$\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} \ldots \Delta_{a_n b_n} F(x_1, x_1, \ldots, x_n) = P([a, b)) \geq 0,$$

де $[a, b) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_n, b_n)$.

Функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має такі *характеристичні властивості*:

1) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$;

2) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неспадна за довільною сукупністю своїх аргументів;

3) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервна зліва за довільною сукупністю змінних, тобто якщо

$$x_i^{(k)} \to x_i, \ x_i^{(k)} \leq x_i, i \in I \subset \{1, 2, \ldots, n\}, I \neq \varnothing$$

то

$$F(x^{(k)}) \to F(x), \ F(x^{(k)}) \leq F(x), \ k \to \infty;$$

4) $F(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1$;

5) $\lim\limits_{x \to y} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, якщо $x_i > y_i$, $i = \overline{1, n}$, $y_i = -\infty$ принаймні для одного i.

Якщо $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – деяка функція розподілу ймовірностей в R^n, то в n–вимірному просторі $(R^n, \mathscr{B}(R^n))$ існує, і притому єдина, ймовірнісна міра P така, що

$$P([a, b)) = \Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} \ldots \Delta_{a_n b_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Приклад 3.2. Нехай $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(n)}$ – одновимірні функції розподілу ймовірностей в R^1. Тоді

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F^{(1)}(x_1) \, F^{(2)}(x_2) \ldots F^{(n)}(x_n)$$

є функцією розподілу ймовірногстей в R^n. Очевидно, що при цьому

$$\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} \ldots \Delta_{a_n b_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} (F^{(k)}(b_k) - F^{(k)}(a_k)) \geq 0.$$

Особливо важливим є випадок, коли

$$F^{(k)}(x_k)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x_k \le 0;\\ x_k, \text{ якщо } 0 \le x_k \le 1;\\ 1, \text{ якщо } 1 \le x_k.\end{cases}$$

Тоді $F(x_1, x_2, ..., x_n)=x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$, якщо $x_i \in [0,1]$ при всіх i.

Імовірнісну міру, відповідну такій n –вимірній функції розподілу ймовірностей, називають *n –вимірною мірою Лебега* на $[0,1]^n$.

Якщо при цьому $[a_i, b_i) \subset [0,1]$, то

$$\Delta_{a_1 b_1}\Delta_{a_2 b_2} \; ... \; \Delta_{a_n b_n} F_n(x_1, x_2, ..., x_n)=\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

є об'ємом n –вимірного паралелепіпеда

$$[a_1, b_1)\times[a_2, b_2)\times...\times[a_n, b_n) \; .$$

Якщо $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – деяка невід'ємна борелівська функція така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, d\,x_1 d\,x_2 \dots d\,x_n = 1,$$

то

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n)\, d\,t_1 d\,t_2 \dots d\,t_n \qquad (*)$$

є n-вимірною функцією розподілу.

Така функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *щільністю n-вимірного розподілу ймовірностей.*

При цьому *розподіл ймовірностей називається абсолютно неперервним*.

Якщо задано функцію абсолютно неперервного розподілу ймовірностей $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\dots\frac{\partial}{\partial x_n}F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

майже скрізь на R^n.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $F(x)$ і $G(y)$ – функції одновимірного розподілу ймовірностей, то $F(x,y)=\frac{1}{2}(F(x)+G(y))$ є функцією двохвимірного розподілу ймовірностей.
2. Якщо $F(x,y)$ зростає за кожною змінною і множиною значень цієї функції є відрізок $[0;1]$, то вона є функцією двохвимірного розподілу ймовірностей.
3. Кожна функція двохвимірного розподілу ймовірностей є неперервною на R^2.

4. Якщо $F(x,y)$ – функція двохвимірного розподілу ймовірностей, то $\Delta_{a_1b_1}\Delta_{a_2b_2}F(x,y)\ge 0$ для будь-яких $a_1\le b_1$ і $a_2\le b_2$.

1. Перевіримо властивості функції розподілу. Зрозуміло, що $0\le F(x,y)\le 1$, оскільки $0\le F(x)\le 1$ і $0\le G(y)\le 1$, проте умова $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y_0)=0$ для будь-якого y_0 не виконується, оскільки $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y_0)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}(F(x)+G(y_0))=\frac{1}{2}G(y_0)$, а $G(y_0)>0$, коли y_0 досить велике. Отже, функція $F(x,y)$ не є функцією двохвимірного розподілу ймовірностей, тобто твердження 1 не є правильним.

2. Функція $F(x,y)=(\frac{1}{\pi}arctg\, x+\frac{1}{2})(\frac{2}{3\pi}arctg\, y+\frac{2}{3})$ є зростаючою за кожною змінною і має множиною значень відрізок $[0;1]$ (при цьому $0=F(-\infty,y)$, а $1=F(+\infty,+\infty)$). Разом з тим якщо $x_0\ne-\infty$, то $\lim\limits_{y\to-\infty}F(x_0,y)=(\frac{1}{\pi}arctg\, x_0+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{3}\ne 0$. Тому $F(x,y)$ не є функцією двохвимірного розподілу ймовірностей, тобто твердження 2 не є правильним.

3. Функція $F(x,y)=\begin{cases}0, \text{ коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ 1, \text{ коли } x>0 \text{ і } y>0,\end{cases}$ є функцією двохвимірного розподілу ймовірностей, проте кожна точка $(0,y_0)$ і $(x_0,0)$ є точкою розриву цієї функції. Тому твердження 3 не є правильним.

4. Оскільки $F(x,y)=P([-\infty;x)\times[-\infty;y))$, а P – ймовірнісна міра, визначена на борелівській σ-алгебрі $\mathscr{B}(R^2)$, то P – адитивна невід'ємна функція множин.

Тому

$$P([a_1;b_1)\times[a_2;b_2))=P((-\infty,\ b_1)\times(-\infty,\ b_2))-P((-\infty;b_1)\times(-\infty;a_2))-$$
$$-P((-\infty;a_1)\times(-\infty;b_2))+P((-\infty;a_1)\times(-\infty;a_2)))=$$
$$=F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(b_1,b_2)=\Delta_{a_1b_1}\Delta_{a_2b_2}F(x,y)\ge 0.$$

(див. Рис. 3.1). Таким чином, твердження 4 є правильним.

Вправа 2. Перевірити, чи є функція

$$F(x,y)=\begin{cases}0, \text{ коли } x\le 1 \text{ або } y\le 1,\\ \ln x\cdot\ln y, \text{ коли } 1<x,y\le a,\\ \ln x\cdot\ln a, \text{ коли } 1<x\le a, y>a,\\ \ln y\cdot\ln a, \text{ коли } 1<y\le a,\ x>a,\\ 1, \text{ коли } y>a, x>a,\end{cases}$$

функцією двохвимірного розподілу ймовірностей.

Умови, накладені на точки (x, y), що визначають $F(x, y)$, зображено на Рис. 3.2

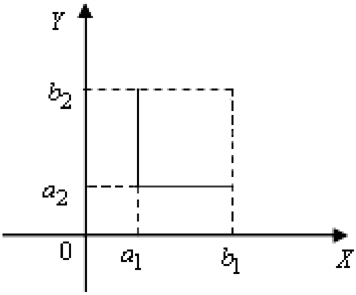


Рис. 3.1

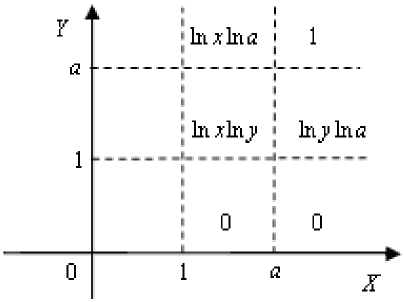


Рис. 3.2.

З рисунка 3.2 видно, що $F(x, y) \geq 0$, а $F(x, y) \leq 1 \Leftrightarrow$ $\ln^2 a \leq 1 \Leftrightarrow 1 < a \leq e$. При цьому умова $a = e$ гарантує неперервність функції $F(x, y)$ в R^2. Тому вважатимемо, що $a = e$.

Очевидно $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y_0) = 0$ і $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x_0, y)$ для будь яких x_0 та y_0, а $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$, і крім того $F(x, y)$ неспадна по кожній змінній.

Враховуючи, що

$$\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2),$$

розглянемо такі випадки:

1) $a_1 \leq 1$ або $a_2 \leq 1 \Rightarrow \Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) = F(b_1, b_2) \geq 0$;

2) $a_1 \leq 1,\ a_2 > 1 \Rightarrow \Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) \geq 0$;

3) $a_1 > 1,\ a_2 \leq 1 \Rightarrow \Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) \geq 0$;

4) $a_1 > 1,\ a_2 > 1 \Rightarrow \Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) = \ln b_1^* \cdot \ln b_2^* - \ln b_1^* \cdot \ln a_2^* -$

$$- \ln a_1^* \cdot \ln b_2^* + \ln a_1^* \cdot \ln a_2^* = \ln b_1^* \cdot \ln \frac{b_2^*}{a_2^*} - \ln a_1^* \cdot \ln \frac{b_2^*}{a_2^*} =$$

$= \ln \dfrac{b_1^*}{a_1^*} \cdot \ln \dfrac{b_2^*}{a_2^*} \geq 0$, де $b_1^* = b$, коли $b < e$ і $b_1^* = e$, коли $b_1 \geq e$, аналогічно для $b_2^*,\ a_1^*,\ a_2^*$.

Отже, для будь-яких $a_1 \leq b_1$ і $a_2 \leq b_2$ $\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) \geq 0$, а тому $F(x, y)$ задовольняє усі характеристичні властивості функції розподілу ймовірностей і є функцією двохвимірного розподілу ймовірностей, коли $a = e$.

У випадку $a > e$ порушується умова $F(x,y) \le 1$, а тому функція $F(x,y)$ не буде функцією двохвимірного розподілу ймовірностей при таких значеннях параметра a.

Легко переконатися, що коли $1 < a < e$, то $F(x,y)$ вже не буде скрізь неперервною, проте буде неперервною зліва і задовольнятиме нерівність $\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x,y) \ge 0$ для будь -яких $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$. Тому і у цьому випадку $F(x,y)$ буде функцією двохвимірного розподілу ймовірностей.

Вправа 3. Перевірити, чи є функція $F(x,y)$ із вправи 2 абсолютно неперервною функцією розподілу ймовірностей, і якщо так, то знайти відповідну щільність розподілу ймовірностей.

Зрозуміло, що коли $a \ne e$, то $F(x,y)$ не є абсолютно неперервною функцією.

Нехай $a = e$. Тоді легко бачити, що

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } (x,y) \notin [1;e]\times[1;e] \\ \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}, \text{ коли } (x,y) \in (1;e)\times(1;e), \end{cases}$$

а на межі прямокутника $[1;e]\times[1;e]$ ця друга похідна не визначена. Проте оскільки ця межа має нульову міру Лебега, то невизначеність $f(x,y)$ на межі не впливає на величину інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy$. Обчислюючи цей інтеграл, дістаємо, що він дорівнює $F(x,y)$ для будь-яких $(x,y) \in R^2$. Це означає (враховуючи невід'ємність $f(x,y)$), що $F(x,y)$ є функцією абсолютно неперервного розподілу ймовірностей, а $f(x,y)$ є щільністю цього розподілу.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожна функція розподілу ймовірностей на R^2 є добутком двох функцій розподілу ймовірностей на R^1.

2. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(y)$ – функції розподілу ймовірностей на R^1, то їх добуток є функцією розподілу ймовірностей на R^2.

3. Якщо $F(x,y)$ – функція двохвимірного розподілу ймовірностей, то вона є монотонною за кожною змінною.

4. Функція двохвимірного розподілу ймовірностей є строго монотонною за кожною змінною.

5. Якщо $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in R^n$, то $h \ge 0 \Leftrightarrow h_i \ge 0,\ i \in \overline{1,n}$.

6. Якщо $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in R^n$, то $h > 0 \Leftrightarrow h_i > 0,\ i \in \overline{1,n}$.

7. Для оператора $\Delta_{a_i b_i} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ завжди $a_i < b_i$.

8. $\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x_1, x_2) = \Delta_{a_1 b_1}(F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)) =$

$$= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

9. Якщо функція $F(x, y)$ неспадна за сукупністю змінних, то вона є неспадною за кожною змінною.

10. Твердження, обернене до 9, є правильним.

11. Якщо $F(x, y)$ неспадна за сукупністю змінних, то $F(x_1, y_1) \le F(x_2, y_2)$, коли $x_1 \le x_2$ і $y_1 \le y_2$.

12. Твердження, обернене до 11, є правильним.

13. $F(x, y)$ неспадна за сукупністю змінних тоді й тільки тоді, коли $\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) \ge 0$ для будь-яких $a_1 \le b_1$ і $a_2 \le b_2$.

14. Якщо $F(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$, то $F(x, y)$ неспадна за сукупністю змінних тоді й тільки тоді, коли функції $\psi(x)$ і $\varphi(y)$ є неспадними.

15. Якщо існує неперервна мішана похідна $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$, то

$$\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)\right) dy.$$

16. Якщо $F(x, y) = \psi(x) + \varphi(y)$, то $\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) = 0$.

17. Якщо $G(x, y) = F(x, y) + \psi(x) + \varphi(y)$, то

$$\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} F(x, y) = \Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} G(x, y).$$

18. За рахунок доданків $\psi(x)$ та $\varphi(y)$ функцію $G(x, y) = F(x, y) + \psi(x) + \varphi(y)$ у порівнянні з $F(x, y)$ можна "поліпшити" і зробити монотонною за кожною змінною або "спотворити" і зробити немонотонною за кожною змінною.

2. Побудувати двохвимірну функцію розподілу ймовірностей $F(x, y)$ за допомогою двох одновимірних функцій розподілу ймовірностей:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le 0; \\ x, & \text{коли} \quad 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{коли} \quad 1 \le x. \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad y \le 0; \\ y, & \text{коли} \quad 0 \le y \le 1; \\ 1, & \text{коли} \quad 1 \le y. \end{cases}.$$

3. Відомо, що функції $F_1(x)$ і $F_2(y)$ є одновимірними функціями розподілу ймовірностей. Перевірити, чи є функція $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$ двохвимірною функцією розподілу ймовірностей.

4.1. Перевірити, чи є задана функція $F(x, y)$ двохвимірною функцією розподілу ймовірностей:

1) $F(x;y)=\begin{cases} 0, \text{ коли } x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ xy, \text{ коли } 0 \le x \le 1 \text{ і } 0 \le y \le 1, \\ x, \text{ коли } 0 \le x \le 1 \text{ і } y \ge 1, \\ y, \text{ коли } 0 \le y \le 1 \text{ і } x \ge 1, \\ 1, \text{ коли } x \ge 1 \text{ і } y \ge 1; \end{cases}$ 2) $F(x;y)=\begin{cases} 0, \text{ коли } x \le 0,\ y \le 0, \\ x^2 y, \text{ коли } 0 \le x,\ y \le 1, \\ x^2, \text{ коли } 0 \le x \le 1,\ y > 1, \\ y, \text{ коли } 0 \le y \le 1,\ x > 1, \\ 1, \text{ коли } x > 1, y > 1; \end{cases}$

3) $F(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1,\ y \le 1, \\ \dfrac{x^2}{2}-1, & \text{коли } 1 \le x \le 2,\ y \ge 1, \\ \dfrac{y^2}{2}-1, & \text{коли } 1 \le y \le 2,\ x \ge 1, \\ \left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)\left(\dfrac{y^2}{2}-1\right), & \text{коли } 1 \le x,\ y \le 2, \\ 1, & \text{коли } x \ge 1, y \ge 1; \end{cases}$

4) $F(x,y)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y\right)$; 5) $F(x,y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} xy$;

6) $F(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} xy, & \text{коли } x > 0 \text{ і } y > 0; \end{cases}$

7) $F(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ \dfrac{2}{\pi} arctgxy, & \text{коли } x > 0,\ y > 0 \text{ і } xy \le 1, \\ 1, & \text{коли } x > 0,\ y > 0 \text{ і } xy > 1; \end{cases}$

8) $F(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0 \text{ або } y < 0, \\ x+y, & \text{коли } [x,y) \in [0;a] \times [0;a), \\ 1, & \text{коли } x > a \text{ і } y \ge 0 \text{ або } y > a \text{ і } x \ge 0; \end{cases}$

9) $F(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0 \text{ або } y < 0, \\ 1, & \text{коли } x > 0, y > 0 \text{ і } x^2+y^2 > R^2, \\ x^2+y^2, & \text{коли } x > 0, y > 0 \text{ і } x^2+y^2 \le R^2. \end{cases}$

2. Перевірити, чи є задані вище функції $F(x, y)$ функціями абсолютно неперервного розподілу ймовірностей, і якщо так, то: 1) знайти відповідні щільності розподілу ймовірностей; 2) обчислити ймовірність попадання точки (x, y) у круг $x^2+y^2 \le 1$.

5. 1. Перевірити, чи можна визначити параметри a і b так, щоб задана функція $f(x;y)$ була щільністю розподілу ймовірностей:

1) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } (x,y)\notin[0;1]\times[0;1], \\ axy, & \text{коли } (x,y)\in(0;1)\times(0;1); \end{cases}$

2) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } (x,y)\notin[1;2]\times[1;2], \\ ax+by, & \text{коли } (x,y)\in[1;2]\times[1;2],\ a>0,\ b>0; \end{cases}$

3) $f(x;y)=\dfrac{a^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$;

4) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x>0 \text{ або } y>0, \\ ae^{x+y}, & \text{коли } x\le 0 \text{ і } y\le 0; \end{cases}$

5) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } (x,y)\notin[0;a]\times[0;b], \\ 1, & \text{коли } (x,y)\in[0;a]\times[0;b]; \end{cases}$

6) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0, \text{ або } x+y>\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos(x+y), & \text{коли } x\ge 0 \text{ і } y\ge 0 \text{ і } x+y\le\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

7) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0, \\ a\,xye^{-x^2-y^2}, & \text{коли } x\ge 0 \text{ і } y\ge 0; \end{cases}$

8) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } (x,y)\notin(0;1)\times(0;1), \\ a((1-x^2)(1-y^2))^{-1}, & \text{коли } (x,y)\in(0;1)\times(0;1); \end{cases}$

9) $f(x;y)=a\,e^{-x^2-y^2}$;

10) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } |x|+|y|>1, \\ a, & \text{якщо } |x|+|y|\le 1; \end{cases}$

11) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x^2+y^2\ge 1, \\ a, & \text{якщо } x^2+y^2<1; \end{cases}$

12) $f(x;y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } |x+y|>1, \text{ або } |x-y|>1, \\ a, & \text{коли } |x+y|\le 1 \text{ і } |x-y|\le 1. \end{cases}$

2. Якщо f є щільністю двохвимірного розподілу ймовірностей, то: 1) знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей; 2) знайти ймовірність попадання точки $(x;y)$ в заданий прямокутник $\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$.

6. Нехай $F(x,y)$ є функцією двохвимірного розподілу ймовірностей.

1. Знайти ймовірність попадання в прямокутник: 1) $[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$; 2) $[a_1;b_1]\times[a_2;b_2]$; 3) $(a_1;b_1]\times(a_2;b_2]$;

4) $[a_1;b_1]\times[a_2;b_2)$; 5) $(a_1;b_1]\times[a_2;b_2)$; 6) $(a_1;b_1)\times(a_2;b_2)$;
7) $(a_1;b_1)\times[a_2;b_2]$; 8) $(a_1;b_1)\times(a_2;b_2]$, 9) $(a_1;b_1]\times[a_2;b_2]$.

2. Перевірити, чи правильна рівність:

1) $P([a_1;b_1)\times[a_2;b_2))=P([a_2;b_2)\times[a_1;b_1))$;

2) $[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)=[a_2;b_2)\times[a_1;b_1)$.

7*. 1. Довести, що сукупність усіх n-вимірних прямокутників $[a;b)=[a_1;b_1]\times[a_2;b_2)\times\ldots\times[a_n;b_n)$, де $-\infty\le a_i\le b_i\le+\infty$, $i\in\overline{1,n}$, утворює півалгебру W підмножин множини $\Omega=R^n=[-\infty;+\infty)^n$.

2. Знайти найменшу алгебру V, що містить у собі півалгебру W з попереднього завдання.

3. Перевірити, чи є σ-алгеброю алгебра V із завдання 3.

8*. Нехай функція $F(x,y),\ (x,y)\in R^2$, задовольняє умови:

1) $F(-\infty;y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x;y)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x;y)=F(x;-\infty)=0$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x;y)=1$;

3) $\Delta_{a_1b_1}\Delta_{a_2b_2}F(x,y)\ge0$ для будь-яких точок (a_1,a_2), (b_1,b_2) з простору R^2, таких, що $a_1\le b_1,\ a_2\le b_2$.

1. Довести, що з нерівностей $a_1\le b_1,\ a_2\le b_2$ завжди випливає нерівність $F(a_1,a_2)\le F(b_1,b_2)$ і зокрема функція $F(x,y)$ є неспадною за кожною змінною.

2. Довести, що рівність $\mu([a;b))=\Delta_{a_1b_1}\Delta_{a_2b_2}F(x,y)$ визначає скінченно адитивну ймовірнісну міру на півалгебрі W двохвимірних прямокутників $[a;b)=[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$.

3. Вирішити, як продовжити міру μ з півалгебри W на найменшу алгебру $V\supset W$.

4*. Довести, що коли функція $F(x,y)$ неперервна зліва, то міра μ є σ-адитивною.

5*. Знайти простір подій (σ-алгебру) $S\supset V$, продовжити міру μ на цей простір і довести, що вона буде ймовірністю, а сукупність (R^n,S,μ) – ймовірнісним простором.

9*. Нехай ймовірнісна скінченно адитивна міра μ визначена на алгебрі V усіляких об'єднань скінченного числа двохвимірних прямокутників вигляду $[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$, а функція F визначена рівностями:

$$F(x;y)=\mu([-\infty;x)\times[-\infty;y)),\ F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0.$$

1. Перевірити, чи задовольняє $F(x,y)$ характеристичні властивості функції розподілу ймовірностей.

2. Довести, що коли μ є σ-адитивною мірою, то функція F задовольняє умову

$$\Delta_{a_1 b_1}\Delta_{a_2 b_2} F(x,y) \to \Delta_{a_1 b_1^*}\Delta_{a_2 b_2^*} F(x,y),$$

коли $b_1^* > b_1 \to b_1^*$ і $b_2^* > b_2 \to b_2^*$.

2.4. Ймовірність як нормована міра

Нехай на сукупності S підмножин множини Ω, яка задовільняє вимоги 1_s - 3_s, задано деяку міру $m(A)$, $A \in S$, таку, що $0 < m(\Omega) < \infty$. Тоді функція

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},\ A \in S,$$

задана на S, буде ймовірнісною мірою, оскільки така функція задовільняє вимоги 1_s - 3_s. Міру $\frac{m(A)}{m(\Omega)}$ називають нормованою мірою.

При цьому, якщо в S існують дві множини $A \in S$, $B \in S$, міри яких однакові, тобто $m(A) = m(B)$, то і ймовірнісні міри таких множин (ймовірності відповідних подій A і B) однакові. Разом з тим може трапитись, що в множині S немає множин, міри яких однакові.

Розглянемо простір подій S, породжений сукупністю вимірних за мірою m підмножин H_1, H_2, …, H_k множини Ω таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$, $m(H_i) = m(H_j) > 0$ для всіх $i \in \overline{1,k}$, $j \in \overline{1,k}$. Тоді до S входять разом з порожньою множиною $\varnothing$ всі множини H_i, $i \in \overline{1,k}$, всеможливі їх суми по 2, по 3, …, по $k-1$ доданків, а також сума із k доданків $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$:

$$\begin{aligned} S = \{&\varnothing, H_1, H_2, \ldots, H_k, H_1 + H_2, H_1 + H_3, \ldots, H_1 + H_k, \\ &H_2 + H_3, \ldots, H_2 + H_k, \ldots, H_{k-1} + H_k, H_1 + H_2 + H_3, \\ &H_1 + H_2 + H_4, \ldots, H_{k-2} + H_{k-1} + H_k, \ldots, \\ &H_2 + H_3 + \ldots + H_{k-1} + H_k, H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega\}. \end{aligned}$$

Якщо ймовірнісну міру на такому просторі S визначено за формулою

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},\ A \in S,$$

тоді говорять, *що розподіл ймовірностей на множині* Ω *рівномірний* (за множинами H_1, H_2, …, H_k) в тому розумінні, що множинам $A \in S$ і $B \in S$ однакової міри $m(A)$ і $m(B)$ відповідають однакові ймовірності $P(A)$ і $P(B)$.

Зокрема множини H_i можуть бути одноелементними, і тоді простір S буде найширшим з можливих.

Нехай, наприклад, $\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}$ (експеримент полягає у підкиданні шестигранного грального кубика),

$$H_1 = \{"1", "2"\},\ H_2 = \{"3", "4", "5", "6"\},$$

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_1 + H_2\} =$$

$$= \{\varnothing, \{"1", "2"\}, \{"3", "4", "5", "6"\}, \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\} = \Omega\},$$

$$m(A) = k(A),\ P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{k(A)}{k(\Omega)},\ A \in S.$$

Тоді $m(\varnothing) = 0$, $m(\Omega) = 6$, $m(\{"1","2"\}) = 2$, $m(\{"3","4","5","6"\}) = 4$, $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(\{"1","2"\}) = \frac{2}{6}$, $P(\{"3","4","5","6"\}) = \frac{4}{6}$.

Даний розподіл ймовірностей не є рівномірним (за множинами H_1 і H_2). Разом з тим не виключено варінт, коли $m(H_1) = m(H_2) = 3$. Тоді рівномірний розподіл ймовірностей на Ω буде рівномірний (за множинами H_1 і H_2).

Якщо при заданні ймовірнісної міри рівністю $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$, $A \in S$, де $k(A)$ – кількість елементів у множині A, розглядається найширший простір подій, до якого входять всі підмножини скінченної множини Ω (порожня, одноелементні, двохелементні, триелементні, чотириелементні і т.д.), тоді виявиться, що ймовірність кожної елементарної події (яка ототожнюється з відповідною одноелементною множиною), дорівнює $\frac{1}{n}$, де $n = k(\Omega)$. Однак може трапитись, що до сукупності S входять не всі одноелементні множини і тоді питання про ймовірності всіх елементарних подій втрачають смисл, оскільки ймовірнісна міра $P(A)$ визначається лише на елементах сукупності S (сукупність S підмножин множини Ω є областю задання функції $P(A)$, $A \in S$).

Таким чином, при наведеному підході, коли ймовірнісна міра на S задається як $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$, $A \in S$, Ω – скінченна множина,

$k(\Omega) = n$, через $P(A)$ можуть бути визначені ймовірності тільки тих елементарних подій, що ототожнюються з відповідними одноелементними підмножинами, які є елементами S, однак не навпаки, ймовірність довільної події $A \in S$ не може бути визначена через ймовірності відповідних елементарних подій, оскільки відповідних одноелементних подій в S може не бути, а тому їх ймовірності можуть бути невизначені (невідомі).

Нагадаємо, що за означенням статистичної ймовірності

$$P_n^*(A) = \frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)} = \frac{k_n(A)}{n}, \ A \in S.$$

Якщо в результаті великої серії із n випробувань, що полягали в підкиданні шестигранного грального кубика, в яких дослідника цікавило лише випадання на верхній грані кубика шести та п'яти очок, з'ясувалося, що $P_n^*(\{"6"\}) = 0.60$, $P_n^*(\{"5"\}) = 0.30$, $P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = 0.10$, то можна говорити про статистичні ймовірності попадання лише в множини із сукупності S:

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1 + H_2, H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\},$$

де

$$H_1 = \{"1","2","3","4"\}, \ H_2 = \{"5"\}, \ H_3 = \{"6"\}.$$

По суті в даному експерименті лише три можливих наслідки: $H_2 = \{"5"\}$, $H_3 = \{"6"\}$, $H_1 = \Omega \setminus (\{"5"\} \cup \{"6"\}) = \{"1","2","3","4"\}$, тобто або $"5"$, або $"6"$, або і не $"5"$ і не $"6"$, хоча здається, що їх 6: $E_1 = "1"$, $E_2 = "2"$, $E_3 = "3"$, $E_4 = "4"$, $E_5 = "5"$, $E_6 = "6"$.

Очевидно $P_n^*(\varnothing) = 0$, $P_n^*(H_1) = P_n^*(\{"1", "2", "3", "4"\}) = 0.10$,

$$P_n^*(H_2) = P_n^*(\{"5"\}) = 0.30, \ P_n^*(H_3) = P_n^*(\{"6"\}) = 0.60,$$

$$P_n^*(H_1 + H_2) = P_n^*(\{"1", "2", "3", "4", "5"\}) = 0.40,$$

$$P_n^*(H_1 + H_3) = P_n^*(\{"1", "2", "3", "4", "6"\}) = 0.70,$$

$$P_n^*(H_2 + H_3) = P_n^*(\{"5", "6"\}) = 0.90,$$

$$P_n^*(H_1 + H_2 + H_3) = P_n^*(\{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}) = 1.0.$$

Однак питання про статистичні ймовірності попадання в будь-які інші підмножини множини Ω, окрім тих, що входять до S, наприклад в підмножини $\{"1", "3", "5"\}$, $\{"2", "4", "6"\}$, $\{"1", "2"\}$ тощо, а також питання про статистичні ймовірності елементарних подій $E_1 = "1"$, $E_2 = "2"$, $E_3 = "3"$, $E_4 = "4"$, та визначення через статистичні ймовірності елементарних подій, статистичних ймовірностей всіх інших подій втрачають смисл. За даних умов знайти відповіді на такі питання неможливо.

Нехай множина Ω є лінійною, плоскою чи просторовою і вимірна, тобто має довжину, площу, об'єм, масу тощо, причому

$0 < m(\Omega) < +\infty$, а на сукупності S підмножин множини Ω, яка задовольняє вимоги 1_s-3_s, задана міра $m(A)$ (довжина, площа, об'єм, маса тощо). Тоді за формулою $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$, де $A \in S$, задається імовірнісна міра (імовірність) на S, причому коли в S є дві множини $A \in S$ і $B \in S$ однакової міри, тобто $m(A) = m(B)$, то і імовірності попадання в такі множини однакові, тобто $P(A) = P(B)$, $A \in S$, $B \in S$ (Рис. 4.1). Таке задання ймовірнісної міри називається геометричним.

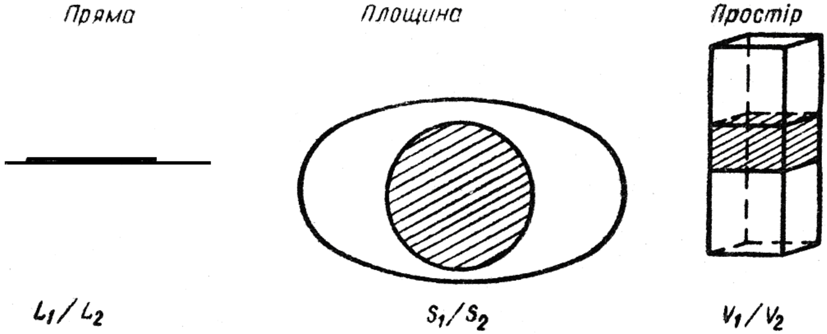


Рис. 4.1

Приклад 4.1. Двоє домовилися зустрітися протягом години (між 18^{00} і 19^{00}) і чекати один одного не довше ніж 15 хв. Потрібно знайти імовірність того, що вони зустрінуться, якщо імовірності попадання моментів приходу кожного в будь які проміжки часу між 18^{00} і 19^{00} однакової довжини однакові, незалежно від того, коли приходить інший, тобто однаково імовірно, наприклад, що перший з них прийде до місця зустрічі на проміжку часу 18^{00} – 18^{01}, чи на проміжку часу 18^{20} – 18^{21}, чи на проміжку часу 18^{59} – 19^{00}, чи на будь якому іншому проміжку цієї ж довжини, незалежно від того коли приходить інший. Те саме стосується і іншої особи. При цьому проміжки часу можна розглядати як довші за 1 хв, так і коротші.

Якщо через x_1 позначити час, що пройде після 18^{00}, до моменту приходу першої особи, через y_1 – час до приходу другої особи, то в результаті кожного такого експерименту матимемо пару чисел (x, y), тобто точку із 2-вимірного простору (точку на площині), причому координати (абсциса x і ордината y) цієї точки очевидно задовольняють вимоги $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$; (за одиницю вимірювання довжини проміжків часу обрано проміжок часу довжиною 1 година, початок відліку – 18^{00}). Множина всіх пар (x, y), $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ заповнює квадрат $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ (Рис. 4.2). За умовою задачі згадані особи зустрінуться, якщо різниці між моментами приходу кожного з них до місця зустрічі за абсолютною величиною не перевищуватиме $\dfrac{1}{4}$ години (15 хв.), тобто якщо виконуватиметься умова $|y - x| \le \dfrac{1}{4}$, або $x - \dfrac{1}{4} \le y \le x + \dfrac{1}{4}$. На рис. 4.2 множина точок, координати яких задовольняють умову $|y-x|\le\frac{1}{4}$ (чи, що те саме, $|x-y|\le\frac{1}{4}$), заштрихована.

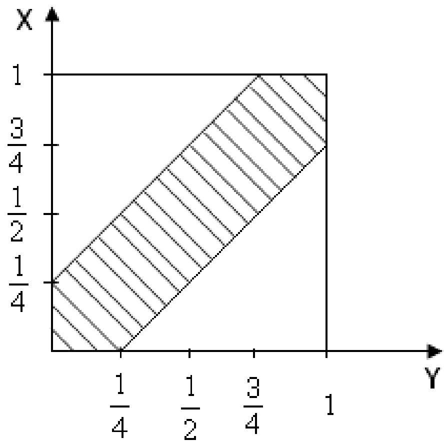


Рис. 4.2

Нехай проміжок $\Delta x\subset[0,1]$, проміжок $\Delta y\subset[0,1]$. Тоді прямокутник $\Delta x\times\Delta y\subset[0,1]\times[0,1]=\Omega$. Природно покласти $\tilde{m}(\Delta x\times\Delta y)=m(\Delta x)\cdot m(\Delta y)$, тобто $\tilde{m}(\Delta x\times\Delta y)$ – це площа прямокутника $\Delta x\times\Delta y$. Якщо момент приходу першого попадає на фіксований проміжок Δx_1, то однаково імовірно, що момент приходу другого буде знаходитись на проміжку Δy_1, чи Δy_2. Якщо міри (довжини) проміжків Δy_1 і Δy_2 однакові, при цьому імовірності попадання точки (x,y) у прямокутники $\Delta x_1\times\Delta y_1$ і $\Delta x_1\times\Delta y_2$ однакові. Те саме стосується і фіксованого проміжка Δx_2. Аналогічно, якщо міри (довжини) проміжків Δx_1 і Δx_2 однакові, а Δy_1 – фіксований проміжок, то і ймовірності попадання точки (x,y) в прямокутники $\Delta x_1\times\Delta y_1$ і $\Delta x_2\times\Delta y_1$ однакові. Таким чином, якщо міри (площі) прямокутників $\Delta x_1\times\Delta y_1$ і $\Delta x_2\times\Delta y_2$ однакові (за умови, що міри проміжків Δx_1 і Δx_2 однакові, а також однакові міри проміжків Δy_1 і Δy_2), то і ймовірності попадання точки (x,y) в такі прямокутники однакові. Легко бачити, що коли міри площі прямокутників $\Delta x_1\times\Delta y_1$ і $\Delta x_2\times\Delta y_2$ однакові, то і ймовірності попадання в такі прямокутники однакові і тоді, коли можливо $m(\Delta y_1)\ne m(\Delta y_2)$. Тому розподіл ймовірностей на множині Ω, тобто імовірнісна міра $\tilde{P}$ на сукупності $\tilde{S}$ підмножин множини Ω, які мають площу (вимірні за мірою $\tilde{m}$), може бути задана за формулою

$$\tilde{P}(A)=\frac{\tilde{m}(A)}{\tilde{m}(\Omega)},\ A\in\tilde{S}\ .$$

Оскільки в даному прикладі

$$\widetilde{m}(\Omega) = \widetilde{m}([0,1] \times [0,1]) = m([0,1]) \cdot m([0,1]) = 1 \cdot 1 = 1,$$

а

$$\widetilde{m}(A) = 1 - (3/4)^2 = \frac{9}{16},$$

то шукана ймовірність (попадання точки (x, y) в заштриховану область на рис. 4.2) дорівнює

$$\widetilde{P}(A) = \frac{\widetilde{m}(A)}{\widetilde{m}(\Omega)} = \frac{(1 - (3/4)^2)}{1} = \frac{7}{16}.$$

Зауважимо, що коли $m(A)$, $A \in S$, є міра Лебега, то такий розподіл ймовірностей на множині Ω називають *рівномірним*, а елементарні події (наслідки випробування) вважаються рівноможливими (при цьому ймовірність кожної елементарної події дорівнює нулеві).

Приклад 4.2. На відрізку CD завдовжки l навмання вибирають дві точки M і N. Знайти ймовірність того, що точка M буде не далі від точки N, ніж від точки C.

Якщо позначити через x відстань від точки C до M, а через y – відстань від точки C до N (Рис. 4.3), то після кожного вибору M і N матимемо пару чисел (x, y), які задовольняють умови $0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l$. При цьому x і y набувають одного з можливих значень на відрізку $[0, l]$ незалежно одне від одного. Множина всіх можливих пар (x, y) – це множина точок квадрата Ω із стороною завдовжки l (Рис. 4.4), тобто $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l\}$.

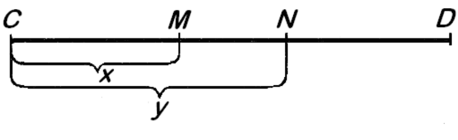


Рис. 4.3

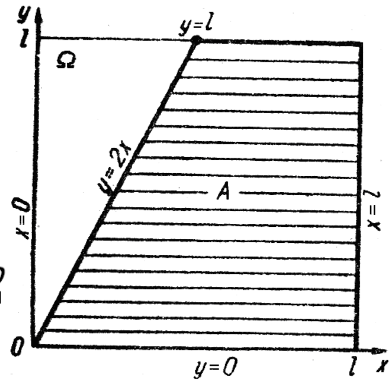


Рис. 4.4

При цьому немає підстав вважати, що можливість попадання в деяку підмножину із Ω певної міри більша або менша, ніж можливість попадання в будь-яку іншу підмножину тієї ж міри, тобто розподіл ймовірностей в квадраті Ω слід вважати рівномірним (а точки квадрата Ω вважати рівноможливими).

Оскільки кожній точці квадрата відповідає елементарна подія, яка полягає в тому, що навмання вибраною виявляється саме ця точка, можна ототожнити множину точок квадрата з множиною Ω всіх елементарних подій в даному експерименті.

Відстань від точки M до N є $|x-y|$, а відстань від точки C до M є x. Отже, точка M буде не далі від до точки N, ніж від точки C, якщо виконується нерівність

$$|x-y| \le x,$$

або система нерівностей

$$-x \le x-y, \ x-y \le x,$$

тобто

$$y \ge 0, \ y \le 2x.$$

Перша нерівність системи тривіальна, вона виконуються в кожній точці квадрата і є "зайвою", бо повторює одну з вимог $y \ge 0$, які визначають точки, що належать квадрату. З другої нерівності випливає, що точка M лежить не далі від до N, ніж від C, якщо $y \le 2x$.

Отже, подію A, яка полягає в тому, що точка M виявиться віддаленою від точки N не більше, ніж від точки C, можна описати так:

$$A = \{(x, y): 0 \le x \le l, \ 0 \le y \le l, \ y \le 2x\}$$

(на Рис. 4.4 множину A заштриховано).

Прямі $y = 2x$ і $y = l$ перетинаються в точці з абсцисою $x = l/2$, тому

$$m(\Omega) = l^2, \ m(A) = l^2 - \frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}l^2.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Між 0 і 1 навмання вибирається два числа. Знайти ймовірність того, що добуток логарифмів цих чисел не більший за 1, а добуток різниць між 1 і цими числами не перевищує 0,1.

Позначимо перше число через x, а друге через y. Тоді в результаті кожного випробування дістанемо пару (x, y), причому множиною всіх таких пар є

$$\Omega = \{(x, y): x \in [0, 1], \ y \in [0, 1]\}.$$

Всі точки множини Ω вважатимемо рівноможливими, тобто розподіл ймовірностей на множині Ω вважатимемо рівномірним.

Множиною пар (x, y), що сприяють вказаній події, є

$$A = \{(x, y): x \in [0, 1], \ y \in [0, 1], \ (1-x)\ (1-y) \le 0{,}1, \ \ln x \cdot \ln y \le 1\}\}$$

(на Рис. 4.5 а множину A заштриховано).

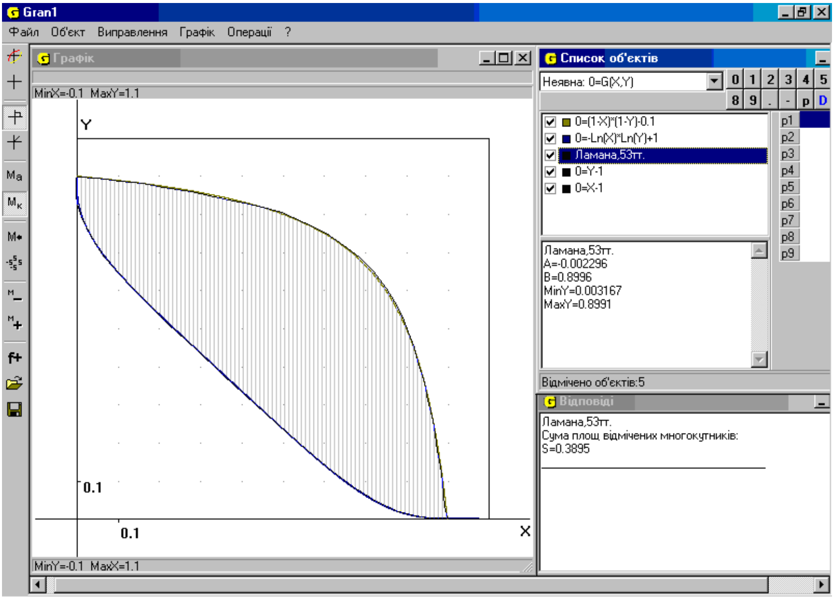


Рис. 4.5 а

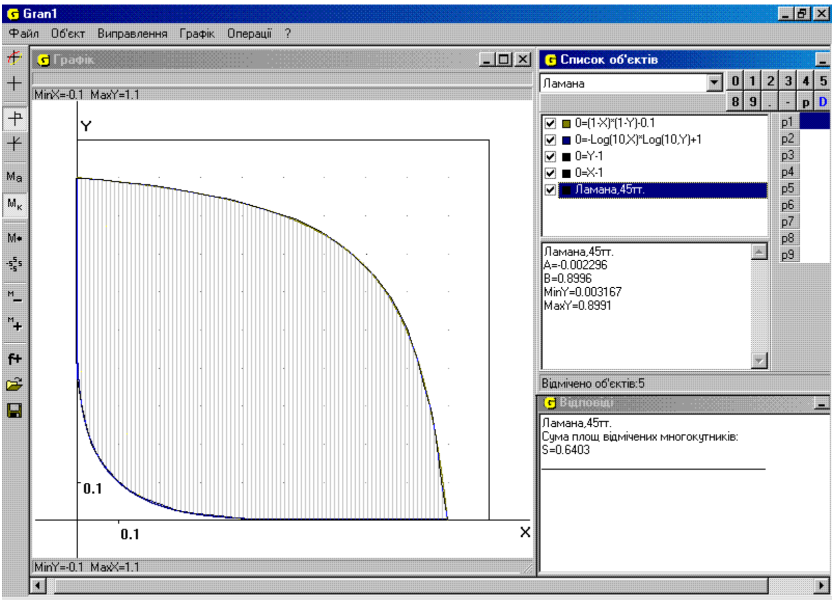


Рис. 4.5 б

Використовуючи послуги програми GRAN1, знайдемо точки перетину кривих $y = 1 + \dfrac{0{,}1}{x-1}$ і $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$.

Далі знайдемо площу $m(A)$ області, обмеженої зазначеними кривими (заштрихованої області). Оскільки $m(\Omega) = 1$, то шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = 0{,}39 .$$

Якщо замість натуральних розглядати десяткові логарифми, то відповідний результат подано на Рис. 4.5 б.

Вправа 2. У крузі радіуса R певним способом вибирається хорда. Знайти ймовірність того, що довжина цієї хорди буде не більша від R.

Ця задача може бути розв'язана по-різному залежно від способу вибору хорди, за яким визначається множина Ω всіх можливих наслідків випробування, рівноможливих між собою.

1. Нехай хорди вибирають паралельними до заданого напрямку (Рис. 4.6). Тоді досить вибрати точку на діаметрі MN, перпендикулярному до напрямку хорд, щоб визначити хорду. При цьому будь-які точки діаметра MN вважаються рівноможливими, а множина Ω всіх можливих наслідків експерименту еквівалентна множині точок відрізка MN. Згідно з Рис. 4.6, подія A, яка полягає в тому, що довжина хорди буде не більша, ніж R, відбудеться, якщо навмання вибрана точка належатиме одному з відрізків MP або NQ, де через точки P і Q проходять хорди довжини R.

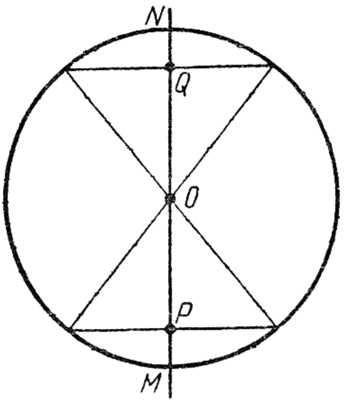


Рис. 4.6

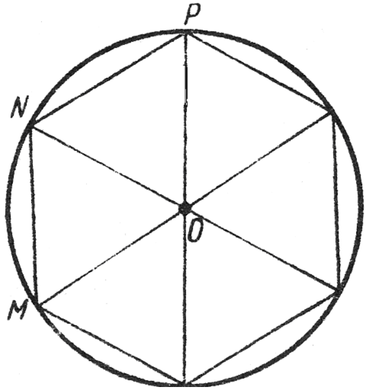


Рис. 4.7

Легко бачити, що

$$m(A) = 2(R - R\cos\ (\pi/6)) = 2R\ (1 - \sqrt{3}/2) .$$

Таким чином,

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{2R(1-\sqrt{3}/2)}{2R}=1-\sqrt{3}/2\,.$$

2. Нехай один кінець хорди, наприклад N, закріплений, а положення другого кінця рівноможливе в будь-якій точці кола (Рис. 4.7).

У цьому випадку множиною всіх можливих наслідків експерименту, рівноможливих між собою, вважається множина Ω всіх точок кола, а множиною точок, що відповідає розглядуваній події A, є множина точок дуги MNP, де $MN=NP=R$.

Очевидно, що

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{(2/6)\pi R}{2\pi R}=\frac{1}{3}\,.$$

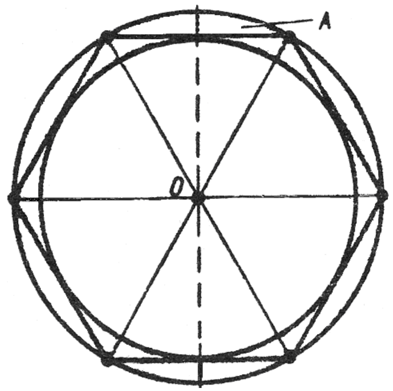


Рис. 4.8

3. Хорда цілком визначається, якщо задати її середину (Рис. 4.8). У цьому випадку множині Ω всіх можливих наслідків експерименту відповідає множина точок круга радіуса R, а події A відповідає множина точок всередині даного круга і зовні круга, концентричного даному, з радіусом $(\sqrt{3}/2)R$ (див. випадок 1). Отже дістаємо

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\pi R^2-(3/4)\pi R^2}{\pi R^2}=\frac{1}{4}\,.$$

4. Нехай обидва кінці хорди вибирають на колі навмання. Якщо на колі вибрати точку відліку і відстань вздовж кола від цієї точки вимірювати проти руху стрілки годинника, то внаслідок кожного випробування дістанемо пару точок (x,y), причому множиною всіх таких пар є $\Omega=\{(x,y):x\in[0;2\pi R],\ y\in[0;2\pi R]\}$ (Рис. 4.9, а).

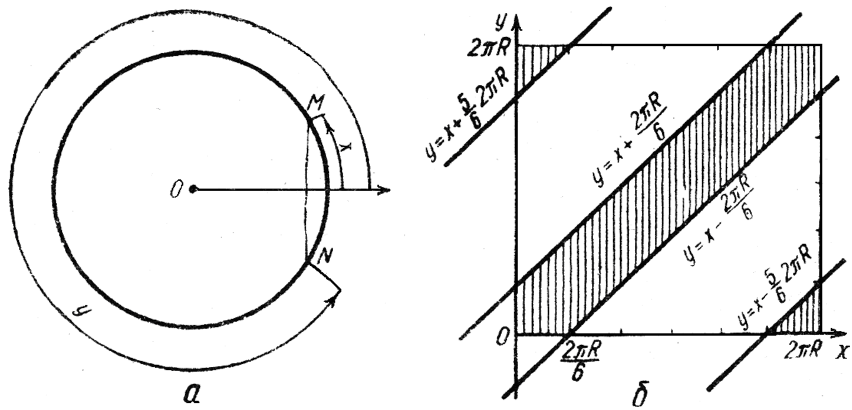


Рис. 4.9

У цьому разі хорда буде не довша за радіус, якщо $|x-y| \le \dfrac{2\pi R}{6}$ або $2\pi R - |x-y| \le \dfrac{2\pi R}{6}$ (див. Рис. 4.9, а). На Рис. 4.9, б зображено множину точок (вона заштрихована), що сприяють події A, яка полягає в тому, що хорда коротша, ніж радіус кола. Очевидно, що

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

5. Нехай у крузі навмання вибирають точку M і через неї в довільно взятому напрямку проводять хорду. Якщо напрямок хорди визначати перпендикуляром до неї, а точку, через яку проводять хорду, визначати полярними координатами, то хорда визначається трьома параметрами: ρ – полярний радіус точки, через яку проводять хорду; φ – полярний кут радіуса–вектора точки; α – кут, утворений перпендикуляром до хорди і радіусом-вектором точки (Рис. 4.10).

Таким чином,

$$\Omega = \left\{(\rho,\ \varphi,\ \alpha) : 0 \le \rho \le R,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad \varphi - \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \varphi + \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Множиною точок Ω, що сприяють події A, яка полягає в тому, що хорда коротша за радіус, є множина

$$A = \left\{\begin{array}{l} (\rho,\ \varphi,\ \alpha) : R\sqrt{3/2} \le \rho \le R, \\ \qquad\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \qquad\qquad \varphi - \arccos\dfrac{R\sqrt{3/2}}{\rho} \le \alpha \le \varphi + \arccos\dfrac{R\sqrt{3/2}}{\rho} \end{array}\right\}.$$

Якщо вибрати тривимірну прямокутну систему координат (ρ, φ, α), то множини Ω і A можна подати так, як показано на Рис. 4.11 (множині Ω відповідає фігура $EFGHH_1E_1F_1G_1$, а множині A – фігура $ABCC_1A_1B_1$). Очевидно, що фігури $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і $EFGHE_2F_2G_2H_2$ рівновеликі, оскільки мають одну й ту саму площу основи й однакові висоти. Так само рівновеликі фігури $ABCC_1A_1B_1$ і $ABCC_2A_2B_2$. Звідси об'єм фігури $ABCC_1A_1B_1$ відноситься до об'єму фігури $EFGHH_1E_1F_1G_1$ так, як площа фігури ABC до площі фігури $EFGH$ (Рис. 4.12).

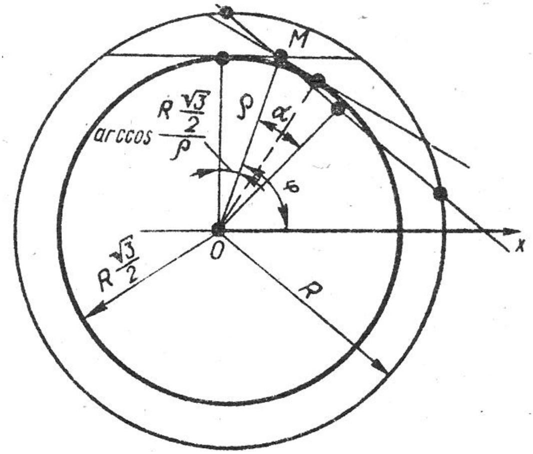


Рис. 4.10

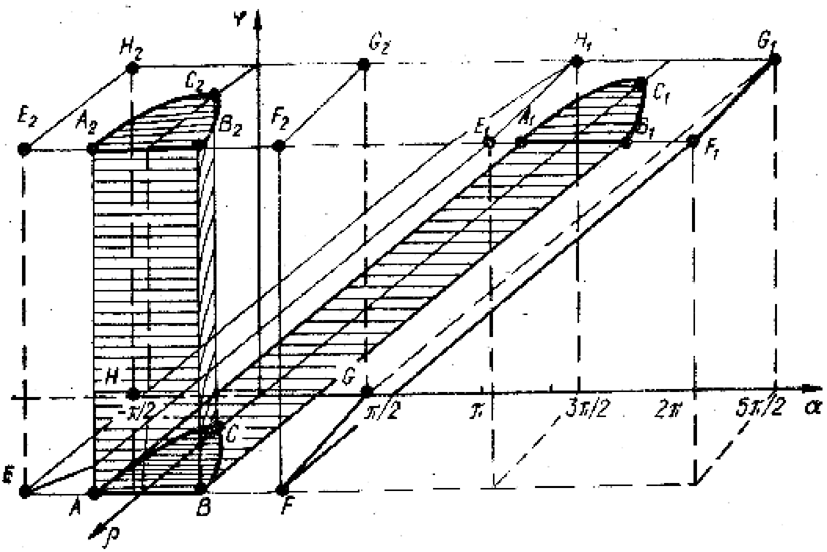


Рис. 4.11

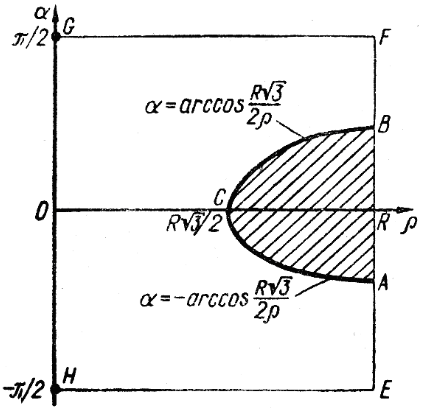


Рис. 4.12

Отже,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFGH}} = \frac{1}{\pi R}\; 2\int\limits_{\frac{R\sqrt{3}}{2}}^{R} \arccos\left(\frac{R\sqrt{3}}{2\rho}\right) d\rho\,.$$

Після заміни змінних

$$\frac{R\sqrt{3}}{2\rho} = \frac{1}{t}, \quad \left(t = \frac{2\rho}{R\sqrt{3}},\;\; \rho = \frac{R\sqrt{3}}{2}t,\;\; d\rho = \frac{R\sqrt{3}}{2}dt\right)$$

дістанемо

$$P(A) = \frac{2}{\pi R}\int\limits_{1}^{2/\sqrt{3}} \arccos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{R\sqrt{3}}{2}dt = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_{1}^{2/\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\,(\sqrt{t^2-1})\,dt\,.$$

Позначивши $t^2 - 1 = s^2, \left(t^2 = 1 + s^2,\; t = \sqrt{1+s^2},\; dt = \frac{sds}{\sqrt{1+s^2}}\right)$,

знайдемо

$$P(A) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\, s\,\frac{sds}{\sqrt{1+s^2}}\,.$$

Після інтегрування частинами

$$\left(u = \operatorname{arctg}\, s,\;\; du = \frac{ds}{1+s^2};\;\; \frac{sds}{\sqrt{1+s^2}} = dv,\; v = \sqrt{1+s^2}\right)$$

матимемо

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\sqrt{1+s^2}\,\mathrm{arctg}\; s\,\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}} - \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s^2}\,ds\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\sqrt{1+\frac{1}{3}}\;\mathrm{arctg}\;\frac{1}{\sqrt{3}} - \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\Bigg(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6} -$$

$$-\ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}}\Bigg) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\,\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\,\ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\ln 3 \approx 0{,}0305\,.$$

Обчислити

$$\frac{2}{\pi R}\int_1^{2/\sqrt{3}} \arccos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{R\sqrt{3}}{2}\,dt \;\;\text{або}\;\; \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_1^{2/\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\;\left(\sqrt{t^2-1}\right)\,dt$$

можна за допомогою програми GRAN1 (Рис. 4.13, а, б) або за допомогою програми DERIVE. В результаті дістанемо, як і раніше,

$$P\,(A) \approx 0{,}0305\,.$$

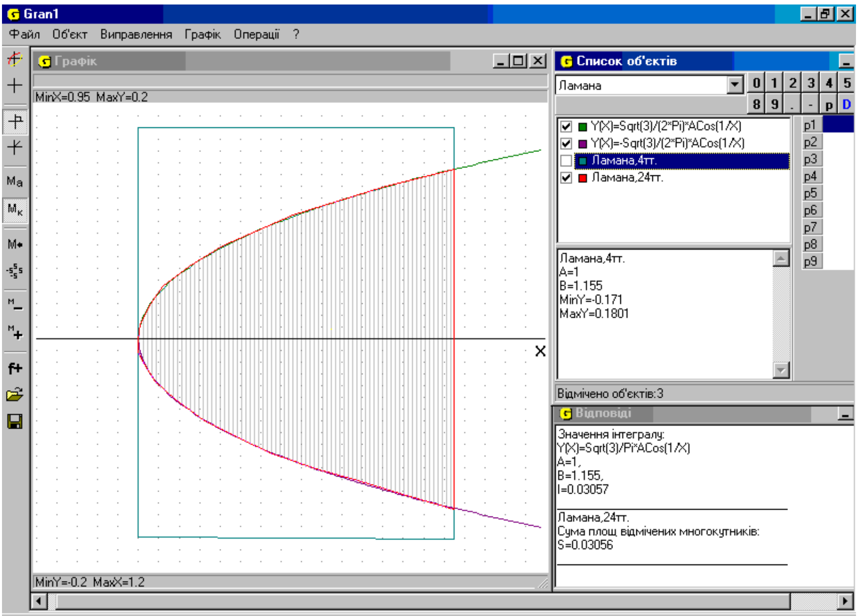


Рис. 4.13, а

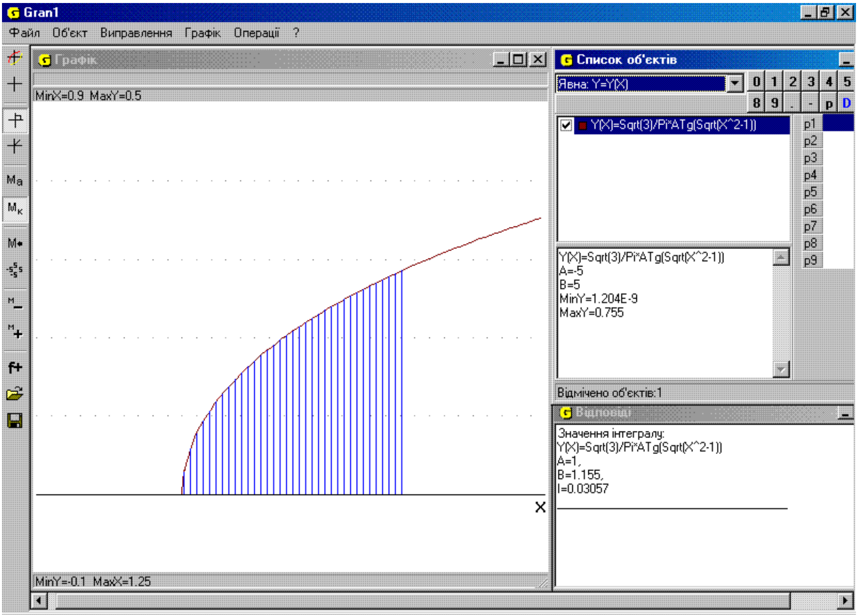


Рис. 4.13, б

Наближений розв'язок цієї задачі можна знайти ще й так.

Вибираємо навмання (за допомогою генератора випадкових чисел) щоразу три випадкових числа: перше число – в межах $[0,\ R]$ і вважаємо його значенням ρ, друге – в межах $[0,\ 2\pi]$ і вважаємо його значенням φ, третє – в межах $\left[\varphi-\frac{\pi}{2},\ \varphi+\frac{\pi}{2}\right]$ і вважаємо його значенням α. Якщо при цьому $R\frac{\sqrt{3}}{2}\le\rho\le R$ і

$$\varphi-\arccos\frac{R\sqrt{3}}{2\rho}\le\alpha\le\varphi+\arccos\frac{R\sqrt{3}}{2\rho},$$

то вибрана хорда буде коротша за радіус. Здійснюючи досить велику серію випробувань і знайшовши відношення числа випробувань, в яких подія A відбулася, до числа всіх випробувань, дістанемо наближено шукану ймовірність

$$P(A)\approx P_n^*(A).$$

Зауваження. Чим більша серія випробувань, тим ближче буде наближений результат до здобутого раніше "точного".

Здавалося б, задача одна й та сама, а відповіді у кожному випадку різні – так званий парадокс Бертрана за ім'ям французького математика Жозефа Бертрана, який опублікував цей “парадокс” у 1907р. Проте парадоксу тут немає. Все залежить від того, що розуміють під словами “певним способом вибирається хорда”. Залежно від того, як визначено множину всіх можливих наслідків випробування, рівноможливих між собою, дістають різні задачі – з різними множинами Ω і A. Цілком природно, що й імовірності відповідних подій різні. Слід зазначити, що можуть бути й задачі із скінченним числом можливих наслідків експерименту, де можна по-різному тлумачити на перший погляд одне й те саме питання. Тому при розв’язуванні задач треба спочатку чітко визначити, що слід вважати елементарними наслідками експерименту, що вважати подіями та їх ймовірностями, а потім вже досліджувати задачу.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для кожної вимірної за Лебегом множини Ω можна побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P), у якому ймовірність подій $A \in S$ задана геометрично: $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$.

2. Геометрично задати ймовірність можна лише за допомогою міри Лебега.

3. Сукупність вимірних за Лебегом підмножин відрізка $[0;1]$ можна вважати простором подій.

4. Якщо у геометричному заданні ймовірності мірою є міра Лебега-Стільтьєса, то розподіл ймовірностей залишається рівномірним.

5. Геометричне задання ймовірності є однаковим за формою, проте може бути різним за суттю, залежно від того, що вважати простором Ω елементарних подій і що вважати простором подій.

6. Парадокс Бертрана свідчить про неможливість застосування теорії ймовірностей до розв’язування практичних задач.

7. Ймовірність, задану геометрично за допомогою міри Лебега підмножин відрізка $[0;1]$, можна продовжити на “найширшу” $\sigma-$ алгебру усіляких підмножин відрізка $[0;1]$.

2. (*Задача Бюффона*). Площина поділена паралельними прямими, які знаходяться одна від однієї на відстані $2a$. На площину навмання кидається голка довжиною $2l$, $(l < a)$. Знайти ймовірність того, що голка перетне одну з прямих, якщо всі положення центра голки рівноможливі.

3. Площина розграфлена паралельними прямими, що відстоять одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кинули монету радіуса r $(r < a)$. Знайти ймовірність того, що монета не буде перетинати жодної з прямих, якщо всі положення центра монети рівноможливі.

4. Диск, який швидко обертається, поділений на парну кількість рівних секторів, які через один пофарбовані в білий і чорний кольори. В диск виконується постріл. Знайти ймовірність того, що куля попаде в один із білих секторів.

5. На стержні довжиною l навмання вибираються дві точки. Знайти ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник, якщо всі положення точок рівноможливі.

6. Стержень довжиною $l = 200$ мм навмання ламається на частини. Визначити ймовірність того, що хоча б одна частина стержня між точками перелому буде не більше 10 мм, якщо точок перелому: 1) дві; 2) три, причому перелом стержня рівноможливий в будь-якому місці.

7. Відрізок $[AB]$ поділено точкою C у відношенні 4:7. Знайти ймовірність того, що дві навмання вибрані з відрізка $[AB]$ точки є точками відрізка $[CB]$, якщо всі положення точок рівноможливі.

8. Навмання беруться два додатні числа x, y, кожне з яких не перебільшує 2. Знайти ймовірність того, що їх добуток $xy \le 1$ і частка $\frac{y}{x} \le 2$, якщо всі числа з відрізка $[0,\ 2]$ рівноможливі.

9. Між (-1) і (+1) навмання вибирається два числа. Знайти ймовірність того, що: 1) сума квадратів цих чисел буде не більша від одиниці; 2) сума цих чисел додатня, а добуток від'ємний. Всі числа з відрізка $[-1,\ 1]$ рівноможливі.

10. З відрізка $[0;1]$ навмання беруть два числа. Знайти ймовірність того, що: 1) їх сума не перевищує 1, а добуток є не меншим за 0,09; 2) їх сума не перевищує 1, а модуль різниці не менший за $\frac{1}{2}$; 3) сума цих чисел не перевищує 1, а добуток не перевищує $\frac{2}{9}$. Всі числа з відрізка $[0,\ 1]$ вважаються рівноможливими.

11. З відрізка $[0;1]$ вибирають навмання дві точки x та y, всі положення яких на $[0,\ 1]$ рівноможливі. Знайти ймовірність події:

1) A, яка полягає у тому, що $\max\{x, y\} < a$, де $a \in (0;1)$ – фіксоване число;

2) B, яка полягає у тому, що $x^2 + y^2 \le a$, де $a > 0$ – фіксоване число;

3) C, яка полягає у тому, що рівняння $t^2 + 2tx + y = 0$ не має дійсних коренів.

12. На відрізку $[-1;2]$ навмання зафіксували два числа. Яка ймовірність того, що сума цих чисел є більшою за 1, а добуток – не більший за 1?

13. На відрізку довжиною l навмання вибирають дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними: 1) менша kl, де $0 < k < 1$; 2) є не меншою за $l/2$?

14. Дві особи можуть прийти в певне місце в будь-який момент часу з проміжка $[0;T]$ з однаковою ймовірністю. Визначити ймовірність того, що кожний з них буде очікувати іншого не довше ніж протягом часу t, $(t \le T)$.

15. Двоє домовились зустрітися між 18-ю і 19-ю годинами. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться за умови, що кожен з них буде чекати іншого не довше, ніж протягом 1/3 години, а моменти приходу як одного, так і іншого рівноймовірні на протязі вказаної години.

16. В круг радіуса R навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що ця точка буде знаходитись: 1) всередині вписаного у коло, що обмежує круг: а) квадрата; б) правильного трикутника; 2) поза вписаним у це коло: а) квадратом; б) правильним трикутником; 3) на межі заданих: а) круга; б) квадрата; в) трикутника.

17. На колі радіуса r навмання поставлені три точки A, B і C.

1. Знайти ймовірність того, що трикутник ABC: 1) гострокутний; 2) прямокутний; 3) рівнобедрений.
2. Знайти відповідний до завдання 17.1 ймовірнісний простір.
3. Чи залежить від радіуса кола: 1)імовірнісний простір; 2) шукана ймовірність.

18. Накреслено п'ять концентричних кіл, радіуси яких рівні відповідно kr $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Круг радіуса r і два кільця шириною r з зовнішніми радіусами $3r$ і $5r$ заштриховані. В крузі радіуса $5r$ навмання вибрано точку. Знайти ймовірність влучення цієї точки: 1) в круг радіуса $2r$; 2) в заштриховану область.

19. В квадраті зі стороною a навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що ця точка не лежить у крузі, вписаному у цей квадрат, якщо всі точки квадрата рівноможливі.

20. Всередині еліпса з півосями $a = 100$ см і $b = 10$ см симетрично розташовано прямокутник зі сторонами 10 і 3 см, більша сторона якого паралельна a. Крім того, проведені чотири кола діаметром 4,3 см, які не перетинаються ні з еліпсом, ні з прямокутником, ні між собою. Знайти ймовірність того, що: 1) випадкова точка, положення якої рівноймовірне всередині еліпса, буде всередині одного з кіл; 2) коло радіуса 5 см, побудоване навколо цієї точки як центра, перетинається хоча б з однією стороною прямокутника.

21. На площині накреслено два концентричних кола, радіусами 5 см і 10 см. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана точка з великого круга, всі точки якого рівноможливі виявиться: 1) точкою кільця, утвореного заданими колами; 2) точкою меншого круга; 3) точкою одного з кіл.

22. В прямокутнику $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le e, 0 \le y \le 1\}$ навмання вибирають точку (x_0, y_0). Знайти ймовірність того, що координати цієї точки задовольняють нерівності $1 \le x \le e$, $0 \le y \le \ln x$, якщо всі точки прямокутника рівноможливі.

23. На колі з центром у початку координат і радіуса R навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що проекція цієї точки на вісь Ox знаходиться від кола на відстані, що не перевищує $\frac{1}{3}R$, якщо всі точки кола рівноможливі.

24. На поверхні сфери радіуса R довільним чином вибираються дві точки. Яка ймовірність, що дуга великого кола, що проходить через ці точки, стягує кут, менший α $(\alpha < \pi)$, якщо всі точки на сфері рівноможливі?

25. Штучний супутник Землі рухається на орбіті і проходить між 60° північної та 60° південної широти. Враховуючи падіння супутника у будь-яку точку Землі між вказаними паралелями рівноможливим, знайти ймовірність того, що супутник впаде вище 30° північної широти.

26. У будь-який момент часу з відрізка $[0;T]$ рівноможливі надходження на приймач двох сигналів. Приймач буде заблоковано (спрацьовує сигналізатор), якщо різниця між моментами надходження сигналів буде менше τ. Знайти ймовірність того, що приймач буде заблоковано.

27. До автобусної зупинки через кожні чотири хвилини підходить автобус лінії A і через кожні шість хвилин – автобус лінії B. Інтервал часу між моментами приходу автобуса лінії A і найближчого наступного автобуса лінії B рівноможливий в межах від нуля до чотирьох хвилин. Знайти ймовірність того, що: 1) перший автобус, який підійде, буде автобус лінії A; 2) автобус будь-якої лінії підійде на протязі двох хвилин.

28. Прямокутник поділено паралельними до бічних сторін прямими на три маленьких прямокутники шириною d_1, d_2 та d_3, причому $d_1 < d_2 < d_3$. У прямокутнику навмання вибирають точку, і будують коло з центром у цій точці, діаметр якого $d > 0$ – задане число, що менше за висоту прямокутника.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Утворити простір подій, для якого подіями є: 1) A – згадане коло не перетинає бічні сторони маленьких прямокутників; 2) B – коло перетне принаймні одну бічну сторону маленьких прямокутників; 3) C – коло не перетне жодної сторони маленьких прямокутників; 4) D – коло перетне принаймні одну сторону маленьких прямокутників.

3. Обчислити ймовірність подій A, B, C і D, якщо всі точки у прямокутнику рівноможливі.

2.5. Властивості ймовірностей

З основних або визначальних властивостей ймовірності $1_р$–$3_р$ (див. п. 2.1.) випливають *усі інші властивості ймовірності, наприклад:*

4. Для будь-якої події $A \in S$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

5. Імовірність неможливої події дорівнює нулеві:

$$P(\varnothing) = 0.$$

6. Якщо подія $A \in S$ спричинює подію $B \in S$, тобто $A \subset B$, то

$$P(A) \le P(B).$$

7. Для будь-якої події $A \in S$

$$0 \le P(A) \le 1.$$

8. Для будь-яких двох подій A і B з S

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Приклад 5.1. На тролейбусній зупинці протягом 10 хв. зупиняється тільки один тролейбус маршрутів № 5, 6, 8, 9, або 17. Знайти ймовірність того, що протягом 10 хв. підійде тролейбус № 5 або № 6, якщо відомо, що тролейбуси № 5 протягом 10 хв. з'являються на зупинці з імовірністю $P(''5'') = p_1$, тролейбуси № 6 – з імовірністю $P(''6'') = p_2$, тролейбуси № 8 – з імовірністю $P(''8'') = p_3$, тролейбуси № 9 – з імовірністю $P(''9'') = p_4$, тролейбуси № 17 – з імовірністю $P(''17'') = p_5$.

У даному прикладі події $\{''5''\}$ і $\{''6''\}$ означають, що протягом 10 хв. на зупинці зупиняться тролейбуси відповідно маршрутів № 5 та № 6.

Тоді A – випадкова подія, яка полягає в тому, що протягом 10 хв. на зупинку прийде тролейбус № 5 або № 6, тобто $A = \{''5''\} + \{''6''\} = \{''5'', ''6''\}$. Тому, враховуючи несумісність подій $\{''5''\}$ та $\{''6''\}$, за властивістю адитивності ймовірності маємо:

$$P(A) = P(''5'') + P(''6'') = p_1 + p_2.$$

Нехай $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ – скінченна множина з n елементарних подій, S – сукупність всіх підмножин множини Ω, ймовірнісна міра (ймовірність) на S задана так, що кожному E_i приписана ймовірність $P(E_i) = \dfrac{1}{n}$. Якщо A – випадкова подія, що складається з m елементарних подій, $A \subset \Omega$, $A = (E_{i_1}, E_{i_2}, ..., E_{i_m})$, тоді

$$P(A) = \sum_{E_i \in A} p_i = \sum_{E_i \in A} (1/n) = \frac{m}{n}.$$

При цьому якщо дві підмножини A і B множини Ω містять однакову кількість елементів (мають однакові міри), то і ймовірності подій A і B однакові – $P(A) = P(B)$. В цьому випадку говорять, що *розподіл ймовірностей рівномірний на скінченній множині* Ω.

Приклад 5.2. Монету підкидають двічі. Простір елементарних подій цього експерименту складається з чотирьох елементів:

$$\Omega = \{ГГ,\ ГЦ,\ ЦГ,\ ЦЦ\}.$$

Припустимо, що кожна елементарна подія відбувається з ймовірністю $p_i = \dfrac{1}{4},\ i = 1, 2, 3, 4.$ Нехай A – подія, яка полягає в тому, що при першому підкиданні випав герб, подія B – при другому підкиданні випав герб. Тоді

$$A = \{ГГ,\ ГЦ\},\ B = \{ГГ,\ ЦГ\},\ AB = \{ГГ\},\ A + B = \{ГГ,\ ГЦ,\ ЦГ\},$$

$$P(A) = P(ГГ) + P(ГЦ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P(ГГ) + P(ЦГ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Нехай подія C – хоча б один раз випав герб. Тоді $C = A + B = \{ГГ, ЦГ\} + \{ГГ, ГЦ\} = \{ГГ, ГЦ,\ ЦГ\},\ P(C) = 3/4$.

Приклад 5.3. З n виробів, серед яких m бракованих, навмання вибирають k виробів. Знайти ймовірність того, що серед цих k виробів рівно r бракованих, якщо вибір будь яких k виробів з n виробів рівноможливий.

З умови задачі випливає, що виконуються нерівності $r \le k,\ r \le m,\ k - r \le n - m.$

Наслідки експерименту – варіанти наборів по k виробів, навмання вибраних серед даних n. Загальна кількість таких наслідків дорівнює C_n^k. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що серед навмання вибраних k виробів r виробів бракованих. Наслідок експерименту, що спричинює подію A, відбувається, коли в наборі з k виробів є рівно r бракованих. Сформувати такі набори можна так: навмання вибрати r виробів з m бракованих (це можна зробити C_m^r різними способами) і потім додати $k - r$ виробів з решти $n - m$ якісних виробів, (це можна зробити C_{n-m}^{k-r} способами). Оскільки до кожного із C_m^r наборів по r бракованих виробів можна додати один із C_{n-m}^{k-r} наборів по $k - r$ якісних виробів, то кількість наборів по k виробів, серед яких буде рівно r бракованих, дорівнює $C_m^r C_{n-m}^{k-r}$.

Оскільки наслідки експерименту рівноможливі, то

$$P(A) = \frac{C_m^r C_{n-m}^{k-r}}{C_n^k}.$$

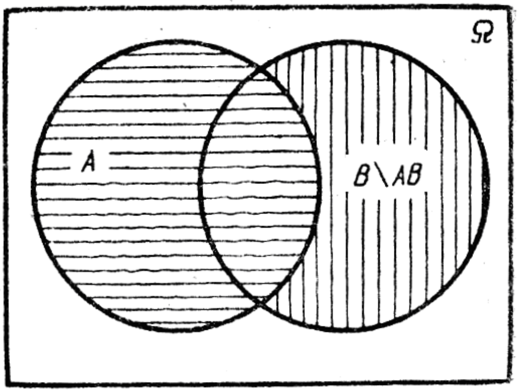
Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Довести що $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Справді (Рис. 5.1),

$$A + B = A + (B \setminus AB),$$

$$B = AB + (B \setminus AB),$$



$A+B=A+(B\setminus AB)$

Рис. 5.1

причому доданки в правих частинах останніх рівностей є несумісними подіями. Тому за аксіомою 2_p

$$P(A+B)=P(A)+P(B\setminus AB) \text{ і } P(B)=P(AB)+P(B\setminus AB).$$

Звідси

$$P(B\setminus AB)=P(B)-P(AB).$$

Тоді

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

що й треба було довести.

Для суми трьох подій $A+B+C$ матимемо

$$P(A+B+C)=P((A+B)+C)=P(A+B)+P(C)-P((A+B)C)=$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+BC)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-(P(AC)+P(BC)-P(AC\cdot BC))=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що для довільного скінченного числа випадкових подій $A_1,\ A_2,\ \ldots,A_n$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P\ (A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P\ (A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P\ (A_iA_jA_k)-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Нагадаємо, що коли події $A_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,n$, попарно несумісні, тобто $A_iA_j=\varnothing,\ i\ne j$, то ймовірність суми будь-якої кількості подій дорівнює сумі їх ймовірностей (аксіома 2_p).

Вправа 2. (задача про збіги). У ліфті знаходяться m пасажирів; ліфт зупиняється на n поверхах. Знайти ймовірність того, що принаймні два пасажири вийдуть на тому самому поверсі.

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що принаймні два пасажири вийдуть на тому самому поверсі. Шукатимемо ймовірність протилежної події $\bar{A}$, яка полягає в тому, що два пасажири не вийдуть на тому самому поверсі. Якщо перший пасажир вибирає будь-який один з n поверхів, і другий вибирає будь-який з n поверхів, то, очевидно, є n^2 варіантів вибору поверхів двома пасажирами. З кожним з цих n^2 варіантів третій пасажир може вибрати будь-який з n поверхів. Тому матимемо n^3 варіантів вибору поверхів трьома пасажирами. Продовжуючи міркування, дістаємо, що m пасажирів можуть вибрати поверхи n^m способами.

Таким чином, є всього n^m можливих наслідків у даному випробуванні, причому всі наслідки слід вважати рівноможливими, оскільки немає підстав віддавати превагу жодному з них.

Кількість варіантів, у яких два пасажири не виходять на одному поверсі, дорівнює $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-(m-1))$, оскільки після вибору одного з n поверхів першим пасажиром у другого залишається $n-1$ варіант. Аналогічно після вибору поверхів першим і другим пасажирами у третього залишається $n-2$ варіанти і т. д.

Отже

$$P(\bar{A}) = \frac{A_n^m}{n^m} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-(m-1))}{n^m} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Вправа 3. Підкидають 12 гральних кубиків. Обчислити ймовірність того, що кожне з чисел $1, 2, \ldots, 6$ випаде двічі.

Очевидно, що в даному експерименті простір Ω складається з 6^{12} елементарних подій (оскільки з кожною цифрою на першому кубикові на другому може випасти одна із 6-ти цифр, тобто є 6^2 варіантів випадання пари цифр на двох кубиках. З кожною парою цифр на перших двох кубиках на третьому може випасти одна із 6 цифр, тобто є 6^3 варіантів випадання трьох цифр на трьох кубиках і т.д.).

Щоб підрахувати кількість елементарних подій, що сприяють події A, міркуватимемо так. Пронумеруємо кубики від 1 до 12 і з 12-елементної множини місць, на які можуть бути поставлені цифри від 1 до 6, вибиратимемо можливі (невпорядковані) двохелементні підмножини місць. Далі з решти 10 місць вибиратимемо двохелементні підмножини, на які ставитимемо одну з решти 5 цифр і т.д. Тоді матимемо

$$C_{12}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{12!}{(2!)^6},$$

варіантів розміщення цифр 1–6 у зазначеному порядку.

Таким чином,

$$P(A) = \frac{12!}{(2!)^6 \cdot 6^{12}}.$$

Вправа 4. З п’яти літер ***а, і, к, н, т*** навмання вибирають три. Знайти ймовірність події A, яка полягає в тому, що з вибраних літер можна утворити одне із слів, які можна дістати переставлянням літер у слові “тік”.

У цьому прикладі істотним є набір з трьох літер і порядок, в якому вони розміщені. Кількість усіх можливих трилітерних слів, які можна утворити з п’яти даних літер, тобто кількість усіх можливих наслідків даного випробування, дорівнює A_5^3. При цьому всі наслідки слід вважати рівноможливими, оскільки немає підстав надавати перевагу жодному з них. Число випадків, що сприяють події A (число слів, які можна утворити з літер ***т***, ***і***, ***к***), дорівнює $P_3 = 3!$

Отже,

$$P(A) = \frac{P_3}{A_5^3} = \frac{3!}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0{,}1.$$

Вправа 5. У записаному телефонному номері 476^{****} чотири останні цифри стерлися. Припустивши, що всі набори чотирьох невідомих цифр рівноймовірні, знайти ймовірність таких подій:

A – стерлися різні цифри, відмінні від 4, 6, 7;
B – дві цифри із стертих однакові;
C – дві пари стертих цифр однакові;
D – усі цифри, що стерлися, однакові.

Число всіх елементарних подій дорівнює 10^4. Розглянемо наслідки експерименту, що сприяють появі події A. Цій події сприяє A_7^4 наслідків, кількість яких дорівнює числу впорядкованих наборів по чотири цифри із семи цифр 0, 1, 2, 3, 5, 8, 9.

Тому

$$P(A) = \frac{A_7^4}{10^4} = 0{,}084.$$

Число випадків, що сприяють події B, можна підрахувати так. Спочатку вибрати два місця для двох однакових цифр. Очевидно, що таких наборів місць буде стільки, скільки існує двохелементних невпорядкованих підмножин у чотириелементній множині, тобто $C_4^2 = 6$. Враховуючи, що цифри можуть бути будь-які від 0 до 9, дістанемо, що дві однакові цифри з 10 цифр на два місця з чотирьох можна поставити $6\cdot 10=60$ способами. Для третьої цифри маємо дев'ять можливих варіантів і для четвертої – вісім.

Отже, число випадків, що сприяють події B, дорівнює $C_4^2\cdot A_{10}^3=6\cdot 10\cdot 9\cdot 8=4320.$ Тому

$$P(B)=\frac{4320}{10^4}=0{,}432\ .$$

Міркуючи аналогічно, дістанемо, що події C сприяє

$$C_4^2\cdot 10\cdot 9$$

рівноможливих наслідків експерименту (оскільки вибір двох місць із чотирьох для першої цифри однозначно визначає інші два місця для другої цифри).

Таким чином,

$$P(C)=\frac{6\cdot 10\cdot 9}{10^4}=0{,}054.$$

Події D, очевидно, сприяє 10 наслідків випробування, бо існує лише одна чотириелементна підмножина в чотириелементній множині і на всі місця такої чотириелементної підмножини місць ставиться одна й та сама цифра, одна з десяти. Таким чином, події D сприяє $C_4^4\cdot 10$ випадків з 10^4. Тому

$$P(D)=\frac{10}{10^4}=10^{-3}=0{,}001.$$

Вправа 6. Нехай n елементів розміщено в певному порядку. Ці елементи розсипаються і потім розставляються навмання. Яка ймовірність того, що принаймні один елемент залишиться на своєму місці?

Вираз "елементи розставляються навмання" означає, що всі $n!$ перестановок елементів рівноможливі. Нехай A_i – подія, яка полягає в тому, що i-й елемент залишиться на своєму i-му місці. Тоді подією "принаймні один елемент залишиться на своєму місці" є подія $A=\sum A_i$. Маємо

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)},$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)},\ \dots,$$

$$P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\frac{1}{n!}.$$

Таким чином, оскільки кількість пар (A_i, A_j) дорівнює $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, кількість трійок (A_i, A_j, A_k) дорівнює

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ і т.д., то}$$

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i A_j A_k) -$$

$$- \ \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) = 1 - \frac{1}{2!} +$$

$$+ \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \approx e^{-1}.$$

Задачі

1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Кожну сукупність S підмножин простору Ω елементарних подій можна вважати простором подій.

2. Якщо невід'ємна функція $P(A)$, визначена на певній сукупності S підмножин простору Ω, є зчисленно адитивною і $P(\Omega) = 1$, то $P(A)$, $A \in S$, є ймовірністю.

3. Якщо $A = B - C$, то $P(A) = P(B) - P(C)$.

4. Якщо $P(A) = 1$, то $A = \Omega$.

5. Якщо $P(A) = 0$, то $A = \varnothing$.

6. Якщо $P(A) \le P(B)$, то подія A спричинює подію B.

7. Твердження, обернені до будь-якого з тверджень 4-6, правильні.

8. Якщо $P(B) = 1 - P(A)$, то $B = \overline{A}$.

9. $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(ABC)$.

10. Якщо $P(A+B) = P(A) + P(B)$, то події A і B несумісні.

11. $P(A+B+C) = P(A+B) + P(C)$ для будь-яких подій A, B і C.

12. Якщо твердження 11 є правильним, то події A, B і C попарно несумісні.

2. Довести, що коли події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ несумісні, то $P(AB) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})$.

3. Довести, що $P(A+B) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B})$.

4. Мішень складається з трьох частин, що попарно не мають спільних точок. Стрілець робить постріл в мішень. Ймовірність влучення в першу частину мішені дорівнює 0,4, в другу – 0,45, в третю – 0,1. Знайти ймовірність того, що стрілець: 1) влучить в першу або в другу частини; 2) не влучить в мішень; 3) не влучить в першу або в третю частини.

5. Експеримент полягає у тому, що в мішень стріляють три стрільці і фіксується влучення або промах кожного з них.

1. Утворити відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Визначити, з яких елементарних подій складаються події. A_i – i-тий стрілець влучив в мішень $i \in \overline{1,3}$.

3. Перевірити, чи є множина $\{E\}$, де $E \in \Omega$, подією, коли кожна A_i, $i \in \overline{1,3}$, є подією.

4. Вирішити, що є простором подій S, коли кожна A_i, $i \in \overline{1,3}$, є подією.

5. Як природно задати ймовірнісну міру на S, коли відомо, що $P(A_i) = p_i$?

6. Знайти ймовірності подій:
1) B_1 – хоча б один стрілець влучив в мішень;
2) B_2 – принаймні два стрільці влучили в мішень;
3) B_3 – лише один стрілець влучив в мішень.

6. Експеримент полягає в опитуванні навмання обраного споживача і фіксації того, чи бачив він рекламу певного продукту на стенді чи в телевізійній передачі.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Визначити, з яких елементарних подій складаються події A – споживач бачив рекламу на стенді і B – споживач бачив рекламу в телевізійній передачі.

3. Вирішити, як доцільно визначити ймовірності кожної елементарної події $E \in \Omega$ (вважаючи $P(E) = P(\{E\})$), якщо $P(A) = p_1 = 0{,}04$, а $P(B) = p_2 = 0{,}06$.

4. Знайти ймовірності подій: 1) C – споживач бачив рекламу і на стенді, і в телевізійній передачі; 2) D – споживач не бачив реклами на стенді; 3) H – споживач взагалі не бачив реклами.

7. На підприємстві 20% працівників одержують високу заробітну плату, 40% працівників підприємства – жінки, серед яких 6% одержують високу заробітну плату. Експеримент полягає в тому, що навмання вибирають працівника і фіксують, чи це жінка і чи одержує високу заробітну плату.

1. Знайти відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Визначити, з яких елементарних подій складаються події: 1) A – працівник – жінка; 2) B – працівник одержує високу заробітну плату.

3. Вирішити, як доцільно визначити ймовірність кожної елементарної події.

4. Обчислити ймовірності подій: 1) C – працівник – жінка з високою заробітною платою; 2) D – працівник – чоловік з невисокою заробітною платою; 3) H – працівник – жінка або одержує високу заробітну плату.

8. В гаманці є 2 монети по 50 коп., 4 монети по 25 коп. і 10 монет по 10 коп. З гаманця навмання беруть 5 монет.

1. Записати можливий простір Ω елементарних подій.

2. Вирішити, як доцільно визначити ймовірність кожної елементарної події $E \in \Omega$.

3. Знайти, з яких елементарних подій складаються події: 1) A – в сумі вартість 5 монет складають не більше 1 грн.; 2) B – сума вартостей монет дорівнює 1 грн.; 3) C – сума (в копійках) вартостей монет є непарним числом.

4. Знайти ймовірності подій: 1) A; 2) B; 3) C; 4) AC; 5) $A+C$.

9. Серед випускників однієї школи 60% становлять дівчата. В гуманітарні вищі навчальні заклади збираються вступати 20% хлопців і 10% дівчат. Експеримент полягає в тому, що навмання вибирають випускника школи і фіксують – він хлопець чи дівчина та чи збирається вступати до гуманітарного навчального закладу.

1. Описати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Вирішити, як доцільно визначити ймовірність кожної елементарної події $E \in \Omega$.

3. Знайти, з яких елементарних подій складається подія: 1) A – навмання обраний випускник – хлопець; 2) B – випускник збирається вступати до гуманітарного вузу; 3) C – випускник – хлопець, який не збирається вступати до гуманітарного вузу; 4) D – випускник – дівчина або збирається вступати до гуманітарного вузу.

10. Ймовірність влучення в рухому мішень дорівнює $p \in (0; 1)$ при кожному пострілі. Експеримент полягає в тому, що здійснюють n пострілів і фіксують результат кожного пострілу.

1. Описати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Вирішити, як доцільно визначити ймовірність кожної елементарної події.

3. Знайти, з яких елементарних подій складається подія: 1) A_i – влучення при i-му пострілі; 2) B – жодного влучення; 3) C – принаймні одне влучення.

4. Знайти ймовірності подій: 1) A_i, $i \in \overline{1, n}$; 2) B; 3) C.

5. Вважаючи $p = 0{,}5$, визначити, скільки пострілів забезпечують ймовірність принаймні одного влучення не меншу, ніж 0,75.

11. Яка ймовірність того, що карта, навмання взята з колоди з 52 карт, буде фігурою будь-якої масті чи картою пікової масті (фігурою називається валет, дама, король), якщо ймовірності бути взятою для будь якої карти однакові.

12. Ймовірність для даного спортсмена покращити свій результат з однієї спроби дорівнює р. Знайти ймовірність того, що на змаганнях спортсмен покращить свій результат, якщо у нього є 2 спроби?

13. Двоє по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше з'явиться герб.

1. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.
2. Вирішити, для кого з гравців ймовірність виграшу є більшою.

14. В коробці містяться 2 червоних, 3 синіх, 2 зелених олівці. Навмання без повернення в коробку по одному виймають олівці. Знайти ймовірність того, що червоний олівець з'явиться раніше за синій, якщо можливості появи будь якого ще не вийнятого олівця є однаковими при будь-якій їх кількості.

2.6. Умовні ймовірності. Залежні і незалежні події

Нехай $(\Omega,\ S,\ P)$ – ймовірнісний простір, $B \in S$ і $P(B) \neq 0$. *Умовною ймовірністю* події A за умови, що відбулася подія B, називається число

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

(Порівняйте з ймовірністю як нормованою мірою, §2.4).

У механічній інтерпретації умовна ймовірність $P(A/B)$ події A за умови, що подія B відбулася, є часткою відмінної від нуля маси, розподіленої на множині B, яка припадає на множину A (тобто на AB).

Якщо $P(B) = 0$, то будь-яка частка ймовірності, розподіленої на множині B, також дорівнює нулеві, і $P(AB)/P(B)$ стає невизначеною (її можна визначити довільно, наприклад, покласти $P(A/B) = P(A)$).

Безумовну ймовірність $P(A)$ можна трактувати як умовну ймовірність $P(A/\Omega)$ події A за умови, що відбулася подія Ω, яка визначається множиною всіх можливих наслідків випробування.

Приклад 6.1. Двічі підкидають гральний кубик. Простір елементарних подій складається з 36 рівноможливих елементів.

$$\Omega = \{(i,j) : i = \overline{1,6},\quad j = \overline{1,6}\}.$$

Нехай подія A полягає в тому, що випаде принаймні одна шістка:

$$A = \{(1,6),\ (2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\}.$$

Нехай також відомо, що при двох підкиданнях випало вісім очок (подія B):

$$B = \{(2,6)\ (3,5)\ (4,4)\ (5,3)\ (6,2)\}.$$

Із п’яти наслідків випробування, які сприяють події B, два наслідки $(2,6)$ $(6,2)$ сприяють також і появі події A (Рис. 6.1.).

Отже,

$$P(A/B) = 2/5.$$

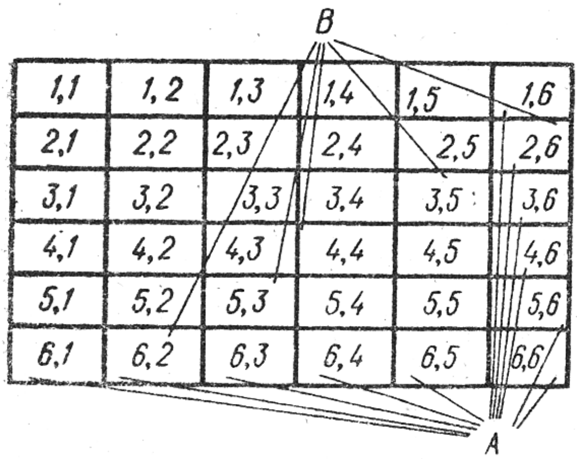


Рис. 6.1

З означення умовної ймовірності для ймовірності добутку двох подій маємо

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Події A і B називаються *незалежними* (відносно P), якщо

$$P(A \cdot B) = P(A)\ P(B).$$

Події A і B незалежні тоді і тільки тоді, коли умовна ймовірність $P(A/B)$ події A за умови, що подія B відбулася, дорівнює безумовній ймовірності $P(A)$ події A.

В механічному тлумаченні тут частка, що припадає на множину A від маси (ймовірності), розподіленої на множині B, така сама, як і частка, що припадає на множину A від загальної маси (ймовірності), розподіленої на множині Ω всіх елементарних подій, тобто $P(A/B) = P(A/\Omega)$. Саме в цьому розумінні подія A не залежить від події B.

Приклад 6.2. Якщо події A і B незалежні, то події A і $\overline{B}$ також незалежні.

Справді, оскільки $A = AB + A\overline{B}$, причому $AB \cdot A\overline{B} = \varnothing$, то

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}).$$

Тоді

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) =$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Отже, події A і $\overline{B}$ незалежні. Звідси випливає, що коли події A і B незалежні, то й події A і $\overline{B}$, B і $\overline{A}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні.

Теорема (ймовірність добутку подій). *Для довільних подій* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *виконується рівність*

$$P(A_1A_2\ \ldots\ A_n) =$$
$$= P(A_1)\,P(A_2 / A_1)\,P(A_3 / A_1A_2)\ \ldots\ P(A_n / A_1A_2\ \ldots\ A_{n-1}). \tag{6.1}$$

Події $A_1, A_2, \ldots A_k$ називаються *незалежними в сукупності*, якщо $P(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$ для довільного $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$.

З попарної незалежності випадкових подій не випливає їх незалежність в сукупності.

Приклад 6.3. Нехай простір Ω складається з чотирьох рівноймовірних елементарних подій $\Omega = \{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4\}$, а події A, B, C визначено так: $A = \{E_1,\ E_4\},\ B = \{E_2,\ E_4\},\ C = \{E_3,\ E_4\}$.

Очевидно, що $P\ (A) = 2/4,\ P\ (B) = 2/4,\ P\ (C) = 2/4.$

Одночасній появі двох подій A і B сприяє один випадок серед чотирьох можливих, а саме E_4, тобто $AB = E_4$. Тому $P(AB) = 1/4$. Аналогічно $P(AC) = 1/4,\ P(BC) = 1/4.$ Таким чином,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),\ P(AC) = P(A)\,P(C),\ P(BC) = P(B)\,P(C).$$

Проте оскільки

$$P(ABC) = 1/4\text{ , а }P(A)\ P(B)\,P(C) = 1/8,$$

то $P(ABC) \neq P(A)\ P(B)\,P(C)$, а тому події A, B, C виявляються залежними в сукупності.

У розглянутому прикладі $P(A/B) = \dfrac{1}{2} = P(A)$, а $P(A/BC) = 1 \neq P(A)$.

З того, що для деяких подій A, B, C

$$P(ABC) = P(A)\ P(B)\,P(C),$$

не випливає попарна незалежність цих подій, а отже і незалежність в сукупності.

Приклад 6.4. Нехай

$$\Omega = \{(i,\ j) : i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\},\ A = \{(i,\ j) :\ j \in \{1,\ 2,\ 5\}\},$$

$$B = \{(i,\ j) :\ j \in \{4,\ 5,\ 6\}\},\ C = \{(i,\ j) : i + j = 9\}$$

(Рис. 6.3). Тоді

$$AB = \{(i,\ j) :\ j = 5\},\ \ AC = \{(4,\ 5)\},\ BC = \{(\ 5, 4),\ (\ 4, 5), (\ 3, 6)\},$$

$$ABC = \{(\ 4,\ 5)\};$$

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{9},\ P(ABC) = \frac{1}{36} = P(A)\,P(B)\,P(C),$$

$$P(AB) = \frac{1}{6} \neq P(A)\,P(B) = \frac{1}{4},\ P(AC) = \frac{1}{36} \neq P(A)\,P(C) = \frac{1}{18},$$

$$P(BC) = \frac{3}{36} \neq P(B)\,P(C) = \frac{1}{18}.$$

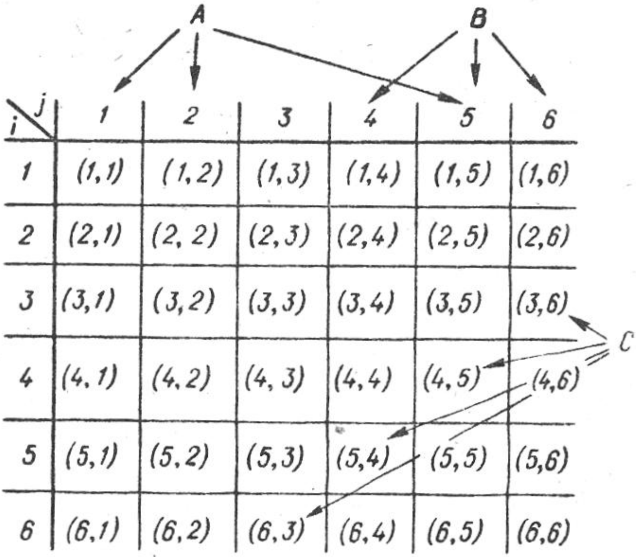


Рис. 6.3

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. У двох урнах міститься по n кульок, причому в першій урні є m білих і k чорних кульок, а в другій – s білих і r чорних кульок. Із навмання вибраної урни навмання вибирають кульку. Нехай подія A полягає в тому, що вибрали білу кульку, подія B полягає в тому, що вибрано першу урну. Очевидно, що ймовірність появи білої кульки за умови, що вибрано першу урну, є

$$P(A/B)=\frac{m}{n},$$

аналогічно

$$P(A/\overline{B})=\frac{s}{n},$$

де $\overline{B}$ – подія, яка полягає в тому, що вибрано другу урну. Таким чином, імовірність події A залежить від того, відбулася подія B чи ні.

Об'єднавши кульки обох урн, матимемо множину Ω, яка містить $2n$ елементів. Вибір тієї чи іншої урни означає, що спочатку вибираємо n-елементну підмножину B або $\overline{B}$ простору елементарних подій Ω, а потім з цієї підмножини навмання вибирається один елемент.

Зазначимо, що стосовно умовної ймовірності $P(A/B)$ події A множина елементарних подій, яка визначає подію B, відіграє роль, аналогічну до тієї, яку відіграє простір елементарних подій Ω стосовно безумовної ймовірності $P(A)$ події A. При цьому σ-алгебру S_B підмножин з B, $B\in S$, можна дістати як сукупність множин виду $A \bigcap B$, $A \in S$, якщо вибірковим простором вважати не всю множину Ω, а тільки множину B. Ймовірнісна міра $P(A/B)$ (іноді позначають також $P_B(A)$) на (B, S_B) при цьому покладається рівною $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, де $A \in S$, $AB \in S_B$ (порівняйте з геометричним заданням ймовірності).

Якщо відомо, що відбулася подія B, то подію A серед елементарних подій з множини B визначають тільки ті, які серед множини Ω всіх елементарних подій сприяють як появі події A, так і появі події B, тобто множина елементарних подій, які визначають подію AB.

Вправа 2. Довести, що коли подія A не залежить від події B, то й подія B не залежить від події A.

Справді, нехай

$$P(B) \neq 0,\ P\ (A) \neq 0,\ P(A/B) = P(A).$$

Тоді

$$P(B/A) = \frac{P(A\ B)}{P(A)} = \frac{P(B)\,P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(B)\ P(A)}{P(A)} = P(B),$$

що й треба було довести.

Вправа 3. Довести, що з умови $P(A/B) = P(A/\overline{B})$ випливає незалежність подій A і B.

Враховуючи, що $B + \overline{B} = \Omega,$ $A\Omega = A$ і $AB \cdot A\overline{B} = \varnothing$, маємо

$$P\ (A) = P\ (A\Omega) = P(A(B+\overline{B})) = P(AB) + P(A\overline{B}) =$$
$$= P(B)\,P(A/B) + P(\overline{B})P(A/\overline{B}).$$

Оскільки $P(A/B) = P(A/\overline{B})$, то замінивши $P(A/\overline{B})$ на $P(A/B)$, дістанемо

$$P(A) = P(A/B)\ (P(B) + P(\overline{B})) = P(A/B).$$

Отже, подія A не залежить від події B.

Вправа 4. Нехай є по 10 білих, червоних, зелених і жовтих карток.

Картки кожного кольору пронумеровано цифрами від 1 до 10. Навмання вибирається одна картка. Знайти ймовірність того, що ця картка буде біла і, крім того, на ній написано одну з трьох цифр 6, 7 або 8, якщо всі картки рівноймовірні.

Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що навмання вийнята картка біла, а через B – подію, яка полягає в тому, що картку пронумеровано однією з трьох цифр 6, 7 або 8. У цьому разі маємо простір Ω із 40 рівноймовірних елементарних подій (Рис. 6.2), 10 з яких належить до множини A і 12 – до множини B, причому A і B мають три спільні елементи б6, б7, б8.

Таким чином, $P(A)=\dfrac{10}{40}$, а $P(B/A)$ – умовна ймовірність того, що на картці буде одна з трьох цифр 6, 7 або 8 за умови, що картка біла, дорівнює 3/10. Отже,

$$P(AB)=P(A)\ P(B/A)=\frac{10}{40}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{40}.$$

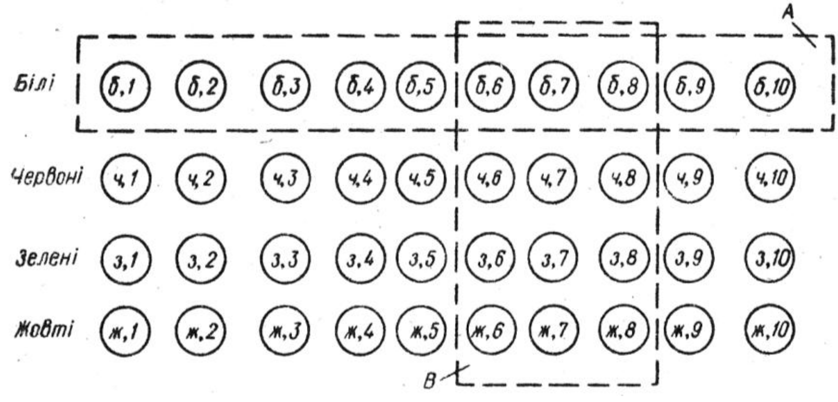


Рис. 6.2

Цей результат можна дістати й так. Враховуючи, що $P(B)=12/40,\ P(A/B)=3/12$, маємо

$$P(AB)=P(B)\ P(A/B)=\frac{12}{40}\cdot\frac{3}{12}=\frac{3}{40}.$$

У розглянутому прикладі події A і B незалежні, тобто (див. Рис. 6.2)

$$P(A/B)=P(A)=1/4,\qquad P(B/A)=P(B)=3/10.$$

Вправа 5 (спортлото). В урні є 49 кульок, які пронумеровані від 1 до 49. Випробування полягає в тому, що навмання послідовно виймають шість кульок, причому кульки в урну не повертають. Знайти ймовірність того, що на кожній з цих кульок буде один із шести заздалегідь задуманих номерів, якщо всі кульки рівноймовірні при будь якій їх кількості.

Позначимо через A_1 подію, яка полягає в тому, що на першій кульці буде один з шести заздалегідь задуманих номерів, через A_2 – подію, яка полягає в тому, що на другій кульці буде один з шести задуманих номерів, і т. д. Нарешті через A_6 позначимо подію, яка полягає в тому, що на шостій кульці буде один із шести заздалегідь задуманих номерів. Треба знайти ймовірність того, що в одному й тому самому випробуванні (тиражі спортлото) відбудуться всі шість подій A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, тобто знайти ймовірність добутку $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$.

Очевидно, що $P(A_1)=\dfrac{6}{49}$, оскільки серед 49 рівноможливих випадків є шість, які сприяють появі події A_1.

$$P(A_2 / A_1)=\frac{5}{48},$$

бо якщо першою була вийнята кулька, де був один з шести задуманих номерів, серед решти 48 рівноможливих випадків є 5, що сприяють події A_2. Аналогічно

$$P(A_3 / A_1A_2)=\frac{4}{47},\quad P(A_4 / A_1A_2A_3)=\frac{3}{46},\quad P(A_5 / A_1A_2A_3A_4)=\frac{2}{45},$$

$$P(A_6 / A_1A_2A_3A_4A_5)=\frac{1}{44}.$$

Отже,

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)=$$

$$=P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2)\,P(A_4/A_1A_2A_3)\;P(A_5/A_1A_2A_3A_4)\times$$

$$\times P(A_6/A_1A_2A_3A_4A_5)=\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{1}{44}\approx 0{,}000000072.$$

Вправа 6. Імовірність того, що протягом доби вийде з ладу k-й блок радіопристрою, дорівнює p_k, $k=1,\ 2,\dots,10$. Знайти ймовірність того, що протягом доби радіопристрій вийде з ладу (тобто вийде з ладу принаймні один блок), якщо кожен блок виходить з ладу незалежно від інших.

Позначимо через A_k, $k=1,2,\dots,10,$ подію, яка полягає в тому, що виходить з ладу k-й блок, через B позначимо подію, яка полягає в тому, що виходить з ладу радіопристрій. Тоді

$$B=A_1+A_2+\ldots+A_{10},$$

$$P(B)=P(A_1+A_2+\ldots+A_{10})=1-P\,\overline{(A_1+A_2+\ldots+A_{10})}=$$

$$=1-P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\,\ldots\,\overline{A}_{10})=1-P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2)\,\ldots\,P(\overline{A}_{10})=$$

$$=1-(1-p_1)\,(1-p_2)\ldots(1-p_{10})\ .$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо задано імовірнісний простір (Ω,S,P) і фіксована подія B, для якої $P(B)\neq 0$, то умовна ймовірність $P(A/B)$, $A\in S$, є ймовірністю на просторі подій S.

2. Якщо S – простір подій, а $B\in S$ – фіксована подія, то сукупність $\widetilde{S}=\{\widetilde{A}=A\ B : A\in S\}$ є простором подій, для якого простір елементарних подій $\widetilde{\Omega}=\Omega\cdot B$.

3. Умовна ймовірність $P(A/B)=\widetilde{P}(\widetilde{A}), \widetilde{A}\in\widetilde{S}$, є ймовірністю на просторі подій $\widetilde{S}$.

4. Якщо події A і B незалежні, то $P(A)=0$ або $P(B)=0$.

5. Твердження, обернене до 4, є правильним.

6. Якщо події A і B незалежні, то $P(A/\overline{B}) = P(A)$.

7. Якщо незалежні події $\overline{A}$ і $\overline{B}$, то незалежні і події A та B.

8. Якщо $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, то події A, B, C незалежні в сукупності.

9. Твердження, обернене до 8, є правильним.

10. Події $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежні в сукупності, якщо такими є будь-які $(n-1)$ подій цієї сукупності та

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

2. Довести, що несумісні події A і B є незалежними тоді і тільки тоді, коли $P(A) = 0$ або $P(B) = 0$.

3. Довести, що коли події $A_1, A_2, ... A_n$ незалежні в сукупності, то $P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - P(A_k))$.

4. Відомо, що фірма дістала замовлення на виконання робіт принаймні від однієї з двох корпорацій. При цьому якщо фірма дістане замовлення від першої з двох корпорацій, то вона з ймовірністю P_2 дістане замовлення і від другої корпорації. Знайти ймовірність того, що фірма дістане замовлення від двох корпорацій, якщо ймовірність дістати замовлення від першої корпорації вдвічі більша, ніж від другої.

5. Відомо, що серед N осіб n – дальтоніки, а m – жінки. Експеримент полягає в тому, що навмання вибирають одну особу і фіксують, чи є вона дальтоніком та жінкою.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Утворити простір подій S, для якого подіями є: A – вибрана особа є дальтоніком і B – вибрана особа є жінкою.

3. Перевірити, чи є кожна елементарна подія $E \in \Omega$ подією.

4. Вважаючи, що $P(A) = \frac{n}{N}$, $P(B) = \frac{m}{N}$, знайти ймовірність того, що навмання вибрана особа є чоловіком дальтоніком, якщо відомо, що дальтоніків-чоловіків удвічі більше, ніж дальтоніків-жінок.

6. Довести, що події A і B незалежні (відносно міри P) тоді й тільки тоді, коли події A і $\overline{B}$ також незалежні.

7. Із сукупності чисел $\overline{1,n} = \{1, 2, ..., n\}$ навмання вибирають одне число, а потім друге, причому можливі результати кожного разу рівноймовірні. Нехай подія *B* – першим вибрано число *i*, *A* – другим вибрано число *j*.

1. Знайти: 1) *P(A)*, 2) *P(B)*, 3) $P(AB)$, 4) $P(A/B)$, 5) $P(A\overline{B})$, 6) $P(A/\overline{B})$, 7) $P(\overline{A}\,\overline{B})$, 8) $P(\overline{A} \cdot B)$.

2. Перевірити, чи є події *A* і *B* незалежними.

8. Експеримент полягає в тому, що навмання обирають дві марки автомобіля і фіксують: вибрана марка – європейська чи ні.

1. Скласти відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Вважаючи елементарні події рівноймовірними, знайти ймовірність того, що: 1) а) в парі є європейська марка; б) в парі є неєвропейська марка; 2) умовну ймовірність того, що: а) в парі є дві європейські марки за умови, що в парі є принаймні одна європейська марка; б) в парі є європейська марка за умови, що в парі є і неєвропейська марка.

9. Нехай сукупність W осіб розподілено на класи H_1, H_2, …, H_n (наприклад, за професіями), що попарно не перетинаються, а $P(H_i) = p_i$ – ймовірність того, що навмання обрана з даної сукупності особа належить до класу H_i, $i \in \overline{1,n}$. Припустимо, що навмання обрана особа з класу H_i є "лівшою" з ймовірністю q_i.

1. Знайти ймовірність того, що навмання обрана з даної сукупності W особа є лівшою.

2. Знайти умовну ймовірність того, що обрана особа належить до класу H_i за умови, що вона є лівшою.

10. Перевірити, чи є незалежними події A і B, що визначаються умовами:

1. Підкидають два гральних кубики. Подія A – на першому кубику випала 1, подія B – на другому кубику випало парне число.

2. Навмання вибирають якусь перестановку букв $\{a, b, c, d\}$. Подія A – a передує b, B – c передує d.

3. Навмання вибирають n деталей і фіксують стандартна чи ні кожна з них. Подія A – серед n деталей не більше однієї стандартної, подія B – серед n деталей є стандартні і нестандартні. Перевірити чи залежні події A і B для випадків: 1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$.

11. Нехай Ω складається з будь-яких перестановок з повторенням букв a, b, c, а також трійок (a, a, a), (b, b, b), (c, c, c).

1. Вважаючи елементи Ω рівноможливими, знайти ймовірність кожної події $\{E\}$, де $E \in \Omega$.

2. Нехай подія A_k означає, що у навмання вибраній перестановці літера a знаходиться на k-му місці, $k \in \overline{1,3}$. Знайти ймовірності: 1) $P(A_k)$, $k \in \overline{1,3}$; 2) $P(A_i A_j)$, $i \neq j$, $i \in \overline{1,3}$, $j \in \overline{1,3}$; 3) $P(A_1 A_2 A_3)$.

3. Визначити, чи є події A_k: 1) попарно незалежними; 2) незалежними у сукупності.

4. Розглянути події B_k і C_k, які означають, що на k-му місці знаходиться літера відповідно b і c, $k \in \overline{1,3}$. Знайти зв'язок B_k і C_k з подіями A_k.

5. Знайти ймовірності: 1) $P(B_k)$ і $P(C_k)$, $k \in \overline{1,3}$; 2) $P(A_i B_j)$, $P(A_i C_j)$, $P(B_i C_j)$, $i \in \overline{1,3}$, $j \in \overline{1,3}$.

6. Довести, що будь-які дві події з подій A_k, B_k, C_k, $k \in \overline{1,3}$, що мають різні індекси, є незалежними.

7. Довести, що події C_3 і $A_1 A_2$ є залежними.

8. Перевірити, чи можна у попередньому завданні замінити C_3 виразом X_3, де літера $X \in \{A, B, C\}$, а вираз $A_1 A_2$ – виразом $X_3 Y_3$, де $Y \in \{A, B, C\}$ і $Z \in \{A, B, C\}$.

9*. Сформулювати і розв'язати аналогічну задачу, коли простір Ω складається з усіляких розміщень з повтореннями букв a, b, c по 3 букви.

12. Довести, що події *A*, *B* і *C* незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли вони попарно незалежні і $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

13. Довести, що події *A*, *B*, *C* і *D* незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли будь-які з три з них є незалежними в сукупності і $P(ABCD) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.

14. Узагальнити твердження **13** на випадок n подій A_1, A_2, …, A_n.

15. 1. З прямокутника $\Omega = [0; a] \times [0; b]$ навмання вибирають точку (*x*, *y*). Нехай подія *A* означає, що абсциса вибраної точки належить відрізку $[\alpha; \beta] \subset [0; a)$, а подія *B* – ордината вибраної точки належить відрізку $[\gamma; \delta] \subset [0; b]$. Перевірити, чи залежні події *A* і *B*.

2. Розв'язати задачу, коли Ω є квадратом, діагоналі якого лежать на осях координат.

16. Нехай $\Omega = \{(x; y) : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$ і з цієї множини навмання вибирають точку (x, y). Нехай подія *A* означає, що $x \in [0; \alpha] \subset [0; 1]$, а подія *B* означає, що $y \in [0; \alpha] \subset [0; 1]$. Перевірити, чи залежні подій *A* і *B*.

17. Підкидають три гральних кубики. Знайти умовну ймовірність того, що на одному кубику випаде 1 за умови, що на всіх трьох кубиках випадуть різні числа.

18*. Відомо, що ймовірність наявності у родині n дітей дорівнює p_n, причому $p_n = \alpha p^n$, $n \in N$ і $p_0 = 1 - \dfrac{\alpha p}{1 - p}$, $\alpha \in (0; 1)$, $p \in (0; 1)$. Вважають, що усі комбінації статі n дітей рівноймовірні.

1. Довести, що при $k \ge 1$ ймовірність того, що у родині k хлопчиків, дорівнює $2\alpha p^k / (2 - p)^{k+1}$.

2. Відомо, що у родині є принаймні один хлопчик. Знайти умовну ймовірність того, що у родині не менше двох хлопчиків.

19. Підкидають два гральних кубики. Подія A – на першому кубику випала непарна кількість очок, подія B – на другому кубику випала непарна кількість очок, подія C – сума очок на двох кубиках непарна. Усі елементарні події відповідного простору Ω елементарних подій вважаються рівноймовірними.

1. Довести, що події A, B, C попарно незалежні.
2. Довести, що $ABC = \varnothing$.
3. Чи є події A, B, C незалежні в сукупності?

20. Монету підкидають двічі і дістають простір елементарних подій $\Omega = \{(Г, Г), (Г, Ц), (Ц, Г), (Ц, Ц)\}$. Нехай подія A_i – випадання герба при i-му підкиданні, $i \in \overline{1,2}$.

1. З'ясувати, чи можуть події A_1 і A_2 бути залежними, коли елементарні події простору Ω: 1) рівноймовірні; 2) не обов'язково рівноймовірні.
2. З'ясувати чи обов'язково події A_1 і A_2 є незалежні, коли елементарні події простору Ω: 1) рівноймовірні; 2) не обов'язково рівноймовірні.
3. З'ясувати, чи можна визначити ймовірність так, щоб будь-які події з найширшого простору подій S^* були незалежними в сукупності.

2.7. Формула повної ймовірності. Теорема гіпотез. Формула Байєса

Нехай простір елементарних подій Ω поділено на n підмножин $H_1, H_2, \ldots, H_n$ таких, що $H_i \in S$, $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, і нехай проводиться випробування, в якому спостерігається подія A (Рис. 7.1).

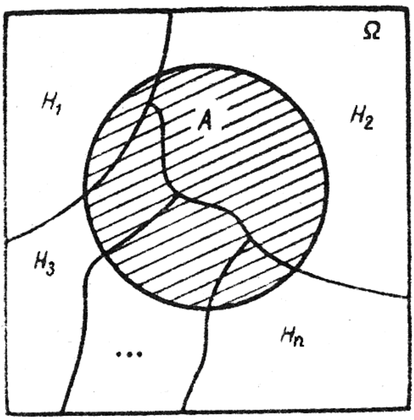


Рис. 7.1

Події $H_1, H_2, ..., H_n$ називатимемо *гіпотезами*, з якими може відбутися подія A.

Припустимо, що ймовірності гіпотез H_i відомі (або їх можна легко знайти) і дорівнюють $P(H_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, а також відомі (або легко знайти) умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A за кожною з гіпотез H_i, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді ймовірність $P(A)$ події A можна знайти за *формулою повної ймовірності*.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

Приклад 7.1. Є дві партії зошитів. В першій з них m зошитів, в другій – n зошитів, причому в кожній партії є по k зошитів в клітинку, а решта зошитів в лінійку. З першої партії навмання вибирають один зошит і перекладають в другу, після чого з другої партії навмання беруть один зошит. Знайти ймовірність того, що цей зошит виявиться в клітинку (подія A).

Якби було відомо, який зошит, в клітинку чи в лінійку, перекладено з першої партії в другу, то ймовірність того, що після перекладання навмання взятий з другої партії зошит в клітинку, було б легко знайти. Проте оскільки невідомо, який саме зошит перекладено з першої партії в другу, можна лише зробити два припущення: H_1 – перекладено зошит в клітинку, H_2 – перекладено зошит в лінійку.

Очевидно, що гіпотези несумісні, вони вичерпують усі можливі випадки, причому $P(H_1) = \frac{k}{m}, P(H_2) = \frac{m-k}{m},$ бо в першій партії серед m зошитів є k в клітинку і $m-k$ в лінійку.

Ймовірність того, що навмання взятий з другої партії зошит виявиться в клітинку за умови, що туди було покладено зошит в клітинку, тобто $P(A/H_1)$, дорівнює $\frac{k+1}{n+1}$, оскільки після такого перекладання в другій партії виявляється $n+1$ зошит і серед них $k+1$ в клітинку. Аналогічно

$$P(A/H_2) = \frac{k}{n+1}.$$

За формулою повної ймовірності дістаємо

$$P(A) = P\ (H_1)\ P\ (A/H_1) + P\ (H_2)\ P\ (A/H_2) =$$

$$= \frac{k}{m}\ \frac{k+1}{n+1} + \frac{m-k}{m}\ \frac{k}{n+1} = \frac{k\,(m+1)}{m\,(n+1)}.$$

Теорема гіпотез. *Нехай випробування проведено і подія* A *відбулася. Тоді ймовірність* $P(H_i / A)$ *того, що при цьому відбулася гіпотеза* H_i, *можна знайти за формулою Байєса*:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Розігрують m виграшів серед n осіб $(m<n)$. Кожна особа згідно зі своїм номером у черзі $(1\le i\le n)$ бере білет з урни (кількість білетів дорівнює n). Чи рівні шанси виграшу для кожного з учасників, якщо кожен білет знаходиться у конверті і конверти відкриваються одночасно? Що вигідніше – бути першим чи останнім у черзі?

Якщо подія A_1 – виграш особи, яка першою бере білет, то $P(A_1)=\frac{m}{n}$, а $P(\overline{A}_1)=\frac{n-m}{n}$.

Нехай подія A_2 – виграш особи, яка бере білет другою. Для події A_2 та події $\overline{A}_2$ природні гіпотези A_1 та $\overline{A}_1$. Тоді зрозуміло, що

$$P(A_2/A_1)=\frac{m-1}{n-1},\ P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{m}{n-1},$$

і за формулою повної ймовірності

$$P(A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2/\overline{A}_1)=$$

$$=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1}=\frac{m}{n(n-1)}(m-1+n-m)=\frac{m}{n}$$

Отже, $P(A_2)=P(A_1)=\frac{m}{n}$, а $P(\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)=\frac{n-m}{n}$.

Нехай подія A_3 – виграш особи, яка бере білет третьою. Для подій A_3 та $\overline{A}_3$ природні гіпотези: $\overline{A}_1\overline{A}_2$, $\overline{A}_1A_2$, $A_1\overline{A}_2$ і A_1A_2. За теоремою про ймовірність добутку подій маємо:

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n-1-m}{n-1},$$

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1},$$

$$P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2/A_1)=\frac{m}{n}\cdot\frac{n-1-(m-1)}{n-1}=\frac{m}{n}\cdot\frac{n-m}{n-1},$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}.$$

Враховуючи це, за формулою повної ймовірності дістаємо

$$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)\cdot P(A_3/\overline{A}_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)\cdot P(A_3/\overline{A}_1A_2)+$$
$$+P(A_1\overline{A}_2)\cdot P(A_3/A_1\overline{A}_2)+P(A_1A_2)\cdot P(A_3/A_1A_2)=$$

$$=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n-m-1}{n-1}\cdot\frac{m}{n-2}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1}\cdot\frac{m-1}{n-2}+\frac{m}{n}\cdot\frac{n-m}{n-1}\cdot\frac{m-1}{n-2}+$$

$$+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{m-2}{n-2}=\frac{m}{n(n-1)(n-2)}(n^2-nm-n-mn+m^2+m+nm-n-$$

$$-m^2+m+nm-n-m^2+m+m^2-2m-m+2)=\frac{m(n^2-3n+2)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{m}{n}.$$

Зауважимо, що остання рівність має місце не лише тоді, коли $m \geq 2$, а й тоді, коли $m < 2$.

Отже,

$$P(A_3)=P(A_2)=P(A_1)=\frac{m}{n}, \text{ а } P(\overline{A}_3)=P(\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)=\frac{n-m}{n}.$$

Аналогічно переконуємося, що коли подія A_i – виграш особи, яка бере білет $i-$ою, то $P(A_i)=\frac{m}{n}$.

Отже, $P(A_i)=\frac{m}{n}$ для довільного i. Таким чином усі особи мають рівноможливі шанси виграти незалежно від номера в черзі за умови, що кожен білет знаходиться у конверті і конверти відкриваються одночасно.

Якщо ж відомо, які білети взяли перед тим, коли бере білет i -та особа, то за цієї умови у неї шанси виграти не дорівнюють $\frac{m}{n}$.

Наприклад, якщо друга особа знає, що перша особа взяла невиграшний білет, то її шанси виграти дорівнюють $P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{m}{n-1}>\frac{m}{n}$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо події H_i, $i \in \overline{1, n}$, попарно несумісні, то вони є гіпотезами.

2. Якщо $H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega$, то події H_i, $i \in \overline{1, n}$, є гіпотезами.

3. Твердження, обернене до 1 або до 2, є правильним.

4. Якщо $H_1+H_2=\Omega$, то

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2).$$

5. Ймовірність гіпотези залежить від того, відбулася подія A чи ні.

6. Повна ймовірність події A додатна, якщо всі $P(H_i)$ додатні.

7. Умовна ймовірність гіпотези H_i за умови, що відбулася подія A, дорівнює добутку ймовірності цієї гіпотези на умовну ймовірність події A за цією гіпотезою, поділеному на повну ймовірність події A.

2. Довести, що коли події B_k, $k \in \overline{1, n}$, в сумі вичерпують простір елементарних подій Ω, то події

$$H_1 = B_1,\ H_2 = B_2 - B_1,$$
$$H_3 = B_3 - (B_1 + B_2),\ \ldots\ H_n = B_n - (B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-1})$$
можуть бути гіпотезами.

3. Дослідити, якими можуть бути гіпотези для ймовірнісного простору (Ω, S, P), що відповідає експерименту: 1) підкидання монети та фіксація її верхньої грані; 2) підкидання двох монет та фіксація їхніх верхніх граней.

4. Покупець вибирає навмання один телевізор з 10 однакових, проте зібраних на різних заводах: 3 – на першому, 2 – на другому і 5 – на третьому. Ймовірність виходу з ладу телевізора під час гарантійного терміну складає 2% для першого заводу, 5% для другого і 8% для третього.

1. Знайти ймовірність того, що вибраний телевізор не зіпсується під час гарантійного терміну.
2. Визначити, на якому заводі ймовірніше за все виготовлено телевізор, якщо він зіпсувався під час гарантійного терміну.

5. За статистичними даними комерційного банку відомо, що серед його позичальників 10% – державні установи, 30% – недержавні установи, 60% – фізичні особи. Також відомо, що ймовірність неповернення позики (кредиту) вказаними позичальниками становить відповідно 0,01, 0,05, та 0,2.

1. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний позичальник не поверне позику.
2. Визначити, найймовірніше до якої групи входить позичальник, якщо відомо, що позика не повернена.

6. Відомо, що ймовірність зростання вартості акцій певного підприємства складає 0,7 в період активного економічного зростання, 0,4 – в період помірного економічного зростання і 0,2 – при низьких темпах економічного зростання. Прогноз на наступний рік стосовно термінів економічного зростання свідчить, що ці темпи високі з ймовірністю 0,3, помірні з ймовірністю 0,5 і низькі з ймовірністю 0,2.

1. Знайти ймовірність того, що вартість акцій підприємства у наступному році: 1) зросте; 2) не зросте.
2. Яка ймовірність того, що темпи економічного зростання у наступному році будуть: 1) високими 2) помірними 3) низькими, за умови, що вартості акцій підприємства зросли?

7. Серед клієнтів страхової компанії 50% відносяться до групи незначного ризику, 30% – відносяться до групи помірного ризику і 20% – до групи значного ризику. Ймовірність необхідності сплачувати клієнтові страховки дорівнюють 0,01 для першої, 0,03 – для другої і 0,08 – для третьої групи клієнтів.

1. Знайти ймовірність того, що навмання обраний клієнт одержить страховку.
2. Знайти ймовірність того, що клієнт, який одержав страховку, відноситься до: 1) першої групи; 2) другої групи; 3) третьої групи.

8. У складальний цех надходить 40% деталей з першого верстата-автомата, 30% – з другого, 20% – з третього і 10% – з четвертого. Кількість бракованих деталей складає 0,1% для першого верстата-автомата, 0,2% – для другого, 0,25% – для третього і 0,5% – для четвертого.

1. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь є: 1) бракованою; 2) якісною.

2. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь, що виявилася бракованою, виготовлена на i-му верстаті-автоматі, $i \in \overline{1,4}$.

3. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь, що виявилася якісною, виготовлена на i-му верстаті-автоматі.

9. Фільмокопії виготовляють на трьох кінофабриках. Перша фабрика виготовляє копій у 5 разів більше, ніж друга, а третя – у 6 разів менше, ніж перша. Ймовірність виготовлення стандартної копії відповідно дорівнює 0,9 – для першої, 0,95 – для другої і 0,85 – для третьої фабрики.

1. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана фільмокопія виявиться: 1) стандартною, 2) нестандартною.

2. Навмання вибрана фільмокопія виявилася нестандартною. Яка ймовірність того, що її виготовлено на i-ій фабриці, $i \in \overline{1,3}$.

10. Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди влучили в мішень. Знайти ймовірність того, що снаряд з першої гармати влучив у мішень, якщо ймовірність влучання для першої, другої і третьої гармат відповідно дорівнюють 0,4, 0,3 і 0,5.

11. У 4-му класі навчається 20 дівчаток і 20 хлопчиків. До уроку не підготувались 4 дівчинки і 3 хлопчики. Навмання викликається учень, причому ймовірність того, що буде викликаний будь хто із 40 учнів, однакова.

1. Знайти ймовірність того, що навмання викликаний учень виявиться не підготовлений до уроку.

2. Яка ймовірність того, що викликаний і непідготовлений до уроку учень виявиться хлопчиком? Дівчинкою?

12. Є 10 однакових урн, серед яких у 9-ти є по 2 чорних і 2 білих кульки, а в одній 5 білих і 1 чорна. Ймовірності вибрати будь яку урну однакові, а також однакові ймовірності вибрати будь яку кульку з обраної урни.

1. Яка ймовірність того, що навмання вийнята кулька з навмання вибраної урни виявиться білою?

2. Яка ймовірність того, що навмання вийнята кулька, що виявилася білою, вийнята з урни, що містить 5 білих кульок?

13. Три стрільці стріляють у мішень і фіксується результат пострілу кожного стрільця.

1. Вказати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Вказати, з яких елементарних подій складається подія A_k – k-ий стрілець влучив у мішень.

3. Вважаючи події A_k незалежними в сукупності, знайти ймовірність кожної елементарної події $E \in \Omega$, коли $P(A_k) = p_k$, $k \in \overline{1,3}$.

4. Знайти ймовірність події A – в мішень влучив принаймні один стрілець.

5. Знайти ймовірність події B – в мішень влучив лише один стрілець.

6. Знайти умовну ймовірність події B за умови, що влучив k-ий стрілець, $k \in \overline{1,3}$.

7. Знайти умовну ймовірність кожної події A_k, $k \in \overline{1,3}$, за умови, що в мішень влучив лише один стрілець.

8. Чи можна вважати події A_k, $k \in \overline{1,3}$, гіпотезами?

14. В першій урні є 10 кульок, серед яких 8 білих, а в другій урні є 20 кульок, серед яких 4 білі. З кожної урни навмання вибирають по одній кульці, а потім з цих двох кульок навмання вибирають одну і фіксують, чи є вибрана кулька білою, а також з якої пари кульок вона вибрана.

1. Вказати відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Вирішити, як доцільно визначити ймовірності елементарних подій $E \in \Omega$.

3. Знайти, з яких елементарних подій складається подія A – вибрана кулька є білою, та знайти ймовірність події A.

4. Нехай подія A_k означає, що кулька вибрана з k-ої урни, $k \in \overline{1,2}$.Чи є ці події гіпотезами? Знайти ймовірності цих подій.

5. Знайти умовну ймовірність $P(A / A_k)$, $k \in \overline{1,2}$.

6. Знайти умовну ймовірність $P(A_k / A)$, $k \in \overline{1,2}$.

15. У першій урні міститься 3 білих і 7 чорних, а у другій – 7 білих і 3 чорних кульок. Навмання вибирають урну, а з неї навмання вибирають кульку і фіксують номер урни та колір кульки.

1. Побудувати простір Ω елементарних подій.

2. Визначити, як доцільно визначити ймовірності елементарних подій $E \in \Omega$.

3. Визначити, з яких елементарних подій складається подія A – вибрана кулька біла, та знайти ймовірність події A?

4. Нехай подія A_k означає, що кулька вибрана з k-ої урни, $k \in \overline{1,2}$. Чи є події A_k гіпотезами? Знайти ймовірності подій A_k.

5. Знайти умовну ймовірність $P(A / A_k)$, $k \in \overline{1,2}$.

6. Знайти умовну ймовірність $P(A_k / A)$, $k \in \overline{1,2}$.

16. Є дві коробки олівців по 12 штук в кожній. В одній міститься 3 зламаних олівці, а в іншій – 4. Навмання взяли коробку, а з неї навмання взяли олівець, який виявився зламаним. Яка ймовірність того, що олівець взято з першої коробки? Обидві коробки вибираються з однаковою ймовірністю, а також з однаковою ймовірністю вибираються олівці з кожної коробки.

17. Є дві групи птахів однакової кількості. До першої групи належать 15 птахів місцевого походження, а усі інші птахи цієї групи екзотичні. Друга група складається з 15 екзотичних птахів, а всі інші птахи цієї групи місцевого походження. Навмання вибирають групу, а з неї – птаха. Обидві групи вибираються з однаковою ймовірністю, птахи з групи також обираються з однаковими ймовірностями.

1. Знайти ймовірність того, що цей птах: 1) місцевого походження; 2) екзотичний; 3) належить до i -ої групи, $i \in \overline{1,2}$; 4) є екзотичним за умови, що він належить до першої групи; 5) належить до другої групи за умови, що він місцевого походження.

2. Чи залежать знайдені ймовірності від кількості n птахів у кожній групі?

18. В тирі є 5 гвинтівок, ймовірність влучення з яких дорівнюють відповідно p_i, $i \in \overline{1,5}$. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі, якщо цей постріл здійснюють з навмання вибраної гвинтівки, а всі гвинтівки обираються з однаковими ймовірностями.

19. Автомобілі певної марки складаються на двох заводах. Перший завод випускає в n разів більше автомобілів, ніж другий, а відсоток бракованих автомобілів на першому заводі в m разів менший, ніж на другому. Навмання вибирають автомобіль з числа тих, що випущені згаданими заводами, і фіксують відповідний номер заводу та чи є автомобіль бракованим або ні. Всі автомобілі вибираються з однаковими ймовірностями.

1. Знайти відповідний простір Ω елементарних подій.

2. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль випущено першим заводом.

3. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль є бракований, якщо кількість бракованих автомобілів, випущених другим заводом, дорівнює b_2 .

4. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль складено на першому заводі, якщо цей автомобіль виявився бракованим.

2.8. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P) .

На практиці часто доводиться розглядати не одне випробування, а досить велику серію випробувань, у кожному з яких подія $A \in S$ або відбувається, або не відбувається. Нехай подія

A_i – це відбування події A в i-му випробуванні. Одним з найпростіших є випадок, коли випробування незалежні між собою.

Випробування називаються *незалежними*, якщо події A_i незалежні в сукупності.

Якщо у кожному з n незалежних випробувань подія A, $A \in S$, може відбутися з імовірністю p і не відбутися з імовірністю $q = 1 - p$, то таку схему послідовних незалежних випробувань називають *схемою Бернуллі*.

Поставимо кожному наслідку серії з n випробувань у взаємно однозначну відповідність двійковий код з n цифр, де на i-му місці є цифра 1, якщо в i-му випробуванні подія A відбувається, і цифра 0, якщо в i-му випробуванні подія A не відбувається. Тоді множина n-розрядних двійкових кодів буде еквівалентна множині $\tilde{\Omega}$ всіх можливих наслідків серії з n випробувань:

$$\tilde{\Omega} = \{ E : E = (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n),\ \ c_i = 0 \ \text{ або } \ c_i = 1\}.$$

Ймовірність події $B_{n,m}$, яка полягає в тому, що в серії із n незалежних випробувань подія A відбудеться m разів за умови, що в кожному випробуванні подія A відбувається з імовірністю p, обчислюється за *формулою Бернуллі*:

$$\tilde{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

яку часто записують у вигляді:

$$\tilde{P}(\mu = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{8.1}$$

де $(\mu = m) = B_{n,m}$.

Формула Бернуллі описує розподіл ймовірностей на множині можливих (стосовно кількості появ події A) наслідків серії з n випробувань (табл. 8.1). При цьому кожну серію з n випробувань можна розглядати як єдине випробування.

Цей *розподіл ймовірностей* називають *біноміальним*, оскільки ймовірності обчислюються за тими самими правилами, що й члени подання за степенями p і q бінома $(p+q)^n$.

Табл. 8.1

Можливий наслідок	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\ldots$	$\mu = n-1$	$\mu = n$
Ймовірність наслідку	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^{n-1} p^{n-1} q^1$	$C_n^n p^n q^0$

Події $(\mu = i),\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, можна розглядати як елементарні наслідки випробування з імовірностями $\hat{P}(\mu = i) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Так можна побудувати ще одну ймовірнісну модель $(\hat{\Omega},\ \hat{S},\ \hat{P})$ розглянутого стохастичного експерименту:

$$\hat{\Omega} = \{E_i : E_i = (\mu = i),\ \ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\},\ \ \hat{P}(E_i) = C_n^i p^i q^{n-i},$$

$$\hat{P}(B)=\sum_{E_i \in B}\hat{P}(E_i),\ \ B\subset\hat{\Omega},\ \ B\in\hat{S},\ \ \hat{S}=\{B: B\subset\hat{\Omega}\}\,.$$

Якщо ймовірність появи події A, $A\subset\Omega$, не одна й та сама в кожному з n незалежних випробувань, то така схема називається *схемою Пуассона*, яка дещо узагальнює схему Бернуллі. Формула для обчислення ймовірності того, що подія A в серії з n незалежних випробувань відбудеться рівно m разів за умови, що в i-му випробуванні вона відбувається з імовірністю p_i, має вигляд

$$\tilde{P}(\mu=m)=p_1p_2\ \dots p_m q_{m+1}q_{m+2}\ \dots q_n +$$
$$+q_1p_2\ \dots p_{m+1}q_{m+2}\ \dots q_n+\dots+q_1q_2\ \dots q_{n-m}p_{n-m+1}\ \dots p_n\,. \tag{8.2}$$

Якщо розглянути функцію

$$\Phi(z)=(p_1z+q_1)\ (p_2z+q_2)\ \dots(p_nz+q_n)\ ,$$

то виявляється, що коефіцієнт при z^m в поданні $\Phi(z)$ за степенями z дорівнює ймовірності $\tilde{P}(\mu=m)$. *Функцію* $\Phi(z)$ називають *породжуючою*. Якщо всі p_i рівні між собою, тобто $p_i=p,\ i=1,\,2,\,\dots,n$, то породжуюча функція набуває вигляду $\Phi(z)=(pz+q)^n$.

Формули (8.1) і (8.2) можна узагальнити й на той випадок, коли в кожному випробуванні більше ніж два наслідки, причому ймовірності цих наслідків можуть залишатися сталими в усіх випробуваннях або змінюватися із зміною номера випробування.

Якщо кожне випробування має не два наслідки $(A$ та $\overline{A})$, а k попарно несумісних наслідків $A_1,\ A_2,\ \dots,A_k$, причому

$$A_iA_j=\varnothing\,,\ i\neq j,\quad A_1+A_2+\dots+A_k=\Omega,\ \ P(A_i)=p_i\,,\ \sum_{i=1}^{k}p_i=1\,,$$

то, міркуючи аналогічно до попереднього, дістанемо: ймовірність того, що в серії з n незалежних випробувань події A_i відбудуться рівно по m_i разів, $\left(\sum_{i=1}^{k}m_i=n\right)$, дорівнює

$$\tilde{P}(\mu_1=m_1,\ \mu_2=m_2,\ \dots,\ \mu_k=m_k)=$$
$$=C_n^{m_1}C_{n-m_1}^{m_2}\ \dots\ C_{n-m_1-m_2-\dots-m_{k-1}}^{m_k}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ \dots\ p_k^{m_k}=$$
$$=\frac{n!}{m_1!\,m_2!\,\dots\,m_k!}\ p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ \dots\ p_k^{m_k}\,.$$

Надаючи змінним $m_1,\ m_2,\ \dots,m_k$ значень у межах від 0 до n так, щоб завжди виконувалась умова $m_1+m_2+\dots+m_k=n$, одержимо розподіл ймовірностей на множині всіх можливих наборів по k чисел $(m_1,\ m_2,\ \dots,m_k)$. Такий *розподіл ймовірностей* називається *поліноміальним*, оскільки ймовірності при цьому обчислюються за тими самими формулами, що й члени подання полінома $(p_1 + p_2 + ... + p_k)^n$ за степенями p_i.

Приклад 8.1. Баскетболіст робить п'ять незалежних кидків м'ячем у корзину. Потрібно знайти ймовірність того, що він влучить у корзину тричі, якщо при кожному кидкові він влучає з імовірністю 0,6.

Кожен кидок можна вважати випробуванням, в якому подія A (влучення м'яча в корзину) може відбутися з імовірністю $p = 0{,}6$ і не відбутися з імовірністю $q = 1 - p = 0{,}4$. Таким чином, треба знайти ймовірність того, що в серії з п'яти незалежних випробувань подія A відбудеться тричі. Беручи до уваги, що $n = 5$, $m = 3$, за формулою Бернуллі (8.1) знаходимо

$$\tilde{P}(\mu = 3) = C_5^3 (0{,}6)^3 (0{,}4)^2 \approx 0{,}35.$$

Для обчислення ймовірності події, яка полягає в тому, що величина μ набуває значень в межах від m_1 до m_2, можна використовувати формулу

$$\tilde{P}(m_1 \le \mu \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (8.3)$$

Приклад 8.2. В мішень виконується 10 незалежних пострілів. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 1/2. Знайти ймовірність того, що в мішені буде не менше восьми влучень.

Тут $m_1 = 8,\ m_2 = 10,\ n = 10,\ p = 1/2,\ q = 1 - p = 1/2$.

Тому за формулою (8.3) одержимо

$$\tilde{P}(8 \le \mu \le 10) = \sum_{k=8}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \frac{56}{2^{10}} \approx 0{,}06.$$

Теорема. *Найімовірніше число μ_0 появ події A у серії з n незалежних випробувань задовольняє нерівність*

$$np - q \le \mu_0 \le np - q + 1.$$

Причому якщо $np - q$ не ціле, то значення μ_0 єдине, якщо $np - q$ ціле, то таких значень два.

Приклад 8.3. Розглянемо дві серії із 5 і 6 повторних незалежних випробувань, в кожному з яких підкидається монета і тому в кожному випробуванні розглядаються два можливі наслідки *Г* і *Ц* (герб і цифра) з ймовірностями $p = \frac{1}{2}$ і $q = \frac{1}{2}$.

Тоді для серії із 5-ти випробувань одержимо розподіл ймовірностей на множині можливих кількостей появ герба:

m	0	1	2	3	4	5
$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Тут $n = 5$, $np - q = 5\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$ – ціле число, і тому найбільш імовірних кількостей появ герба дві:

$$m_o = np - q = 2 \text{ і } m_o = np - q + 1 = 3.$$

Для серії із 6-ти випробувань одержимо

m	0	1	2	3	4	5	6
$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

Тут

$$n=6,\ np-q=6\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=2\frac{1}{2},$$

$$[np-q]=2,\ m_0=[np-q]+1=2+1=3.$$

Отже в даному випадку найбільш імовірна кількість появ герба – 3.

При великих n і m обчислення ймовірностей безпосередньо за формулами (8.1) і (8.3) стають надто громіздкими і практично нездійсненними. В таких випадках для обчислення ймовірності $\tilde{P}(\mu=m)$ використовують так звану *локальну асимптотичну теорему Муавра-Лапласа*, згідно з якою при досить великих n імовірність $\tilde{P}(\mu=m)$ наближено можна обчислювати за формулою

$$\tilde{P}(\mu=m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{npq}}\,e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}. \tag{8.4}$$

При досить великих n для обчислення ймовірності $\tilde{P}(m_1\le\mu\le m_2)$ використовують *інтегральну асимптотичну теорему Муавра-Лапласа*, згідно з якою

$$\tilde{P}(m_1\le\mu\le m_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{npq}}\int_{m_1}^{m_2}e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}dx,$$

або $\left(\text{після заміни змінних } \frac{x\text{-}np}{\sqrt{npq}}=t\right)$

$$\tilde{P}(m_1\le\mu\le m_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$, $x_i=\frac{m_i-np}{\sqrt{npq}}$. Значення функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходять за спеціальними таблицями або комп’ютерних програм, наприклад GRAN1.

За локальною асимптотичною теоремою Муавра-Лапласа отримуються досить точні результати, коли p і q близькі до 1/2. Проте виявляється, що чим ближче p або q до нуля, тим гірше наближення результату за формулою (8.4). У таких випадках зручно користуватися *теоремою Пуассона*: якщо ймовірність $p>0$ настання події A в кожному із серії з n незалежних випробувань мала, то при досить великих n

$$\widetilde{P}\,(\mu=m)\approx\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}\,,\ \text{де}\ a_n=np\le c=const\ .$$

Приклад 8.4. Проводиться серія з 1000 випробувань, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю $p=0{,}0001$. Знайти ймовірність того, що в цій серії випробувань подія A відбудеться п'ять разів.

Тут n досить велике, а p близьке до нуля, тому зручно скористатися теоремою Пуассона. Маємо

$$a_n=np=1000\cdot 0{,}001=1\,,\ \widetilde{P}_{1000}(\mu=5)\approx\frac{1}{5!}e^{-1}\approx 0{,}003\,.$$

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Проводиться серія з 400 випробувань, в кожному з яких подія A відбувається з імовірністю 1/2. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться 190 разів.

Обчислення за формулою (8.1) тут досить громіздкі. Тому доцільно застосувати локальну асимптотичну теорему Муавра-Лапласа. Маємо

$$npq=100,\ np=200,\ m-np=-10\,,$$

і, таким чином,

$$\widetilde{P}\,(\mu=190)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\cdot 10}e^{-\frac{1}{2}}\ .$$

Скориставшись для обчислення значення виразу

$$1/(SQRT\,(2*3.142)*\exp(-1/2)$$

послугами програми GRAN1 чи DERIVE, знайдемо

$$\widetilde{P}\,(\mu=190)\approx 0{,}024\,.$$

Вправа 2. Відомо, що ймовірність влучення в мішень дорівнює $0{,}515$. Знайти ймовірність того, що після 10000 пострілів кількість влучень буде не більшою за кількість промахів.

Подія A полягає у тому, що при навмання вибраному пострілі буде влучення. При кожному з 10000 випробувань подія A відбувається з ймовірністю $P(A)=0{,}515$. Тому кількість μ відбувань події A у 1000 випробуваннях має біноміальний розподіл. Враховуючи інтегральну асимптотичну теорему Муавра-Лапласа, можна вважати, що

$$\widetilde{P}(\mu\le 10000-\mu)=P(0\le\mu\le 5000)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt\,,$$

де

$$x=\frac{5000-10000\cdot 0{,}515}{\sqrt{10000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}\approx -3{,}0012 .$$

Отже, скориставшись таблицями чи програмним засобом GRAN1, дістанемо

$$P(\mu\le 5000)\approx\frac{1}{2}+\Phi(\text{-}3{,}0012)=0{,}001 .$$

Вправа 3. Відомо, що серед N виробів кількість бракованих складає 1%. Скільки виробів слід відібрати для вибіркового контролю, щоб з ймовірністю $\alpha=0{,}95$ можна було стверджувати, що відносна частота бракованих виробів серед відібраних відрізняється від справжньої ймовірності браку $p=0{,}01$ не більше ніж на $0{,}005$.

Якщо відібрано n виробів і серед них виявилося m бракованих, то за умовою задачі треба, щоб $|\frac{m}{n}-0{,}01|\le 0{,}005$ або $-0{,}005n+0{,}01n\le m\le 0{,}005n+0{,}01n$.

Враховуючи, що для кожної відібраної деталі ймовірність бути бракованою дорівнює $0{,}01$, маємо біноміальний розподіл для кількості m бракованих деталей серед n відібраних. Тому, використовуючи інтегральну асимптотичну теорему Муавра-Лапласа дістаємо:

$$\tilde{P}(0{,}005n\le m\le 0{,}015n))\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-t^2/2}dt ,$$

де

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{0{,}005n-0{,}01n}{\sqrt{n\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}}=-\frac{0{,}005\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}01\cdot 0{,}99}} ,$$

$$x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{0{,}015n-0{,}01n}{\sqrt{n\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}}=\frac{0{,}005\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}01\cdot 0{,}99}}=-x_1 .$$

Отже,

$$\tilde{P}(0{,}005n\le m\le 0{,}015n))\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x_2}^{x_2}e^{-t^2/2}dt=2\Phi(x_2)=$$

$$=2\Phi(0{,}005\sqrt{\frac{n}{0{,}01\cdot 0{,}99}})=0{,}95 .$$

За таблицями значень функції Лапласа дістаємо, що $\Phi(x)=0{,}475$, коли $x=1{,}96$. Тому $0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}01\cdot 0{,}99}}=1{,}96$, звідки $n\approx 1522$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Серією з n незалежних випробувань задається новий стохастичний експеримент, а не той, з яким пов'язане кожне з цих n випробувань.

2. Якщо експеримент задається через серію з n незалежних випробувань, у кожному з яких фіксується відбування або невідбування заданої події A, то можливими наслідками цього експерименту є набори чисел: $(c_1, c_2, ..., c_n)$, де $c_k = 1$, коли подія A відбувається у k-му випробуванні, і $c_k = 0$, коли A не відбувається у k-му випробуванні.

3. Множина $\{j \in N : c_j = 1\}$ завжди є непорожньою.

4. Кожна елементарна подія $(c_1, c_2, ..., c_n)$ із твердження 2 є добутком n незалежних в сукупності подій, кожна k-а з яких полягає або у відбуванні (подія A_k) або у невідбуванні (подія $\overline{A}_k$) події A у k-му випробуванні, $k \in \overline{1,\ n}$.

5. Для кожної елементарної події $(c_1, c_2, ..., c_n)$ із твердження 2 $P(c_1, c_2, ..., c_n) = p^m q^{n-m}$, $m \in \overline{0,\ n}$.

6. Якщо подія $B_{n,m}$ полягає у тому, що в n незалежних випробуваннях подія A відбувається m разів, то ця подія складається з тих елементарних подій $(c_1, c_2, ..., c_n)$, для яких серед чисел c_k є: 1) принаймні m одиниць; 2) рівно $n-m$ нулів; 3) принаймні $n-m$ нулів; 4) рівно m одиниць.

7. Усі елементарні події $(c_1, c_2, ..., c_n)$, що складають подію $B_{n,m}$, є рівноможливими між собою.

8. Схема Бернуллі пов'язана із серією з n незалежних випробувань, у кожному з яких фіксована подія A відбувається з однією і тією самою ймовірністю, тобто кожне випробування пов'язане з одним і тим самим ймовірнісним простором.

2. Нехай ймовірність відбування події A у кожному з n незалежних випробувань дорівнює $p = 0{,}01$. Знайти, скільки випробувань слід провести, щоб ймовірність принаймні одного відбування події A була не меншою за $\frac{1}{2}$.

3. *Задача про споживання енергії.* Ймовірність того, що кожне з $n = 10$ підприємств протягом даного часу споживатиме електричну енергію, дорівнює $p = \frac{1}{5}$. Постачання електроенергії розраховано лише на 6 одночасних підєднань згаданих підприємств. Знайти ймовірність перенавантаження електричної мережі.

4. Знайти ймовірність того, що у випадково відібраній групі з 500 осіб рівно $k \in \overline{0,6}$ народилися першого січня. Скористатися біноміальними ймовірностями та теоремою Пуассона і порівняти результати.

5. Нехай ймовірність того, що навмання вибраний шуруп є бракований, дорівнює $p = 0{,}015$.

1. Знайти ймовірність того, що у коробці зі 100 шурупами: а) жодного бракованого; б) не більше одного бракованого.
2. Якою повинна бути кількість n шурупів у коробці, щоб ймовірність наявності у ній принаймні $(n-1)$ небракованих шурупів була не меншою за $0{,}8$?
3. Якою повинна бути ймовірність бракованого шурупа, щоб ймовірність того, що у коробці зі 100 шурупами нема бракованих, була не меншою за $0{,}9$?

6. Знайти ймовірність того, що п'ять з десяти точок, кинутих на відрізок AB, попадають на відрізок CB, якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні 4:7, а всі точки відрізка AB рівноможливі.

7. У пакунку 2100 деталей (мічених та немічених). Ймовірність того, що деталь мічена, дорівнює $0{,}15$. Порівняти ймовірності того що: 1) у пакунку від 210 до 235 мічених деталей; 2) у пакунку від 720 до 755 мічених деталей.

8. Ймовірність позитивного результату у кожному з незалежних випробувань дорівнює $p = 0{,}85$. Скільки випробувань треба провести, щоб з ймовірністю не меншою, ніж 0.97, можна було сказати, що не менше, ніж у 200 випробуваннях був позитивний результат.

9. Ймовірність відбування події A у кожному з 100 незалежних випробувань дорівнює $0{,}8$. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 75 разів і не більше 90 разів.

10. Ймовірність відбування події A у кожному з 21 незалежних випробувань дорівнює $0{,}7$. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться у більшості випробувань (не менше 11).

11. Ймовірність випадання герба $p = \frac{1}{2}$. Знайти ймовірність того, що при $2N$ підкиданнях герб випаде не менше, ніж $N - \frac{\sqrt{2N}}{2}$, і не більше, ніж $N + \frac{\sqrt{2N}}{2}$, разів.

12. Ймовірність влучення при кожному з 10 пострілів дорівнює $p = 0{,}1$. Скласти таблицю розподілу ймовірностей числа влучень.

13. В урні 10 кульок, серед них 6 пофарбованих.

1. Знайти ймовірність того, що серед 4-х навмання вийнятих одна за одною кульок усі будуть пофарбовані.

2. Порівняти знайдену ймовірність з ймовірністю того що серед 4-х кульок, вийнятих навмання і одночасно, усі пофарбовані.

14. Ймовірність того, що при кожному з 3-х незалежних вимірювань фізичної величини було допущено "припустиму" помилку, дорівнює $p = 0{,}1$. Знайти ймовірність того, що: 1) тільки при одному вимірюванні допущено неприпустиму помилку; 2) не більше, ніж при одному вимірюванні допущено неприпустиму помилку; 3) не менше, ніж при одному вимірюванні допущено неприпустиму помилку.

15. Завод відправив у магазин 100 телевізорів. Ймовірність пошкодження телевізора при транспортуванні дорівнює $p = 0{,}0005$. Знайти розподіл ймовірностей кількості телевізорів, пошкоджених при транспортуванні.

16. Ймовірність того, що добові витрати електроенергії певним підприємством перевищують норму, дорівнює $p = 0{,}2$. Знайти ймовірність того, що за 25 діб будуть зафіксовані 5 випадків перевитрат електроенергії.

17. Ймовірність вчасної реалізації зі складу магазину кожної зі 100 наявних пар взуття дорівнює $p = 0{,}8$. Знайти: 1) ймовірність того, що вчасно реалізовано не менше 75 пар взуття; 2) найімовірнішу кількість вчасно реалізованих пар взуття.

18. Відомо, що для кожної людини ймовірність захворювання на грип під час епідемії дорівнює $p = 0{,}1$. Знайти: 1) ймовірність того, що зі 100 осіб хворими на грип виявляться від 20 до 50 осіб; 2) найймовірнішу кількість хворих на грип серед 100 осіб.

19. Ймовірність відбування події A у кожному з незалежних випробувань дорівнює p. Знайти p, якщо відомо, що у 160 випробуваннях подія A найімовірніше відбувається 40 разів.

20. Ймовірність того, що навмання взята деталь є бракованою, дорівнює $p = 0{,}1$. Скільки треба взяти деталей, щоб серед них найімовірніша кількість якісних деталей дорівнювала 50?

21. На складі є вироби двох цехів, причому серед виробів першого цеху 60% вищого ґатунку, а для другого цеху цей показник дорівнює 70%. Для контролю якості продукції навмання беруть 50 виробів першого цеху і 40 виробів другого цеху.

1. Знайти найбільш імовірну кількість виробів вищого ґатунку у кожній вибірці.

2. Нехай 50 та 40 виробів перемішано і навмання вибирають один виріб. Знайти: 1) ймовірність того що цей виріб вищого ґатунку; 2) найбільш імовірну кількість виробів вищого ґатунку серед 90 виробів. Порівняти з результатом завдання 1.

22. Для даного баскетболіста ймовірність влучення м’ячем в корзину дорівнює 0,6. Зроблено 8 кидків. Знайти ймовірність того, що при цьому буде рівно 2 влучення.

23. Недолік тестового контролю знань з вибірковим введенням відповіді полягає в тому, що учень, який проходить тестування, може випадково вибрати правильну відповідь і отримати позитивну оцінку без достатніх підстав. Наскільки обґрунтовані ці побоювання і як послабити негативний вплив випадковості на кінцевий результат тестової перевірки? Розв'язати цю задачу для спрощеної моделі тестового контролю: n ($n=5$) – число питань, на кожне з яких пропонується k ($k=4$) вибіркових відповідей, з яких тільки одна є правильною, m ($m=3,4,5$) – число правильних відповідей згідно прийнятого критерію отримання позитивної оцінки.

24. Ймовірність того, що покупцеві, який зайшов в спеціалізований магазин, знадобиться костюм 60-го розміру, дорівнює 0,25. Яка найменша кількість покупців повинна зайти в магазин, щоб можна було стверджувати, що з ймовірністю не меншою за 0.95 хоча б один з них купить костюм цього розміру.

25. У деякому виробництві ймовірність того, що окремий виріб буде бракований, постійна (виробництво дуже добре налагоджено) і дорівнює 0,005. Яка ймовірність того, що в партії з 10000 виробів бракованих буде не більше 70?

26. Ймовірність допустити помилку при набиранні деякого тексту, який складається з 800 знаків, дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що число зроблених помилок в цьому тексті дорівнює 4.

27*. Нехай дано два випадкових експерименти V_1 і V_2 з просторами елементарних подій відповідно Ω_1 і Ω_2. Під *"двома незалежними експериментами $V_1 \times V_2$"* розуміють експеримент для якого будь-яке випробування полягає у тому, що спочатку проводять експеримент V_1, а потім – експеримент V_2 і фіксують пару (x, y) відповідних результатів $x \in \Omega_1$ і $y \in \Omega_2$. При цьому, якщо визначено ймовірнісні простори (Ω_1, S_1, P_1) і (Ω_2, S_2, P_2), то для кожних подій $A_1 \in S_1$ і $A_2 \in S_2$ декартів добуток $A_1 \times A_2$ також вважають подією $A \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ з ймовірністю

$$P(A) = P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2).$$

1. Довести, що для двох незалежних експериментів $V_1 \times V_2$ простором елементарних подій є множина $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

2. Довести, що сукупність $H = \{A = A_1 \times A_2 \subset \Omega : A_1 \in S_1, A_2 \in S_2\}$ є півалгеброю підмножин простору Ω.

3. З'ясувати, чи обов'язково півалгебра H є алгеброю.

4. Довести, що рівність $P(A) = P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$, $A \in H$, визначає σ-адитивну ймовірнісну міру на півалгебрі H.

5. Утворити найменшу алгебру $V \supset H$ і продовжити міру P з півалгебри H на алгебру V.

6. Здійснити лебегове продовження міри P на σ-алгебру $S \supset V$, тобто утворити ймовірнісний простір (Ω, S, P).

7. Розглянути частинний випадок задачі, коли $\Omega_1 = \{x_1, x_2, ...\}$, $\Omega_2 = \{y_1, y_2, ...\}$, $S_1 = S_1^*$ і $S_2 = S_2^*$ – найширші простори подій, а ймовірності P_1 і P_2 визначаються числами $P_k^{(1)} = P_1(x_k) \geq 0$, $P_k^{(2)} = P_2(y_k) \geq 0$, для яких $\sum_k P_k^{(1)} = \sum_k P_k^{(2)} = 1$.

8. Узагальнити задачу на випадок *"n незалежних експериментів"*.

9. Довести, що схема "n *незалежних випробувань*" є частинним випадком схеми *"n незалежних експериментів"*.

28*. Дістати простір Ω усіляких перестановок елементів $a_1, a_2, ..., a_n$ як результат $(n-1)$-го незалежного експерименту, коли k-ий експеримент має $(n-k+1)$ результатів, кожен з ймовірністю $\frac{1}{n-k+1}$, $k \in \overline{1, (n-1)}$. Знайти кількість P_n таких перестановок.

29*. Дістати простір Ω усіляких "впорядкованих вибірок без повернення" r елементів з n елементів $a_1, a_2, ..., a_n$ як результат r незалежних експериментів, кожен k-ий з яких має $(n-k+1)$ рівноможливих результатів, $k \in \overline{1, r}$. Знайти кількість A_n^r усіляких таких вибірок або розміщень з n елементів по r.

30*. Дістати простір Ω усіляких "впорядкованих вибірок з поверненням" r елементів з n елементів $a_1, a_2, ..., a_n$ як результат r незалежних експериментів, кожен k-ий з яких має n рівноможливих результатів, $k \in \overline{1, r}$. Знайти кількість $\overline{A_n^r}$ усіляких таких вибірок або розміщень з повтореннями з n елементів по r.

31*. Дістати подію A як множину усіляких "невпорядкованих вибірок без повернення" r елементів з n елементів $a_1, a_2, ..., a_n$ за допомогою результатів r незалежних експериментів, кожен k-ий з яких має $(n-k+1)$ рівноможливих результатів і в кожному k-му з яких подія A_k відбувається з ймовірністю $\frac{r-k+1}{n-k+1}$, $k \in \overline{1, r}$, причому $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_r$. Знайти кількість C_n^r таких вибірок або комбінацій з n елементів по r.

32*. Довести, що кількість "невпорядкованих вибірок без повернення" або комбінацій з n елементів по r є у $r!$ раз меншою за кількість аналогічних "впорядкованих вибірок" або розміщень з n елементів по r.

2.9. Дискретний одновимірний розподіл ймовірностей

Якщо множина Ω елементарних подій дискретна, тобто скінченна $\Omega=\{E_1, E_2,..., E_k\}$, або зчисленна – $\Omega=\{E_1, E_2,..., E_k,...\}$ і кожна елементарна подія $E_i \in \Omega$ визначає подію, тобто $\{E_i\} \in S$, ймовірність якої $P(\{E_i\})$, то розподіл ймовірностей на такій множині називається *дискретним*.

Дискретний розподіл ймовірностей на скінченній множині Ω можна задати таблицею виду

Табл. 9.1

E_i	E_1	E_2	…	E_k
$P(\{E_i\})$	$P(\{E_1\})$	$P(\{E_2\})$	…	$P(\{E_k\})$

Таку таблицю називають *рядом розподілу ймовірностей на множині* Ω.

Очевидно, що в цьому випадку для довільного $A\subset\Omega$ $P(A)=\sum\limits_{E_i\in A} P(\{E_i\})$.

Якщо кожній елементарній події E_i поставити у взаємно однозначну відповідність деяку точку x_i на числовій осі Ox (або множина Ω з самого початку мала вигляд $\Omega=\{x_1, x_2,..., x_k\}$), $(x_i < x_{i+1})$, то ряд розподілу ймовірностей на множині Ω набуває вигляду

Табл. 9.2

x_i	x_1	x_2	…	x_k
$P(\{x_i\})$	$P(\{x_1\})$	$P(\{x_2\})$	…	$P(\{x_k\})$

Якщо точки (x_i , $P(\{x_i\})$) зобразити на координатній площині, то ламану з вершинами в цих точках називають *многокутником розподілу ймовірностей* (Рис. 9.1).

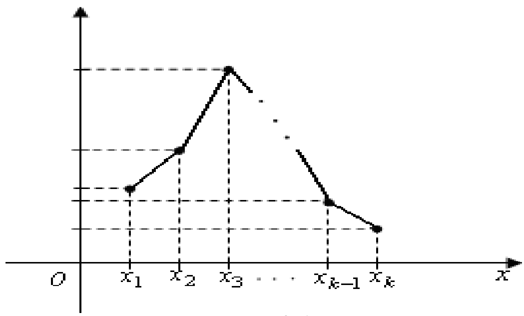


Рис. 9.1

Функція $F(x)$ дискретного розподілу ймовірностей на множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ набуває вигляду

$$F(x) = P((-\infty, x)) = \sum_{x_i < x} P(\{x_i\}) = \sum_{x_i \in (-\infty, x)} P(\{x_i\}), \; x \in (-\infty, \infty).$$

Множина значень функції $F(x)$ в розглядуваному випадку скінченна, функція $F(x)$ може набувати відмінних від нуля приростів лише в точках x_i (можливо не в усіх точках x_i, якщо $P(x_i) = 0$ для деяких x_i).

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай на множині $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ задано розподіл ймовірностей: $P(\{-1\}) = \dfrac{1}{4}$, $P(\{0\}) = \dfrac{1}{2}$, $P(\{1\}) = \dfrac{1}{4}$.

Тоді ряд такого розподілу ймовірностей матиме вигляд

x_i	-1	0	1
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Многокутник даного розподілу ймовірностей подано на Рис. 9.2.

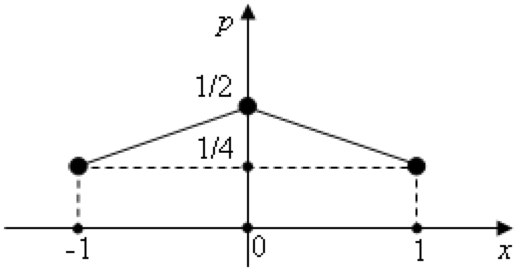


Рис. 9.2

Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ в даному випадку набуває вигляду

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{коли } -1 < x \le 0, \\ \dfrac{3}{4}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{коли } 1 < x. \end{cases}$$

Графік цієї функції $F(x)$ подано на Рис. 9.3.

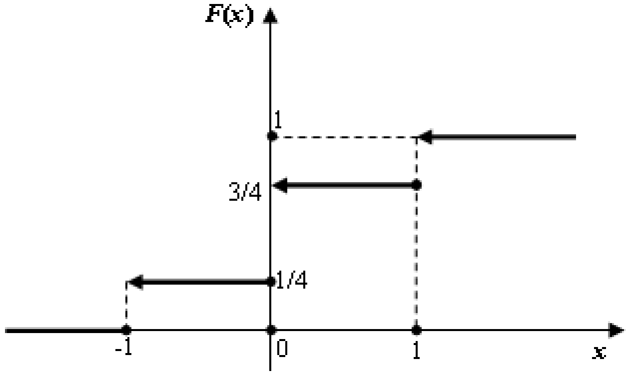


Рис. 9.3

Ймовірність попадання на проміжок, наприклад $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, при заданому розподілі ймовірностей дорівнює

$$P\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

що дорівнює сумі приростів функції $F(x)$ на проміжку $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$:

$$P\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = P(\{0\}) + P(\{1\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Вправа 2. *Рівномірний дискретний розподіл ймовірностей* – це одновимірний дискретний розподіл імовірностей на множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, при якому всі елементарні події $\{x_i\}$ відбуваються з однаковими ймовірностями $P(\{x_i\}),\ i = \overline{1, n}$.

При рівномірному дискретному розподілі ймовірності $p_i = P(\{x_i\}),\ i = 1, 2, \ldots, n$, рівні між собою і дорівнюють $\frac{1}{n}$. При цьому якщо дві підмножини A і B множини $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ містять однакові кількості елементів – m (підмножини A і B мають однакові міри), то ймовірності попадання в такі підмножини однакові: $P(A) = P(B) = \frac{m}{n}$ (за властивістю адитивності ймовірності).

Ряд рівномірного розподілу ймовірностей при цьому має вигляд (табл. 9.3)

Табл. 9.3

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

Відповідний многокутник розподілу ймовірностей зображено на Рис. 9.4.

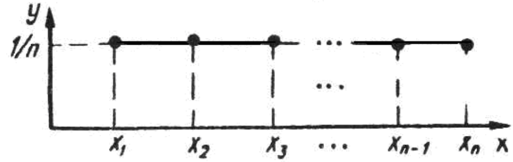


Рис. 9.4

Вправа 3. *Біноміальний розподіл ймовірностей* – це розподіл ймовірностей на множині $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, який описується формулою Бернуллі

$$P(\{x_i\}) = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i},$$

коли x_i набуває значень $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Назва цього розподілу ймовірностей відображає те, що ймовірності $P(\{x_i\})$ обчислюється так само, як і члени бінома Ньютона $(p+q)^n$:

$$(p+q)^n = \sum_{x_i=0}^{n} C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} .$$

Виявляється, що при досить великих n многокутник біноміального розподілу досить близький до графіка функції $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$ (див. Рис. 9.5). Цей факт обґрунтовується в локальній асимптотичній теоремі Муавра-Лапласа, на ньому базується й інтегральна асимптотична теорема Муавра-Лапласа.

Вправа 4. *Розподіл Пуассона* – це розподіл ймовірностей на дискретній нескінченній множині $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, заданий таблицею 9.4.

Табл. 9.4

x_i	0	1	2	$\dots$	n	$\dots$
p_i	$\frac{a^0}{0!}e^{-a}$	$\frac{a^1}{1!}e^{-a}$	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	$\dots$	$\frac{a^n}{n!}e^{-a}$	$\dots$

Можна показати, що $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

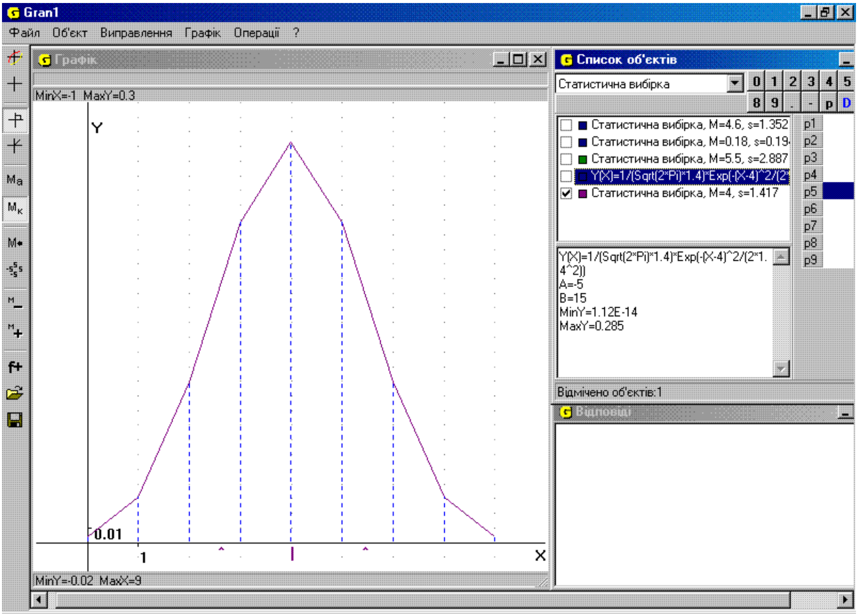


Рис. 9.5

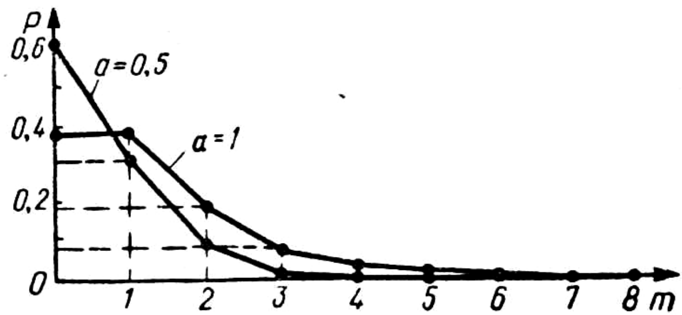


Рис. 9.6

Справді

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = e^{-a}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}+\ldots\right) = e^{-a}\cdot e^{a} = 1\,.$$

Тут a – фіксоване додатне число. Різним значенням a відповідають різні розподіли ймовірностей. На Рис. 9.6 зображено многокутники розподілів ймовірностей для значень $a=1$ і $a=0{,}5$ (табл. 9.5).

Табл. 9.5

m	$\frac{a^m}{m!}e^{-a}$	$a=1$	$a=0{,}5$
0	$\frac{a^0}{0!}e^{-a}$	0,3678	0,6065
1	$\frac{a^1}{1!}e^{-a}$	0,3678	0,3032
2	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	0,1839	0,0758
3	$\frac{a^3}{3!}e^{-a}$	0,0613	0,0126
4	$\frac{a^4}{4!}e^{-a}$	0,0153	0,0016
5	$\frac{a^5}{5!}e^{-a}$	0,0030	0,0002
6	$\frac{a^6}{6!}e^{-a}$	0,0005	0,00001

Розподіл Пуассона широко застосовують на практиці, він тісно пов'язаний з біноміальним розподілом.

Якщо у виразі

$$P(\{x_i\}) = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

для обчислення ймовірностей біноміального розподілу зафіксувати число x_i, спрямувати n до нескінченності $(n \to \infty)$, а p (або q) до нуля $(p \to 0)$ так, щоб добуток np дорівнював сталому числу a, то

$$\lim_{n\to\infty} P(\{x_i\}) = \lim_{n\to\infty} C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} = \frac{a^{x_i}}{x_i\,!} e^{-a} .$$

Таким чином, при необмеженому збільшенні n за наведених умов біноміальний розподіл ймовірностей асимптотично наближається до розподілу Пуассона.

Вправа 5. Повторні незалежні випробування продовжуються до першої появи події A, можливі наслідки серії випробувань – кількість проведених випробувань. Очевидно, що ця кількість може набувати значень $1, 2, 3, \ldots$, причому $P(\{x_i\}) = q^{x_i - 1} p$, де x_i – можливі наслідки серії випробувань, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Розглядуваний розподіл ймовірностей називається *геометричним*. Ряд цього розділу ймовірностей має вигляд (табл. 9.6):

Табл. 9.6

x_i	1	2	3	…	n	…
p_i	p	qp	$q^2 p$	…	$q^{n-1} p$	…

Вправа 6. *Гіпергеометричний розподіл* має вигляд (табл. 9.7):

Табл. 9.7

x_i	0	1	2	…	k
p_i	$\frac{C_M^0 C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^2 C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

де $k = \min(n, M)$. Це є ряд розподілу ймовірностей кількості виграшних квитків серед n квитків, які навмання вибираються з N квитків, серед яких є M виграшних, а решта $N - M$ невиграшних.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен ймовірнісний простір визначається дискретним розподілом ймовірностей.
2. Якщо простір елементарних подій скінченний, то для нього існує многокутник розподілу ймовірностей.
3. Для кожного ймовірнісного простору (Ω, S, P), де Ω може бути незчисленною множиною, існує функція дискретного розподілу ймовірностей.
4. Кожна невід'ємна і неспадна функція може бути функцією дискретного розподілу ймовірностей.
5. Для функції дискретного розподілу ймовірностей обов'язково число 0 є найменшим, а число 1 – найбільшим її значенням.
6. Функція дискретного розподілу ймовірностей є кусково-сталою, тобто область визначення цієї функції є об'єднанням зчисленної кількості проміжків, на кожному з яких дана функція є сталою.
7. Через функцію дискретного розподілу ймовірностей визначається ймовірність будь-якої події з відповідного ймовірнісного простору.
8. Функція дискретного розподілу ймовірностей має принаймні одну точку розриву.
9. Множина точок розриву функції дискретного розподілу ймовірностей не більш ніж зчисленна.
10. Функція дискретного розподілу ймовірностей може мати точки розриву другого роду.
11. У кожній точці розриву функція дискретного розподілу ймовірностей є неперервною зліва.

12. 1) Якщо дискретний розподіл ймовірностей рівномірний, то простір Ω елементарних подій скінченний; 2) обернене твердження є правильним.

13. Якщо простір Ω елементарних подій містить зчисленну кількість елементів, то відповідний розподіл ймовірностей не може бути рівномірним.

14. 1) Якщо многокутник дискретного розподілу ймовірностей є відрізком, то цей розподіл рівномірний; 2) обернене твердження є правильним.

15. Біноміальний розподіл ймовірностей завжди пов'язаний із скінченним простором елементарних подій.

16. Розподіл Пуассона завжди пов'язаний із зчисленним простором елементарних подій.

17. Для розподілу Пуассона: $P(\{m\}) = \dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ ймовірності $P(\{m\})$ як завгодно малі, коли числа m досить великі.

18. Для розподілу Пуассона ймовірності $P(\{m\}) = \dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$ утворюють спадаючу послідовність для будь-якого $a > 0$.

19. При великому n біноміальний розподіл ймовірностей близький до розподілу Пуассона

20. 1) Геометричний розподіл ймовірностей утворюють члени геометричної прогресії з першим членом p і знаменником прогресії q; 2) геометрична прогресія pq^{n-1}, $n = 1, 2, \ldots$, завжди є збіжною, а її сума дорівнює 1.

2. Навести приклад ймовірнісного простору з дискретною функцією розподілу ймовірностей, яка має:

1) єдину точку розриву;
2) дві точки розриву;
3) зчисленну кількість точок розриву;
4) множину точок розриву, всюди щільну на числовій прямій, тобто кожна точка числової прямої є граничною точкою множини точок розриву.

3. Експеримент полягає у підкиданні монети до першого випадання герба і фіксації номера підкидання, у якому випав герб.

1. Вказати простір **Ω** елементарних подій.
2. Вважаючи, що простір подій S^* найширший, а ймовірність випадання герба дорівнює $p \in (0;1)$ для будь-якого підкидання, знайти ймовірність кожної елементарної події $E \in \Omega$.
3. Знайти відповідний ряд розподілу ймовірностей на множині **Ω**.
4. Побудувати відповідний многокутник розподілу ймовірностей.

5. Визначити функцію $F(x)$ знайденого розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

6. Обчислити ймовірність того, що герб випаде: 1) не пізніше, ніж у третьому підкиданні; 2) не раніше, ніж у п'ятому підкиданні; 3) при підкиданні з номером $n \in (100;105)$.

4. Експеримент полягає у тому, що батарея з трьох гармат виконує залп і фіксується влучення чи промах кожної гармати у відповідну мішень.

1. Побудувати простір Ω елементарних подій.

2. Вважаючи, що ймовірність влучення у мішень для 1-ї, 2-ї, та 3-ї гармати дорівнює відповідно 0,5; 0,4 та 0,3, знайти ймовірність кожної елементарної події $E \in \Omega$.

3. Взаємно однозначно відобразити простір $\boldsymbol{\Omega}$ на простір $\Omega_1 \subset N$ і побудувати ряд розподілу ймовірностей на множині Ω_1.

4. Побудувати відповідний многокутник розподілу ймовірностей.

5. Визначити функцію $F(x)$ знайденого розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

6. Обчислити ймовірність того, що: 1) перша гармата влучить у мішень; 2) друга і третя гармати влучать у мішень; 3) не менше двох гармат влучать у мішень.

5. Піввідрізок $[0;1)$ поділено на піввідрізки $[0;\frac{1}{3})$, $[\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ і $[\frac{2}{3};1)$, і занумеровано числами 1, 2 і 3 відповідно. Експеримент полягає у тому, що три точки навмання кидають на проміжок $[0;1)$ і фіксують номери проміжків, у які попали точки.

1. Побудувати відповідний простір $\boldsymbol{\Omega}$ елементарних подій.

2. Вважаючи, що ймовірність влучення кожної точки у кожен занумерований проміжок однакова, знайти ймовірність кожної елементарної події $E \in \Omega$.

3. Взаємно однозначно відобразити простір $\boldsymbol{\Omega}$ на простір $\Omega_1 \subset N$ і побудувати ряд розподілу ймовірностей на множині Ω_1.

4. Побудувати відповідний многокутник розподілу ймовірностей.

5. Побудувати функцію $F(x)$ знайденого розподілу ймовірностей?

6. Обчислити ймовірність того, що: 1) у кожен з трьох піввідрізків попаде по одній точці; 2) усі три точки попадуть в один піввідрізок; 3) лише дві точки попадуть в один піввідрізок; 4) не менше двох точок попадуть в один піввідрізок; 5) лише дві точки попадуть у перший піввідрізок.

7. Узагальнити задачу, на випадок, коли піввідрізок $[0;1)$ ділять на піввідрізки $[0;a_1)$, $[a_1;a_2)$ і $[a_2;1)$ довжиною відповідно p_1, p_2 і p_3.

6. Експеримент полягає у тому, що монету підкидають 5 разів і фіксують кількість випадань герба.

1. Знайти простір **Ω** елементарних подій.
2. Вважаючи, що при кожному підкиданні ймовірність випадання герба дорівнює $\frac{1}{2}$, знайти ймовірності кожної елементарної події $E \in \Omega$.
3. Знайти відповідний ряд розподілу ймовірностей на множині **Ω**.
4. Побудувати відповідний многокутник розподілу ймовірностей.
5. Визначити функцію $F(x)$ знайденого розподілу ймовірностей і побудувати її графік.
6. Обчислити ймовірність того, що герб випаде: 1) не менше одного разу; 2) не більше одного разу; 3) два або три рази.
7. Знайти найбільш ймовірну кількість випадань герба.

7. У групі 12 студентів, серед яких 5 відмінників. Експеримент полягає у тому, що навмання вибирають 5 студентів і фіксують, скільки серед них відмінників.

1. Знайти відповідний простір елементарних подій.
2. Знайти ймовірність кожної елементарної події $E \in \Omega$.
3. Побудувати відповідний ряд та многокутник розподілу ймовірностей на множині **Ω**.
4. Знайти функцію $F(x)$ даного розподілу ймовірностей і побудувати її графік.
5. Обчислити ймовірність того, що серед 5 вибраних студентів відмінників: 1) не менше одного; 2) не більше одного; 3) два або три.

8. 1. Серед заданих функцій $F(x)$ знайти функції дискретного розподілу ймовірностей та побудувати їх графік.

2. Знайти відповідний дискретний розподіл ймовірностей.
3. Побудувати відповідний многокутник розподілу ймовірностей.
4. Задати подію $A \subset \Omega$ і знайти ймовірність цієї події:

1) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } \sin x \le 0, \\ \dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & \text{коли} \sin x > 0; \end{cases}$ 2) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ \dfrac{|\ln x|}{\ln x}, & \text{коли } x > 1; \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & \text{коли } |x|\le\dfrac{\pi}{2},\ x\ne 0, \\ -1, & \text{коли } x=0, \\ 1, & \text{коли } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ 4) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}[x], & \text{коли } 0\le x\le 2, \\ 0, & \text{коли } x<0, \\ 1, & \text{коли } x>2, \end{cases}$

де $[x]$ – ціла частина числа x.

5) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0, \\ \dfrac{k+1}{n+1}, & \text{коли } k<x\le k+1, k\in\overline{0,(n-1)}, \\ 1, & \text{коли } x>n; \end{cases}$

6) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1, \\ \sum\limits_{k<x} p(1-p)^{k-1}, & \text{коли } x>1, \text{ де } p\in(0;1); \end{cases}$

7) $F(x)=a+b\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2}$; 8) $F(x)=\dfrac{1}{2}(1+\sin x)$;

9) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a, \\ \dfrac{k}{n+1}, & \text{коли } a+\dfrac{(k-1)(b-a)}{n}<x\le a+\dfrac{k(b-a)}{n},\ k\in\overline{1,n}. \\ 1, & \text{коли } x>b; \end{cases}$

9. Перевірити, чи задає дана таблиця дискретний розподіл ймовірностей:

а)

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

б)

x_i	1	2	3	4
p_i	0,5	0,4	0,03	0,07

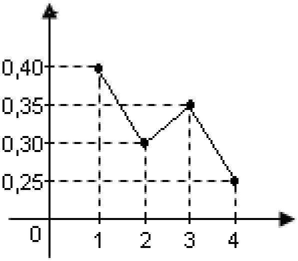
в)

x_i	0	1	2	$\cdots$	n
p_i	e^{-a}	$e^{-a}\cdot a$	$e^{-a}\cdot\dfrac{a^2}{2!}$	...	$e^{-a}\cdot\dfrac{a^n}{n!}$

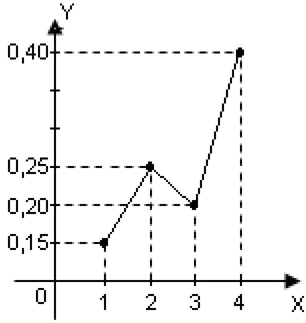
і якщо так, то: 1) побудувати відповідний многокутник розподілу ймовірностей; 2) знайти функцію $F(x)$ розподілу ймовірностей та побудувати її графік; 3) обчислити ймовірність події $A=\{2,4\}$.

10. Перевірити, чи є дана ламана многокутником розподілу ймовірностей:

а)



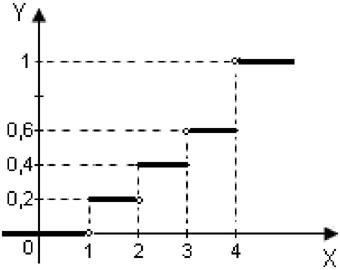
б)



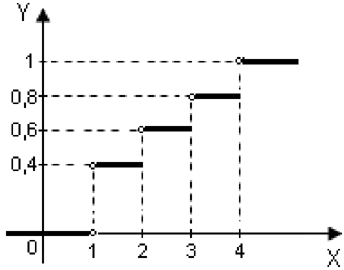
і якщо так, то: 1) побудувати відповідний ряд розподілу ймовірностей; 2) знайти функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік; 3) обчислити ймовірність події $A = \{2, 3\}$.

11. Перевірити, чи є заданий графік графіком функції $F(x)$ дискретного розподілу ймовірностей,

а)



б)



і якщо так, то: 1) знайти відповідний ряд дискретного розподілу ймовірностей; 2) побудувати многокутник розподілу ймовірностей; 3) знайти ймовірність події $A = \{1, 3, 4\}$.

12. У суперфіналі першості країни з баскетболу команди К1 і К2 зустрічаються доти, доки одна з них не здобуде три перемоги. На думку фахівців у кожній окремій зустрічі ймовірність перемоги команди К1 дорівнює $p = 0{,}6$.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій.
2. Обчислити ймовірність кожної елементарної події $E \in \Omega$.
3. Скласти відповідний ряд розподілу ймовірностей.
4. Порівняти шанси перемоги команд у суперфіналі: 1) до першої зустрічі; 2) після першої зустрічі, у якій перемогла: а) команда К1; б) команда К2; 3) після двох зустрічей, у яких: а) спочатку перемогла команда К1, а потім команда К2; б) спочатку перемогла команда К2, а потім команда К1; в) двічі перемогла команда К1; г) двічі перемогла команда К2; 4) після чотирьох зустрічей, у яких кожна команда перемагала двічі.

13. Кожен з трьох стрільців має по 3 набої і вони стріляють у ціль по черзі у порядку С1, С2, С3, С1, С2, С3, С1, С2, С3 доти, доки хтось не влучить у ціль, або не закінчаться набої. Ймовірність влучення у ціль для стрільця С1 дорівнює $p_1 = 0{,}5$, для стрільця С2 – $p_2 = 0{,}6$, а для С3 – $p_3 = 0{,}7$.

1. Побудувати відповідний простір елементарних подій.
2. Обчислити ймовірності кожної елементарної події $E \in \Omega$.
3. Скласти відповідний ряд розподілу ймовірностей.
4. Оцінити: 1) шанси влучення у ціль кожного стрільця при i-му пострілі, $i \in \overline{1,3}$; 2) шанси того, що у ціль влучить саме i-й стрілець.

14*. Нехай $p_m \geq 0$ для всіх $m \in \{0,1,\ldots\}$ і $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m = 1$.

1. Довести, що коли $p_{n+m} = p_m \sum\limits_{k=n}^{\infty} p_k$ для всіх $n \geq 1$ і $m \geq 0$, то: 1) $p_0 \in (0;1]$; 2) $p_m = p_0(1-p_0)^m$, $m \in \{0,1,2,\ldots\}$; 3) рівність $P(m) = p_0(1-p_0)^m$, $m \in (0,1,2,\ldots)$ задає дискретний розподіл ймовірностей на зчисленній множині $\Omega = \{0,1,2,\ldots\}$. Цей *розподіл* називають *геометричним*.

2. Знайти функцію геометричного розподілу ймовірностей.

15. 1. Довести, що рівність $P(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $m \in \{0,1,2,\ldots\}$, де $\lambda = const > 0$, задає дискретний розподіл ймовірностей на зчисленній множині $\Omega = \{0,1,2,\ldots\}$. Цей розподіл називається *розподілом Пуассона*.

2. Знайти функцію розподілу ймовірностей для розподілу Пуассона.

16. Нехай зафіксовано натуральні числа N, $k < N$ і $n \leq N$. Довести, що рівність $P(m) = \dfrac{C_n^m C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}$, $0 \leq m \leq \min\{k,n\}$, задає дискретний розподіл ймовірностей на множині $\Omega = \{0,1,2,\ldots,\min\{k,n\}\}$. Цей *розподіл* називають *гіпергеометричним*.

17*. Нехай простір елементарних подій співпадає з множиною Q раціональних чисел, тобто $\Omega = Q$, а розподіл ймовірностей на множині Ω задається рівністю

$$p(\{x_k\}) = p_k,\ x_k \in \Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\},$$

де $p_k > 0,\ k \in N$, і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

1. Довести, що функція $F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$ задовольняє характеристичні властивості функції розподілу ймовірностей:

1) $F(x) \geq 0, x \in R$;

2) $F(-\infty) = \lim F(x) = 0$, а $F(+\infty) = \lim F(x) = 1$;

3) $F(x)$ є зростаючою функцією на множині R;

4) $F(x)$ неперервна зліва і має границю справа у кожній точці $x_0 \in R$.

2. Довести, що функція $F(x)$ неперервна у кожній ірраціональній точці та розривна у кожній раціональній точці, причому $F(x_k + 0) - F(x_k) = p_k$, де $F(x_k + 0) = \lim_{x \to x_k + 0} F(x)$, а $x_k \in Q = \Omega$.

3. Довести, що функція $F(x)$ не є кусково-сталою, тобто не існує не більш ніж зчисленна кількість проміжків, об'єднання яких дає множину $R = (-\infty; +\infty)$, і на кожному з яких функція $F(x)$ є сталою.

2.10. Двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей

Дискретний розподіл ймовірностей на двохвимірній скінченній множині $\Omega = \{(x_j, y_i), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, s}\}$, (Рис. 10.1) можна задати таблицею виду табл. 10.1,

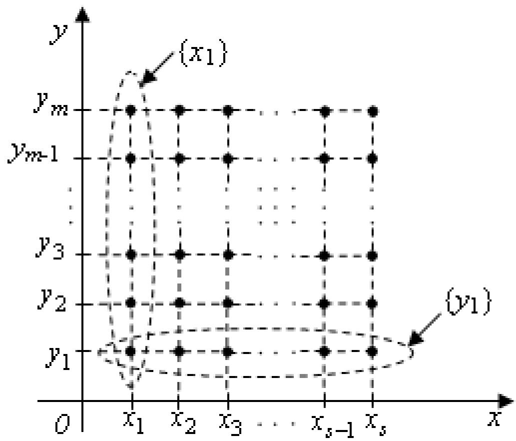


Рис. 10.1

Табл. 10.1

$y_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{s-1}	x_s
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1s-1}	p_{1s}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2s-1}	p_{2s}
y_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3s-1}	p_{3s}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_{m-1}	$p_{m-1\,1}$	$p_{m-1\,2}$	$p_{m-1\,3}$	$\dots$	$p_{m-1\,s-1}$	$p_{m-1\,s}$
y_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\dots$	p_{ms-1}	p_{ms}

де всі числа p_{ij}, $i \in \overline{1,\ m}$, $j \in \overline{1,\ s}$, невід'ємні і такі, що $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$.

В механічній інтерпретації таблицею 10.1 задається дискретний розподіл одиничної маси на множині $\Omega = \{(x_j, y_i),\ i \in \overline{1,\ m},\ j \in \overline{1,\ s}\}$.

Згідно властивості адитивності ймовірності, якщо $A \subset \Omega$, то

$$P(A) = \sum_{(x_j, y_i) \in A} p_{ij}\ .$$

Функція двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей на множині $\Omega = \{(x_j, y_i),\ i \in \overline{1,\ m},\ j \in \overline{1,\ s}\}$, набуває вигляду

$$F(x, y) = P((-\infty, x) \times (-\infty, y)) = \sum_{y_i < y}\ \sum_{x_j < x} p_{ij}\ .$$

В механічній інтерпретації значення $F(x_0, y_0)$ є маса, що припадає на множину $((-\infty, x_0) \times (-\infty, y_0)) = \{(x, y) : x < x_0,\ y < y_0\}$, за умови, що на множині Ω в площині xOy розподілена одинична маса так, що на точку (x_j, y_i) припадає маса p_{ij}, $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ s}$.

Знаючи двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей $p_{ij} \geq 0$ на множині $\Omega = \{(x_j, y_i),\ i \in \overline{1,\ m},\ j \in \overline{1,\ s}\}$, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$, можна знайти $P(\{x_j\}) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$, $j \in \overline{1,\ s}$, – ймовірність попадання у множину точок, абсциси яких дорівнюють x_j, $j \in \overline{1,\ s}$, а також $P(\{y_i\}) = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}$, $i \in \overline{1,\ m}$, – ймовірність попадання у множину точок, ординати яких дорівнюють y_i $i \in \overline{1,\ m}$, (Рис. 10.1), тобто одновимірні розподіли ймовірностей $P(\{x_j\})$, $j \in \overline{1,\ s}$, та $P(\{y_i\})$, $i \in \overline{1,\ m}$, вздовж осей Ox та Oy відповідно.

Слід зауважити, що знаючи одновимірні розподіли ймовірностей $P(\{x_j\})$, $j \in \overline{1,\ s}$, та $P(\{y_i\})$, $i \in \overline{1,\ m}$, не завжди можна знайти двохвимірний розподіл $P(\{x_j, y_i\})$, $i \in \overline{1,\ m}$, $j \in \overline{1,\ s}$.

Якщо виявляється, що $P(\{x_j, y_i\}) = P(\{x_j\})P(\{y_i\})$ *для всіх* $i \in \overline{1,\ m}$, $j \in \overline{1,\ s}$, *то розподіли ймовірностей* $P(\{x_j\})$, $j \in \overline{1,\ s}$, *та* $P(\{y_i\})$, $i \in \overline{1,\ m}$, *називаються незалежними*.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай розподіл ймовірностей на площині xOy (Рис. 10.2) має вигляд, поданий в табл. 10.2

Табл. 10.2

$y_i \backslash x_j$	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

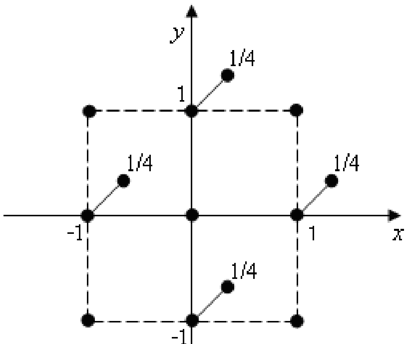


Рис. 10.2

Тоді розподіл $\sum_{i=1}^{3} P(\{(x_j, y_i)\}) = P(\{x_j\})$, $j \in \overline{1,\ 3}$, матиме вигляд

x_j	-1	0	1
$P(\{x_j\})$	1/4	1/2	1/4

Аналогічно розподіл $P(\{y_i\})$, $i \in \overline{1,\ 3}$, матиме вигляд

y_i	-1	0	1
$P(\{y_i\})$	1/4	1/2	1/4

Оскільки $P(\{x_j, y_i\}) \neq P(\{x_j\})P(\{y_i\})$ для всіх $i \in \overline{1, 3}$, $j \in \overline{1, 3}$, то в даному випадку розподіли $P(\{x_j\})$, $j \in \overline{1, 3}$, і $P(\{y_i\})$, $i \in \overline{1, 3}$, не є незалежними.

Функція двохвимірного розподілу ймовірностей $F(x, y)$ в розглядaному випадку набуває вигляду

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } x \le -1 \text{ або } y \le -1 \text{ або } x \le 0 \text{ і } y \le 0; \\ 1/4, \text{ коли } x > 0 \text{ і } -1 < y \le 0 \text{ або } y > 0 \text{ і } -1 < x \le 0; \\ 1/2, \text{ коли } 0 < x \le 1 \text{ і } 0 < y \le 1; \\ 3/4, \text{ коли } 1 < x \text{ і } 0 < y \le 1 \text{ або } 1 < y \text{ і } 0 < x \le 1; \\ 1, \text{ коли } 1 < x \text{ і } 1 < y. \end{cases}$$

Поверхню, що описується залежністю $z = F(x, y)$, зображено на Рис. 10.3.

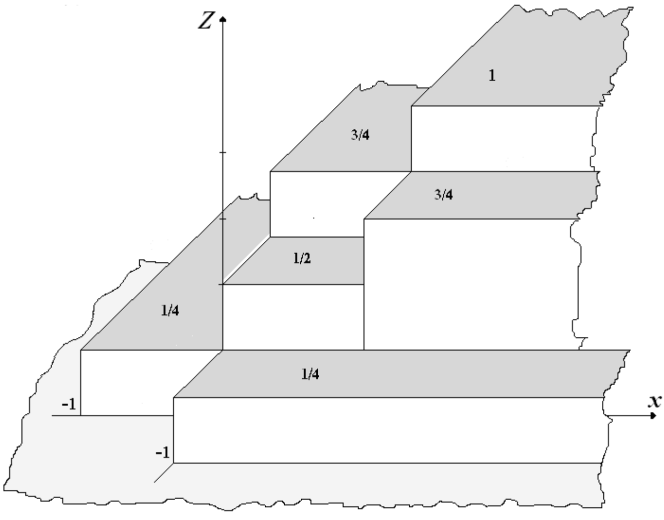


Рис. 10.3

Формула для обчислення ймовірності $P([a,b) \times [c,d))$ попадання в прямокутник $[a,b) \times [c,d)$ через значення функції розподілу ймовірностей $F(x, y)$ (див. § 2.3) набуває вигляду (Рис. 10.4):

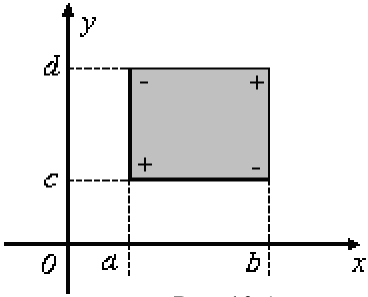


Рис. 10.4

$$P([a,b)\times[c,d)) = \Delta_{a,b}\Delta_{c,d}\ F(x,y) = \Delta_{a,b}(F(x,d)-F(x,c)) = (F(b,d)-$$
$$-F(b,c))-(F(a,d)-F(a,c)) = F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c).$$

Якщо в розглянутому прикладі 10.1 взяти прямокутник $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\times\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, тоді одержимо

$$P\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\times\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right)=$$
$$=F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)+F\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+0=\frac{1}{2}.$$

Вправа 2. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен двохвимірний простір Ω елементарних подій можна вважати одновимірним, якщо ототожнювати еквівалентні множини.
2. Для будь-якої функції дискретного розподілу ймовірностей число 0 є найменшим значенням, а число 1 – найбільшим.
3. За функцією дискретного двохвимірного розподілу ймовірностей на скінченній множині Ω можна знайти $P(x_j, y_i)$ для кожної точки $(x_j, y_i)\in\Omega$.

1. Відомо, що простори R^2 і R^1 є еквівалентними, тобто існує взаємно однозначне відображення R^2 на R^1. При цьому $\Omega\subset R^2$ взаємно однозначно відобразиться на деякий простір $\Omega_1\subset R^1$, тобто простір Ω і Ω_1 є еквівалентними. Отже, твердження є правильним.

2. Нехай $\Omega = Q$ є множиною усіх раціональних чисел. Тоді ці раціональні числа можна занумерувати, тобто записати простір Ω у вигляді послідовності $\{x_1, x_2, ..., x_m, ...\}$ з попарно різними членами. Якщо покласти $P(\{x_k\}) = p_k > 0$, де $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, то

дістанемо дискретний одновимірний розподіл ймовірностей на множині $\Omega = Q$.

Для цього розподілу $F(x) = \sum\limits_{x_k < x} p_k$, а тому: 1) $F(x_0) > 0$ для будь-якого $x_0 \in R$, оскільки існують точки $x_k < x_0$, причому кількість таких точок нескінченна і тому кількість доданків $p_k > 0$ у сумі $\sum\limits_{x_k < x_0} p_k$ нескінченна; 2) $F(x_0) < 1$, для будь-якого $x_0 \in R$, оскільки існують точки $x_k \geq x_0$, для яких відповідні доданки $p_k > 0$ не містяться в сумі $\sum\limits_{x_k < x_0} p_k = F(x_0)$, а тому

$$\sum_{x_k < x_0} p_k = F(x_0) < \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Отже, твердження 2 не є правильним. Можна лише стверджувати, що $0 = \inf\limits_{x \in R} F(x)$, а $1 = \sup\limits_{x \in R} F(x)$.

3. Для простоти розглянемо випадок, коли $\Omega = \{x_1,\ x_2\} \times \{y_1,\ y_2\}$, де $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ (Рис. 10.5)

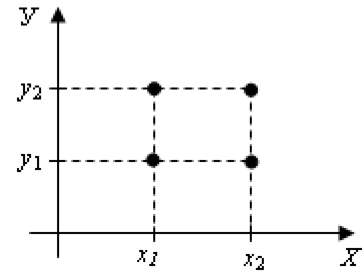


Рис. 10.5

Нехай усі значення функції $F(x, y)$ двохвимірного розподілу ймовірностей на множині Ω відомі. Тоді:

якщо $x_1 < x \leq x_2$, а $y_1 < y \leq y_2$, то $F(x, y) = \sum\limits_{x_i < x} \sum\limits_{y_j < y} P_{ij} = p_{11}$, оскільки лише $x_1 < x$ і лише $y_1 < y$.

Отже, за значенням функції $F(x, y)$ можна відновити $p_{11} = P(\{x_1, y_1\})$.

Якщо $x_1 < x \leq x_2$, а $y > y_2$, то $F(x, y) = \sum\limits_{x_i < x} \sum\limits_{y_j < y} P_{ij} = p_{11} + p_{12}$, і оскільки p_{11} знайдено, то можна знайти і $p_{12} = P(\{(x_1, y_2)\})$

Якщо $x > x_2$, а $y_1 < y \le y_2$, то $F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P_{ij} = p_{11} + p_{21}$, тобто можна знайти $p_{21} = P(\{(x_2, y_1)\})$.

Враховуючи, що $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$ і перші три доданки вже знайдено дістанемо $p_{22} = P(\{(x_2, y_2)\})$.

Міркування для загального випадку аналогічні. Отже, твердження 3 є правильним.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен скінченний простір елементарних подій Ω можна вважати двохвимірним простором.

2. Кожен скінченний двохвимірний простір елементарних подій Ω можна вважати одновимірним простором.

3. Кожен двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей визначає рівно два одновимірних дискретних розподіли ймовірностей.

4. Кожен двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей на множині точок (x_i, y_j) визначається двома незалежними одновимірними дискретними розподілами ймовірностей на множині точок x_i та y_j.

5. Для функції двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей 0 є найменшим, а 1 – найбільшим значенням.

6. Функція двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей є кусково-сталою функцією.

7. Функція двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей є зростаючою за кожною змінною.

8. Функцією двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей визначається ймовірність будь-якої події з відповідного ймовірнісного простору.

9. Функція двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей може мати лише скінченну кількість точок розриву.

2. Навести приклад функції двохвимірного розподілу ймовірностей, множина значень якої містить:
1) два елементи; 2) три елементи.

3. Двоє стрільців двічі роблять по черзі постріли у рухому мішень, причому фіксується результат кожного стрільця у цих пострілах.

1. Побудувати двохвимірний простір Ω елементарних подій (x_i, y_j).

2. Вважаючи, що при кожному пострілі ймовірність влучення у мішень для першого стрільця дорівнює $p_1 = 0{,}8$, а для другого – $p_2 = 0{,}7$, знайти ймовірність кожної елементарної події простору Ω.

3. Скласти двохвимірний розподіл ймовірностей на просторі Ω.

4. Знайти одновимірні розподіли ймовірностей $P(x=x_i)$ та $P(y=y_j)$ відповідно на множинах $\Omega_x=\{A_{x_i}: i=1,2,\ldots\}$ та $\Omega_y=\{B_{y_j}: j=1,2,\ldots\}$, де $A_{x_i}=\{(x,y)\in\Omega: x=x_i\}$, $B_{y_j}=\{(x,y)\in\Omega: y=y_j\}$.

5. Перевірити, чи є знайдені одновимірні розподіли ймовірностей незалежними.

6. Сформулювати і розв'язати задачу з додатковою умовою, що після двох влучень мішень падає і влучити у неї після цього неможливо.

7. Сформулювати і розв'язати задачу з іншою додатковою умовою, що після двох влучень мішень стає нерухомою і ймовірність влучення у неї для кожного стрільця дорівнює 1.

4. Перевірити, чи задає дана таблиця двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей:

а)

$y_j \backslash x_i$	0	1
0	0,5	0,1
1	0,05	0,4

б)

$y_j \backslash x_i$	0	1
0	0,1	0,2
1	0,3	0,4

в)

$y_j \backslash x_i$	0	1	2
0	0,12	0,12	0,16
1	0,09	0,09	0,12
2	0,09	0,09	0,12

г)

$y_j \backslash x_i$	0	1	2
0	0,16	0,09	0,09
1	0,12	0,09	0,09
2	0,12	0,12	0,12

і якщо так, то: 1) знайти відповідні одновимірні розподіли ймовірностей; 2) перевірити, чи є ці одновимірні розподіли незалежними; 3) визначити функцію $F(x,y)$ двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей; 4) побудувати графік знайденої функції $F(x,y)$; 5) вирішити, чи можна двохвимірний розподіл ймовірностей відновити за допомогою відповідних одновимірних розподілів.

5.1. Перевірити, чи є задана функція $F(x,y)$ функцією двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей:

$$1)\ F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ 0{,}01, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1,\\ 0{,}1, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>1,\\ 0{,}1, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>1,\\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$$

2) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1 \text{ або } y\le 1, \\ 0{,}1, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } 1<y\le 2, \\ 0{,}4, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } y>2, \\ 0{,}3, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } x>2, \\ 1, & \text{коли } x>2 \text{ і } y>2; \end{cases}$

3) $F(x,y)=\begin{cases} C_1, & \text{коли } x\le -1 \text{ або } y\le 1, \\ 0{,}5, & \text{коли } 1<x\le 0 \text{ і } 1<y\le 0, \\ 0{,}55, & \text{коли } 1<x\le 0 \text{ і } y>0, \\ 0{,}6, & \text{коли } 1<y\le 0 \text{ і } x>0, \\ C_2, & \text{коли } x>0 \text{ і } y>0; \end{cases}$

4) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0, \\ 0{,}12, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y<1, \\ 0{,}21, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 1<y\le 2, \\ 0{,}3, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>2, \\ 0{,}24, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } 1<x\le 2, \\ 0{,}4, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>2, \\ 0{,}42, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } 1<y\le 2, \\ 0{,}6, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } y>2, \\ 0{,}7, & \text{коли } 1<y\le 2 \text{ і } y>2, \\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

5) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0, \\ xy, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1, \\ 0{,}1, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>1, \\ 0{,}1, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>1, \\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

6) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a \text{ або } y\le b, \\ p_{00}, & \text{коли } a<x\le a+\alpha \text{ і } b<y\le b+\beta, \\ p_{00}+p_{01}, & \text{коли } a<x\le a+\alpha \text{ і } y>b+\beta, \\ p_{00}+p_{01}, & \text{коли } 0<y\le b+\beta \text{ і } x>a+\alpha, \\ 1, & \text{коли } x>a+\alpha \text{ і } y>b+\beta, \text{ де } \alpha>0 \text{ і } \beta>0; \end{cases}$

7) $F(x,y)=\begin{cases} C_1, & \text{коли } x\le 1 \text{ або } y\le 1, \\ 0{,}1, & \text{коли } (1<x\le 2 \text{ і } y>1) \text{ або } (1<y\le 2 \text{ і } x>1), \\ C_2, & \text{коли } x>2 \text{ і } y>2. \end{cases}$

2. Якщо $F(x, y)$ є функцією двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей, то побудувати таблицю відповідного розподілу ймовірностей.

3. Для знайденого розподілу ймовірностей знайти відповідні одновимірні розподіли ймовірностей та : 1) побудувати відповідні многокутники розподілу ймовірностей; 2) знайти відповідні функції розподілу ймовірностей та побудувати їх графіки; 3) перевірити, чи є знайдені одновимірні розподіли ймовірностей незалежними.

4. За допомогою функції $F(x, y)$ визначити ймовірнісну міру довільного прямокутника $[a;b) = [a_1;b_1) \times [a_2;b_2) \subset R^2$.

6.1. Довести, що кожен одновимірний дискретний розподіл ймовірностей $p_i = P(x_i) \geq 0$, $i \in \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ можна розглядати як двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей.

2. Знайти відповідну функцію $F(x, y)$ розподілу ймовірностей.

2.11. Абсолютно неперервні розподіли ймовірностей

Одновимірний абсолютно неперервний розподіл ймовірностей на неперервній множині Ω виду $\Omega = [a,b)$, $a < b$, $a \in (-\infty, \infty)$, $b \in (-\infty, \infty)$, можна задати за допомогою щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ такої, що:

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int_a^b f(x)dx = 1$

або за допомогою функції розподілу ймовірностей $F(x)$ такої, що:

1. $F(x) \geq 0$;
2. $F(x) = 0$, коли $x \leq a$;
3. $F(b) = \lim_{x \to b-0} F(x) = 1$ і $F(x) = 1$, коли $x > b$;
4. $F(x)$ неспадна, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$,
5. $F(x)$ неперервна на $[a;b)$.

При цьому $F(x) = P((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$,

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \text{ майже всюди на } R^1.$$

Якщо $A = \langle \alpha, \beta \rangle \subset \Omega = [a,b)$, то $P(A) = \int_{\langle \alpha, \beta \rangle} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$;

якщо

$$A=\bigcup_i \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \subset \Omega\,,\ (\alpha_i, \beta_i)\bigcap(\alpha_j, \beta_j)=\varnothing\,,\ i\neq j\,,$$

то за властивістю адитивності ймовірності

$$P(A)=P(\bigcup_i \langle \alpha_i, \beta_i \rangle)=\sum_i P(\langle \alpha_i, \beta_i \rangle)\,.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай на множині $\Omega=(-\infty,\infty)$ задано абсолютно неперервний розподіл ймовірностей через щільність розподілу $f(x)$ (Рис. 11.1):

$$f(x)=\begin{cases} c(1-|x|), \text{ коли } |x|\leq 1, \\ \quad 0, \qquad \text{коли } |x|\geq 1. \end{cases}$$

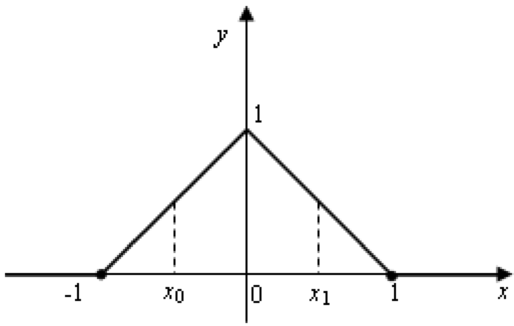


Рис. 11.1

Потрібно знайти константу c, функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, ймовірність $P\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ попадання на проміжок $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Враховуючи властивості щільності розподілу ймовірностей $f(x)$, одержимо:

1) із вимоги $f(x)\geq 0$ дістаємо, що $c\geq 0$;

2) із вимоги $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ для даного випадку випливає

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-1} 0\cdot dx+\int\limits_{-1}^{1} c\cdot(1-|x|)dx+\int\limits_{1}^{\infty} 0\cdot dx=2c\int\limits_{0}^{1}(1-x)dx=$$

$$=2c\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=2c\left(1-\frac{1}{2}\right)=c\,,$$

отже $c=1$.

Враховуючи, що при абсолютно неперервному розподілі ймовірностей $F(x)=P((-\infty,x))=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$, для даного випадку одержимо:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x\le -1, \\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & \text{коли} \quad -1\le x\le 0, \\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2}, & \text{коли} \quad 0\le x\le 1, \\ 1, & \text{коли} \quad 1\le x. \end{cases}$$

(бо $\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$ при $x_0\in[-1,\,0]$ дорівнює площі рівнобедреного прямокутного трикутника з основою $(-1;x_0)$ довжиною x_0+1, а $\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$ при $x_1\in[0,\,1]$ дорівнює площі трикутника з вершинами $(-1{,}0)$, $(0{,}1)$, $(1{,}0)$ без площі рівнобедреного прямокутного трикутника з основою $(x_1;1)$ довжиною $1-x_1$, (Рис. 11.1)).

Графік функції $F(x)$ подано на Рис. 11.2.

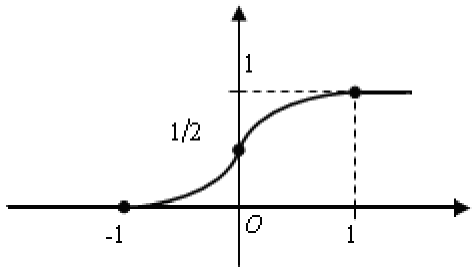


Рис. 11.2.

Обчислюючи ймовірність $P\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$, знайдемо

$$P\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)=\int\limits_{-1/2}^{1/2} f(x)dx=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Оскільки в даному випадку розподіл ймовірностей неперервний, то

$$P\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)=P\left(\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)=P\left(\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)=P\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right),$$

бо для будь якого x_0 імовірність $P(\{x_0\})$ попадання в окрему точку x_0 при неперервному розподілі ймовірностей дорівнює нулеві, що слідує із співвідношень:

$$P(\{x_0\})=\lim_{\Delta x\to 0}(F(x_0+\Delta x)-F(x_0))=0$$

в силу неперервності функції розподілу ймовірностей $F(x)$.

Вправа 2. *Рівномірний неперервний розподіл ймовірностей.*

Щільність рівномірного розподілу ймовірностей на відрізку $[a,\ b]$ має вигляд

$$f(x)=\begin{cases} c, & \text{якщо} \quad x\in[a,\ b]; \\ 0, & \text{якщо} \quad x\,\overline{\in}\,[a,\ b]. \end{cases}$$

Графік функції $f(x)$ подано на Рис. 11.3.

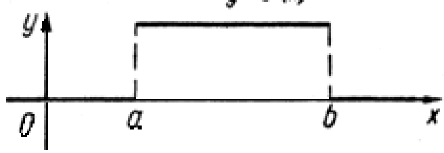


Рис. 11.3

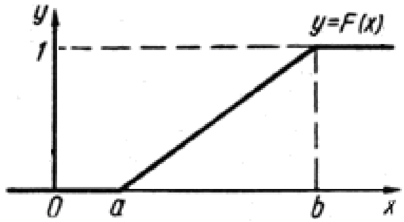


Рис. 11.4

Виходячи з вимоги $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx=1$, знаходимо сталу c:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx=\int\limits_{-\infty}^{a} 0\cdot dx+\int\limits_{a}^{b} c\,dx+\int\limits_{b}^{\infty} 0\cdot dx=c\int\limits_{a}^{b} dx=c(b-a)=1.$$

Звідси

$$c=\frac{1}{b-a}.$$

Нагадаємо, що в геометричному тлумаченні $\int\limits_{a}^{b} f(x)\ dx$ – це площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$ при будь-якому x), знизу – прямою $y=0$, зліва – прямою $x=a$, справа – прямою $x=b$. Таким чином, площа, що лежить нижче графіка функції $f(x)$, повинна дорівнювати 1.

Тому сталу c можна було визначити, виходячи з вимоги, що площа прямокутника, обмеженого прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=c$, повинна дорівнювати 1, тобто $c(b-a)=1$.

Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ у випадку рівномірного неперервного розподілу ймовірностей на відрізку $[a,b]$ має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a; \\ \int\limits_a^x f(x)\,dx = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \le x \le b; \\ 1 & \text{при} \quad b \le x. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ подано на Рис. 11.4.

Обчислимо тепер ймовірність попадання на відрізок $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty)$ за умови рівномірного розподілу ймовірностей на відрізку $[a, b]$.

Враховуючи, що $P([\alpha,\beta]) = \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$, дістаємо

$$P([\alpha,\beta])=\begin{cases} \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}, & \text{якщо} \quad a \le \alpha \le \beta \le b; \\ \dfrac{\beta-a}{b-a}, & \text{якщо} \quad \alpha \le a \le \beta \le b; \\ \dfrac{b-\alpha}{b-a}, & \text{якщо} \quad a \le \alpha \le b \le \beta; \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha \le a \le b \le \beta; \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha \le \beta \le a \quad \text{або} \quad b \le \alpha \le \beta. \end{cases}$$

Пригадуючи геометричне задання ймовірності, помічаємо, що там мався на увазі саме рівномірний розподіл ймовірностей у множині G, проте розглядалися тільки випадки типу $a \le \alpha \le \beta \le b$ (див. п. 2.4).

Вправа 3. *Нормальним розподілом ймовірностей* називають абсолютно неперервний розподіл ймовірностей, щільність якого має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (11.1)$$

Графік щільності нормального розподілу ймовірностей подано на Рис. 11.5. Цю криву називають *кривою Гаусса*.

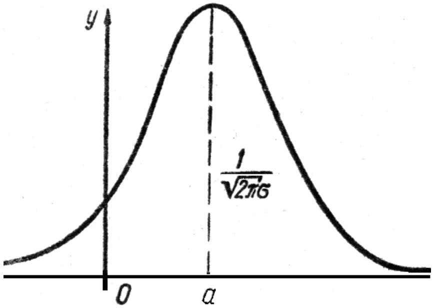


Рис. 11.5

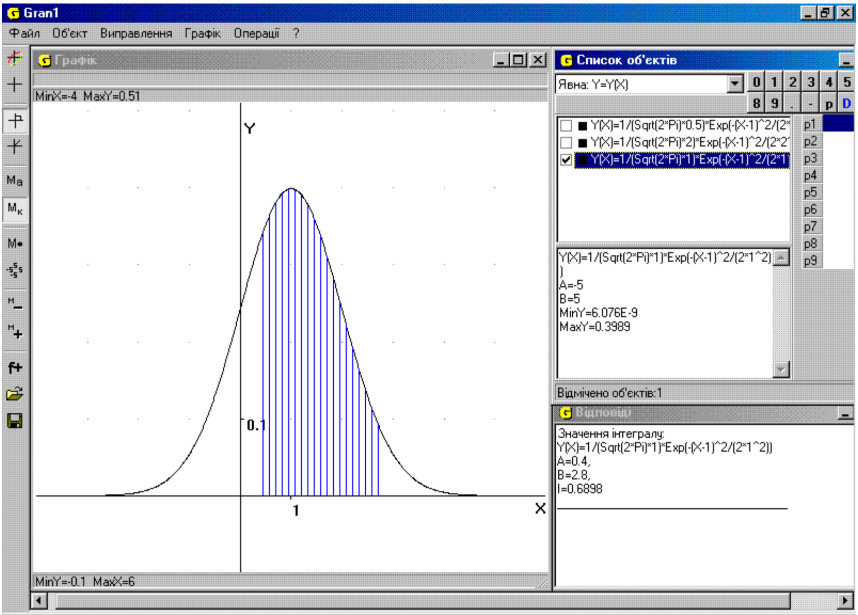


Рис. 11.6

Якщо $a = 0$, $\sigma = 1$, то говорять, що *нормальний розподіл центрований і нормований* (*або стандартний*).

При нормальному розподілі ймовірностей ймовірність попадання на відрізок $[\alpha,\ \beta]$ обчислюється за формулою

$$P([\alpha,\ \beta]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx. \tag{11.2}$$

Хоч для функції $e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ первісної в скінчених виразах і не існує, проте інтеграл виду (11.2) легко обчислюється за допомогою програмних засобів типу GRAN1, DERIVE (Рис. 11.6) чи інших математичних програм.

Виявляється, що при нормальному розподілі ймовірностей ймовірність попадання на відрізок $[a-3\sigma,\ a+3\sigma]$ практично дорівнює 1 (Рис. 11.7). Тому на практиці можна вважати, що ймовірність попадання за межі відрізка $[a-3\sigma,\ a+3\sigma]$ дорівнює нулю (*правило трьох сигм*).

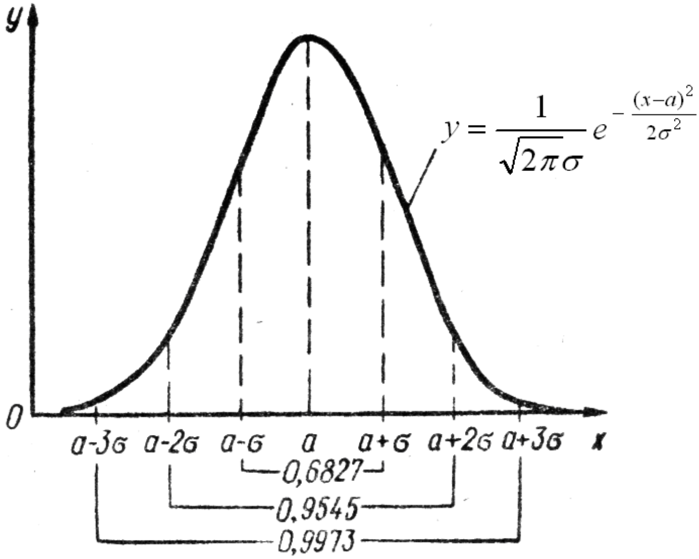


Рис. 11.7

Виконавши у (11.2) заміну змінних $\frac{x-a}{\sigma}=t$, ймовірність $P([\alpha,\ \beta])$ можна подати в дещо іншому вигляді

$$P([\alpha,\ \beta])=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (11.3)$$

Як і раніше, $\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ у точних виразах знайти не вдається. Якщо відсутні програмні засоби типу GRAN1, DERIVE, за допомогою яких можна обчислити інтеграли у (11.3), то для наближеного обчислення значень функції

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

яка називається *функцією Лапласа*, використовують спеціальні таблиці (див. Додаток 1).

Використовуючи функцію Лапласа, рівність (11.3) можна подати у вигляді

$$P([\alpha,\ \beta]) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (11.4)$$

Якщо $\alpha = a - \delta,\ \beta = a + \delta$, тоді

$$P(a - \delta,\ a + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Використовуючи програму GRAN1 чи DERIVE для обчислення значень функції Лапласа, для нормального розподілу ймовірностей (11.1) дістаємо

$$P(a - \sigma,\ a + \sigma) = 0{,}6827;$$
$$P(a - 2\sigma,\ a + 2\sigma) = 0{,}9545;$$
$$P(a - 3\sigma,\ a + 3\sigma) = 0{,}9973.$$

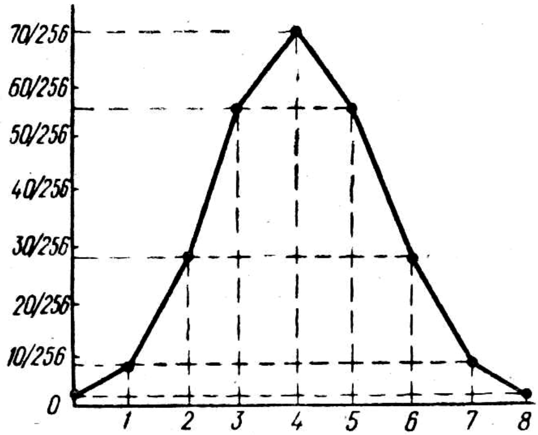


Рис. 11.8

Зазначимо, що при використанні програм типу GRAN1 чи DERIVE доцільно $P([\alpha,\ \beta])$ обчислювати безпосередньо за формулою $\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Нормальний розподіл ймовірностей широко використовується в математичній статистиці, теорії стріляння, при побудові таблиць стріляння, в теорії похибок вимірювань і наближених обчислень тощо.

Вправа 4. На заняттях з фізкультури учні виконують стрибки в довжину. Ймовірності різних довжин стрибків учнів розподілені за нормальним розподілом ймовірностей. При цьому центр $a = 3\,м$, середнє квадратичне відхилення $\sigma = 1\,м$. Знайти ймовірність того, що довжина стрибка навмання взятого учня становитиме від $2м$ до $4\,м$.

За формулою (16.4) маємо

$$P([2;4]) = \Phi\left(\frac{4-3}{1}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{1}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1).$$

Скориставшись програмою GRAN1, знаходимо

$$\Phi(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0{,}3413,$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P([2;4]) = 2\cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен ймовірнісний простір визначається неперервним розподілом ймовірностей.

2. Кожен неперервний розподіл ймовірностей можна задати за допомогою щільності розподілу ймовірностей.

3. 1) Якщо розподіл ймовірностей не є неперервним, то відповідний простір елементарних подій є скінченним.

2) Обернене твердження є правильним.

4. Кожна неперервна функція розподілу ймовірностей є абсолютно неперервною.

5. Якщо $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $x \in R$, то $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей.

6. Абсолютно неперервна функція розподілу ймовірностей є скрізь диференційовною.

7. Абсолютно неперервна функція розподілу ймовірностей може не мати ні найменшого, ні найбільшого значень.

8. Множиною значень будь-якої функції розподілу ймовірностей є відрізок $[0;1]$.

9. Через абсолютно неперервну функцію розподілу ймовірностей визначається ймовірність будь-якої події з відповідного ймовірнісного простору.

10. Для будь-якої абсолютно неперервної функції розподілу ймовірностей відповідна щільність розподілу:

1) завжди неперервна;

2) може мати скінченну кількість точок розриву;

3) може мати зчисленну кількість точок розриву;

4) завжди обмежена.

11. Якщо $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ і x_0 – точка розриву функції $f(x)$, то в цій точці функція $F(x)$:

1) може бути розривною;
2) може бути диференційовною;
3) завжди недиференційовна.

12. Рівномірний неперервний розподіл ймовірностей є абсолютно неперервним.

13. Рівномірний неперервний розподіл ймовірностей може бути сингулярним.

14. Щільність рівномірного розподілу ймовірностей є сталою на $(-\infty;+\infty)$.

15. Функція рівномірного неперервного розподілу ймовірностей є лінійною на певному проміжку $<a,b>$, а на будь-якому іншому проміжку $<c,d>$, що не перетинається з $<a,b>$, ця функція тотожно дорівнює 0 або 1.

16. Нормальний розподіл ймовірностей є абсолютно неперервним розподілом.

17. Якщо щільність розподілу ймовірностей $f(x)=\frac{e^{2x}}{\pi e}\cdot e^{-x^2}$, то цей розподіл є нормальним.

18. Щільність $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ нормального розподілу ймовірностей:

1) є монотонною функцією;
2) має два проміжки монотонності;
3) має єдину точку екстремуму;
4) зростає на проміжку $(-\infty;a)$;
5) спадає на проміжку $(a;+\infty)$;
6) має $\max\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

19. Інтеграл $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ обчислюється у скінченному вигляді.

20. Кожен нормальний розподіл ймовірностей є центрованим і нормованим. Якщо $f(x)$ – щільність центрованого розподілу ймовірностей, то $f(x)$ парна функція.

21. Якщо нормальний розподіл ймовірностей центрований, то відповідна функція розподілу ймовірностей є: 1) парною; 2) непарною;3) ні парною, ні непарною.

22. Функція Лапласа є парною функцією.

23. Якщо нормальний розподіл ймовірностей має параметри a і σ, то:
1) величина $P([a-\sigma;\ a+\sigma])$ залежить від a і σ;
2) величина $P([a-\sigma;\ a+\sigma])$ не залежить від a;
3) величина $P([a-3\sigma;\ a+3\sigma])$ залежить від a і σ;
4) величина $P([a-3\sigma;\ a+3\sigma])$ не залежить від a.

24. При досить великих n біноміальний розподіл ймовірностей близький до нормального з параметрами $a = np$ і $\sigma = \sqrt{npq}$.

25. Використовуючи функцію Лапласа, можна обчислити ймовірність $P([\alpha;\ \beta])$ для будь якого нормального розподілу ймовірностей і будь-якого відрізка $[\alpha;\ \beta]$.

2. Побудувати абсолютно неперервну функцію розподілу ймовірностей, для якої відповідна щільність розподілу є:
1) скрізь неперервною;
2) має лише одну точку розриву;
3) має дві точки розриву.

3.1. Перевірити, чи є задана функція $f(x)$ щільністю розподілу ймовірностей на якомусь скінченному проміжку $[a;b)$ та при якомусь значенні сталої c, і визначити такий проміжок та значення сталої c.

1) $f(x) = 2x+1$;

2) $f(x) = 1-|x|$;

3) $f(x) = [x]$ – ціла частина x;

4) $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$;

5) $f(x) = C\sin x$;

6) $f(x) = \ln x$;

7) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$;

8) $f(x) = \dfrac{C|x|}{x}$;

9) $f(x) = \dfrac{C|\cos x|}{\cos x}$;

10) $f(x) = xe^{-x^2}$;

11) $f(x) = \ln x - x$;

12) $f(x) = \{x\} = x - [x]$;

13) $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}},\ \alpha > 0$;

14) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x^2}$;

15) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ коли } x \in Q, \\ 0, \text{ коли } x \notin Q, \end{cases}$

16) $f(x) = \begin{cases} C, \text{ коли } x \notin Q, \\ 0, \text{ коли } x \in Q, \end{cases}$

де Q – множина раціональних чисел;

17) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha}, \text{ коли } |x-x_0| \le \alpha, \\ 0, \quad \text{коли } |x-x_0| > \alpha; \end{cases}$

18) $f(x) = \dfrac{1}{\pi\alpha}\dfrac{1}{1+(\dfrac{x-x_0}{\alpha})^2}$;

19) $f(x)=\frac{1}{2\beta}e^{-\frac{|x-x_0|}{\beta}}$; 20) $f(x)=Cx(1-x)^3$.

2. Якщо $f(x)$ є щільністю розподілу ймовірностей на скінченному проміжку $[a;b)$, то: 1) знайти відповідну функцію $F(x)$ розподілу ймовірностей та побудувати її графік; 2) обчислити ймовірність події A, що є: а) деякою відкритою множиною $G\subset[a;b)$ з двома складовими інтервалами; б) деякою замкненою множиною $F\subset[a;b)$; 3) визначити, у яких точках $x\in[a;b)$ правильна рівність $F'(x)=f(x)$.

4.1. Перевірити, чи є функція $F(x)$ функцією абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на якомусь скінченному проміжку $[a;b)$. Визначити такий проміжок і невідомі константи, що є у виразах функцій:

1) $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; 2) $F(x)=x^2-2x-3$;

3) $F(x)=1-x^3$; 4) $F(x)=x-\ln x$;

5) $F(x)=\arccos x$; 6) $F(x)=c^x$;

7) $F(x)=\alpha x+\beta$; 8) $F(x)=\operatorname{arcctg} x$;

9) $F(x)=\frac{|x^2+5x+6|}{x^2+x}$; 10) $F(x)=x\ln x$;

11) $F(x)=\begin{cases}\frac{|x^2+5x+6|}{x^2+5x+6}, & \text{коли } x\neq-3 \text{ і } x\neq-2;\\ C_1, & \text{коли } x=-3,\\ C_2, & \text{коли } x=-2;\end{cases}$

12) $F(x)=\begin{cases}\frac{|\sin x|}{\sin x}, & \text{коли } x\neq\pi n, n\in Z,\\ C_n, & \text{коли } x=\pi n,\ n\in Z,\ C_n - \text{деякі сталі};\end{cases}$

13) $F(x)=(x-x_0)e^x$; 14) $F(x)=\frac{\ln x}{x}$;

15) $F(x)=1+\cos x$; 16) $F(x)=1+\sin x$;

17) $F(x)=1-\cos x$; 18) $F(x)=\operatorname{tg} x$.

2. Якщо $F(x)$ є функцією абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на якомусь скінченому проміжку $[a;b)$, то: 1) знайти відповідну щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ та побудувати її графік; 2) обчислити ймовірність події A, що є: а)об’єднанням двох

проміжків $[\alpha;\beta)$ і $[\gamma;\delta)$, що не перетинаються; б) зчисленною множиною; в) множиною ірраціональних чисел проміжку $[a;b)$; 3) визначити, у яких точках правильна рівність $F'(x)=f(x)$; 4) вирішити, чи можна стверджувати, що: а) $P([\alpha;\beta))=P([\alpha;\beta])$; б) $P([\alpha;\beta])=P([\gamma;\delta])$, коли $\beta-\alpha=\delta-\gamma$.

5*. Довести, що коли $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ – функція абсолютно неперервного розподілу ймовірностей, а $f(x)$ – відповідна щільність розподілу ймовірностей, то рівність $F'(x)=f(x)$ може не виконуватися для нескінченної кількості точок *x*.

6.1. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<0,\\ \dfrac{x}{a^2}, & \text{коли } 0<x\le a,\\ \dfrac{2a-x}{a^2}, & \text{коли } a<x\le 2a,\\ 0, & \text{коли } x>2a \end{cases}$$

є щільністю розподілу ймовірностей на проміжку $[0;2a]$.

2. З'ясувати, чому цей *розподіл* називають *трикутним*.

3. Знайти відповідну функцію $F(x)$ розподілу ймовірностей.

4. Довести, що $f(x)=\dfrac{1}{a^2}(x_+ -2(x-a)_+)$, де $x_+=\begin{cases} x, & \text{коли } x\ge 0,\\ 0, & \text{коли } x<0.\end{cases}$

7.1. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{коли } x\ge 0,\\ 0, & \text{коли } x<0 \end{cases}$$

є щільністю розподілу ймовірностей на проміжку $[0;+\infty)$ для будь-якої сталої $\lambda>0$, проте не є щільністю розподілу ймовірностей на будь-якому скінченному проміжку $[a;b)$.

2. З'ясувати, чи існує стала $C>0$ і скінчений проміжок $[a;b)$, для яких функція $f_1(x)=Cf(x)$, вже є щільністю розподілу ймовірностей на деякому скінченному проміжку $[a;b)$.

3. Порівняти функції розподілу ймовірностей, що відповідають щільностям $f(x)$ та $f_1(x)$.

8.1. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & \text{коли } x>0,\\ 0, & \text{коли } x\le 0\end{cases}$$

є щільністю розподілу ймовірностей на проміжку $[0;+\infty)$. Цей розподіл називають *гамма-розподілом з параметрами* $\alpha>0$ і $\beta>0$, а функцію $\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ називають *гамма-функцією.*

2. З'ясувати, чи існує стала $C>0$ і скінчений проміжок $[a;b)$, для яких функція $f_1(x)=Cf(x)$, $x\in[a;b)$, вже є щільністю розподілу ймовірностей на скінченному проміжку $[a;b)$.

3. Порівняти функції розподілу ймовірностей, що відповідають щільностям $f(x)$ та $f_1(x)$.

4. Знайти зв'язок показникового розподілу з гамма-розподілом.

9.1. Довести, що функція $f(x)=\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ є щільністю розподілу (*розподілу Лапласа*) ймовірностей на проміжку $(-\infty;+\infty)$ для будь-якої сталої $\lambda>0$ і не є щільністю розподілу ймовірностей на будь-якому скінченному проміжку $[a;b)$.

2. З'ясувати, чи існує стала $C>0$ і скінченний проміжок $[a;b)$, для яких функція $f_1(x)=Cf(x)$ є щільністю розподілу ймовірностей на скінченному проміжку $[a;b)$.

3. Порівняти функції розподілу ймовірностей, що відповідають щільностям $f(x)$ та $f_1(x)$.

10.1. Довести, що функція $f(x)=\dfrac{1}{\pi\,\alpha}\dfrac{1}{1+(\dfrac{x-x_0}{\alpha})^2}$ є щільністю розподілу ймовірностей (*розподілу Коші*) на проміжку $(-\infty;+\infty)$ для будь-яких сталих $x_0\in R$ та $\alpha>0$ і не є щільністю розподілу ймовірностей на будь-якому скінченному проміжку $[a;b)$.

2. З'ясувати, чи існує стала $C>0$ і скінченний проміжок $[a;b)$, для яких функція $f_1(x)=Cf(x)$ є щільністю розподілу ймовірностей на скінченному проміжку $[a;b)$.

3. Порівняти функції розподілу ймовірностей, що відповідають щільностям $f_1(x)$ та $f(x)$.

2.12. Двохвимірний абсолютно неперервний розподіл ймовірностей

Двохвимірний абсолютно неперервний розподіл ймовірностей на деякій обмеженій двохвимірній неперервній множині $\Omega = G$ можна задати за допомогою щільності двохвимірного розподілу ймовірностей $f(x, y)$ такої, що:

1. $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in R^2$;
2. $\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = 1$,

або за допомогою функції двохвимірного розподілу ймовірностей $F(x, y)$ такої, що:

1. $F(x, y) \geq 0$ і $F(x, y) \leq 1$, $(x, y) \in R^2$;
2. $F(x, y) = 0$, якщо $x \leq \inf\limits_{(x,y)\in G} x$ або $y \leq \inf\limits_{(x,y)\in G} y$;
3. $F(x, y)$ неспадна за кожним із своїх аргументів.
4. $F(x, y) = 1$, якщо $x \geq \sup\limits_{(x,y)\in G} x$ і $y \geq \sup\limits_{(x,y)\in G} y$;
5. $F(x, y)$ неперервна на R^2.

При цьому

$$F(x, y) = P((-\infty, x) \times (-\infty, y)) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y) dxdy,$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \text{ майже всюди на } R^2.$$

Для довільної події A $P(A) = \iint\limits_A f(x, y)\, dxdy$. Якщо A – прямокутник виду $A = [a, b] \times [c, d)$, тоді

$$P(A) = P([a, b) \times [c, d)) = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x, y) dy \right\} dx =$$

$$= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

В механічній інтерпретації значення $F(x_0, y_0)$ є маса, що припадає на множину $(-\infty, x_0) \times (-\infty, y_0) = \{(x, y) : x < x_0 \text{ і } y < y_0\}$, за умови, що на множині $\Omega = G$ в площині xOy розподілена одинична маса із щільністю $f(x, y)$.

Знаючи двохвимірний неперервний розподіл ймовірностей, можна знайти відповідні одновимірні розподіли ймовірностей вздовж осі Ox та вздовж осі Oy:

$$P((-\infty, x) \times (-\infty, +\infty)) = F(x, +\infty) = P_1((-\infty, x)) = F_1(x),$$

$$P((-\infty, \infty) \times (-\infty, y)) = F(+\infty, y) = P_2((-\infty, y)) = F_2(y)$$

або через щільність розподілу ймовірностей:

$$P((-\infty, x)\times(-\infty,+\infty)) = \int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right\}dx = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx\,,$$

$$P((-\infty, \infty)\times(-\infty, y)) = \int_{-\infty}^{y}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy\,,$$

де $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$.

Слід зауважити, що знаючи функції $F_1(x)$ та $F_2(y)$ чи щільності $f_1(x)$ та $f_2(y)$ одновимірних розподілів ймовірностей, не завжди можна знайти функцію $F(x,y)$ чи щільність $f(x,y)$ двохвимірного розподілу ймовірностей.

Якщо виявляється, що

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y) \text{ чи } f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,,$$

то *розподіли ймовірностей*, що визначаються функціями $F_1(x)$ та $F_2(y)$ чи щільностями $f_1(x)$ та $f_2(y)$, називаються *незалежними*.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай задано рівномірний розподіл ймовірностей в квадраті $[0,1]\times[0,1]$.

Тоді щільність розподілу ймовірностей матиме вигляд (Рис. 12.1):

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{коли} \quad (x,y)\in[0,1]\times[0,1], \\ 0, & \text{коли} \quad (x,y)\,\overline{\in}\,[0,1]\times[0,1]. \end{cases}$$

При так заданому розподілі ймовірностей одержимо (Рис. 12.1):

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x\,\overline{\in}\,[0,1], \\ 1, & \text{коли} \quad x\in[0,1]. \end{cases}$$

Аналогічно

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad y\,\overline{\in}\,[0,1], \\ 1, & \text{коли} \quad y\in[0,1]. \end{cases}$$

Тоді $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} 1, & \text{коли} \quad (x,y)\in[0,1]\times[0,1], \\ 0, & \text{коли} \quad (x,y)\,\overline{\in}\,[0,1]\times[0,1]. \end{cases}$

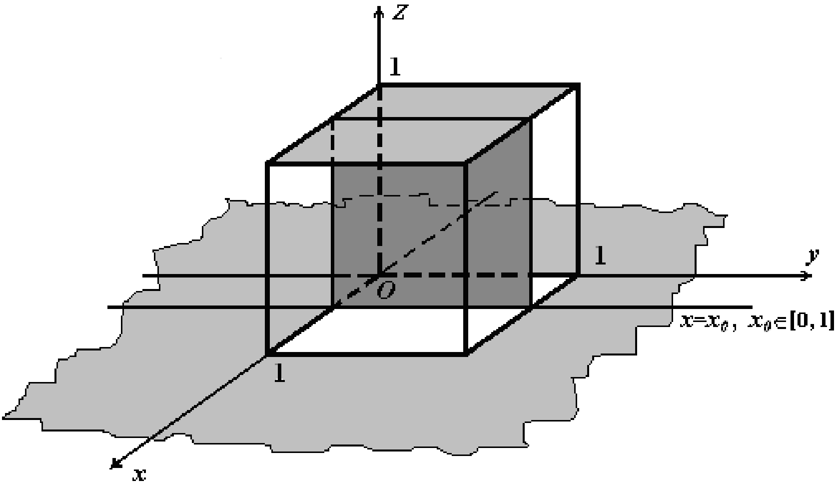


Рис. 12.1

Отже в даному випадку розподіли ймовірностей, що визначаються щільностями $f_1(x)$ та $f_2(y)$, виявляються незалежними.

Для $F(x,y)$ одержуємо (Рис. 12.2):

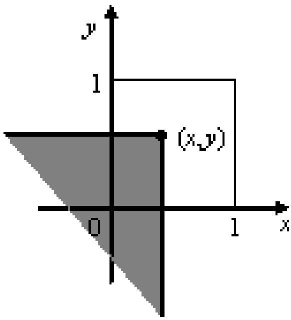


Рис. 12.2

$$F(x,y)=P((-\infty,x)\times(-\infty,y))=\int\limits_{-\infty}^{x}\left\{\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dy\right\}dx=$$

$$=\begin{cases} 0, \text{ коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ xy, \text{ коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ x, \text{ коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 1\le y,\\ y, \text{ коли } 1\le x \text{ і } 0\le y\le 1,\\ 1, \text{ коли } 1\le x \text{ і } 1\le y.\end{cases}$$

Поверхню, що описується залежністю $z = F(x, y)$, зображено на Рис. 12.3.

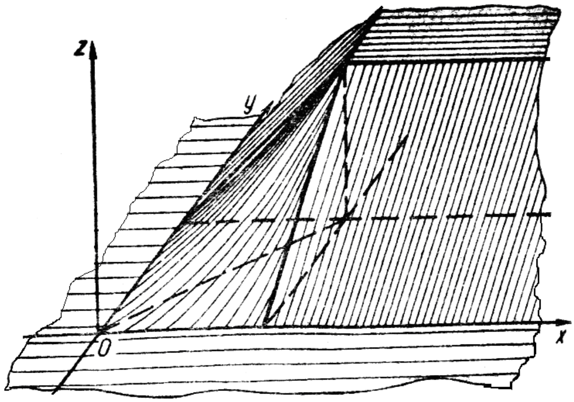


Рис. 12.3

Із виразу для $F(x, y)$ одержуємо:

$$F(x,+\infty) = F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ x, & \text{коли } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{коли } 1 \le x. \end{cases}$$

Аналогічно

$$F(+\infty, y) = F_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } y \le 0, \\ y, & \text{коли } 0 \le y \le 1, \\ 1, & \text{коли } 1 \le y. \end{cases}$$

Як бачимо, в розглядуваному випадку $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$, що видно також із співвідношень:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_1(x) f_2(y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy = F_1(x)F_2(y).$$

Вправа 2. Щільність двохвимірного нормального розподілу імовірностей у загальному випадку має вигляд (Рис. 12.4)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)},$$

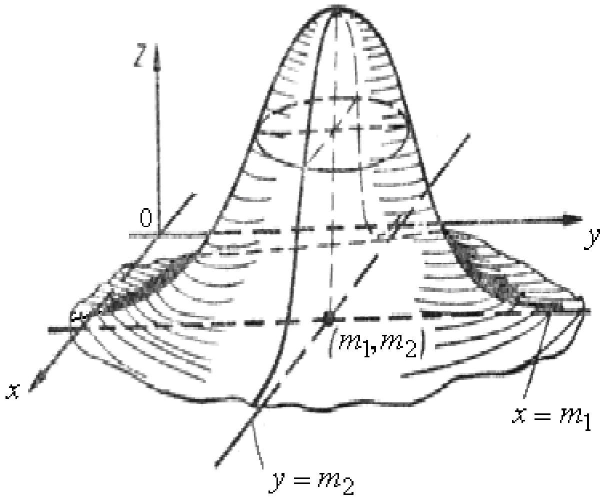


Рис. 12.4

де центр двохвимірного нормального розподілу ймовірностей знаходиться в точці (m_1, m_2), σ_1^2 – дисперсія розсіювання ймовірностей навколо центра вздовж осі Ox, σ_2^2 – вздовж осі Oy.

Параметр r характеризує залежність розподілів, що описуються щільностями $f_1(x)$ та $f_2(y)$. Якщо $r=0$, то розподіли виявляються незалежними. Якщо $r \neq 0$, розподіли залежні.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен двохвимірний неперервний розподіл ймовірностей можна задати за допомогою щільності розподілу ймовірностей.

2. Кожна функція двохвимірного неперервного розподілу ймовірностей є зростаючою за кожною змінною.

3.Існують функції двохвимірних неперервних розподілів ймовірностей, що не є абсолютно неперервними.

4. 1) Якщо простір елементарних подій Ω є скінченним, то відповідна функція розподілу ймовірностей не є абсолютно неперервною.

2) Обернене твердження є правильним.

5. Кожен неперервний двохвимірний розподіл ймовірностей цілком визначається двома незалежними одновимірними неперервними розподілами ймовірностей.

6. Щільність розподілу для абсолютно неперервної функції розподілу ймовірностей: а) завжди неперервна; б) може мати одну точку розриву; в) може бути необмеженою.

7. Двохвимірний нормальний розподіл ймовірностей не є абсолютно неперервним.

8. Двохвимірний нормальний розподіл ймовірностей цілком визначається двома одновимірними нормальними розподілами.

9. Параметри r, m_1, σ_1, m_2, σ_2 двохвимірного нормального розподілу ймовірностей – це будь-які фіксовані дійсні числа.

2. Побудувати функцію двохвимірного неперервного розподілу ймовірностей, для якої: 1) існує неперервна щільність розподілу ймовірностей; 2) існує щільність розподілу, множина значень якої містить лише два елементи; 3) не існує щільності розподілу ймовірностей.

3. 1. Перевірити, чи є задана функція $f(x,y)$ щільністю двохвимірного абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на якомусь скінченному прямокутнику $[a;b)=[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)\subset R^2$. Визначити прямокутник $[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$, на якому функція $f(x,y)$ буде щільністю розподілу ймовірностей (у разі наявності невідомих констант визначити їх):

1) $f(x,y)=x$; 2) $f(x,y)=y$;

3) $f(x,y)=x+y$; 4) $f(x,y)=xy$;

5) $f(x,y)=x-y$; 6) $f(x,y)=-x-y$;

7) $f(x,y)=\begin{cases}0, \text{ коли } x\in Q \text{ або } y\in Q,\\ 1, \text{ коли } x\notin Q \text{ і } y\notin Q;\end{cases}$

8) $f(x,y)=\begin{cases}1, \text{ коли } x\in Q \text{ і } y\in Q,\\ 0, \text{ коли } x\notin Q \text{ або } y\notin Q,\end{cases}$

де Q – множина раціональних чисел.

9) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, \text{ коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ c, \text{ коли } 1< x\le 2 \text{ і } 1< y\le 2,\\ 0 \text{ для інших точок } (x,y);\end{cases}$

10) $f(x,y)=e^{x+y}$; 11) $f(x,y)=xe^{xy}$;

12) $f(x,y)=[x]\,[y]$; 13) $f(x,y)=\{x\}\,\{y\}$;

14) $f(x,y)=1-\dfrac{|xy|}{xy}$; 15) $f(x,y)=\dfrac{|xy|}{xy}-1$;

16) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$; 17) $f(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$;

18) $f(x,y)=\begin{cases}1, \text{ коли } 0< y<\dfrac{1}{x^2},\\ 0 \text{ в інших точках } (x,y);\end{cases}$

19) $f(x,y)=\begin{cases} 1, \text{ коли } 0<y<\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}-1, \\ 0 \text{ в інших точках } (x,y); \end{cases}$

20) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4\alpha\beta}, \text{ коли } |x-x_0|\le\alpha \text{ і } |y-y_0|\le\beta, \\ 0, \text{ коли } |x-x_0|>\alpha \text{ або } |y-y_0|>\beta_0; \end{cases}$

21) $f(x,y)=\dfrac{c}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

2. Якщо $f(x,y)$ є щільністю двохвимірного розподілу ймовірностей в якомусь скінченному прямокутнику $[a;b)=[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)\subset R^2$, то: 1) знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей $F(x,y)$, $(x,y)\in[a;b]\subset R^2$ та побудувати її графік; 2) обчислити ймовірність попадання: а) в замкнений прямокутник, що міститься в $[a;b)$; б) в доповнення замкненого прямокутника до прямокутника $[a;b)$; 3) визначити, у яких точках $x\in[a;b)$ правильна рівність $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y)=f(x,y)$; 4) з'ясувати, чи можна стверджувати, що $P([a_1;b_1)\times[a_2;b_2))=P([a_2;b_2)\times[a_1;b_1))$; 5) знайти відповідні одновимірні розподіли ймовірностей та перевірити їх незалежність.

4. Нехай функція $f(x,y)$ є щільністю розподілу ймовірностей на скінченному прямокутнику $[a;b)=[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$, а $F(x,y)$ – відповідна функція розподілу ймовірностей. Довести наступні властивості:

1) $F(x,y)\ge 0$ і $F(x,y)\le 1$, $(x,y)\in R^2$;

2) $F(x,y)=0$, якщо $x\le a_1$ або $y\le b_1$;

3) $F(x,y)$ є неспадною функцією за кожною змінною;

4) $F(x,y)=F(x,b_2)$, коли $a_1\le x<b_1$, а $y\ge b_2$;

5) $F(x,y)=F(b_1,y)$, коли $a_2\le y<b_2$, а $x\ge b_1$;

6) $F(x,y)=1$, коли $x\ge b_1$ і $y\ge b_2$;

7) функції $F(x,y)$, $F(x,b_2)$ і $F(b_1,y)$ є неперервними у своїх областях визначення.

5. 1. Перевірити, чи є задана функція $F(x,y)$ функцією двохвимірного абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на якомусь скінченному прямокутнику $[a;b)=[a_1;b_1]\times[a_2;b_2]$ (у разі наявності невідомих констант визначити їх):

1) $F(x,y)=xy$; 2) $F(x,y)=x+y$;

3) $F(x,y)=\begin{cases} xy, \text{ коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ 0, \quad \text{коли } x\notin[0;1] \text{ або } y\notin[0;1];\end{cases}$

4) $F(x,y)=\begin{cases} xy, \text{ коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ 0, \quad \text{коли } x<0 \text{ або } y<0,\\ 1, \quad \text{коли } (x\ge 0 \text{ і } y>1) \text{ або } (y\ge 0 \text{ і } x>1);\end{cases}$

5) $F(x,y)=\begin{cases} xy, \text{ коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ 0, \text{ коли } x<0 \text{ або } y<0,\\ x, \text{ коли } 0\le x\le 1 \text{ і } y>1,\\ y, \text{ коли } 0\le y\le 1 \text{ і } x>1,\\ 1, \text{ коли } x>1 \text{ і } y>1;\end{cases}$

6) $F(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{коли } a_1\le x\le b_1 \text{ і } a_2\le y\le b_2,\\ 0, & \text{коли } x<a_1 \text{ або } y<a_2,\\ x+b_2, & \text{коли } a_1\le x\le b_1 \text{ і } y>b_2,\\ b_1+y, & \text{коли } a_2\le y\le b_2 \text{ і } x>b_1,\\ 1, & \text{коли } x>b_1 \text{ і } y>b_2;\end{cases}$

7) $F(x,y)=(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2})$; 8) $F(x,y)=1-e^{-x^2}-e^{-y^2}$;

9) $F(x,y)=C(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2})$;

10) $F(x,y)=\begin{cases} C(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}), & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0,\\ C(1-e^{-x^2})(1-e^{-1}), & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } y>1,\\ C(1-e^{-1})(1-e^{-y^2}), & \text{коли } 0\le y\le 1 \text{ і } x>1,\\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1;\end{cases}$

11) $F(x,y)=\begin{cases} \ln xy, & \text{коли } x\ge 1 \text{ і } y\ge 1,\\ 0, & \text{коли } x<1 \text{ або } y<1;\end{cases}$

12) $F(x,y)=\begin{cases} c\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{arctg} y, & \text{коли } x\ge 0 \text{ і } y\ge 0,\\ 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0;\end{cases}$

13) $F(x,y)=\begin{cases} c\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{arctg} y, & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0,\\ \dfrac{c\pi}{4}\operatorname{arctg} x, & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } y>1,\\ \dfrac{c\pi}{4}\operatorname{arctg} y, & \text{коли } 0\le y\le 1 \text{ і } x>1,\\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1;\end{cases}$

$$14)\ F(x,y)=\begin{cases} c_1(1-\frac{1}{x}), & \text{коли } 1\le x\le 2,\ y\ge 1,\\ \frac{c_1}{2}, & \text{коли } 1\le y\le 2,\ x>2,\\ c_2(1-\frac{1}{y}), & \text{коли } 2\le y\le 3,\ x>2,\\ \frac{2c_2}{3}, & \text{коли } 2<x\le 3,\ \text{а } y>3,\\ 1, & \text{коли } x>3 \text{ і } y>3. \end{cases}$$

2. Якщо $F(x, y)$ є функцією двохвимірного абсолютно неперервного розподіл ймовірностей на якомусь скінченному прямокутнику $[a;b)=[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$, то: 1) знайти відповідну щільність розподілу ймовірностей; 2) знайти відповідні одновимірні розподіли ймовірностей, перевірити їх незалежність, з'ясувати, чи є вони абсолютно неперервними; 3) знайти ймовірність події $A=([a_1;b_1)\times[a_2;b_2))\setminus([\alpha;\beta)\times[\gamma;\delta))$.

6. Нехай $f(x)$ є щільністю одновимірного розподілу ймовірностей на проміжку $[a;b)$.

1. Довести, що функція $f_1(x,y)=f(x)$, $(x,y)\in R^2$, є щільністю двохвимірного розподілу ймовірностей на прямокутнику $[a;b)\times[0;1)$.

2. Знайти відповідну функцію $F(x,y)$ двохвимірного абсолютно неперервного розподілу ймовірностей.

7. Нехай функція $F(x)$ є функцією одновимірного абсолютного неперервного розподілу ймовірностей на проміжку $[a;b]$.

1. Перевірити, чи є задані функції $F_1(x,y)$ функціями двохвимірного абсолютного неперервного розподілу ймовірностей на прямокутнику $[a;b]\times[0;1]$:

1) $F_1(x,y)=F(x)$, $(x,y)\in R^2$;

2) $F_1(x,y)=yF(x)$, $(x,y)\in R^2$;

$$3)\ F_1(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<a \text{ або } y<0,\\ yF(x), & \text{коли } a\le x\le b \text{ і } 0\le y\le 1,\\ F(x), & \text{коли } 1\le x\le b \text{ і } y>1,\\ y, & \text{коли } 0\le y\le 1 \text{ і } x>b,\\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1. \end{cases}$$

2. Якщо $F_1(x, y)$ є функцією двохвимірного абсолютно неперервного розподілу ймовірностей, то: 1) знайти відповідну щільність розподілу ймовірностей; 2) знайти відповідні одновимірні розподіли ймовірностей та перевірити їх незалежність.

8. Нехай $f_1(x)$ та $f_2(y)$ – щільності одновимірних розподілів ймовірностей на проміжках $[a_1;b_1)$ та $[a_2;b_2)$.

1. Довести, що функція $f(x, y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, $(x, y)\in[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$ є щільністю двохвимірного розподілу ймовірностей на прямокутнику $[a;b] = [a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$.

2. Знайти відповідну функцію $F(x, y)$ двохвимірного розподілу ймовірностей.

9. Нехай $F_1(x)$ та $F_2(y)$ – функції абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на скінченних проміжках відповідно $[a_1;b_1)$ та $[a_2;b_2)$.

1. Довести, що $F(x, y) = F_1(x)\cdot F_2(y)$ є функцією двохвимірного абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на скінченному прямокутнику $[a;b) = [a_1;b_1)\times[a_2;b_2)$.

2. Знайти відповідну щільність розподілу ймовірностей.

2.13. Деякі числові характеристики дискретних розподілів ймовірностей

Координата x_c *центра одновимірного дискретного розподілу* (розсіювання) *ймовірностей* $(x_i,\ P(\{x_i\}))$, $i\in\overline{1,\ k}$, (або $i\in N$), обчислюється за формулою:

$$x_c = \sum_{i=1}^{k} x_i P(\{x_i\}) \text{ чи } x_c = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\{x_i\})$$

за умови абсолютної збіжності останнього ряду.

Очевидно центр розподілу ймовірностей буде знаходитись ближче до тих точок x_i, на які припадають більші ймовірності.

В механічній інтерпретації x_c є координатою центра мас загальної одиничної маси, розподіленої на множині $\Omega = \{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$ так, що на точку x_i припадає маса $P(\{x_i\})$, $i\in\overline{1,\ k}$ або $i\in N$.

Дисперсією одновимірного дискретного розподілу ймовірностей $(x_i,\ P(\{x_i\}))$, $i\in\overline{1,\ k}$ або $i\in N$, з центром розподілу x_c називається число (скінченне чи нескінченне)

$$D = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_c)^2 P(\{x_i\}) \text{ чи } D = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_c)^2 P(\{x_i\}).$$

Дисперсія характеризує величину розсіювання (чи скупченості) ймовірностей $P(\{x_i\})$, $i\in\overline{1,\ k}$ або $i\in N$, навколо центра розподілу ймовірностей x_c.

Часто розсіювання характеризують за допомогою *середнього квадратичного відхилення* σ, яке визначається за формулою $\sigma = \sqrt{D}$.

В механічній інтерпретації дисперсія є моментом інерції системи мас $P(\{x_i\})$, $\sum_i P(\{x_i\}) = 1$, відносно центра розсіювання x_c.

Приклад 13.1. Нехай задано рівномірний дискретний розподіл ймовірностей на множині $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, тобто $P(\{x_i\}) = \frac{1}{k}$, $i \in \overline{1, k}$.

Тоді

$$x_c = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i ,$$

тобто в даному випадку координата центра розподілу ймовірностей дорівнює середньому арифметичному координат x_i, $i \in \overline{1, k}$.

Обчислюючи дисперсію, одержимо:

$$D = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i)^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i)^2 .$$

Для двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей $P(\{x_j, y_i\})$, $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, s}$, *координати центра розподілу ймовірностей* обчислюються за формулами

$$x_c = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} x_j P(\{x_j, y_i\}) = \sum_{j=1}^{s} x_j \sum_{i=1}^{m} P(\{x_j, y_i\}) = \sum_{j=1}^{s} x_j P(\{x_j\}),$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} y_i P(\{x_j, y_i\}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{s} P(\{x_j, y_i\}) = \sum_{i=1}^{m} y_i P(\{y_i\}).$$

Дисперсії розподілів $P(\{x_j\})$, $j \in \overline{1, s}$, та $P(\{y_i\})$, $i \in \overline{1, m}$, вздовж осей Ox та Oy відповідно обчислюються за формулами

$$D_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} (x_j - x_c)^2 P(\{x_j, y_i\}) = \sum_{j=1}^{s} (x_j - x_c)^2 P(\{x_j\}),$$

$$D_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} (y_i - y_c)^2 P(\{x_j, y_i\}) = \sum_{i=1}^{m} (y_j - y_c)^2 P(\{y_i\}).$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай задано двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей таблицею (Рис. 13.1).

y_i \ x_j	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

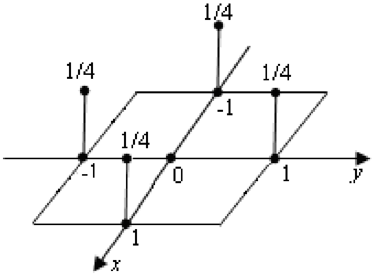


Рис. 13.1

Тоді

$$x_c = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_j P(\{x_j; y_i\}) = \sum_{j=1}^{3} x_j \sum_{i=1}^{3} P(\{x_j; y_i\}) =$$

$$= -1\cdot(0+\frac{1}{4}+0)+0\cdot(\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4})+1\cdot(0+\frac{1}{4}+0)=0,$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} y_i P(\{x_j; y_i\}) = \sum_{i=1}^{3} y_i \sum_{j=1}^{3} P(\{x_j; y_i\}) =$$

$$= -1\cdot(0+\frac{1}{4}+0)+0\cdot(\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4})+1\cdot(0+\frac{1}{4}+0)=0.$$

Таким чином центром даного розподілу ймовірностей є точка $(0;0)$.

Обчислюючи дисперсії, одержимо:

$$D_1 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (x_j - x_c)^2 P(\{x_j; y_i\}) = \sum_{j=1}^{3} (x_j - x_c)^2 \sum_{i=1}^{3} P(\{x_j; y_i\}) =$$

$$= 1\cdot(0+\frac{1}{4}+0)+0\cdot(\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4})+1\cdot(0+\frac{1}{4}+0)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Аналогічно

$$D_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (y_i - y_c)^2 P(\{x_j; y_i\}) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - y_c)^2 \sum_{j=1}^{3} P(\{x_j; y_i\}) =$$

$$= 1\cdot(0+\frac{1}{4}+0)+0\cdot(\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4})+1\cdot(0+\frac{1}{4}+0)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен дискретний одновимірний розподіл ймовірностей має центр розсіювання ймовірностей.

2. Якщо дискретний одновимірний розподіл ймовірностей має центр розсіювання, то координата цього центра є скінченним числом.

3. Кожен дискретний одновимірний розподіл ймовірностей має дисперсію.

4. Якщо дискретний одновимірний розподіл ймовірностей має центр розсіювання, то він має й дисперсію.

5. 1) Обернене твердження до твердження 4 є правильним.

2) Дисперсія завжди є скінченним числом.

6. 1) Якщо простір Ω елементарних подій скінченний, то відповідний розподіл ймовірностей має скінченні центр розсіювання і дисперсію.

2) Обернене твердження до твердження 6.1 є правильним.

7. Дисперсія дорівнює квадрату середнього квадратичного відхилення, тобто $D = \sigma^2$, а тому $\sigma = \pm\sqrt{D}$.

Переформулювати твердження 1-7 на випадок двохвимірного дискретного розподілу ймовірностей та перевірити, чи правильні ці твердження.

2. Побудувати одновимірний дискретний розподіл ймовірностей, для якого:

1) $x_c = 0,\ D = 0$;

2) $x_c = 0,\ D \neq 0$;

3) x_c не існує, та дослідити, чи може тоді існувати D;

4) x_c існує, проте $D = +\infty$.

3. Знайти центр розсіювання розподілу ймовірностей:

1) геометричного: $P(m) = p_0(1-p_0)^m,\ m \in \{0,1,2,\dots\}$;

2) Пуассона: $P(m) = \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ m \in \{0,1,2,\dots\}$;

3) біноміального: $P(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m \in \{0,1,2,\dots,n\}$:

4) гіпергеометричного: $P(m) = \dfrac{C_n^m C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k},\ m \in \overline{0, \min\{k,n\}}$.

4. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення для розподілу ймовірностей: 1) геометричного; 2) Пуассона; 3) біноміального; 4) гіпергеометричного.

5. Знайти формули для обчислення центра розсіювання і дисперсії дискретного розподілу ймовірностей за допомогою функції розподілу ймовірностей.

6. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для розподілу із заданою функцією розподілу ймовірностей:

1) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } 2^{x-1}\le 1, \\ 1, & \text{коли } 2^{x-1}>1; \end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1, \\ \dfrac{|\ln x|}{\ln x}, & \text{коли } x>1; \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{|\sin x|}{\sin x}\right), & \text{коли } -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\ x\ne 0, \\ \dfrac{1}{8}, & \text{коли } x=0, \\ 1, & \text{коли } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}[x], & \text{коли } 0<x\le 3,\ x\notin\{1,\ 2,\ 3\}, \\ 0, & \text{коли } x<0, \text{ або } x=1, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{коли } x=2, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{коли } x=3, \\ 1, & \text{коли } x>3, \end{cases}$

де $[x]$ – ціла частина числа x.

5) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0, \\ \dfrac{k+1}{n+1}, & \text{коли } k<x\le k+1, k\in\overline{0,(n-1)}, \\ 1, & \text{коли } x>n; \end{cases}$

6) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1, \\ \sum\limits_{k<x} p(1-p)^k, & \text{коли } x>1, \text{ де } p\in(0;1); \end{cases}$

7) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a, \\ \dfrac{k}{n}, & \text{коли } a+\dfrac{(k-1)(b-a)}{n}<x\le a+\dfrac{k\ (b-a)}{n},\ k\in\overline{1,n}, \\ 1, & \text{коли } x>b. \end{cases}$

7. 1. Довести, що рівність $p_{ij} = P((i, j)) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \dfrac{\lambda_1^i \lambda_2^j}{i!\, j!}$, $i \in \{0,1,2,\dots\}$, $j \in \{0,1,2,\dots\}$, $\lambda_1 = const > 0$, $\lambda_2 = const > 0$, задає двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей на множині $\Omega = \{(i, j) : i \in \{0,1,2,\dots\},\ j \in \{0,1,2,\dots\}\}$. Цей розподіл називають *двохвимірним розподілом Пуассона*.

2. Знайти центр розсіювання і дисперсію двохвимірного розподілу Пуассона.

8. 1. Нехай рівності $p_i^{(1)} = P^{(1)}(x_i)$, $i \in \{0,1,2,\dots\}$ та $p_j^{(2)} = P^{(2)}(y_j)$, $j \in \{0,1,2,\dots\}$, задають одновимірні дискретні розподіли ймовірностей відповідно на множинах $\Omega_x = \{x_i \in R : i = 1,2,\dots\}$ та $\Omega_y = \{y_j \in R : j = 1,2,\dots\}$. Довести, що рівність $p_{i,j} = P((x_i, y_j)) = p_i^{(1)} p_j^{(2)}$, $i \in \{1,2,\dots\}$, $j \in \{0,1,2,\dots\}$, задає двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей на множині $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$.

2. Знайти центр розсіювання і дисперсії усіх вказаних дискретних розподілів.

9. 1. Утворити двохвимірні дискретні розподіли ймовірностей, коли обидва одновимірні розподіли є: 1) геометричними; 2) біноміальними; 3) Пуассона.

2. Обчислити центри розсіювання і дисперсії для знайдених двохвимірних розподілів ймовірностей.

10. Знайти центр розсіювання і дисперсію для двохвимірних розподілів ймовірностей, заданих таблицею або функцією розподілу ймовірностей (в разі наявності невідомих констант визначити їх):

1)

$y_j \backslash x_i$	0	1
0	0,5	0,05
1	0,05	0,4

2)

$y_j \backslash x_i$	0	1
0	0,1	0,2
1	0,3	0,4

3)

$y_j \backslash x_i$	0	1	2
0	0,12	0,12	0,16
1	0,09	0,09	0,12
2	0,09	0,09	0,12

4)

$y_j \backslash x_i$	0	1	2
0	0,16	0,09	0,09
1	0,12	0,09	0,09
2	0,12	0,12	0,12

5) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ 0{,}01, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1,\\ 0{,}1, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>1,\\ 0{,}1, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>1,\\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

6) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1 \text{ або } y\le 1,\\ 0{,}1, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } 1<y\le 2,\\ 0{,}4, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } y>2,\\ 0{,}3, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } x>2,\\ 1, & \text{коли } x>2 \text{ і } y>2; \end{cases}$

7) $F(x,y)=\begin{cases} C_1, & \text{коли } x\le -1 \text{ або } y\le 1,\\ 0{,}5, & \text{коли } -1<x\le 0 \text{ і } 1<y\le 2,\\ 0{,}55, & \text{коли } -1<x\le 0 \text{ і } y>2,\\ 0{,}6, & \text{коли } 1<y\le 0 \text{ і } x>0,\\ C_2, & \text{коли } x>0 \text{ і } y>2; \end{cases}$

8) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ 0{,}12, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y<1,\\ 0{,}21, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 1<y\le 2,\\ 0{,}3, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>2,\\ 0{,}24, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } 1<x\le 2,\\ 0{,}4, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>2,\\ 0{,}42, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } 1<y\le 2,\\ 0{,}6, & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } y>2,\\ 0{,}7, & \text{коли } 1<y\le 2 \text{ і } x>2,\\ 1, & \text{коли } x>2 \text{ і } y>2; \end{cases}$

9) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a \text{ або } y\le b,\\ p_{00}, & \text{коли } a<x\le a+\alpha \text{ і } b<y\le b+\beta,\\ p_{00}+p_{01}, & \text{коли } a<x\le a+\alpha \text{ і } y>b+\beta,\\ p_{00}+p_{10}, & \text{коли } 0<y\le b+\beta \text{ і } x>a+\alpha,\\ 1, & \text{коли } x>a+\alpha \text{ і } y>b+\beta, \text{ де } \alpha>0 \text{ і } \beta>0; \end{cases}$

11) $F(x,y)=\begin{cases} C_1, & \text{коли } x\le 1 \text{ або } y\le 1,\\ 0{,}1, & \text{коли } (1<x\le 2 \text{ і } y>1) \text{ або } (1<y\le 2 \text{ і } x>1),\\ C_2, & \text{коли } x>2 \text{ і } y>2. \end{cases}$

2.14. Деякі числові характеристики абсолютно неперервних розподілів ймовірностей

Координата x_c *центра абсолютно неперервного розподілу ймовірностей* із щільністю $f(x)$ обчисляється за формулою

$$x_c = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx\,,$$

за умови абсолютної збіжності останнього невласного інтеграла.

В механічній інтерпретації x_c є координатою центра мас загальної одиничної маси, розподіленої вздовж осі Ox із щільністю $f(x)$.

Дисперсією одновимірного неперервного розподілу ймовірностей називається число

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 f(x)\, dx\,.$$

Дисперсія характеризує величину розсіювання (чи скупченості) ймовірностей навколо центра розподілу ймовірностей x_c.

Часто розсіювання характеризують за допомогою *середнього квадратичного відхилення* σ, яке визначається за формулою

$$\sigma = \sqrt{D}\,.$$

В механічній інтерпретації дисперсія є момент інерції відносно центра мас одиничної маси, розподіленої вздовж осі Ox із щільністю $f(x)$.

Для нормального розподілу ймовірності з щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

центр розсіювання $x_c = a$, а дисперсія $D = \sigma$.

Таким чином, якщо відомо, що розподіл ймовірностей нормальний, то щоб повністю його описати (за допомогою щільності розподілу ймовірностей $f(x)$), досить знати абсцису a центра розподілу ймовірностей і середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{D}$.

Приклад 14.1. Нехай задано неперервний розподіл ймовірностей на множині $\Omega = (-\infty, \infty)$ через щільність $f(x)$ (Рис. 14.1):

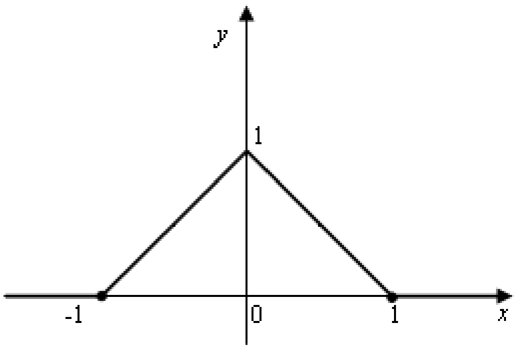


Рис. 14.1

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & \text{коли } x\in[-1,\,1],\\ 0, & \text{коли } x\overline{\in}[-1,\,1].\end{cases}$$

Тоді

$$x_c=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-1}x\cdot 0\cdot dx+\int_{-1}^{1}x(1-|x|)\,dx+\int_{1}^{\infty}x\cdot 0\cdot dx=\int_{-1}^{1}x(1-|x|)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}x(1-x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=0,$$

$$D=\int_{-\infty}^{\infty}(x-0)^2\,f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-1}x^2\cdot 0\cdot dx+\int_{-1}^{1}x^2(1-|x|)dx+\int_{1}^{\infty}x^2\cdot 0\cdot dx=$$

$$=2\int_{0}^{1}x^2(1-x)\,dx=2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}=2\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{4}{12}-\frac{3}{12}\right)=\frac{1}{6}.$$

Для двохвимірного абсолютно неперервного розподілу ймовірностей із щільністю $f(x,y),\ (x,y)\in R^2$, координати центра розподілу ймовірностей обчислюються за формулами:

$$x_c=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}x\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_1(x)\,dx,$$

$$y_c=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}y\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\right\}dy=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_2(y)\,dy.$$

за умови абсолютної збіжності подвійних невласних інтегралів.

Дисперсії двохвимірного абсолютно неперервного розподілу ймовірностей, які характеризують розсіювання ймовірностей навколо центра в напрямах, паралельних осям *Ox* та *Oy* відповідно, обчислюються за формулами:

$$D_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_c)^2\; f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x-x_c)^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right\}dx = \int_{-\infty}^{\infty}(x-x_c)^2\; f_1(x)\,dx,$$

$$D_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y_c)^2\; f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(y-y_c)^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty}(y-y_c)^2\; f_2(y)\,dy.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай задано рівномірний розподіл ймовірностей на множині $G=\{(x,y): |x|+|y|\le 1\}$.

Щільність такого розподілу має вигляд (Рис. 14.2 а)):

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, \text{ коли } (x,y)\in G,\\ 0, \quad \text{коли } (x,y)\,\overline{\in}\, G, \quad (x,y)\in R^2.\end{cases}$$

Тоді (Рис. 14.2 а), б))

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}0, \qquad \text{коли } x\,\overline{\in}\,[-1,\,1],\\ \dfrac{1}{2}\cdot(1+x)\cdot 2, \text{ коли } x\in[-1,\,0],\\ \dfrac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot 2, \text{ коли } x\in[0,\,1].\end{cases}$$

Аналогічно

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}0, \qquad \text{коли } y\,\overline{\in}\,[-1,\,1],\\ (1+y), \text{ коли } y\in[-1,\,0],\\ (1-y), \text{ коли } y\in[0,\,1].\end{cases}$$

Графіки функцій $f_1(x)$, $f_2(y)$ подано на Рис. 14.3.

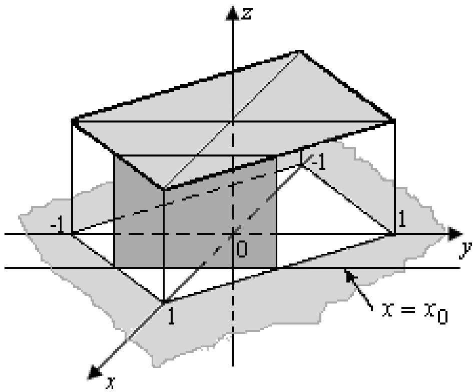


Рис. 14.2 а)

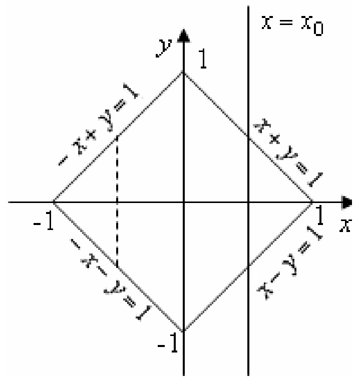


Рис. 14.2 б)

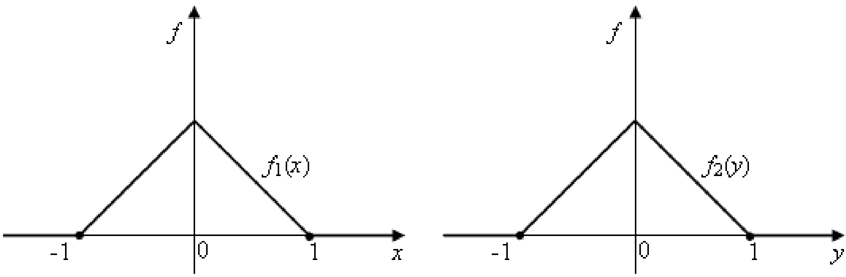


Рис. 14.3

Обчислюючи координати центра, одержимо:

$$x_c = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x + x^2)dx + \int_{0}^{1} (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{0}^{1} = 0\,;$$

аналогічно

$$y_c = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{-1} y \cdot 0 \cdot dy + \int_{-1}^{0} y(1+y)dy + \int_{0}^{1} y(1-y)dy + \int_{1}^{\infty} y \cdot 0 \cdot dy = 0\,.$$

Для дисперсій D_1 і D_2 одержимо:

$$D_1 = \int_{-1}^{0} (x-0)^2 (1+x)dx + \int_{0}^{1} (x-0)^2 (1-x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2 + x^3)dx + \int_{0}^{1} (x^2 - x^3)dx =$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{1}{6}.$$

Аналогічно одержимо $D_2=\frac{1}{6}$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен абсолютно неперервний одновимірний розподіл ймовірностей має центр розсіювання, координата якого скінченна.

2. Якщо абсолютно неперервний одновимірний розподіл ймовірностей має центр розсіювання, то координата цього центра є скінченним числом.

3. Кожен абсолютно неперервний одновимірний розподіл ймовірностей має дисперсію.

4. 1) Якщо абсолютно неперервний розподіл ймовірностей має дисперсію, то він має й центр розсіювання.

2) Обернене твердження до твердження 4.1 є правильним.

5. Дисперсія завжди є скінченним числом.

6. 1) Якщо для абсолютно неперервного розподілу ймовірностей відповідний простір елементарних подій $\Omega=[a;b]$, де $-\infty<a<b<+\infty$, то цей розподіл має скінченні центр розсіювання і дисперсію.

2) Обернене твердження до твердження 6.1 є правильним.

7. Середнє квадратичне відхилення – це довільне дійсне число, квадрат якого дорівнює дисперсії.

8. Якщо нормальний розподіл ймовірностей задано щільністю, то відразу можна записати, чому дорівнюють координата центра розсіювання і дисперсія.

9. Якщо відомо, що одновимірний розподіл ймовірностей є нормальний, то для задання цього розподілу достатньо задати центр розсіювання і дисперсію цього розподілу.

10. Твердження 9 є правильним, коли слово “одновимірний” замінити словом “двохвимірний”.

Переформулювати твердження 1-10 на випадок двохвимірного абсолютного неперервного розподілу ймовірностей та перевірити, чи правильні ці твердження.

2. Побудувати одновимірний абсолютно неперервний розподіл ймовірностей, для якого:

1) $x_c=0$ і $D=1$;

2) $x_c=0$, а $D\le 2$;

3) $x_c=0$, а $D>4$;

4) $x_c=0$, а $D=+\infty$;

5) x_c існує, а D не існує.

3. Знайти центр розсіювання ймовірностей, дисперсію і середнє квадратичне відхилення для:

1) трикутного розподілу;
2) показникового розподілу;
3) гамма-розподілу;
4) розподілу Лапласа;
5) розподілу Коші;
6) рівномірного розподілу з щільністю

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, \text{ коли } |x-x_0|\le a,\\ 0, \quad \text{коли } |x-x_0|>a,\end{cases}$$

де $a>0$ і $x_0\in R$ - дійсні числа.

4. Нехай $F(x)$ є функцією абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на скінченному проміжку $[a;b)$. Знайти формули для обчислення центра розсіювання ймовірностей і дисперсії за допомогою $F(x)$.

5. Знайти центр розсіювання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення для розподілу, заданого функціями розподілу ймовірностей на певному проміжку, який треба вказати (в разі наявності констант визначити їх):

1) $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; 2) $F(x)=x^2-2x-3$;

3) $F(x)=1-x^3$; 4) $F(x)=x-\ln x$;

5) $F(x)=\arccos x$; 6) $F(x)=c^x$;

7) $F(x)=\alpha x+\beta$; 8) $F(x)=\operatorname{arcctg} x$;

9) $F(x)=\dfrac{|x^2+5x+6|}{x^2+x}$; 10) $F(x)=x\ln x$;

11) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2+5x+6|}{x^2+5x+6}, \text{коли } x\ne -3 \text{ і } x\ne -2;\\ C_1, \quad \text{коли } x=-3,\\ C_2, \quad \text{коли } x=-2;\end{cases}$

12) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{\sin x}, \text{ коли } x\ne \pi n, n\in Z,\\ C_n, \quad \text{коли } x=\pi n,\ n\in Z,\ C_n - \text{деякі сталі};\end{cases}$

13) $F(x)=(x-x_0)e^x$; 14) $F(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

15) $F(x)=1+\cos x$; 16) $F(x)=1+\sin x$;

17) $F(x)=1-\cos x$; 18) $F(x)=\operatorname{tg} x$.

6. Перевірити, чи можна абсцису центра розсіювання x_c та дисперсію D абсолютно неперервного розподілу ймовірностей з щільністю $f(x), x\in[a\, b)$ обчислювати за допомогою формул:

1) $x_c=b-\int\limits_a^b F(x)dx$;

2) $D=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-x_c^2$;

3) $D=b^2-x_c^2-2\int\limits_a^b xF(x)dx$.

7. 1. Довести, що для абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на скінченному проміжку $[a;b)$ правильна нерівність: 1) $a\le x_c\le b$; 2) $0\le D\le(b-x_c)(b+x_c-2a)$; 3) $a^2-x_c^2\le D\le b^2-x_c^2$, коли $0<a<b$.

2. Довести, що усі нерівності 1)-3) повинні бути строгими.

8. Знайти формули для обчислення координат центра розсіювання і дисперсії у випадку, коли щільність двохвимірного розподілу ймовірності $f(x,y)=f_1(x)f_2(y),\ x\in[a_1,b_1]\times[a_2,b_2)$, де $f_1(x)$ та $f_2(y)$ – щільності одновимірних розподілів ймовірностей відповідно на проміжках $[a_1,b_1)$ та $[a_2,b_2)$.

9. Обчислити координати центра розсіювання та дисперсії двохвимірних розподілів ймовірностей з щільністю $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, коли обидві щільності $f_1(x)$ та $f_2(y)$ задають: 1) трикутні розподіли; 2) показникові розподіли; 3) гамма-розподіли; 4) розподіли Лапласа; 5) розподіли Коші; 6) двохвимірні прямокутні розподіли.

10. Знайти координати центра розсіювання, дисперсії і середні квадратичні відхилення для двохмірного розподілу ймовірностей, заданого функцією розподілу ймовірностей на певному прямокутнику, який треба вказати (в разі наявності констант визначити їх):

1) $F(x,y)=xy$; 2) $F(x,y)=x+y$;

3) $F(x,y)=\begin{cases} xy, & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{коли } x\notin[0;1] \text{ або } y\notin[0;1];\end{cases}$

4) $F(x,y)=\begin{cases} xy, & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0,\\ 1, & \text{коли } (x\ge 0 \text{ і } y>1) \text{ або } (y\ge 0 \text{ і } x>1);\end{cases}$

5) $F(x,y)=\begin{cases} xy, & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0, \\ x, & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } y>1, \\ y, & \text{коли } 0\le y\le 1 \text{ і } x>1, \\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

6) $F(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{коли } a_1\le x\le b_1 \text{ і } a_2\le y\le b_2, \\ 0, & \text{коли } x<a_1 \text{ або } y<a_2, \\ x+b_2, & \text{коли } a_1\le x\le b_1 \text{ і } y>b_2, \\ b_1+y, & \text{коли } a_2\le y\le b_2 \text{ і } x>b_1, \\ 1, & \text{коли } x>b_1 \text{ і } y>b_2; \end{cases}$

7) $F(x,y)=(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2})$;   8) $F(x,y)=1-e^{-x^2}-e^{-y^2}$;

9) $F(x,y)=C(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2})$;

10) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0, \\ C(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}), & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1, \\ C(1-e^{-x^2})(1-e^{-1}), & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } y>1, \\ C(1-e^{-1})(1-e^{-y^2}), & \text{коли } 0\le y\le 1 \text{ і } x>1, \\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

11) $F(x,y)=\begin{cases} \ln xy, & \text{коли } x\ge 1 \text{ і } y\ge 1, \\ 0, & \text{коли } x<1 \text{ або } y<1; \end{cases}$

12) $F(x,y)=\begin{cases} c\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{arctg} y, & \text{коли } x\ge 0 \text{ і } y\ge 0, \\ 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0; \end{cases}$

13) $F(x,y)=\begin{cases} c\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{arctg} y, & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{коли } x<0 \text{ або } y<0, \\ \dfrac{c\pi}{4}\operatorname{arctg} x, & \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } y>1, \\ \dfrac{c\pi}{4}\operatorname{arctg} y, & \text{коли } 0\le y\le 1 \text{ і } x>1, \\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

$$14)\ F(x,y)=\begin{cases} c_1(1-\frac{1}{x}), & \text{коли } 1\le x\le 2,\ y\ge 1, \\ \frac{c_1}{2}, & \text{коли } 1\le y\le 2,\ x>2, \\ c_2(1-\frac{1}{y}), & \text{коли } 2\le y\le 3,\ x>2, \\ \frac{2c_2}{3}, & \text{коли } 2<x\le 3, \text{ а } y>3, \\ 1, & \text{коли } x>3 \text{ і } y>3. \end{cases}$$

11.1. Довести, що для абсолютно неперервного двохвимірного розподілу ймовірностей на прямокутнику $[a,b]=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, його центр (x_c, y_c) розсіювання лежить у прямокутнику $[a,b]$, а дисперсія $D=(D_1,D_2)$ задовольняє нерівності $0\le D_1\le(b_1-x_c)(b_1+x_c-2a_1)$, $0\le D_2\le(b_2-y_c)(b_2+y_c-2a_2)$, та коли $0\le a_1<b_1$ і $0\le a_2<b_2$, то $a_1^2-x_c^2\le D_1\le b_1^2-x_c^2$, $a_2^2-y_c^2\le D_2\le b_2^2-y_c^2$.

2. Перевірити, чи може центр розсіювання лежати на межі прямокутника $[a,b]=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, а якась нерівність для дисперсії перетворитися у рівність.

Розділ 3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

3.1. Поняття випадкової величини

Нехай (Ω, S, P) – деякий ймовірнісний простір, $(R^1, \mathscr{B}(R^1))$ – числова пряма із системою борелівських множин $\mathscr{B}(R^1)$. Дійсна функція $X(E)$, $E \in \Omega$, називається S-*вимірною* або *випадковою величиною*, заданою на ймовірнісному просторі (Ω, S, P), якщо $X^{-1}(B) \in S$ для довільного $B \in \mathscr{B}(R^1)$.

Тут насправді мається на увазі S / S_X-вимірна функція, де $S_X = \mathscr{B}(R^1)$.

Якщо $(\Omega, S) = (R^n, \mathscr{B}(R^n))$ для деякого $n \in N$, то $\mathscr{B}(R^n)$–вимірні функції називаються *борелівськими*.

Ймовірнісна міра P_X на $(R^1, \mathscr{B}(R^1))$

$$P_X(G) = P(X^{-1}(G)),\ G \in \mathscr{B}(R^1),$$

визначає *розподіл ймовірностей* на множині значень випадкової величини X (на $(R^1, \mathscr{B}(R^1))$).

Приклад 1.1. Нехай $\Omega = [0, 1]$, S – σ-алгебра вимірних за Лебегом множин із $[0, 1]$. Якщо $P(A) = m(A)$, де $A \in S$, $m(A)$ – міра Лебега множини A, то (Ω, S, P) – ймовірнісний простір.

Нехай G – довільна підмножина відрізка $[0, 1]$. Розглянемо функцію

$$X(E) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } E \in G; \\ -1, \text{ якщо } E \in \overline{G} = [0, 1] \setminus G. \end{cases}$$

Тоді

$$X^{-1}((-\infty, x)) = \{E : X(E) \in (-\infty, x)\} = \begin{cases} \varnothing, \text{ якщо } x \le -1; \\ \overline{G}, \text{ якщо } -1 < x \le 1; \\ [0, 1], \text{ якщо } 1 < x. \end{cases}$$

Отже, $X^{-1}((-\infty, x)) = \{E : X(E) \in (-\infty, x)\} = \overline{G} \in S$ при $x \in (-1, 1]$ тоді і тільки тоді, коли G – вимірна за Лебегом множина. Таким чином розглядувана функція $X(E)$ є випадковою величиною на ймовірнісному просторі (Ω, S, P) тоді й тільки тоді, коли множина G належить до σ-алгебри S-вимірних за Лебегом множин із $[0, 1]$.

Для того, щоб $X(E)$ була випадковою величиною, необхідно й достатньо, щоб для будь-яких $x \in R^1$ мало місце включення

$$X^{-1}((-\infty, x)) \in S.$$

Нехай (Ω, S, P) *– ймовірнісний простір,* X *і* Y *– випадкові величини, визначені на ньому,* a, b, c *– дійсні числа. Тоді*

а) $cX(E)$; б) $X(E)+c$; в) $|X(E)|$; г) $X^2(E)$;

д) $1/X(E)$; е) $X(E)\pm Y(E)$; є) $X(E)Y(E)$; ж) $X(E)/Y(E)$

також випадкові величини (в останньому випадку припускається, що $P(\{E: Y(E)\neq 0\})=1$*).*

Випадкову величину (S/S_X-вимірну функцію $X=X(E)$, $E\in\Omega$) називають *простою*, якщо множина значень цієї величини скінченна, тобто $X(\Omega)=\Omega_X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $m\in N$, $x_i\neq x_j$, коли $i\neq j$, а сукупність S_X містить всі підмножини множини $\Omega_X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, тобто $X^{-1}(\{x_i\})\in S$ для довільного $x_i\in\Omega_X$, $i\in\overline{1, m}$.

Приклад 1.2. Нехай на (Ω, S, P) $X(E)=0$. Тоді X – випадкова величина. Справді

$$X^{-1}((-\infty, x))=\begin{cases}\varnothing, & \text{якщо } x\le 0;\\ \Omega, & \text{якщо } x>0,\end{cases}$$

і таким чином, при будь-якому x

$$X^{-1}((-\infty, x))\in S.$$

Приклад 1.3. Якщо S – система всіх підмножин множини Ω, то будь-яка дійсна функція $X(E)$ на Ω є випадковою величиною.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. *Якщо* $\varphi(x)$ *– борелівська функція, а* $X(E)$ *– випадкова величина, то складена функція* $\varphi(X(E))=\psi(E)$ *є також випадковою величиною.*

Справді, для $B\in\mathscr{B}(R^1)$

$$\psi^{-1}(B)=\{E:\varphi(X(E))\in B\}=\{E: X(E)\in\varphi^{-1}(B)\}=X^{-1}(\varphi^{-1}(B))\in S,$$

оскільки $\varphi^{-1}(B)\in\mathscr{B}(R^1)$.

Таким чином, якщо X – випадкова величина, то функції

$$X^n;\ |X|;\ X^+=\begin{cases}X, & \text{якщо } X\ge 0,\\ 0, & \text{якщо } X<0,\end{cases}\qquad X^-=\begin{cases}0, & \text{якщо } X\ge 0,\\ -X, & \text{якщо } X<0,\end{cases}$$

є також випадковими величинами, оскільки функції $x^n, |x|, x^+, x^-$ борелівські.

Вправа 2. *Для будь-якої випадкової величини* X *знайдеться послідовність простих випадкових величин* $X_1, X_2, \ldots$ *таких, що* $|X_n|\le|X|$ *і* $X_n(E)\underset{n\to\infty}{\to}X(E)$ *для всіх* $E\in\Omega$*. Якщо, крім того,* $X(E)\ge 0$*, то знайдеться зростаюча послідовність простих* *випадкових величин* $X_1, X_2, \dots$ *таких, що* $X_n(E) \to X(E)$ *для всіх* $E \in \Omega$.

Справді, якщо $X(E) \geq 0$, то досить покласти

$$X_n(E) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{X^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right)}(E) + nI_{X^{-1}([n,\infty))}(E),$$

де $I_G(E)$ – індикаторна функція множини G, тобто

$$I_G(E) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } E \in G; \\ 0, & \text{якщо } E \overline{\in} G. \end{cases}$$

Якщо X – довільна випадкова величина, то оскільки $X = X^+ - X^-$, можна окремо розглянути X^+ і X^-.

Вправа 3. Довести, що $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною тоді й тільки тоді, коли множина $X^{-1}([x_0, \infty)) = \{E \in \Omega : X(E) \geq x_0\}$ є подією для кожного числа $x_0 \in R$.

Дійсно, $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною тоді й тільки тоді, коли множина $X^{-1}((-\infty, x_0)) = \{E \in \Omega : X(E) < x_0\} \in S$ є подією для кожного числа $x_0 \in R$.

Враховуючи рівності

$$X^{-1}([x_0, \infty)) = \{E : X(E) \geq x_0\} = \Omega \setminus X^{-1}((-\infty, x_0))$$

і

$$X^{-1}((-\infty, x_0)) = \Omega \setminus X^{-1}([x_0, \infty)),$$

а також характеристичні властивості подій, дістанемо потрібне твердження.

Вправа 4. Нехай дано ймовірнісний простір (Ω, S, P), де простір подій S є найвужчий з можливих. Довести, що $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною тоді й тільки тоді коли $X(E) = const$, $E \in \Omega$.

Дійсно, якщо $X(E) = c = const$, $E \in \Omega$, то

$$\{E \in \Omega : X(E) < x_0\} = X^{-1}((-\infty, x_0)) = \begin{cases} \varnothing, & \text{коли } x_0 \leq c, \\ \Omega, & \text{коли } x_0 > c, \end{cases}$$

а тому $X^{-1}((-\infty, x_0)) \in S$, тобто є подією для будь-якого числа $x_0 \in R$, тобто стала функція є випадковою величиною відносно будь-якого простору подій S, не обов'язково найвужчого.

Якщо ж простір подій S найвужчий з можливих, а $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, то припустимо, що $X(E)$ не є сталою функцією на Ω. Тоді вона має принаймні два значення:

$c_1 = X(E_1) \neq c_2 = X(E_2)$. Можна вважати, що $c_1 < c_2$. Тоді для числа $x_0 \in (c_1; c_2)$ маємо:

$$E_1 \in \{E : X(E) < x_0\} \not\ni E_2,$$

а тому ця множина $\{E : X(E) < x_0\} \neq \Omega$, отже, не є подією, оскільки простір подій S найвужчий, тобто $S = \{\varnothing, \Omega\}$. Оскільки $\{E : X(E) < x_0\}$ не є подією, то $X(E)$, $E \in \Omega$, не є випадковою величиною. Дістали суперечність, яка доводить, що випадкова величина $X(E)$, $E \in \Omega$, повинна бути сталою функцією.

Вправа 5. Нехай $X_n(E)$, $E \in \Omega$ – послідовність випадкових величин відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P). Довести, що $X(E) = \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною.

За означенням верхньої границі функція $X(E)$ визначена на просторі Ω, причому в деяких точках може набувати й значення $(-\infty)$ або $(+\infty)$. Окрім цього, для будь-якого фіксованого $E \in \Omega$ виконуються умови:

1) існує підпослідовність $X_{n_i}(E) \to X(E)$, коли $i \to \infty$;
2) для будь-якого числа $a > X(E)$ існує номер $n = n(a, E)$, для якого $X_i(E) < a$, коли $i \geq n$ (Рис. 1.1).

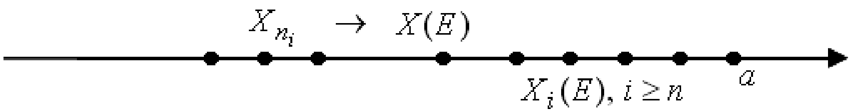


Рис. 1.1

Зафіксуємо довільне число $x \in R$ і розглянемо множину $\{E : X(E) < x\}$.

Якщо $E \in \{E : X(E) < x\}$, то $X(E) < x$, а тому існує $k = k(E)$, $k \in N$, для якого $X(E) < x - \frac{1}{k}$ і за умовою 2) існує номер $n = n(k, E)$, для якого $X_i(E) < x - \frac{1}{k}$, коли $i \geq n$. Таким чином, якщо $E \in \{E : X(E) < x\}$, то

$$E \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \{E \in \Omega : X_i(E) < x - \frac{1}{k}\},$$

тобто

$$\{E : X(E) < x\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \{E \in \Omega : X_i(E) < x - \frac{1}{k}\}.$$

Доведемо обернене включення. Нехай $E \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \{E \in \Omega : X_i(E) < x - \frac{1}{k}\}$. Тоді за означенням об’єднання і перерізу існують $k_0 = k_0(E)$ і $n_0 = n_0(E)$, для яких $X_i(E) < x - \frac{1}{k_0}$, коли $i \geq n_0$. Звідси випливає, що правіше точки $x - \frac{1}{k_0}$ лежить хіба що скінченна кількість точок $X_i(E)$, а тому найбільша часткова границя послідовності $X_i(E)$ не перевищує $x - \frac{1}{k_0}$, тобто $X(E) = \overline{\lim_{i \to \infty}} X_i(E) \leq x - \frac{1}{k_0} < x$. Отже, $E \in \{E : X(E) < x\}$, обернене включення доведено, а разом з тим доведено рівність:

$$\{E : X(E) < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \{E \in \Omega : X_i(E) < x - \frac{1}{k}\}.$$

З останньої рівності, в силу означення випадкової величини і властивостей подій дістаємо, що множина $\{E : X(E) < x\}$ є подією для будь-якого числа $x \in R$, а це означає, що $X(E) = \overline{\lim_{n \to \infty}} X_n(E)$ є випадковою величиною.

Вправа 6. Довести, що коли $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, то й $X^2(E)$, $E \in \Omega$ є випадковою величиною, а обернене твердження не є правильним.

Дійсно, якщо число c довільне фіксовано, то

$$\{E \in \Omega : X^2(E) < c\} = \begin{cases} \varnothing, \text{коли } c \leq 0, \\ \{E \in \Omega : \left| X(E) \right| < \sqrt{c}\}, \text{коли } c \geq 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\{E \in \Omega : \left| X(E) \right| < \sqrt{c}\} = \{E \in \Omega : -\sqrt{c} < X(E) < \sqrt{c}\} =$$
$$= \{E \in \Omega : X(E) < \sqrt{c}\} \bigcap \{E \in \Omega : X(E) > -\sqrt{c}\}.$$

Множина $\{E \in \Omega : X(E) < \sqrt{c}\}$ є подією за означенням випадкової величини, а множина

$$\{E \in \Omega : X(E) > -\sqrt{c}\} = \Omega \setminus \{E \in \Omega : X(E) \leq -\sqrt{c}\} =$$
$$= \Omega \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} \{E \in \Omega : X(E) < -\sqrt{c} + \frac{1}{n}\}),$$

отже, також є подією.

Таким чином, множина $\{E : X^2(E) < c\}$ є подією для будь-якого числа $c \in R$, тобто $X^2(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, коли $X(E)$ є випадковою величиною.

Доведемо, що обернене твердження не є правильним. Для цього розглянемо простір подій S, що не є найширшим з можливих. Тоді існує множина $A \subset \Omega$, що не є подією. Покладемо

$$X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in \overline{A}, \\ -1, \text{ коли } E \in A. \end{cases}$$

Дістанемо:

$$X^{-1}((-\infty, c)) = \{E \in \Omega : X(E) < c\} = \begin{cases} \varnothing, \text{ коли } c \le -1, \\ A, \text{ коли } -1 < c \le 1, \\ \Omega, \text{ коли } c > 1. \end{cases}$$

Таким чином множина $\{E : X(E) < c\} = A$, а тому не є подією, коли $-1 < c \le 1$. Це означає, що $X(E)$ не є випадковою величиною. Разом з тим $X^2(E) = 1$ для будь-якого $E \in \Omega$ і тому

$$\{E : X^2(E) < c\} = \begin{cases} \varnothing, \text{ коли } c \le 1, \\ \Omega, \text{ коли } c > 1, \end{cases}$$

тобто $X^2(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною.

Таким чином, з умови, що $X^2(E)$ – випадкова величина, не випливає, що $X(E)$ також випадкова величина (якщо простір S подій не найширший).

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Випадкова величина – це будь-яка функція, визначена на просторі елементарних подій.
2. Якщо $X(E)$ дійсна функція, визначена на просторі елементарних подій, то $X(E)$ - випадкова величина, коли множина розв'язків рівняння $X(E) = x$ (де x – відоме, а E – невідоме) є подією: 1) для деякого $x \in R$; 2) для будь-якого $x \in R$.
3. Якщо $X(E) + Y(E)$ – випадкова величина, то $X(E)$ та $Y(E)$ - випадкові величини.
4. Якщо $X(E) \pm Y(E)$ – випадкові величини, то $X(E)$ та $Y(E)$ - випадкові величини.
5. Кожна випадкова величина є простою.
6. Кожна випадкова величина є границею послідовності простих випадкових величин.
7. Існує ймовірнісний простір (Ω, S, P), для якого будь-яка дійсна функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною.

2. Нехай для експерименту з підкиданням грального кубика простором елементарних подій є множина $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, простір подій $S = \{\varnothing, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$, а ймовірнісна міра на S довільна.

1. Довести, що функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною тоді й тільки тоді, коли $X(E) = a$ при $E \in \{2, 4, 6\}$ і $X(E) = b$ при $E \in \{1, 3, 5\}$.

2. Довести, що для будь-якого простору S подій $A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ існує не більше ніж шість попарно несумісних подій $A_k \neq \varnothing$, для яких $\sum_k A_k = \Omega$. При цьому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною тоді й тільки тоді, коли вона є сталою на кожній множині A_k.

3. Довести, що коли простір S не є найширшим простором подій $A \subset \Omega$, то існує функція $X(E)$, $E \in \Omega$, що не є випадковою величиною.

3. Нехай величиною $X(E)$, $E \in \Omega$, є:

1) кількість очок при одному підкиданні грального кубика;
2) кількість шісток при одному підкиданні грального кубика;
3) кількість влучень в мішень при трьох пострілах;
4) тривалість телефонних розмов абонента протягом дня;
5) кількість збанкрутілих протягом року фірм;
6) кількість машин, що проїжджають через митницю протягом години;
7) кількість дорожніх пригод у Києві протягом доби;
8) кількість пострілів в мішень до першого влучення;
9) кількість питань, на які студент знає відповідь, якщо студент навмання бере 5 з 25 питань, а знає відповіді на 20 питань;
10) кількість бракованих деталей серед навмання вибраних 3-х з 10 наявних деталей, якщо серед цих 10 деталей 2 браковані.

Визначити ймовірнісний простір (Ω, S, P) для якого: а) $X(E)$ є випадковою величиною; б) $X(E)$ не є випадковою величиною.

4. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$ – довільна випадкова величина, x_0 – довільне фіксоване значення цієї величини.

1. Довести, що множина $X^{-1}(x_0) = \{E \in \Omega : X(E) = x_0\}$ є подією.

2*. Перевірити, чи правильне обернене твердження.

5. Критерій дискретної випадкової величини. Нехай множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$, є не більш ніж зчисленною. Довести, що ця функція є випадковою величиною (відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P)) тоді й тільки тоді, коли для кожної точки x_k, $k \in \{1, 2, \ldots\}$, що є значенням функції $X(E)$, множина $X^{-1}(x_k) = \{E \in \Omega : X(E) = x_k\} \in S$, тобто є подією.

6. Довести, що наступні твердження 1) – 4) є еквівалентними:

1) $X^{-1}((-\infty, x_0)) = \{E \in \Omega : X(E) < x_0\}$ є подією для кожного $x_0 \in R$;

2) $X^{-1}((-\infty, x_0]) = \{E \in \Omega : X(E) \le x_0\}$ є подією для кожного $x_0 \in R$;

3) $X^{-1}((x_0, \infty)) = \{E \in \Omega : X(E) > x_0\}$ є подією для кожного $x_0 \in R$;

4) $X^{-1}([x_0, \infty)) = \{E \in \Omega : X(E) \ge x_0\}$ є подією для кожного $x_0 \in R$.

7. Довести, що коли простір S є найширшим, тобто будь яка множина $A \subset \Omega$ є подією, то будь-яка дійсна функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною.

8. Для заданих функцій $X(E)$, $E \in \Omega$, знайти множини $X^{-1}((-\infty, x_0))$, $X^{-1}((-\infty, x_0])$, $X^{-1}((x_0, \infty))$ та $X^{-1}([x_0, \infty))$, вважаючи, що Ω є областю визначення заданої функції:

1) $X = kx + b$; 2) $X = x^2 - 5x + 6$; 3) $X = \sqrt{x+1}$;

4) $X = x^3$; 5) $X = |x-1| + 1$; 6) $X = \dfrac{|x-1|}{x-1}$;

7) $X = 2^x$; 8) $X = \ln x$; 9) $X = \sin x$;

10) $X = \cos x$; 11) $X = tg\, x$; 12) $X = \sqrt{\cos x - 1}$;

13) $X = \lg(1 - 2^{\sin^2 \pi x})$; 14) $X = (2 - |x + \dfrac{1}{x}|)^{\sqrt{3}}$.

9. Нехай $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$, є випадковими величинами відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P). Довести, що наступні множини є подіями:

1) $\{E \in \Omega : X(E) < Y(E)\}$; 2) $\{E \in \Omega : X(E) \le Y(E)\}$;

3) $\{E \in \Omega : X(E) > Y(E)\}$; 4) $\{E \in \Omega : X(E) \ge Y(E)\}$;

5) $\{E \in \Omega : X(E) = Y(E)\}$; 6) $\{E \in \Omega : X(E) \ne Y(E)\}$.

10. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною. Довести, що для будь-яких чисел a і b наступні множини є подіями:

1) $X^{-1}((a,b)) = \{E \in \Omega : a < X(E) < b\}$;

2) $X^{-1}([a,b)) = \{E \in \Omega : a \le X(E) < b\}$;

3) $X^{-1}((a,b]) = \{E \in \Omega : a < X(E) \le b\}$;

4) $X^{-1}([a,b]) = \{E \in \Omega : a \le X(E) \le b\}$.

11. Довести, що для того, щоб функція $X(E)$, $E \in \Omega$, була простою випадковою величиною, необхідно й досить існування скінченної кількості попарно несумісних подій A_k, $k \in \overline{1,n}$, для яких $\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ і функція $X(E)$ є сталою на кожній множині A_k.

12. Довести, що коли $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, то $|X(E)|$, $E \in \Omega$, також є випадковою величиною, а обернене твердження не завжди є правильним.

13. Нехай $X_n(E)$, $E \in \Omega$, $n \in N$, – послідовність випадкових величин відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P).

1. Довести, що наступні множини є подіями:

1) $\{E \in \Omega : |X_n(E) - X_m(E)| < \frac{1}{k}\}$ для будь-яких натуральних чисел m, n і k;

2) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{m>N \\ n>N}} \{E : |X_n(E) - X_m(E)| < \frac{1}{k}\}$.

2. Довести, що:

1) $\{E \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(E) \text{ існує}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{m>N \\ n>N}} \{E : |X_n(E) - X_m(E)| < \frac{1}{k}\}$;

2) множина $\{E \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(E) \text{ існує}\}$ є подією;

3) $\{E \in \Omega : \sup_n X_n(E) < x\} = \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{E \in \Omega : X_n(E) > x\}$;

4) $\{E \in \Omega : \inf_n X_n(E) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{E \in \Omega : X_n(E) < x\}$;

5) $\{E \in \Omega : \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(E) < x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{E \in \Omega : X_j(E) < x + \frac{1}{k}\}$;

6) $\{E \in \Omega : \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(E) > x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{E \in \Omega : X_j(E) > x - \frac{1}{k}\}$;

7) множина $\{E \in \Omega : \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(E) = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(E)\}$ є подією;

8) $\{E \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(E) \text{ існує}\} = \{E \in \Omega : \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(E) = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(E)\}$;

9) якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, задана випадкова величина, то

$$\{E \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(E) = X(E)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \{E \in \Omega : |X_i(E) - X(E)| < \frac{1}{k}\}.$$

14*. *Функцію* $f(x): R^m \to R^1$ називають *борелівською*, якщо множина $\{x \in R^m : f(x) < c\}$ є борелівською (див. §2.1) для кожного числа $c \in R$.

1. Довести, що кожна неперервна функція $f(x): R^m \to R^1$ є борелівською.

2. Довести, що борелівська функція $f(x)$ є випадковою величиною відносно ймовірнісного простору $(R^m, B(R^m), P)$.

3. Довести, що коли $f(x): R^m \to R^1$ борелівська функція, а $X_i(E)$, $E \in \Omega$, $i \in \overline{1,n}$ – випадкові величини відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P), то функція $f(X_1(E), X_2(E), \ldots, X_m(E))$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P).

15. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, – випадкова величина.

1. Довести, що функції:

1) $X^{[m]}(E) = \begin{cases} X(E), & \text{коли } X(E) \geq m, \\ m, & \text{коли } X(E) < m, m - \text{фіксоване число}, \end{cases}$

2) $X^+(E) = \begin{cases} X(E), & \text{коли } X(E) \geq 0, \\ 0, & \text{коли } X(E) < 0, \end{cases}$

3) $X^-(E) = \begin{cases} 0, & \text{коли } X(E) \geq 0, \\ -X(E), & \text{коли } X(E) < 0, \end{cases}$

також є випадковими величинами.

2. Довести, що:

1) $X(E) = X^+(E) - X^-(E)$, 2) $|X(E)| = X^+(E) + X^-(E)$,

3) $X^+(E) = \dfrac{X(E) + |X(E)|}{2}$; 4) $X^-(E) = \dfrac{1}{2}(|X(E)| - X(E))$;

5) $X^{[m]}(E) = \dfrac{1}{2}(|X(E) - m| + X(E) + m)$.

16. Нехай $X_i(E)$, $E \in \Omega$, – випадкові величини, $m(E) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i(E)$, $M(E) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i(E)$, $E \in \Omega$.

Довести, що:

1) $m(E) = \min\left\{ \min\limits_{1 \leq i \leq n-1} X_i(E), X_n(E) \right\}$, а

$$M(E) = \max\left\{ \max\limits_{1 \leq i \leq n-1} X_i(E), X_n(E) \right\};$$

2) якщо $n = 2$, то

$$m(E) = \frac{1}{2}(X_1(E) - (X_1(E) - X_2(E))^+ - (X_1(E) - X_2(E))^- + X_2(E)),$$

$$M(E)=\frac{1}{2}(X_1(E)+(X_1(E)-X_2(E))^{+}+(X_1(E)-X_2(E))^{-}+X_2(E)).$$

3) $m(E)$ і $M(E)$ є випадковими величинами.

17. Гральний кубик підкинули 1000 разів і дістали на просторі елементарних подій $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$:

$$P(\{6\})=P^*_{1000}(\{6\})=0{,}5,\ P(\{5\})=P^*_{1000}(\{5\})=0{,}3,$$

$$P(\{4\})=P^*_{1000}(\{4\})=0{,}15,\ P(\{1,2,3\})=P^*_{1000}(\{6\})=0{,}05,$$

а для інших підмножин множини Ω ймовірності попадання в них не визначали.

1. З'ясувати, яким може бути найширший простір подій S_1, для якого множини $\{1\}$, $\{2\}$ і $\{3\}$ не є подіями.

2. Чи можна вважати простором подій множину $S=\{\varnothing,\{1,2,3,4\},\{5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$.

3. Перевірити, чи є задана функція $X(E)$, $E\in\Omega$, випадковою величиною для простору подій із завдання 1 та 2:

1) $X(E)=\begin{cases}1, \text{коли } E\in\{1,2,3\},\\ 2, \text{коли } E=4,\\ 3, \text{коли } E=5,\\ 4, \text{коли } E=6;\end{cases}$

2) $X(E)=i,$ коли $E=i\in\overline{1,6}$;

3) $X(E)=\begin{cases}0, \text{коли } E\in\{1,2,3\},\\ 1, \text{коли } E\notin\{1,2,3\}.\end{cases}$

18. 1. Утворити випадкові величини $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, для яких множиною значень є $\{1,2,3\}$, а множиною значень випадкової величини $X(E)+Y(E)$, $E\in\Omega$, є:

1) $\{4\}$; 2) $\{2,4\}$; 3) $\{2,4,6\}$; 4) $\{2,3,4,5,6\}$.

2. За умов завдання 1 визначити, які підмножини множини $\{2,3,4,5,6\}$ можуть бути, а які не можуть бути множиною значень випадкової величини $X(E)+Y(E)$.

3. Сформулювати і розв'язати аналогічні до 1 і 2 завдання для випадкової величини: 1) $X(E)-Y(E)$, $E\in\Omega$; 2) $X(E)\cdot Y(E)$, $E\in\Omega$; 3) $X(E)/Y(E)$, $E\in\Omega$.

19. Випадкову величину $X(E)$, $E\in\Omega$, стосовно ймовірнісного простору (Ω,S,P) називають *майже сталою* або *майже напевне сталою*, якщо існує число c, для якого $P(\{E\in\Omega: X(E)\neq c\})=0$.

1. Для заданої функції $X(E)$, $E\in\Omega$, вирішити, чи є вона майже сталою:

1) $X(E)=E, E\in\Omega=\overline{1,6}$, а ймовірність P визначена функцією розподілу ймовірностей $F(x)=0$, коли $x\le 6$, і $F(x)=1$, коли $x>6$;

2) $X(E)=\begin{cases}1, \text{коли } E - \text{раціональне число},\\ 0, \text{коли } E - \text{ірраціональне число},\end{cases}$

$\Omega=[0;1]$, а ймовірність P задана щільністю розподілу ймовірностей $f(x)=0$, коли $x\notin(0;1)$, і $f(x)=1$, коли $x\in[0;1]$;

3) $X(E)=E,\ E\in\Omega=\overline{1,6}$, а розподіл ймовірностей на множині Ω рівномірний;

4) $X(E)=\dfrac{|E|}{E}$, коли $E\in\Omega=(-\infty;+\infty)$ і $E\ne 0$, а $X(0)=0$, причому ймовірність P задана функцією розподілу ймовірностей $F(x)=0$, коли $x\le 0$, і $F(x)=\dfrac{2}{\pi}arctg\,x$, коли $x>0$;

5) $X(E)=\arcsin E+\arccos E$, $E\in[-1;1]=\Omega$, а розподіл ймовірностей на множині Ω довільний;

6) $X(E)=arctg\,E+arcctg\,E$, $E\in\Omega=(-\infty;+\infty)=\Omega$, а розподіл ймовірностей на множині Ω довільний.

7) $X(E)=\begin{cases}\sin^4 E+2\sin^2 E\cos^2 E+\cos^4 E, \text{ коли } E - \text{раціональне число},\\ \sin^4 E-2\sin^2 E\cos^2 E+\cos^4 E, \text{ коли } E - \text{ірраціональне число},\end{cases}$

$E\in\Omega=\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, а розподіл ймовірностей на множині Ω рівномірний.

3.2. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини

Нехай ймовірнісна міра P_X на $(R^1, \mathscr{B}(R^1))$ визначається функцією розподілу

$$F_X(x)=P_X((-\infty,\ x))=P(X^{-1}((-\infty,\ x)) .$$

Така функція $F_X(x)$ називається *функцією розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини* X.

Випадкова величина X називається *дискретною*, якщо міра P_X зосереджена на не більш ніж зчисленній множині точок $x_1,\ x_2,\ \dots$ і для будь-якої події $B\in\mathscr{B}(R^1)$ визначається рівністю

$$P_X(B)=\sum_{x_k\in B}P_X(\{x_k\})=\sum_{x_k\in B}P(X^{-1}(x_k)) ,$$

де

$$P_X(\{x_k\})=P(X^{-1}(x_k))=\Delta F_X(x_k)=F_X(x_k+0)-F_X(x_k) .$$

Якщо множина значень функції розподілу $F_X(x)$ не більш ніж зчисленна, то випадкова величина X є *дискретною*. В цьому разі випадкову величину $X(E)$ можна подати у вигляді

$$X(E)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{X^{-1}(x_i)}(E),$$

де

$$I_{X^{-1}(x_i)}(E)=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad E\in X^{-1}(x_i),\\ 0, & \text{якщо} \quad E\,\overline{\in}\, X^{-1}(x_i),\end{cases}$$

індикаторна функція множини $X^{-1}(x_i)$.

Якщо функція розподілу $F_X(x)$ неперервна, то випадкова величина X називається *неперервною*.

Випадкова величина X називається *абсолютно неперервною*, якщо функція розподілу $F_X(x)$ абсолютно неперервна, тобто якщо існує невід'ємна борелівська функція $f_X(x)$ така, що

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt,\ \ x\in R^1,$$

причому рівність $\frac{d}{dx}F_X(x)=f_X(x)$ виконується майже всюди стосовно міри Лебега, тобто

$$m\{x:\frac{d}{dx}F_X(x) \text{ не існує або } \frac{d}{dx}F_X(x)\neq f_X(x)\}=0.$$

Функцію $f_X(x)$ називають *щільністю* розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X (в загальному випадку мають на увазі інтеграл Лебега).

Якщо функція $f_X(x)$ неперервна в точці x_0, то функція

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

диференційовна в цій точці і

$$\frac{d}{dx}F_X(x_0)=f_X(x_0).$$

Слід зазначити, що за похідною $\frac{d}{dx}F_X(x)$ можна відновити тільки абсолютно неперервну складову функції $F_X(x)$, оскільки дискретна й сингулярна складові при диференціюванні "безслідно зникають".

Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, S, P) визначено дискретну випадкову величину X із скінченною множиною можливих значень $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m\}$.

Таблицю виду табл. 2.1

Табл. 2.1

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
$P_X(\{x_i\})$	$P_X(\{x_1\})$	$P_X(\{x_2\})$	$\ldots$	$P_X(\{x_m\})$

називають *рядом розподілу* ймовірностей на множині значень дискретної випадкової величини X.

В механічній інтерпретації ряд розподілу ймовірностей є аналогом розподілу одиничної маси вздовж осі абсцис так, що на точку з абсцисою x_i припадає маса $P_X(\{x_i\})$, причому $\sum_{i=1}^{m} P_X(\{x_i\}) = 1$.

Ряд розподілу можна подати графічно. Для цього вздовж осі абсцис відкладають можливі значення x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, випадкової величини X, а вздовж осі ординат проти кожної абсциси – відповідні ймовірності (Рис. 2.1).

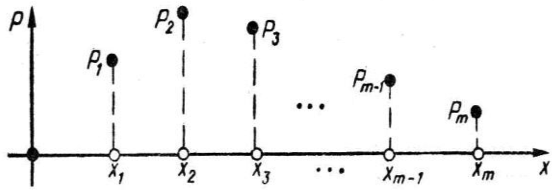


Рис. 2.1

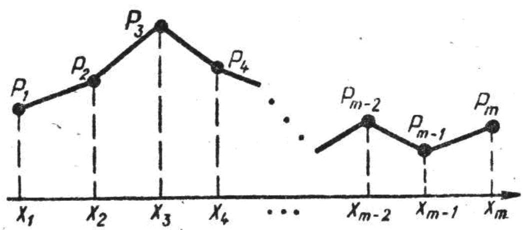


Рис. 2.2

Якщо точки $(x_1,\ P_X(\{x_1\}),\ \ldots,\ (x_m,\ P_X(\{x_m\})$ нанести на координатну площину і сполучити ламаною лінією, то дістанемо так званий *многокутник розподілу ймовірностей* (Рис. 2.2), який є однією з форм описування розподілу ймовірностей на множині значень одновимірної випадкової величини із скінченною множиною значень.

Приклад 2.1. Експеримент полягає в одночасному підкиданні трьох монет. Множина Ω елементарних подій складається з восьми рівноймовірних елементів: E_1 – ГГГ, E_2 – ГГЦ, E_3 – ГЦГ, E_4 – ГЦЦ, E_5 – ЦГГ, E_6 – ЦГЦ, E_7 – ЦЦГ, E_8 – ЦЦЦ (Г – монета впала догори гербом, Ц – цифрою). Причому $P(E_i) = \frac{1}{8}$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ (як імовірності добутків по три незалежні в сукупності події, ймовірність кожної з яких дорівнює $\frac{1}{2}$).

Кожній елементарній події поставимо у відповідність кількість появ герба на трьох монетах. Тоді (Рис. 2.3) $X(E_1) = 3$, $X(E_2) = 2$, $X(E_3) = 2$, $X(E_4) = 1$, $X(E_5) = 2$, $X(E_6) = 1$, $X(E_7) = 1$, $X(E_8) = 0$, тобто $\Omega_X = X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Як елементи сукупності S будемо розглядати будь які підмножини множини Ω. Як елементи сукупності S_X також будемо розглядати будь які підмножини

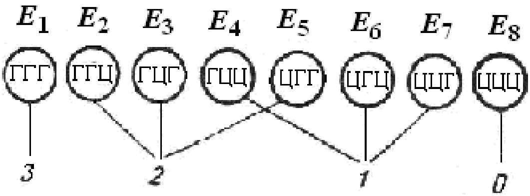


Рис. 2.3

множини Ω_X. Тоді за властивістю адитивності ймовірності (або за формулою Бернуллі) одержимо

$$P_X(\{0\}) = P(X^{-1}(0)) = P(\{E_8\}) = 1/8,$$

$$P_X(\{1\}) = P(X^{-1}(1)) = P(\{E_4, E_6, E_7\}) = 3/8,$$

$$P_X(\{2\}) = P(X^{-1}(2)) = P(\{E_2, E_3, E_5\}) = 3/8,$$

$$P_X(\{3\}) = P(X^{-1}(3)) = P(\{E_1\}) = 1/8.$$

Знаючи ряд розподілу ймовірностей на множині значень дискретної випадкової величини, можна побудувати функцію розподілу ймовірностей на множині значень цієї величини:

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = \sum_{x_i \in (-\infty, x)} P_X(\{x_i\}).$$

В механічному тлумаченні значення $F_X(x)$ функції розподілу ймовірностей визначає загальну масу, що припадає на проміжок $(-\infty, x)$, за умови, що вздовж осі абсцис деяким чином розподілено одиничну масу.

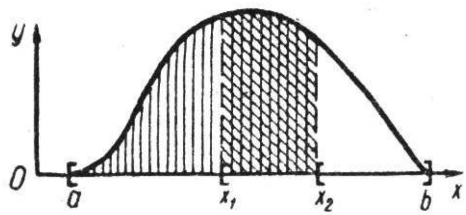


Рис. 2.4

Якщо функція розподілу ймовірностей має розриви першого роду, але множина її значень не є дискретною, то відповідний розподіл ймовірностей називається *мішаним*.

В механічній інтерпретації це означає, що частина одиничної маси розподілена вздовж осі *Ox* на деякому проміжку неперервно, а решта поділена на частинки, які поміщено в окремих точках.

Приклад 2.2. Перша половина одиничної маси розподілена рівномірно на відрізку $[0,1]$ із щільністю розподілу $f_1(x)=\dfrac{1}{2}$ і дає першу частину функції розподілу цієї маси

$$F_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x\le 0;\\ (1/2)x, & \text{коли} \quad 0<x\le 1;\\ 1/2, & \text{коли} \quad x>1;\end{cases}$$

а друга половина міститься в точці $x=\dfrac{1}{2}$ і дає другу частину функції розподілу даної маси (Рис. 2.5, а).

$$F_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x\le \dfrac{1}{2};\\ \dfrac{1}{2}, & \text{коли} \quad x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

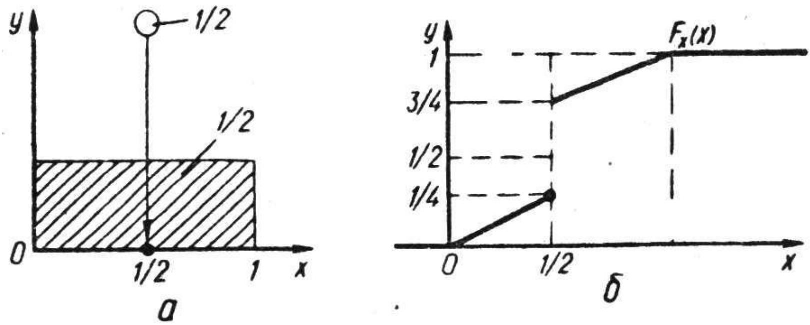


Рис. 2.5

Графік функції розподілу маси (ймовірностей) $F_X(x)=F_1(x)+F_2(x)$ при цьому матиме вигляд, поданий на Рис. 2.5, б.

Приклад 2.3. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X визначається функцією розподілу ймовірностей (Рис. 2.6)

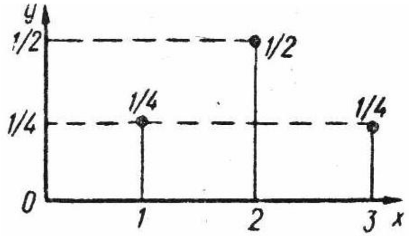


Рис. 2.6 а)

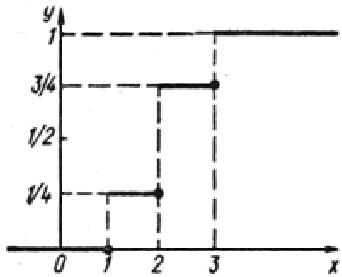


Рис. 2.6 б)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 1; \\ 1/4, & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2; \\ 3/4, & \text{якщо} \quad 2 < x \le 3; \\ 1, & \text{якщо} \quad 3 < x. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належатиме інтервалу $[1{,}5;\ 3{,}5)$.

За формулою

$$P_X([a,b)) = F_X(b) - F_X(a) \qquad (2.1)$$

одержимо

$$P_X([1{,}5;\ 3{,}5)) = F_X(3{,}5) - F_X(1{,}5) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Цей результат випливає також з того, що в розглядуваному випадку подія $[1{,}5;\ 3{,}5)$ відбувається, якщо відбувається принаймні одна з двох подій $(\{2\})$ або $(\{3\})$, оскільки $\{2\} \cup \{3\} \subset [1{,}5;\ 3{,}5)$ (Рис. 2.6).

Приклад 2.4. Знайти аналітичний вираз для щільності розподілу ймовірностей, графік якої подано на Рис. 2.7. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X із заданим розподілом ймовірностей належатимуть відрізку $[0{,}5;\ 1{,}5]$.

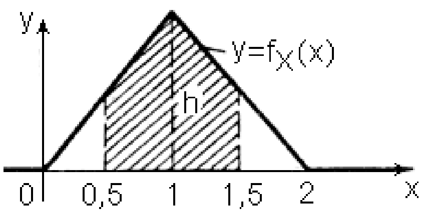


Рис. 2.7

Виходячи з геометричного тлумачення властивостей щільності розподілу ймовірності, можна зробити висновок, що $h = 1$. Тому

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ x, & \text{якщо } 0\le x\le 1;\\ 2-x, & \text{якщо } 1\le x\le 2;\\ 0, & \text{якщо } 2\le x,\end{cases}$$

оскільки кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $(0,\ 0)$ і $(1,\ 1)$, дорівнює $+1$, а кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $(1,\ 1)$ і $(2,\ 0)$, дорівнює -1. За заданих умов імовірність попадання на відрізок $[0{,}5;\ 1{,}5]$ дорівнює

$$\int_{0,5}^{1,5} f_X(x)\ dx=\frac{3}{4}.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай експеримент полягає в тому, що в деякому квадраті G, довжина сторони якого 22, навмання вибирається точка. Кожній точці квадрата поставимо у взаємно однозначну відповідність елементарну подію E. Тоді множина точок квадрата ототожнюється з множиною Ω елементарних подій. Кожній точці квадрата, віддаленій від його центра C не більше, ніж на 1, поставимо у відповідність число 10 (Рис. 2.8); кожній точці квадрата, віддаленій від центра більше ніж на 1, але не більше ніж на 2, поставимо у відповідність число 9; точкам, віддаленим від центра більше ніж на 2, але не більше ніж на 3, поставимо у відповідність число 8 і т.д.; точкам, віддаленим більше ніж на 9, але не більше ніж на 10, поставимо у відповідність число 1; нарешті, точкам, віддаленим більше ніж на 10, поставимо у відповідність число 0. Таким способом задано відображення X двовимірної нескінченної і недискретної множини Ω на одновимірну скінченну множину:

$$\Omega_X=X(\Omega)=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}.$$

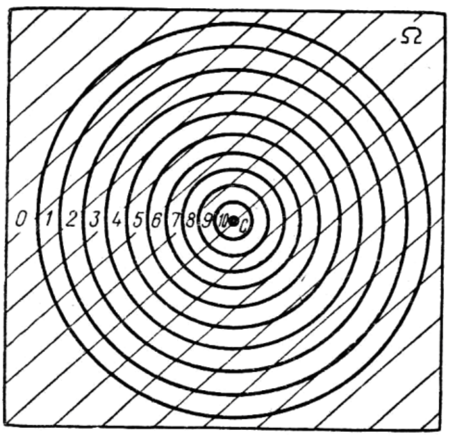


Рис. 2.8

При цьому

$$X^{-1}(10)=\{M: M\in G,\quad 0\le \rho(M,C)\le 1\};$$

$$X^{-1}(9)=\{M: M\in G,\quad 1<\rho(M,C)\le 2\};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X^{-1}(0)=\{M: M\in G,\ 10<\rho(M,C)\},$$

де через $\rho(M,C)$ позначено відстань між точками M і C.

Як події із простору подій S ймовірнісного простору (Ω, S, P) розглядатимемо вимірні за Лебегом підмножини множини Ω, а ймовірнісну міру P множини $A\in S$, $A\subset\Omega$, задамо як $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$ (геометричне задання ймовірнісної міри, див. п. 2.4). Тоді згідно з геометричним заданням ймовірності,

$$P_X(\{i\})=P(X^{-1}(i))=\frac{m(X^{-1}(i))}{m(G)}.$$

Обчисливши останні ймовірності для всіх можливих значень $i\in\Omega_X=X(\Omega)=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ і звівши їх у відповідну таблицю, дістанемо ряд розподілу ймовірностей на множині значень розглядуваної випадкової величини (табл. 2.2).

Табл. 2.2

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(\{x_i\})$	$\frac{22^2-\pi 10^2}{22^2}$	$\frac{\pi 10^2-\pi 9^2}{22^2}$	$\frac{\pi 9^2-\pi 8^2}{22^2}$	$\frac{\pi 8^2-\pi 7^2}{22^2}$	$\frac{\pi 7^2-\pi 6^2}{22^2}$

5	6	7	8	9	10
$\frac{\pi 6^2-\pi 5^2}{22^2}$	$\frac{\pi 5^2-\pi 4^2}{22^2}$	$\frac{\pi 4^2-\pi 3^2}{22^2}$	$\frac{\pi 3^2-\pi 2^2}{22^2}$	$\frac{\pi 2^2-\pi 1^2}{22^2}$	$\frac{\pi 1^2}{22^2}$

Вправа 2. Експеримент полягає в тому, що вісім разів підкидається монета і фіксується кількість підкидань, в яких монета впала гербом догори.

Очевидно, що множиною можливих значень розглядуваної випадкової величини X є множина

$$\Omega_X=X(\Omega)=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

За формулою Бернуллі

$$P_X(\{x_i\})=C_8^{x_i}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_i}\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x_i}=\frac{C_8^{x_i}}{256}.$$

Надаючи x_i значень $0, 1, 2, \ldots, 8$, дістанемо ряд розподілу ймовірностей (табл. 2.3):

Табл. 2.3

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_X(\{x_i\})$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Многокутник розподілу ймовірностей на множині значень даної випадкової величини зображено на Рис. 2.9.

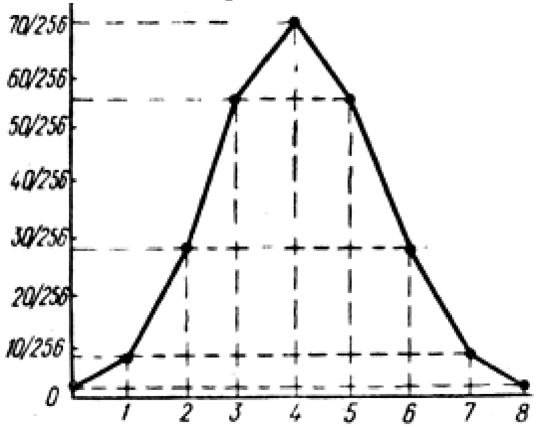


Рис. 2.9

Вправа 3. Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X має вигляд $F_X(x) = a + b\,\mathrm{arctg}\,(\frac{x}{2})$, $-\infty < x < \infty$ (розподіл Коші). Знайти сталі a і b, побудувати графік функції $F_X(x)$, знайти $P_X(X \in [\alpha, \beta))$.

Враховуючи властивості функції розподілу ймовірностей $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, а також що $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2}$, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = a + b(-\frac{\pi}{2}); \\ 1 = a + b(\frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

звідки $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\pi}$. Отже, $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}$. Графік функції $F_X(x)$ зображено на Рис. 2.10.

За формулою (2.1) дістаємо

$$P_X([\alpha, \beta)) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$

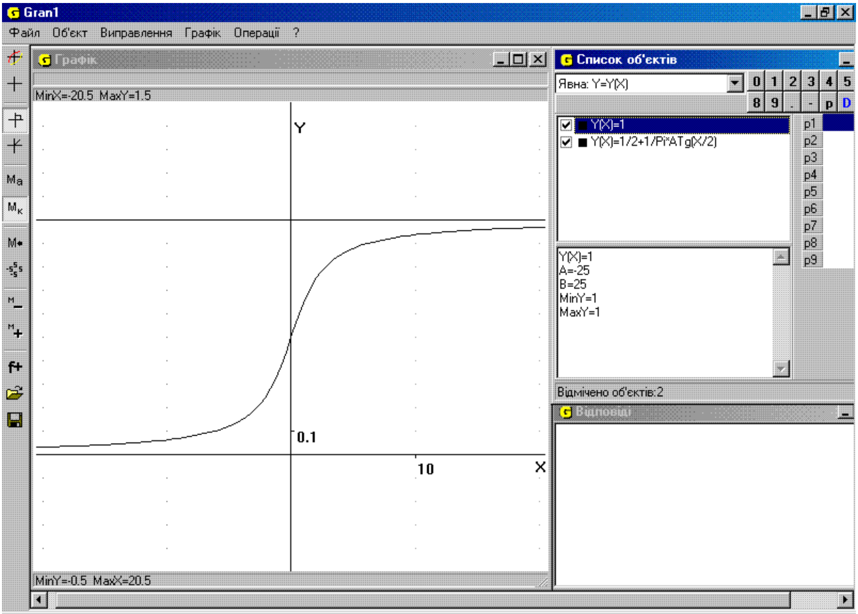


Рис. 2.10

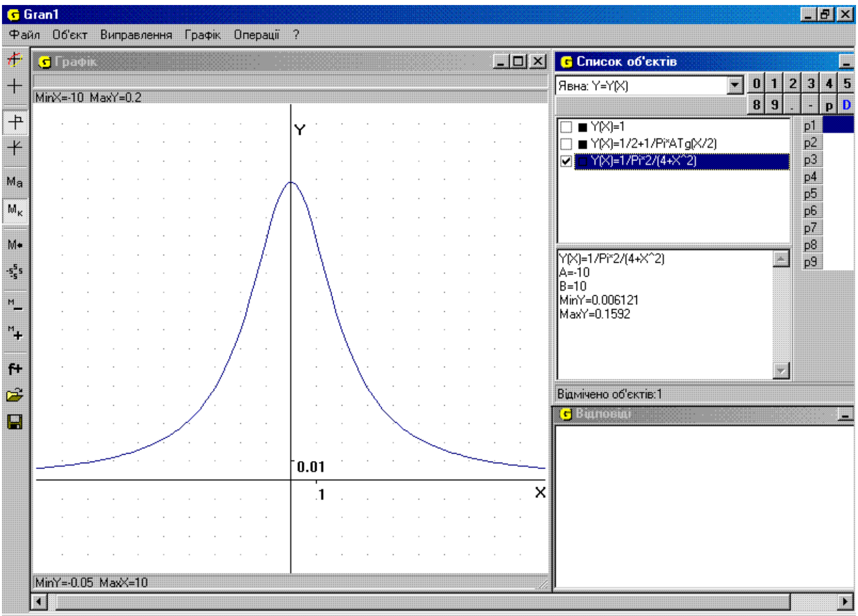


Рис. 2.11

Легко бачити, що щільність $f_X(x)$ розглядуваного розподілу ймовірностей має вигляд (Рис. 2.11):

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{4 + x^2}, \; x \in (-\infty, \infty).$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожна випадкова величина має єдину функцію розподілу ймовірностей на множині її значень.
2. Якщо випадкова величина визначена на дискретному просторі Ω елементарних подій, то вона є дискретною.
3. Твердження, обернене до 9, є правильним.
4. Функція розподілу ймовірностей на множині значень дискретної випадкової величини кусково стала.
5. Якщо функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини не є кусково сталою, то ця випадкова величина є неперервною.
6. Кожна неперервна випадкова величина є абсолютно неперервною.
7. Розподіл ймовірностей на множині значень кожної неперервної випадкової величини можна описати щільністю розподілу ймовірностей.
8. Функція розподілу ймовірностей на множині значень абсолютно неперервної випадкової величини є скрізь диференційовною.
9. Кожна випадкова величина цілком визначається рядом розподілу ймовірностей на множині її значень.
10. Розподіл ймовірностей на множині значень кожної випадкової величини можна подати через многокутник розподілу ймовірностей.
11. Якщо випадкова величина має мішаний розподіл ймовірностей, то вона не є ані неперервною, ані дискретною.

2. Які з перелічених нижче випадкових величин є дискретними, а які неперервними:

1) число влучень в мішень при кількох незалежних пострілах;
2) відстань від центра мішені до точки влучення в мішень;
3) число дефектних виробів в партії з 1000 штук;
4) момент виходу з ладу заданого електроприладу;
5) відхилення розмірів опрацьованої деталі від стандарту;
6) число очок, які випали на верхній грані грального кубика.

3. Довести, що для неперервної випадкової величини X ймовірність будь-якого окремого значення a дорівнює нулю:

$$P_X(\{a\}) = 0.$$

4. Довести, що коли випадкова величина X неперервна, то ймовірності $P_X([a, b))$, $P_X((a, b])$, $P_X((a, b))$, $P_X([a, b])$ рівні між собою.

5.1. Визначити, коли дані таблиці задають ряди розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P):

а)

x_i	0	1	2
$P_x(\{x_i\})$	0,1	0,5	c_1

б)

y_i	0	1	2
$P_y(\{y_i\})$	c_2	0,2	0,8

2. З'ясувати, яким може бути розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини:
1) $X(E)+Y(E)$; 2) $X(E)\cdot Y(E)$; 3) $X(E)-Y(E)$; 4) $X(E)/Y(E)$.

3. Навести геометричне подання даних рядів розподілу ймовірностей та побудувати відповідні многокутники розподілу ймовірностей.

4. Визначити функції розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$ і побудувати їх графіки.

5. Знайти ймовірність події A, яка полягає у тому, що випадкова величина $X(E)$ набуває значень з проміжка: 1) $(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$; 2) $(\frac{1}{2};1)$; 3) $(1;2]$; 4) $(0;2)$; 5) $[0;2)$; 6) $[0;2]$.

6. Довести, що множина $A=\{E\in\Omega : X(E)\le 1,\text{ а } Y(E)>\frac{1}{2}\}$ є подією, причому $A=\{E : X(E)\le 1\}\bigcap\{E : Y(E)>\frac{1}{2}\}$.

7. З'ясувати, чи можна знайти ймовірність події A без додаткових умов.

6. *Спільним розподілом ймовірностей двох дискретних випадкових величин* $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, з множинами значень відповідно $\{x_1, x_2, \ldots\}$ та $\{y_1, y_2, \ldots\}$ називають функцію $P((X^{-1}(x_i)\bigcap(Y^{-1}(y_k))=p_{ik}$, $i\in\{1, 2, 3, \ldots\}$, $k\in\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Довести, що:

1. Числа p_{ik} задають дискретний розподіл ймовірностей на множині $\Omega_1=N^2$.

2. $\sum\limits_k p_{ik}=P_X(\{x_i\})=P(X^{-1}(x_i)$ для кожного фіксованого i, а $\sum\limits_i p_{ik}=P_Y(\{y_k\})=P(Y^{-1}(y_k)$ для кожного фіксованого k, тобто спільний двохвимірний розподіл ймовірностей на множині пар (x_i, y_k) значень двох дискретних випадкових величин однозначно визначає розподіл ймовірностей на множині значень кожної з цих величин.

7. Узагальнити поняття спільного розподілу ймовірностей на випадок n дискретних випадкових величин $X_k(E)$, $E\in\Omega$.

Сформулювати і розв'язати завдання, аналогічні до завдань 1 і 2 задачі **6**.

8. Підкидають два гральних кубика і фіксують кількість очок на кожному з них.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій та задати рівномірний розподіл ймовірностей на ньому.

2. Нехай $X(i, j) = i$, а $Y(i, j) = \max\{i, j\}$, $(i, j) \in \Omega$. Скласти: 1) спільний розподіл ймовірностей на множині пар значень випадкових величин X та Y; 2) розподіли ймовірностей на множинах значень кожної випадкової величини X та Y; 3) розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини: а) $X+Y$, б) $X-Y$; в) $X \cdot Y$; г) X/Y.

3. Знайти функції розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин X та Y, а також спільного розподілу ймовірностей на декартовому добутку множин значень величин X і Y.

9. Монету підкидають 5 разів і фіксують набір з 5 цифр, причому i-та цифра – 1, коли при i-му підкиданні випав герб, і – 0, коли випала цифра.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій та розподіл ймовірностей на ньому, вважаючи, що при кожному підкиданні ймовірність випадання герба дорівнює $p = \dfrac{1}{2}$.

2. Нехай $X(E)$ – кількість випадань герба при 5 підкиданнях, тобто кількість одиниць в запису елементарної події $E \in \Omega$; $Y(E)$ – кількість серій гербів при 5 підкиданнях, тобто серій одиниць в запису елементарної події, відокремлених одна від одної принаймні одним нулем; $Z(E)$ – довжина максимальної серії одиниць в E. З'ясувати, яких значень набувають ці величини?

3. Скласти розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин X, Y та Z.

4. Скласти спільні розподіли ймовірностей на множинах пар значень випадкових величин: 1) X та Y; 2) X та Z; 3) Y та Z.

5. Скласти розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин: 1) $X+Y$; 2) $X-Y$; 3) XY.

6. Знайти функції розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин: 1) X; 2) Y; 3) Z; 4) $X+Y$; 5) $X-Y$; 6) XY.

10. Задача про оцінку. Нехай урна містить однакові кульки, з номерами від 1 до N. Експеримент полягає в тому, що з урни навмання дістають кульку, фіксують її номер, після чого кульку повертають в урну, і так повторюють n разів.

1. Побудувати відповідний простір Ω елементарних подій та задати рівномірний розподіл ймовірностей на ньому.

2. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, – найбільший номер, серед n номерів, за допомогою яких описується елементарна подія E. Знайти: 1) ймовірність події $\{E : X(E) \le k\}$, $k \in \overline{1, N}$; 2) розподіл ймовір-

ностей на множині значень випадкової величини X, тобто $P_X(\{k\}),\ k \in \overline{1,N}$.

3. Нехай $Y(E)$, $E \in \Omega$, – найменший номер серед n номерів, що утворюють елементарну подію E. Знайти: 1) ймовірність події $\{E : Y(E) \geq j\}$, $j \in \overline{1,N}$; 2) розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини Y, тобто $P_Y(\{j\})$, $j \in \overline{1,N}$.

4. Знайти спільний розподіл ймовірностей на множині пар значень величин X та Y, тобто $P_{(X,Y)}(\{(k,\ j)\})$, $k \in \overline{1,N}$, $j \in \overline{1,N}$.

11. Задача про аналіз крові. Для виявлення хворих серед великої кількості $N = kn$ людей потрібно зробити аналіз крові. Перший спосіб аналізу полягає в тому, що кров кожної людини досліджується окремо і тому треба зробити N аналізів. Другий спосіб полягає в тому, що кров k осіб змішується і аналізується суміш. Якщо результат негативний (тобто відхилень нема), то одного аналізу достатньо для k осіб. Якщо ж результат позитивний, то досліджується кров кожної з k осіб, а тому для k осіб потрібно провести $(k+1)$ аналіз.

1. Вважаючи, що ймовірність позитивного результату аналізу крові однакова для кожної з N осіб і дорівнює $p \in (0;1)$, знайти ймовірність позитивного результату аналізу змішаної крові k осіб.

2. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, – кількість аналізів при другому способі дослідження крові N людей. Знайти: 1) область визначення Ω цієї функції; 2) розподіл ймовірностей на цій множині; 3) розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X.

12. Для фіксованої події A з ймовірнісного простору (Ω, S, P) незалежні випробування проводяться доти, доки подія A не відбудеться r разів, r – фіксоване натуральне число. При цьому подія A в кожному випробуванні відбувається з однією і тією самою ймовірністю p. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega_1$, – кількість випробувань, необхідних для цього. Знайти: 1) область визначення Ω_1; 2) розподіл ймовірностей на цьому просторі; 3) розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $X(E)$.

13. Потяги метро йдуть з інтервалом 2 хвилини. Нехай X – час очікування потягу на зупинці. Вважаючи, що $X(E) = E$, $E = x \in [0;2]$ і розподіл ймовірностей на множині $[0;2]$ значень випадкової величини X є рівномірним, знайти: 1) щільність розподілу ймовірностей $f_X(x)$ та її графік; 2) функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$ та її графік; 3) ймовірність того, що час очікування потяга: а) не менший 45сек; б) не більший 30сек.

14. Нехай функція $F(x)$ задовольняє умови:

1) $F(x)$ неспадна на $(-\infty; +\infty)$;

2) $F(x)$ неперервна зліва у кожній точці $x_0 \in (-\infty; +\infty)$;

3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, а $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Довести, що існує ймовірнісний простір (Ω, S, P) і випадкова величина $X(E)$, $E \in \Omega$, стосовно цього простору такі, що $F_X(x) = F(x)$.

15. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X – *показниковий* з параметром $\lambda > 0$, тобто функція розподілу ймовірностей має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{коли } x > 0. \end{cases}$$

1. Побудувати графік функції $F_X(x)$.

2. Довести, що X – абсолютно неперервна випадкова величина, знайти щільність $f_X(x)$ розподілу ймовірностей та побудувати її графік.

3. Для довільних фіксованих x_1 і x_2, $x_1 < x_2$, знайти:

1) $P(\{E : X(E) < x_2 - x_1\})$;

2) $P(\{E : X(E) < x_2\})$ і $P(\{E : X(E) > x_1\})$;

3) $P(\{E : x_1 < X(E) < x_2\})$;

4) $P(A / B)$, де подія $A = (\{E : x_1 < X(E) < x_2\})$, а подія $B = (\{E : X(E) > x_1\})$.

4. Довести, що показниковий розподіл має властивість *відсутності наслідків*, тобто задовольняє умову

$$P(A / B) = \frac{F_X(x_2) - F_X(x_1)}{1 - F_X(x_1)} = F_X(x_2 - x_1).$$

5*. Довести, що коли $F_X(x)$ – неперервна функція розподілу ймовірностей і задовольняє умову відсутності наслідків, то вона обов'язково є функцією показникового розподілу з деяким параметром $\lambda > 0$.

16*. Нехай прилад починає працювати у момент часу $t = 0$. Відомо, що умовна ймовірність зіпсування приладу на проміжку часу від t до $t + \Delta t$ за умови, що він не зіпсувався до моменту часу t, дорівнює $\lambda \Delta t + \alpha(\Delta t)$, де $\lambda = const > 0$, а $\alpha(\Delta t) / \Delta t \to 0$, коли $\Delta t \to 0$.

Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, – час безвідмовної роботи приладу, причому для кожного $t \ge 0$ множина $(\{E : X(E) \ge t\})$ є подією з ймовірністю $Q(t) = P(\{E : X(E) \ge t\})$. Довести, що:

1. $X(E)$ – випадкова величина;

2. $P((\{E : X(E) < t + \Delta t\}) / (\{E : X(E) \ge t\})) = \lambda \Delta t + \alpha(\Delta t)$;

3. $P((\{E : X(E) \geq t + \Delta t\}) / (\{E : X(E) \geq t\})) = 1 - \lambda\Delta t - \alpha(\Delta t)$ – це умовна ймовірність того, що прилад не зіпсується на проміжку від t до $t + \Delta t$ за умови, що він не зіпсувався до моменту часу t.

4. $Q(t + \Delta t) = P(\{E : X(E) \geq t\} \cdot \{E : X(E) \geq t + \Delta t\}) =$

$$= P(\{E : X(E) \geq t\}) \cdot P(\{E : X(E) \geq t + \Delta t\} / \{E : X(E) \geq t\}) =$$
$$= Q(t)(1 - \lambda\Delta t - \alpha(\Delta t)) .$$

5. Функція $F_X(t) = 1 - Q(t)$ є функцією розподілу ймовірностей на множині значень цієї випадкової величини.

6. $F_X(t)$ є функцією показникового розподілу ймовірностей.

17. На одиничному колі з центром в початку координат навмання вибирають точку, в якій проводять дотичну до кола і підраховують довжину $X(E)$ відрізка дотичної від точки дотику до точки перетину з віссю абсцис.

1. Знайти область визначення Ω функції $X(E)$ і побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P), відносно якого $X(E)$ буде випадковою величиною.

2. Довести, що $P_X((-\infty,\ x)) = \dfrac{2}{\pi} arctg\, x$ для будь-якого $x > 0$, а коли $x \leq 0$, то $P_X(-\infty,\ x) = 0$, тобто що розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $X(E)$ є розподілом ймовірностей Коші з функцією розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq 0, \\ \dfrac{2}{\pi} arctg\, x, & \text{коли } x > 0. \end{cases}$$

18. Функція розподілу ймовірностей на множині значень неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq 0, \\ ax^2 + b, & \text{коли } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{коли } x > 2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметри a і b; 2) щільність $f_X(x)$ розподілу ймовірностей; 3) ймовірність попадання значень випадкової величини у проміжок $[2; 3]$.

19. Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq a, \\ \sin 2x, & \text{коли } a < x \leq b, \\ 1, & \text{коли } x > b. \end{cases}$$

1. Яких значень можуть набувати параметри a і b?

2. Для яких значень параметрів a і b випадкова величина буде неперервною?

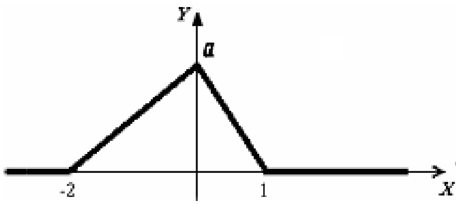
3. Якщо функція $F_X(x)$ є неперервною, то з'ясувати, чи є вона абсолютно неперервною, і якщо так, то знайти відповідну щільність розподілу ймовірностей.

4. Якщо функція $F_X(x)$ розподілу ймовірностей не є неперервною, то виділити її неперервну і дискретну компоненти.

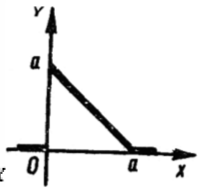
20. Сформулювати та розв'язати задачу, аналогічну до задачі **19**, замінивши в умові $\sin 2x$ на $tg\frac{x}{2}$.

21. Графік щільності розподілу ймовірностей випадкової величини X має вигляд:

1)



2)



1. Знайти параметр a і аналітичний вираз щільності $f_X(x)$.

2. Знайти відповідну функцію $F_X(x)$ розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

3. Обчислити $P_X((-1, \frac{1}{2}))$ – ймовірність того, що значення випадкової величини X лежать у проміжку $(-1; \frac{1}{2})$.

22. Для даної таблиці: 1) вирішити, коли вона задає ряд розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X; 2) побудувати відповідний многокутник розподілу ймовірностей; 3) знайти функцію розподілу ймовірностей та побудувати її графік; 4) обчислити ймовірність того, що випадкова величина набуває значення з даного проміжку $< a;\ b >$:

1.

x_i	2	4	7	9	11
p_i	0,1	c_1	0,3	0,1	0,3

$, < a;\ b >= [1;\ 7];$

2.

x_i	1	3	5	7
p_i	c_1	0,2	c_2	0,4

$, < a;\ b >= (1;\ 7);$

3.

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,3	0,3	c

$, < a;\ b >= [-1;\ 1);$

4.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4	c

$, <a;\ b>=(-1;\ 1];$

5.

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,3	0,3	c	0,3

$, <a;\ b>=[-1;\ 1];$

6.

x_i	-4	-3	0	3	4
p_i	0,3	0,4	c_1	0,3	c_2

$, <a;\ b>=(-4;\ 4];$

7.

x_i	-20	-10	0	10	20
p_i	$0{,}5\alpha$	2α	3α	2α	$0{,}5\alpha$

$, <a;\ b>=[1;\ 10);$

8.

x_i	-10	-5	0	5	10
p_i	$0{,}1\alpha$	$0{,}2\alpha$	0,1	$0{,}3\alpha$	$0{,}4\alpha$

$, <a;\ b>=(-10;\ 10);$

9.

x_i	-15	-10	-5	0	5
p_i	α	2α	3α	4α	5α

$, <a;\ b>=[5;\ 6];$

10.

x_i	2	5	7	8	9
p_i	$-\alpha$	-2α	0,1	-3α	-4α

$, <a;\ b>=(9;\ 10];$

11.

x_i	1	2	3	4
p_i	α	$\beta-\alpha$	γ	$\beta-\gamma$

$, <a;\ b>=[4;\ 5);$

12.

x_i	-3	-2	-1	0	1
p_i	α	α^2	α^3	α^3	$1-2\alpha$

$<a;\ b>=(1;\ 9).$

23. Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X має вигляд:

1. $$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, & -1<x\le \dfrac{1}{3}; \\ 1, & x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

2. $$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 2, \\ 0{,}5x-1 & \text{при} \quad 2<x\le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$$

3. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \sin x & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

1) Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань величина X набуде значення: а) меншого, ніж 0,2; б) не меншого п'яти; в) з інтервалу $(0, \frac{1}{3})$.

2) Знайти відповідну щільність розподілу ймовірностей $f_X(x)$ і побудувати її графік.

24. Для заданої щільності розподілу ймовірностей на множині значень неперервної випадкової величини X знайти відповідну функцію $F_X(x)$ розподілу ймовірностей; побудувати графіки функцій $f_X(x)$ та $F_X(x)$, а також знайти ймовірність того, що X набуде значення з даного проміжка $< a, b >$:

1. $f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x < 0 \text{ або } x > \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{коли} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \ < a; b >= (\dfrac{\pi}{6}; \ \dfrac{\pi}{4}). \end{cases}$

2. $f_X(x) = \frac{3}{2}\sin 3x$ в інтервалі $(0, \frac{\pi}{3})$, а за межами цього інтервалу $f(x) = 0$; $< a;\ b >= (\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2})$.

3. $f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le 1 \text{ або } x > 2, \\ x - \dfrac{1}{2}, & \text{коли} \quad 1 < x \le 2; \ < a;\ b >= [\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}]. \end{cases}$

4. В інтервалі $(0, \frac{\pi}{2})$ $f_X(x) = C\sin 2x$, а за межами цього інтервалу $f_X(x) = 0$; $< a;\ b >= (\frac{\pi}{4};\ +\infty)$. Знайти сталу C.

5. $f_X(x) = \begin{cases} 0, \ \text{коли} & x \le 0 \text{ або } x > \alpha, \\ \dfrac{x}{\alpha}, \ \text{коли} & 0 < x \le \alpha; \ \text{де} \quad \alpha > 0; \ < a; b >= (\dfrac{\alpha}{2}; 2\alpha). \end{cases}$

Знайти: сталу α.

6. $f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } x>\pi,\\ A\sin x, & \text{коли } 0<x\le\pi; \text{ де } A>0; \; <a;\, b>=(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}).\end{cases}$

Знайти сталу A.

7. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X є розподілом Коші, тобто

$$f_X(x)=\frac{A}{1+x^2},\; -\infty<x<+\infty;\; <a;b>=[-1;\,1].$$

Знайти сталу A.

8. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X є розподілом арксинуса, тобто

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } -\infty<x<-1 \text{ або } x>1,\\ \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{коли } -1<x<1;\; <a;b>=(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}).\end{cases}$$

Знайти сталу A.

9. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X є показниковий, тобто

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x<0,\\ Ae^{-\lambda x}, & \text{коли } x\ge 0,\; \lambda>0;\; <a;b>=(1;2).\end{cases}$$

Знайти сталу A.

10. $f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x<0 \text{ або } x>1,\\ Ax^2, & \text{коли } 0\le x\le 1;\; <a;b>=(\frac{1}{2};2).\end{cases}$

Знайти сталу A.

11. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний і має вигляд:

$$f_X(x)=Ae^{-\frac{(x-4)^2}{18}};\; <a;b>=[4;+\infty).$$

Знайти сталу A і параметри a та σ.

12. На множині значень неперервної випадкової величини X ймовірності розподілені за законом Лапласа: $f_X(x)=\alpha e^{-\lambda|x|}$, де $\lambda>0$; $<a;b>=[-1;1]$. Знайти коефіцієнт α.

25. Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X має вигляд

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0{,}3, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}5, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти: 1) $P\{1 \le X \le 3\}$; 2) ряд розподілу ймовірностей.

26. На множині значень випадкової величини X розподіл ймовірностей задано функцією розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le \dfrac{3}{2}, \\ 2x-3, & \text{коли} \quad \dfrac{3}{2} < x \le 2, \\ 1, & \text{коли} \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті двох незалежних випробувань випадкова величина X обидва рази набуде значення з проміжку $(1{,}7;\ 1{,}9)$.

27. В комірці пам'яті ПЕОМ подано n-розрядне двійкове число; кожен знак цього числа незалежно від інших набуває з однаковою ймовірністю два значення “0” і “1”. Випадкова величина X – число знаків “1” у запису двійкового числа. Знайти ймовірності того, що випадкова величина X набуде значення: 1) рівного m; 2) не меншого, ніж m; 3) меншого, ніж m.

28. Автоматична телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Ймовірність того, що протягом 5 хвилин на АТС надійде виклик, дорівнює 0,005. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X – числа викликів, що надходять на АТС протягом 5 хвилин. Яка ймовірність того, що протягом 5 хвилин на АТС надійде хоча б один виклик? більше 4-х викликів?

29. В коробці 4 червоних і 3 зелених олівці. Із коробки довільним чином дістають 3 олівці. Нехай X – число при цьому червоних олівців. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X, функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$ та $P(\{E : 2 \le X(E) \le 3\})$.

30. Один із параметрів деталей, що виготовлені на даному підприємстві, можна вважати неперервною випадковою величиною X, що має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами $a = 3$, $\sigma = 0{,}1$. Записати вираз для щільності розподілу ймовірностей і функції розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X. Вказати межі, в яких майже напевне гарантується зміна розглядуваного параметра деталі, якщо за ймовірність практичної вірогідності приймається $0{,}9973$.

31. Вимірювальний прилад має систематичну похибку 5 м і середню квадратичну похибку 75 м. Яка ймовірність того, що похибка вимірювання не перевищить за абсолютною величиною 5 м? Вважати, що розподіл ймовірностей на множині похибок нормальний з параметрами $a = 5$ і $\sigma = 75$.

3.3. Функції випадкового аргумента

Нехай X *– випадкова величина, задана на ймовірнісному просторі* (Ω, S, P), $\psi(x): R^1 \to R^1$ *– борелівська функція. Тоді* $Y = \psi(X)$ *є також випадковою величиною на ймовірнісному просторі* (Ω, S, P).

При цьому функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y має вигляд

$$F_Y(y) = P_Y((-\infty, y)) = P_X(\psi^{-1}((-\infty, y))).$$

Якщо випадкова величина X дискретна, то

$$F_Y(y) = P_Y((-\infty, y)) = P_X(\psi^{-1}((-\infty, y))) = \sum_{x_i \in \psi^{-1}(-\infty, y)} P_X(\{x_i\}),$$

де x_i – окремі значення випадкової величини X, $P_X(\{x_i\})$ – імовірності цих значень.

Якщо розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X абсолютно неперервний і відома щільність $f_X(x)$ цього розподілу ймовірностей, то

$$F_Y(y) = P_Y((-\infty, y)) = P_X(\psi^{-1}((-\infty, y))) = \int_{\psi^{-1}((-\infty, y))} f_X(x)\, dx.$$

Зауважимо, що прообразом $\psi^{-1}((-\infty, y))$ множини виду $(-\infty, y)$ є не що інше, як множина розв'язків нерівності $\psi(x) < y$, прообразом окремої точки y є множина розв'язків рівняння $\psi(x) = y$, прообразом проміжку $[y_1, y_2)$ є множина розв'язків нерівності $y_1 \le \psi(x) < y_2$ або системи нерівностей $\{y_1 \le \psi(x),\ \psi(x) < y_2\}$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Задано випадкову величину X з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, що описується щільністю розподілу ймовірностей

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & \text{якщо } |x| \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти розподіл ймовірностей випадкової величини $Y = \psi(X) = \cos(X)$.

Графік функції $f_X(x)$ подано на Рис. 3.1.

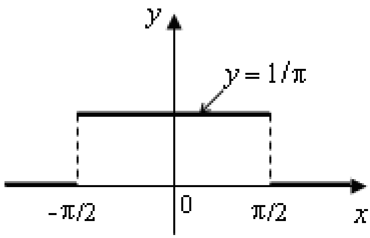


Рис. 3.1

Визначаючи прообрази множин $(-\infty, y)$ для різних $y \in (-\infty, \infty)$ та ймовірності попадання значень X у такі прообрази, дістанемо (Рис. 3.2)

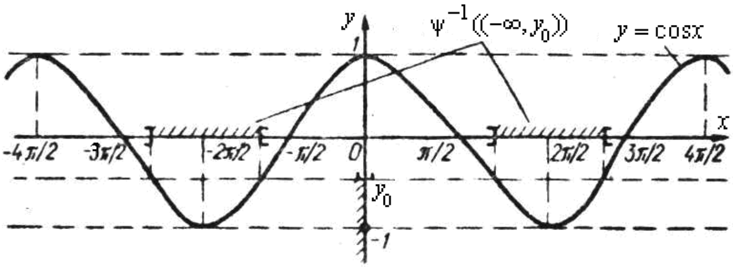


Рис. 3.2

$$F_Y(y) = P_Y((-\infty,\ y)) = P_X(\psi^{-1}((-\infty,\ y))) = 0 \text{ при } y \le -1,$$

оскільки прообраз $\psi^{-1}((-\infty, y))$, де $\psi(x) = \cos x$, при $y \le -1$ буде порожнім (значення $y = \cos x$ не можуть бути меншими за -1).

Якщо $y > -1$, але $y \le 0$, то прообраз $\psi^{-1}((-\infty, y))$ множини $(-\infty, y)$ при відображенні $y = \cos x$ вже не буде порожнім, проте

$$\int\limits_{\psi^{-1}((-\infty,y))} f_X(x)\ dx = 0,$$

оскільки $f_X(x) = 0$ при $x \in \psi^{-1}((-\infty, y))$, $y \in (-1,\ 0]$ (Рис. 3.2).

Продовжуючи міркування, дістанемо

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \le 0; \\ 1 - \dfrac{2}{\pi}\arccos y, & \text{якщо } 0 \le y \le 1; \\ 1, & \text{якщо } 1 \le y. \end{cases}$$

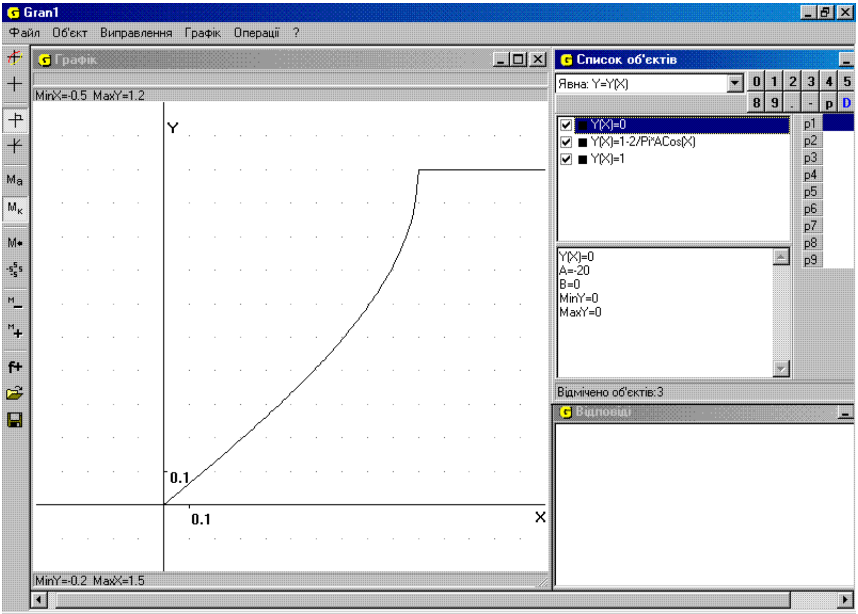

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-0.5 MaxY=1.2
Y
0.1
0.1
X
MinY=-0.2 MaxX=1.5
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=0
Y(X)=1-2/Pi*ACos(X)
Y(X)=1
Y(X)=0
A=-20
B=0
MinY=0
MaxY=0
Відмічено об'єктів:3
Відповіді

Рис. 3.3

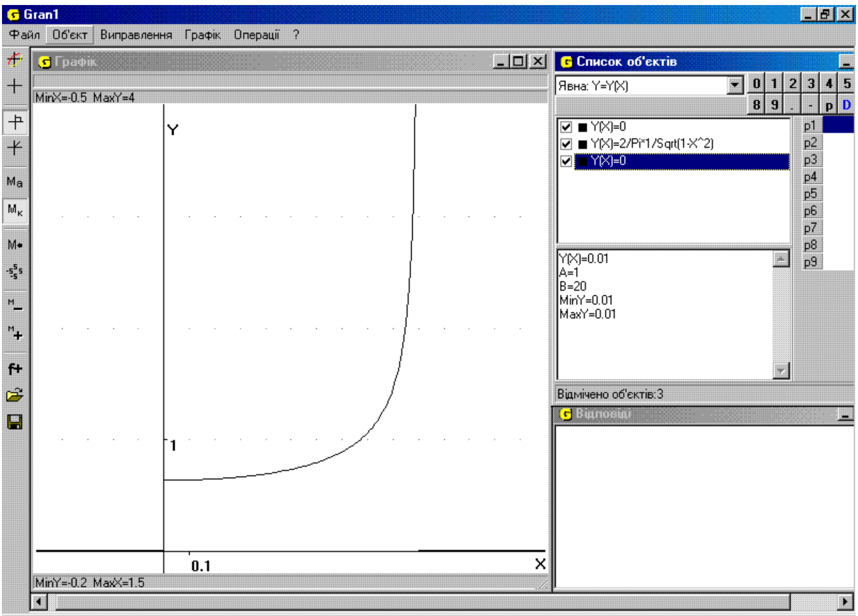

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-0.5 MaxY=4
Y
1
0.1
X
MinY=-0.2 MaxX=1.5
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=0
Y(X)=2/Pi*1/Sqrt(1-X^2)
Y(X)=0
Y(X)=0.01
A=1
B=20
MinY=0.01
MaxY=0.01
Відмічено об'єктів:3
Відповіді

Рис. 3.4

Графік функції $F_Y(y)$ зображено на Рис. 3.3. Графік щільності розподілу ймовірностей

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & \text{якщо } y \in (0,1); \\ 0, \text{ якщо } y \overline{\in} (0,1) \end{cases}$$

зображено на Рис. 3.4.

Вправа 2. Нехай випадкова величина $X(E)$, $E \in \Omega$, має дискретний розподіл ймовірностей

x_i	-2	2	3
p_i	0,2	0,3	0,5

Знайти розподіл ймовірностей випадкової величини $Y = |X(E)|$ та відповідну функцію розподілу ймовірностей.

За критерієм дискретної випадкової величини кожна множина $X^{-1}(-2)$, $X^{-1}(2)$ та $X^{-1}(3)$ є подією. Тому подією є й множина $X^{-1}(-2) \cup X^{-1}(2)$.

Функція $Y = |X(E)|$, $E \in \Omega$, має лише значення 2 та 3, причому $Y^{-1}(2) = \{E \in \Omega : |X(E)| = 2\} = X^{-1}(-2) \cup X^{-1}(2)$, а $Y^{-1}(3) = \{E \in \Omega : |X(E)| = 3\} = X^{-1}(3)$.

Тому $Y = |X(E)|$ є дискретною випадковою величиною, причому $P_Y(\{2\}) = P(Y^{-1}(2)) = P(X^{-1}(-2)) + P(X^{-1}(2)) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$, а $P_Y(\{3\}) = P(Y^{-1}(3)) = P(X^{-1}(3)) = 0{,}5$. Отже, розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Y = |X(E)|$, $E \in \Omega$, має вигляд

y_i	2	3
p_i	0,5	0,5

а функція $F_Y(y)$ розподілу ймовірностей має вигляд

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } y \le 2, \\ 0{,}5, & \text{коли } 2 < y \le 3, \\ 1, & \text{коли } y > 3. \end{cases}$$

Вправа 3. Нехай $\psi(x) = -1$, коли $x \le 0$, і $\psi(x) = 1$, коли $x > 1$, а розподіл ймовірностей на проміжку $[-2,3]$ – множині значень неперервної випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, рівномірний.

Довести, що $Y(E) = \psi(X(E))$, $E \in \Omega$, – випадкова величина, і знайти функцію розподілу ймовірностей $F_Y(y)$.

Оскільки розподіл ймовірностей на проміжку $[-2,3]$ – множині значень неперервної випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, рівномірний, то щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, \text{ коли } x \in [-2;3], \\ 0, \text{ коли } x \notin [-2;3], \end{cases}$$

а $P_X((-\infty, x_0)) = \int\limits_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx$ для будь-якого числа x_0.

Зафіксуємо довільне число y_0 і розглянемо множину $\{E \in \Omega : \psi(X(E)) < y_0\}$. Оскільки $\psi(X(E))$ може набувати лише значень -1 та 1, то коли $y_0 \le -1$, множина $\{E \in \Omega : \psi(X(E)) < y_0\} = \varnothing$ є подією, коли $-1 < y_0 \le 1$ множина $\{E \in \Omega : \psi(X(E)) < y_0\} = \{E \in \Omega : X(E) \le 0\}$ є подією, а коли $y_0 > 1$, множина $\{E \in \Omega : \psi(X(E)) < y_0\} = \Omega$ також є подією. Звідси випливає, що $\psi(X(E))$, $E \in \Omega$ є випадковою величиною.

З наведених міркувань також випливає, що коли $Y(E) = \psi(X(E))$, $E \in \Omega$, то $P_Y((-\infty, y)) = F_Y(y) = 0$, коли $y \le -1$, $P_Y((-\infty, y)) = F_Y(y) =$

$$= P\{E \in \Omega : X(E) \le 0\} = P_X((-\infty, 0)) = \int\limits_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{5}\,dx = \frac{2}{5},$$

коли $-1 < y \le 1$, і $P_Y((-\infty, y)) = P(\Omega) = 1$, коли $y > 1$. Отже, функція розподілу ймовірностей випадкової величини $Y = \psi(X(E))$ має вигляд

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } y \le -1, \\ \dfrac{2}{5}, \text{ коли } -1 < y \le 1, \\ 1, \text{ коли } y > 1. \end{cases}$$

Вправа 4. Нехай функція $F_X(x)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ x + 0{,}1, & \text{коли } 0 < x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{коли } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

а $\psi(x) = x^2$. Довести, що $Y = X^2(E)$ – випадкова величина і знайти функцію розподілу ймовірностей $F_Y(y)$.

Зафіксуємо довільне число y_0 і розглянемо множину $\{E \in \Omega : X^2(E) < y_0\}$. Зрозуміло, що коли $y_0 \le 0$, ця множина порожня, а тому є подією.

Якщо $y_0 > 0$, то

$$\{E \in \Omega : X^2(E) < y_0\} = \{E \in \Omega : -\sqrt{y_0} < X(E) < \sqrt{y_0}\},$$

а тому є подією, оскільки $X(E)$ випадкова величина (див. задачу **10** параграфа 3.1). Це означає, що $X^2(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, причому $F_Y(y) = P(\{E \in \Omega : X^2(E) < y\}) = 0$, коли $y \le 0$, а коли $y > 0$, то

$$F_Y(y) = P(\{E \in \Omega : X^2(E) < y\}) = P(\{E \in \Omega : -\sqrt{y} < X(E) < \sqrt{y}\}) =$$
$$= P(\{E : X(E < \sqrt{y})\} \setminus \{E : X(E) \le -\sqrt{y}\}) =$$
$$= P(\{E : X(E) < \sqrt{y}\}) - P(\{E : X(E) \le -\sqrt{y}\}) =$$
$$= P(\{E : X(E) < \sqrt{y}\}) - P(\{E : X(E) < -\sqrt{y}\}) - P(\{E : X(E) = -\sqrt{y}\}) =$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) - (F_X(-\sqrt{y}+0) - F_X(-\sqrt{y})) = F_X(\sqrt{y}) =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{y} + 0{,}1, & \text{коли } 0 < \sqrt{y} \le \dfrac{1}{2}, \text{ тобто } 0 < y \le \dfrac{1}{4}, \\ 1, & \text{коли } \sqrt{y} > \dfrac{1}{2}, \text{ тобто } y > \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

оскільки $F_X(-\sqrt{y}) = 0$ при $0 \le y$.

Таким чином,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } y \le 0, \\ \sqrt{y} + 0{,}1, & \text{коли } 0 < y \le \dfrac{1}{4}, \\ 1, & \text{коли } y > \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Вправа 5. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, описується неперервною функцією розподілу ймовірностей $F_X(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, а функція $Y = \psi(x)$ неперервна і зростаюча на області її визначення, що містить множину значень функції $X(E)$. 1. Довести, що $Y = \psi(X(E))$, $E \in \Omega$, – випадкова величина. 2. Знайти функцію $F_Y(y)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $Y = \psi(X(E))$, $E \in \Omega$.

1. Якщо $y \le \inf\limits_{E \in \Omega} \psi(X(E))$, то множина

$$\{E \in \Omega : \psi(X(E)) < y\} = \varnothing,$$

а тому є подією. Якщо $y > \sup\limits_{E\in\Omega} \psi(X(E))$, то $\{E \in \Omega : \psi(X(E)) < y\} = \Omega$.

Нарешті, якщо $\inf\limits_{\Omega} \psi(X(E)) < y \le \sup\limits_{\Omega} \psi(X(E))$, то $\{E \in \Omega : \psi(X(E)) < y\} = \{E \in \Omega : X(E) < \psi^{-1}(y)\}$. За умов вправи 5 число x існує та єдине. Звідси випливає, що множина $\{E \in \Omega : \psi(X(E)) < y\}$ є подією для будь-якого числа y, а тому $Y = \psi(X(E))$, $E \in \Omega$, – випадкова величина.

Окрім цього з наведених міркувань випливає, що

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } y \le \inf\limits_{\Omega} \psi(X(E)), \\ 1, \text{ коли } y > \sup\limits_{\Omega} \psi(X(E)), \\ F_X(\psi^{-1}(y)), \text{ коли } \inf\limits_{\Omega} \psi(X(E)) < y \le \sup\limits_{\Omega} \psi(X(E)). \end{cases}$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $\psi(x)$ – довільна дійсна функція, а $X(E)$ – випадкова величина, то $\psi(X(E))$ – випадкова величина.

2. Твердження 1 є правильним, коли $\psi(x)$ – неперервна на R^1 дійсна функція.

3. Якщо $\psi : R_1 \to R_1$ – неперервна функція, то вона є борелівською функцією.

4. Якщо випадкова величина $X(E)$ – дискретна, то й випадкова величина $\psi(X(E))$ також дискретна.

5. Якщо випадкова величина $X(E)$ – абсолютно неперервна, а функція $\psi : R^1 \to R^1$ неперервна, то випадкова величина $\psi(X(E))$ – абсолютно неперервна.

6. Якщо випадкова величина $X(E)$ – неперервна, а $\psi : R^1 \to R^1$ – борелівська функція, то випадкова величина $\psi(X(E))$ – неперервна.

2. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, – дискретна випадкова величина з розподілом ймовірностей

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

1. Довести, що для будь-якої функції $\psi(x)$, область визначення якої містить усі точки x_k, $k \in \overline{1,n}$, функція $\psi(X(E))$, $E \in \Omega$, є

дискретною випадковою величиною, та знайти розподіл ймовірностей на множині її значень.

2. Чи є правильним твердження 1, якщо область визначення функції $\psi(x)$ не містить принаймні одне значення x_k випадкової величини $X(E)$.

3. 1. Для заданого розподілу ймовірностей на множині значень дискретної випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,1	0,45	0,15

знайти (якщо це можливо) розподіл ймовірностей випадкової величини $\psi(X(E))$, $E \in \Omega$, коли:

1) $\psi(x) = x^2$;
2) $\psi(x) = \sqrt[3]{x}$;
3) $\psi(x) = \sqrt{x}$;
4) $\psi(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)$;
5) $\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{коли } x \neq 0, \\ 0, & \text{коли } x = 0; \end{cases}$
6) $\psi(x) = [x]$ – ціла частина x;
7) $\psi(x) = \{x\}$ – дробова частина x;
8) $\psi(x) = \cos \pi x$;
9) $\psi(x) = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$;
10) $\psi(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

2. Знайти функцію $F_Y(y)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $Y = \psi(X(E))$, $E \in \Omega$.

4. Нехай область визначення функції $\psi(x)$ містить множину значень випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, а множина значень $\psi(x)$ є не більш ніж зчисленною числовою множиною $\{y_1, y_2, \ldots\}$.

1. Довести, що функція $\psi(X(E))$, $E \in \Omega$, є дискретною випадковою величиною, коли для кожного значення y_i, $i = 1, 2, \ldots$, множина розв'язків рівняння $\psi(x) = y_i$ є борелівською множиною.

2. Перевірити суттєвість останньої умови для правильності твердження 1.

5. Нехай на множині значень випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, задано показниковий розподіл ймовірностей з параметром $\lambda \geq 0$. Довести, що $\psi(X(E))$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, і знайти функцію розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $\psi(X(E))$, коли:

1) $\psi(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{коли } x \neq 0, \\ 0, & \text{коли } x = 0; \end{cases}$
2) $\psi(x) = [x]$ – ціла частина x;
3) $\psi(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 5x + 6)$;
4) $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq 0, \\ \operatorname{sign} \ln x, & \text{коли } x > 0; \end{cases}$

5) $\psi(x)=\begin{cases} 1, & \text{коли } \sin x<1, \\ \sqrt{\sin x-1}, & \text{коли } \sin x\geq 1. \end{cases}$

6. Для заданого розподілу ймовірностей випадкової величини $X(E)$, $E\in\Omega$, і заданої функції $Y=\psi(x)$ перевірити, чи є функція $Y=\psi(X(E))$, $E\in\Omega$, випадковою величиною, і якщо так, то знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей $F_Y(y)$ та щільність розподілу ймовірностей $f_Y(y)$ (якщо вона існує).

1. Розподіл на множині $[a;b]$ значень випадкової величини X рівномірний і неперервний, а $\psi(x)$ визначається рівністю:

1) $\psi(x)=\begin{cases} 0, \text{ коли } x\leq 0, \\ 1, \text{ коли } 0<x\leq 1, \\ 2, \text{ коли } 1<x\leq 2, \\ 3, \text{ коли } x>2, \end{cases}$ $[a;b]=[0;9]$;

2) $\psi(x)=\sqrt[3]{x}$, $[a;b]=[0;9]$;

3) $\psi(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\leq 0, \\ x^2, & \text{коли } 0<x\leq 2, \\ 4, & \text{коли } 2<x\leq 6, \\ x-2, & \text{коли } x>6, \end{cases}$ $[a;b]=[0;9]$;

4) $\psi(x)=[x]$ – ціла частина x, $[a;b]=[0;4]$;

5) $\psi(x)=\sqrt{x-1}$, $[a;b]=[1;10]$;

6) $\psi(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\leq 2, \\ x-2, & \text{коли } 2<x\leq 9, \\ 7, & \text{коли } x>9, \end{cases}$ $[a;b]=[-10;10]$;

7) $\psi(x)=\begin{cases} 3, & \text{коли } x\in[-2\pi;2\pi], \\ \ln\sqrt{\cos x+3}, & \text{коли } x\notin[-2\pi;2\pi], \end{cases}$ $[a;b]=[0;5]$;

8) $\psi(x)=\ln\dfrac{1}{x}$, $[a;b]=[0;1]$; 9) $\psi(x)=\cos x$, $[a;b]=[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$

10) $\psi(x)$ – довільна неперервна зростаюча функція на проміжку $(-\infty;+\infty)$, $[a;b]$ – довільний фіксований проміжок.

2. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний з параметрами 0 та 1, а $\psi(x)$ визначається рівностями:

1) $\psi(x)=|x|$; 2) $\psi(x)=x^2$; 3) $\psi(x)=|x-1|$;

4) $\psi(x)=x^3$; 5) $\psi(x)=kx+b$, $k\neq 0$.

3. Розподіл ймовірностей задано довільною функцією розподілу $F_X(x)$, а $\psi(x)$ визначається рівностями:

1) $\psi(x)=x^2$; 2) $\psi(x)=x^3$;

3) $\psi(x)=e^x$; 4) $\psi(x)=\sin x$, $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;

5) $\psi(x)=e^{-x}$; 6) $\psi(x)=\cos x$, $x\in[0;\pi]$;

7) $\psi(x)=F_X(x)$ – неперервна функція на $(-\infty;+\infty)$;

8) $\psi(x)=kx+b$.

4. Розподіл ймовірностей задано функцією розподілу

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ 0{,}6+0{,}05x, & \text{коли } 0<x\le 7,\\ 1, & \text{коли } x>7,\end{cases}$$

а $\psi(x)$ визначено рівностями

1) $\psi(x)=|x+1|$; 2) $\psi(x)=2^{-x}$;

3) $\psi(x)=2x+3$; 4) $\psi(x)=1-x^2$;

5) $\psi(x)=\sqrt{x^2+1}$; 6) $\psi(x)=\ln(1+|x|)$.

5. Щільність розподілу ймовірностей $f_X(x)$ та функція $\psi(x)$ визначаються рівностями:

1) $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\psi(x)=\dfrac{1}{x}$;

2) $f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{коли } x>0;\end{cases}$ $\psi(x)=e^{-x^2}$;

3) $f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\notin[0;\frac{\pi}{2}],\\ \sin x, & \text{коли } x\in[0;\frac{\pi}{2}];\end{cases}$ $\psi(x)=x^4$;

4) $f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\notin[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}],\\ \frac{1}{2}\cos x, & \text{коли } x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}];\end{cases}$ $\psi(x)=x^3$;

5) $f_X(x)=\begin{cases} |x|, & \text{коли } |x|\le 1,\\ 0, & \text{коли } |x|>1;\end{cases}$ $\psi(x)=-|x|$.

7. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $X(E)$, $E\in\Omega$, нормальний з параметрами a і σ, а $\psi(x)=kx+b$. Довести існування параметрів k і b таких, що функція $Y = \psi(X(E))$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, що має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$.

3.4. Випадкові вектори. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора

Нехай (Ω, S) і (W, Q) – два вимірні простори. Функція $X = X(E)$, яка визначена на Ω і набуває значень з W, називається S/Q*-вимірною функцією* або *випадковим елементом* із значеннями в W, якщо для довільного $B \in Q$

$$\{E : X(E) \in B\} = X^{-1}(B) \in S .$$

Випадкові елементи із значеннями у W називають також W*-значними випадковими величинами*.

Якщо $(W, Q) = (R^1, \mathscr{B}(R^1))$, то випадковий елемент є випадковою величиною.

Будь-який скінченний впорядкований набір із n випадкових величин $(X_1(E), X_2(E), \ldots, X_n(E))$, $E \in \Omega$, називається n*-вимірним випадковим вектором на ймовірнісному просторі* (Ω, S, P).

Іноді випадковий вектор називають також *системою випадкових величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Нехай X є n-вимірним випадковим вектором на ймовірнісному просторі (Ω, S, P). Ймовірнісна міра P_X на $(R^n, \mathscr{B}(R^n))$, визначена рівністю

$$P_X(B) = P(\{E : X(E) \in B\}) = P(X^{-1}(B)), \ B \in \mathscr{B}(R^n),$$

називається *розподілом ймовірностей на множині значень* n*-вимірного випадкового вектора* X.

Якщо $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, то запис $x^{(1)} \le x^{(2)}$ означає, що $x_i^{(1)} \le x_i^{(2)}$ для всіх $i \in \overline{1, n}$.

Множину

$$[a, b) = \{x : a \le x < b\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_1 \le x_1 < b_1, \ldots, a_n \le x_n < b_n\}$$

називають n*-вимірним інтервалом* (n-інтервалом).

Функцією розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора X називається функція

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P(\{E : X(E) \in (-\infty, x)\}) = P(X^{-1}(-\infty, x)), \ x \in R^n,$$

тобто

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= P(\{E : (X_1(E), X_2(E), \ldots, X_n(E)) \in (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \ldots \times (-\infty, x_n)\}) =$$
$$= P(\{E : X_1(E) \in (-\infty, x_1), X_2(E) \in (-\infty, x_2), \ldots, X_n(E) \in (-\infty, x_n)\}).$$

При цьому *функція розподілу ймовірностей має такі властивості.*

1. $0 \le F_X(x) \le 1$.

2. $F_X(x)$ – неспадна, тобто якщо $x^{(1)} < x^{(2)}$, то $F_X(x^{(1)}) \le F_X(x^{(2)})$.

3. Якщо при деякому k $x_k \to -\infty$, то $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F_X(x) = 0$.

4. Якщо $x_1 \to \infty$, $x_2 \to \infty$, …, $x_n \to \infty$, то $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

5. $F_X(x)$ неперервна зліва, тобто якщо $x^{(k)} < x$ і $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x$, то

$$\lim_{k \to \infty} F_X(x^{(k)}) = F_X(x).$$

Через функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$ однозначно визначається розподіл ймовірностей $P_X(B)$ на множині значень випадкового вектора X. До того ж справджується таке твердження.

Нехай $F_X(x)$, $x \in R^n$, *– довільна функція, що задовольняє умови 1–5. Тоді на* $\mathscr{B}(R^n)$ *можна і притому єдиним способом визначити міру* $P_X(B)$ *таку, що*

$$P_X([a,\, b)) = \Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} \ldots \Delta_{a_n b_n} F_X(x),$$

де

$$\Delta_{a_i b_i} F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= F_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Довільна функція $F_X(x)$, що задовольняє умови 1–5, називається *функцією розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора* X, а міра $P_X(B)$ задає розподіл ймовірностей, відповідний функції розподілу $F_X(x)$.

Якщо множина $\Omega_X = X(\Omega)$ значень випадкового вектора дискретна, тобто скінченна або зчисленна:

$$\Omega_X = X(\Omega) = \{x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(k)},\ \ldots\},$$

то розподіл ймовірностей на множині значень цього вектора можна задати, вказавши набір чисел

$$p_k = P_X(\{x^{(k)}\}) = P(\{E : E \in X^{-1}(x^{(k)})\}) = P(X^{-1}(x^{(k)})),$$

таких, що $p_k \ge 0$, $\sum\limits_k p_k = 1$. Тоді для довільної множини B з $\mathscr{B}(R^n)$

$$P_X(B) = \sum_{x^{(k)} \in B} p_k.$$

Маючи дискретний розподіл ймовірностей на множині значень двохвимірного випадкового вектора (X, Y), *можна знайти ймовірності* $P_X(\{x_j\}) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, l$, *і* $P_Y(\{y_i\}) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *тобто розподіли ймовірностей на множинах значень кожної з випадкових величин* X *і* Y .

При цьому

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \sum_{x_j < x} \sum_{y_i < y} p_{ij} .$$

В геометричній інтерпретації $F_{(XY)}(x_0, y_0)$ є ймовірністю того, що випадкова точка (X, Y) лежить у нескінченному прямому куті $W = \{(x, y) : x < x_0, y < y_0\}$ з вершиною (x_0, y_0) і сторонами, паралельними осям координат. Кут розміщений строго зліва від прямої $x = x_0$ і строго нижче від прямої $y = y_0$ (точки межових прямих $x = x_0$ і $y = y_0$ до розглядуваного кута не належать) (Рис. 4.1).

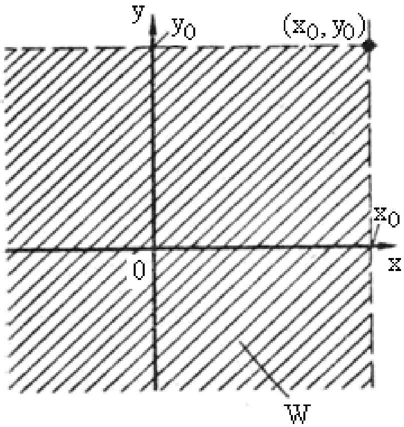


Рис. 4.1

В механічній інтерпретації значення функції розподілу $F_{(X,Y)}(x_0, y_0)$ визначає, яка загальна маса лежить строго зліва від прямої $x = x_0$ і строго нижче від прямої $y = y_0$, тобто яка маса припадає на множину $W = \{(x, y) : x < x_0, y < y_0\}$ або на перетин множин

$$\{(x, y) : x \in (-\infty, x_0), y \in (-\infty, \infty)\}$$

і

$$\{(x, y) : x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, y_0)\}$$

(Рис. 4.1), за умови, що на площині *xOy* деяким чином розподілена одинична маса.

Якщо відома функція розподілу ймовірностей $F_{(X,Y)}(x,\ y)$, то ймовірність того, що "значення" випадкового вектора (X,Y) лежать у прямокутнику

$$D=\{(x,\ y): x_1 \le x < x_2,\ y_1 \le y < y_2\},$$

обчислюється за формулою

$$P_{(X,Y)}(D)=\Delta_{x_1x_2}\Delta_{y_1y_2}F_{(X,Y)}(x,\ y)=$$

$$=\Delta_{x_1x_2}(F_{(X,\,Y)}(x,\ y_2)-F_{(X,\,Y)}(x,\ y_1))=$$

$$=F_{(X,Y)}(x_2,y_2)-F_{(X,Y)}(x_2,y_1)-(F_{(X,Y)}(x_1,y_2)-F_{(X,Y)}(x_1,y_1))=$$

$$=F_{(X,Y)}(x_2,y_2)-F_{(X,Y)}(x_1,y_2)-F_{(X,Y)}(x_2,y_1)+F_{(X,Y)}(x_1,y_1). \quad (4.1)$$

Якщо треба обчислити ймовірність попадання випадкової точки $(X,\,Y)$ в довільну область D, то цю ймовірність можна знайти наближено, апроксимуючи (наближаючи) область D деякою сукупністю прямокутників (Рис. 4.2).

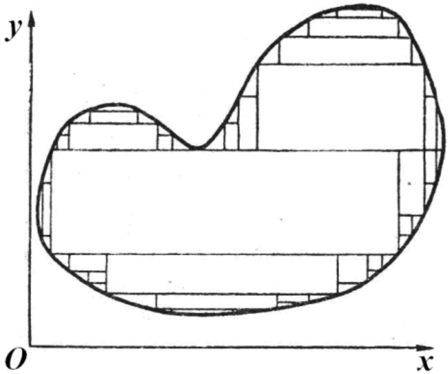


Рис. 4.2

Якщо існує така невід'ємна борелівська функція $f_X(x)$, що для довільного $B \in \mathscr{B}(R^n)$

$$P_X(B)=\int_B f_X(x)\,dx,$$

де

$$x=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\ dx=dx_1dx_2\dots dx_n,$$

$$\int_B f_X(x)\,dx=\int\int_B\dots\int f_X(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n,$$

то розподіл ймовірностей $P_X(B)$, $B \in \mathscr{B}(R^n)$, називається *абсолютно неперервним*. Функція $f_X(x)$ називається *щільністю розподілу* ймовірностей на множині значень випадкового вектора X (R^n-значної випадкової величини).

При цьому

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx,$$

тобто

$$F_{(X_1, X_2, ..., X_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{(X_1, X_2, ..., X_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n .$$

Якщо $f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервна, то $F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має n-ту мішану похідну

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n} F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В механічній інтерпретації (в R^2) $f_{(X,Y)}(x, y)$ є щільністю в точці (x, y) одиничної маси, розподіленої певним чином на площині *xOy*, а

$$P_{(X,Y)}(G) = \iint\limits_G f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy$$

є масою, що припадає на область G, коли на площині *xOy* розподілена деяка маса із щільністю $f_{(X,Y)}(x, y)$.

В геометричній інтерпретації $P_{(X,Y)}(G) = \iint\limits_G f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy$ є об'єм під поверхнею щільності над областю G (Рис. 4.3).

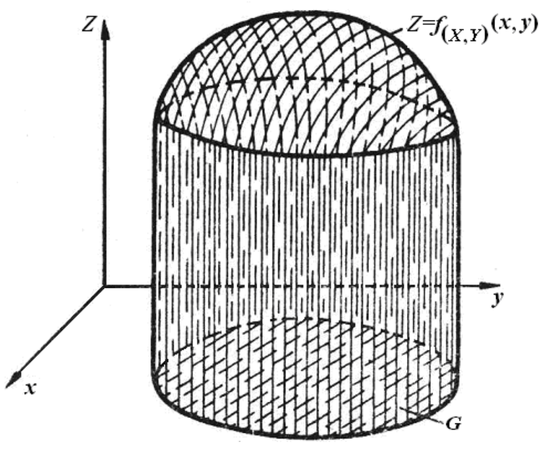


Рис. 4.3

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Розподіл імовірностей на множині значень дискретної R^2-значної випадкової величини (X,Y) має вигляд, поданий у табл. 4.1. Побудувати функцію розподілу ймовірностей $F_{(XY)}(x,\ y)$. Знайти ймовірність $P_{(XY)}((x,\ y)\in B)$, де

$$B=\{(x,\ y):0{,}5\le x<2{,}5;\ 0{,}5\le y<1{,}5\}.$$

Табл. 4.1

y_i \ x_j	1	2	3	$\sum$
0	0,2	0,1	0,2	0,5
1	0,1	0,1	0,3	0,5
$\sum$	0,3	0,2	0,5	1,0

Враховуючи означення функції розподілу ймовірностей, дістаємо (Рис. 4.4)

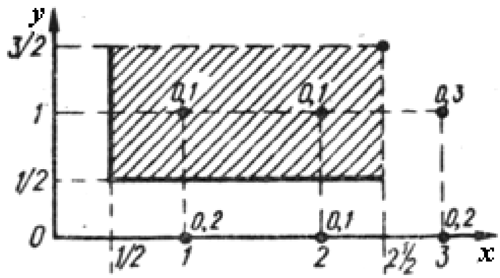


Рис. 4.4

$$F_{(X,Y)}(x,\ y)=\begin{cases}0, & \text{якщо}\ \ x\le 1\ \text{або}\ \ y\le 0;\\ 0{,}2, & \text{якщо}\ \ 1<x\le 2\ \ \text{і}\ \ 0<y\le 1;\\ 0{,}3, & \text{якщо}\ \ 1<x\le 2\ \ \text{і}\ \ 1<y\ \ \text{або}\ 2<x\le 3\ \text{і}\ 0<y\le 1;\\ 0{,}5 & \text{якщо}\ \ 2<x\le 3\ \ \text{і}\ \ 1<y\ \ \text{або}\ \ 3<x\ \ \text{і}\ \ 0<y\le 1;\\ 1, & \text{якщо}\ \ 3<x\ \ \text{і}\ \ 1<y.\end{cases}$$

На Рис. 4.5 зображено ступінчату поверхню $z=F_{(XY)}(x,\ y)$.

Обчислюючи ймовірність $P_{(XY)}(R)$ за формулою (4.1), знаходимо

$$P_{(XY)}(B)=F_{(XY)}(2{,}5;\ 1{,}5)-F_{(XY)}(2{,}5;\ 0{,}5)-F_{(XY)}(0{,}5;\ 1{,}5)+F_{(XY)}(0{,}5;\ 0{,}5)=$$
$$=0{,}5-0{,}3-0{,}0+0{,}0=0{,}2.$$

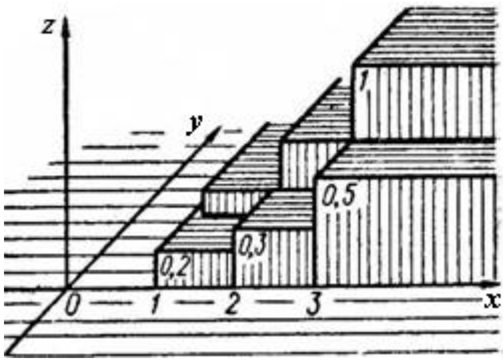


Рис. 4.5

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $X(E)$ – випадковий елемент, то $X(E)$ – випадкова величина.

2. Твердження, обернене до 1, є правильним.

3. Кожен випадковий вектор є випадковим елементом.

4. Для того, щоб випадковий елемент $X(E), E \in \Omega$, був випадковим вектором, необхідно й досить щоб

$$X(E) = (X_1(E), X_2(E), \ldots, X_n(E)) \in R^n,$$

для кожного $E \in \Omega$ і $X_i(E)$, $E \in \Omega$, $i = \overline{1, n}$, були випадковими величинами.

5. Для кожного випадкового вектора існує єдиний відповідний розподіл ймовірностей.

6. Для будь-яких точок $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ та $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ з простору R^n завжди або $x^{(1)} \le x^{(2)}$, або $x^{(1)} \ge x^{(2)}$.

7. Твердження 6 є правильним тоді й тільки тоді, коли $n = 1$.

8. Для кожного випадкового вектора існує єдина функція розподілу ймовірностей.

9. Функція розподілу ймовірностей цілком визначається своїми характеристичними властивостями.

10. Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора визначає єдину міру на $\mathscr{B}(R^n)$.

11. Кожен розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора є дискретним або неперервним.

12. Якщо розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора неперервний, то він і абсолютно неперервний.

13. Твердження, обернене до 12, є правильним.

14. Кожен розподіл ймовірностей можна описати щільністю розподілу.

15. Щільність розподілу ймовірностей є невід'ємною та неперервною функцією.

2. Нехай $X=(X_1(E),\ X_2(E))$, $E\in\Omega$, двохвимірний випадковий вектор відносно ймовірнісного простору $(\Omega,\ S,\ P)$.

1. Довести, що для будь-якої фіксованої точки $x=(x_1,\ x_2)\in R^2$ множина $\{E: X(E)<x\}=\{E\in\Omega: X_1(E)<x_1 \text{ і } X_2(E)<x_2\}\in S$, тобто є подією.

2. Довести, що функція $F_X(x)=P_X((-\infty;x))$ задовольняє умови:

1) $0\le F_X(x)\le 1$, $x\in R^2$;

2) $F_X(x)=F_X(x_1,\ x_2)$ неспадна за кожною змінною x_1 та x_2;

3) $\lim\limits_{x_1\to-\infty} F_X(x_1,\ x_2)=\lim\limits_{x_2\to-\infty} F_X(x_1,\ x_2)=0$, а $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\ x_2\to+\infty}} F_X(x_1,\ x_2)=1$;

4) $F_X(x)$ неперервна зліва у кожній точці $x_0\in R^2$.

3*. Довести, що рівність $P_X([a;\ b))=\Delta_{a_1b_1}\Delta_{a_2b_2}F_X(x_1,\ x_2)$ задає ймовірнісну міру на півалгебрі W прямокутників $[a;\ b)=[a_1;\ b_1]\times[a_2;\ b_2)$

4*. Здійснити Лебегове продовження міри P_X з півалгебри W на алгебру V, породжену півалгеброю W.

5*. Здійснити Лебегове продовження міри P_X з алгебри V на σ-алгебру S, породжену алгеброю V.

6*. Довести, що σ-алгебра S з попереднього завдання містить у собі σ-алгебру $\mathscr{B}(R^2)$ борелівських множин простору R^2.

7. За умов задачі знайти ймовірнісні міри: 1) $P_X([a;\ b])$; 2) $P_X((a;\ b])$; 3) $P_X((a;\ b))$; 4) $P_X(\{a\})$, де $a=(a_1,\ a_2)\in R^2$ і $b=(b_1,\ b_2)\in R^2$.

8*. Узагальнити задачу на випадок n-вимірного випадкового вектора $X=(X_1(E), X_2(E),\ \ldots,\ X_n(E))$, $E\in\Omega$.

3. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P) і відносно нього $X=(X_1(E),\ X_2(E))$, $E\in\Omega$, є двохвимірним випадковим вектором, множина значень якого складається з двох точок $a=(a_1,\ a_2)$ і $b=(b_1,\ b_2)\ne a$.

1. Знайти функцію $F_X(x)$ розподілу ймовірностей цього вектора, коли:

1) $a<b$, тобто $a_1<b_1$ і $a_2<b_2$;

2) $a_1<b_1$, проте $a_2>b_2$;

3) $a_1<b_1$ і $a_2=b_2$;

4) $a_1=b_1$ і $a_2<b_2$.

2. Знайти зв'язок $P_X(\{(a_1,\ a_2)\})$ і $P_X(\{(b_1,\ b_2)\})$ з $F_X(x)$.

3. Виконати завдання 1-2, коли:

1) $a=(0,\ 0)$, $b=(1,\ 1)$, $P_X(\{a\})=\frac{1}{3}$, $P_X(\{b\})=\frac{2}{3}$;

2) $a=(0,\ 0)$, $b=(1,\ -1)$, $P_X(\{a\})=\frac{2}{3}$, $P_X(\{b\})=\frac{1}{3}$;

3) $a=(0,\ 1)$, $b=(1,\ 1)$, $P_X(\{a\})=\frac{2}{5}$, $P_X(\{b\})=\frac{3}{5}$;

4) $a=(0,\ 0)$, $b=(0,\ 1)$, $P_X(\{a\})=P_X(\{b\})$.

4. Для кожного випадку 1) – 4) завдання 3 знайти ймовірність того, що значення випадкового вектора X попадуть у множину D:

1) $D=[-1;\ 1]\times[-1;\ 1]$; 2) $D=[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}]\times[-2;\ 2]$;

3) $D=[-2;\ 2]\times[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}]$; 4) $D=[-2;\ 2]\times[-2;\ 2]$;

5) $D=[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}]\times[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}]$; 6) $D=[\frac{6}{5};\ \frac{7}{5}]\times(-\infty;\ +\infty)$;

7) $D=\{(x,\ y)\in R^2 : x^2+y^2\le R^2\}$; 8) $D=\{(x,\ y)\in R^2 : x^2+y^2>R^2\}$;

9) $D=\{(x,\ y)\in R^2 : x\ge 0,\ y\ge 0\}$; 10) $D=\{(x,\ y)\in R^2 : x<0,\ y\ge 0\}$;

11) $D=\{(x,\ y)\in R^2 : x<0,\ y<0\}$; 12) $D=\{(x,\ y)\in R^2 : x>0,\ y<0\}$.

4. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P) і відносно нього двохвимірний випадковий вектор $X=(X_1(E),\ X_2(E))$, $E\in\Omega$, множина значень якого складається з трьох точок $a=(a_1,\ a_2)$, $b=(b_1,\ b_2)$ і $c=(c_1,\ c_2)$.

1. Знайти функцію $F_X(x)$ розподілу ймовірностей на множині значень цього вектора, коли $P_X(\{a\})=P_X(\{b\})=P_X(\{c\})$ і:

1) $a=(0,\ 0)$, $b=(1,\ 1)$, $c=(2,\ 2)$; 2) $a=(0,\ 0)$, $b=(1,\ 1)$, $c=(0,\ 1)$;

3) $a=(0,\ 0)$, $b=(1,\ 1)$, $c=(1,0)$; 4) $a=(0,\ 0)$, $b=(0,\ 1)$, $c=(0,\ 2)$;

5) $a=(0,\ 0)$, $b=(1,\ 0)$, $c=(2,\ 0)$; 6) $a=(0,\ 0)$, $b=(1,\ 2)$, $c=(2,\ 2)$;

7) $a=(0,\ 0)$, $b=(2,\ 1)$, $c=(2,\ 2)$.

2. Знайти ймовірність того, що значення випадкового вектора X попадуть у множину D:

1) $D=\{(x,\ y)\in R^2 : |x|+|y|\le R\}$;

2) $D=\{(x,\ y)\in R^2 : |x+y|\le R\}$;

3) $D=\{(x,\ y) : |x-y|\ge R\}$.

5. 1. Знайти функцію $F_{(X,Y)}(x,y)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора $(X,Y)=(X(E),\ X(E))$, $E\in\Omega$, заданого таблицею (якщо у таблиці є параметри, то визначити їх):

1)

$y_j \backslash x_i$	1	2	3
-1	0,2	0,1	0,3
0	0,15	0,15	0,1

2)

$y_j \backslash x_i$	-1	0	1
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0,25	c

3)

$y_j \backslash x_i$	-1	0
0	0,1	0,15
1	0,2	0,25
2	0,05	c

4)

$y_j \backslash x_i$	-1	1
1	0,2	c
2	0,15	$2c$
3	0,05	$3c$

5)

$y_j \backslash x_i$	1	2
3	c^2	$c/2$
4	$c/2$	c^2

6)

$y_j \backslash x_i$	3	4
1	$\frac{1}{4}\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha$
2	$\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha$	$\frac{1}{4}\sin\alpha$

7)

$y_j \backslash x_i$	0	1
0	$\frac{1}{2}e^{2c}$	e^c
1	$\frac{1}{2}e^c$	$\frac{1}{2}e^{2c}$

8)

$y_j \backslash x_i$	3	4
1	$\sin^4\alpha$	$\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
2	$\sin^2\alpha\cos^2\alpha$	$\sin^4\alpha$

9)

$y_j \backslash x_i$	1	2
-1	$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}-\sin\alpha$
0	$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}-\cos\alpha$

10)

$y_j \backslash x_i$	-1	0
-1	e^c	$\frac{1}{2}-e^c$
0	e^{-c}	$\frac{1}{2}-e^{-c}$

2. Підрахувати ймовірність влучення випадкової точки (X, Y) у задану множину D: 1) $D=\{(x, y):|x|+|y|\le 1\}$; 2) $D=[0;2]\times[-1;1]$; 3) $D=\{(x, y): x^2+y^2\le 2\}$; 4) $D=\{(x, y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 2\}$.

6. У скриньці є три червоні кульки та дві білі. Експеримент полягає у тому, що спочатку із скриньці навмання дістають кульки доти, поки не з'явиться біла кулька. Після цього дістають кульки доти, поки не з'явиться червона кулька або скринька не стане порожньою. Нехай X – це кількість спроб до появи білої кульки, а Y – кількість спроб після появи білої кульки.

1. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P) відносно якого $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, будуть випадковими величинами.
2. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора $(X(E), Y(E) = (X, Y))$ і випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$.
3. Знайти функції розподілу ймовірностей $F_{(X,Y)}(x, y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$.

7. У мішень стріляють двічі, причому ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює $p \in (0;1)$. Нехай X – це кількість влучень, а Y – кількість промахів.

1. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P), відносно якого $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, будуть випадковими величинами.
2. Знайти функції розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X, Y) і випадкових величин X та Y.

8. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у заданий прямокутник G, якщо відома функція $F_{X,Y}(x, y)$ розподілу ймовірностей:

1) $$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & \text{коли } x > 0, y > 0; \end{cases}$$

$G = \{(x, y) : x \in [1, 2], \ \ y \in [3, 5]\}$.

2) $$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ \sin x \cdot \sin y, & \text{коли } 0 < x \le \frac{\pi}{2},\ 0 < y \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \text{коли } 0 < x \le \frac{\pi}{2},\ y > \frac{\pi}{2}, \\ \sin y, & \text{коли } 0 < y \le \frac{\pi}{2},\ x > \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{коли } x > \frac{\pi}{2} \text{ і } y > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$G = \{(x, y) : x \in [0, \frac{\pi}{4}], \ \ y \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]\}$.

3) $$F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le -1 \text{ або } y\le -1,\\ \frac{1}{4}(x+1)(y+1), & \text{коли } -1<x\le 1,\ -1<y\le 1,\\ \frac{1}{2}(y+1), & \text{коли } -1<y\le 1,\ x>1,\\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{коли } -1<x\le 1,\ y>1,\\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$$

$G=\{(x,y): x\in[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}],\ \ y\in[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]\}$.

9. Знайти функцію $F_{X,Y}(x,y)$ розподілу ймовірностей та ймовірність попадання випадкової точки $(X,\ Y)$ у задану множину B, якщо задано розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора $(X,\ Y)$:

1. $B=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$, а розподіл ймовірностей рівномірний на множині D, де:

1) $D=[-1;1]\times[-1;1]$;
2) $D=\{(x,\ y): |x|+|y|\le 1\}$;
3) $D=\{(x,\ y): |x+y|\le 1 \text{ і } |x-y|\le 1\}$;
4) $D=[0;2]\times[1;2]$;
5) $D=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\le 1\}$;
6) $D=[a;b]\times[c;d]$.

2. $B=\{(x,y): x^2+y^2>1\}$, а щільність розподілу ймовірностей має вигляд (визначити невідомий параметр k):

1) $$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} kx^2+2xy+y^2, & \text{коли } x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1,\\ 0 & \text{в іншому разі;} \end{cases}$$

2) $f_{(X,Y)}(x,y)=ke^{-2x^2+xy-y^2}$;

3) $$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } (x,\ y)\notin[0;1]\times[0;1],\\ k\,(x+y), & \text{коли } (x,\ y)\in[0;1]\times[0;1]; \end{cases}$$

4) $$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\in[0;1] \text{ або } y\notin[0;1],\\ k\,e^{xy}, & \text{коли } x\in[0;1] \text{ і } y\in[0;1]; \end{cases}$$

5) $$f_{(X,Y)}(x,y)=\frac{k}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)};$$

6) $$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} k(R-\sqrt{x^2+y^2}), & \text{коли } x^2+y^2\le R^2,\\ 0, & \text{коли } x^2+y^2>R^2. \end{cases}$$

10. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в зображену на Рис. 4.6 заштриховану область, якщо задана функція розподілу ймовірностей $F_{(X,Y)}(x,y)$.

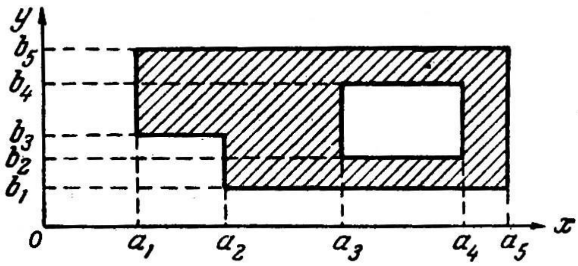


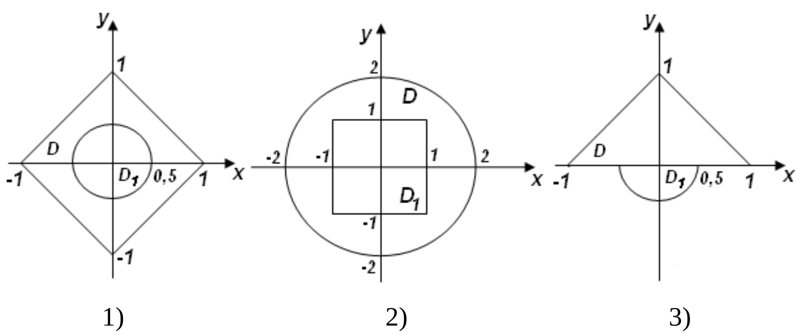
Рис. 4.6

11. Нехай при стрілянні в квадратну мішень $D=\{(x,\ y):|\,x\,|\le a,\ |\,y\,|\le a\}$ точка влучення $(X,\ Y)$ є випадковою з щільністю розподілу ймовірностей

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{коли } (x,\ y)\notin D,\\ k\,, & \text{коли } (x,\ y)\in D.\end{cases}$$

Знайти константу k та ймовірність влучення в круг $B=\{(x,y):\ x^2+y^2\le a^2\}$.

12. Нехай щільність розподілу ймовірностей $f(x,\ y)$, що дорівнює C в області D і нулю за межами D , задає рівномірний двовимірний розподіл ймовірностей. Знайти константу C і ймовірність попадання в область D_1 , якщо відповідні області D , D_1 подані на рисунках 4.7 1)-3):



1) 2) 3)

Рис. 4.7

3.5. Залежні і незалежні випадкові величини

Нехай $X=(X_1,\ X_2,\ \dots,X_n)$ – випадковий вектор з функцією розподілу ймовірностей $F_X(x)=F_X(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$. Розглянемо вектор

$$\tilde{X}=\{X_1,\ X_2,\ \dots,X_s\},\ s<n.$$

Тоді функція розподілу $F_{\tilde{X}}(\tilde{x})$ виражається через $F_X(x)$ так:

$$F_{\tilde{X}}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_s)=P_{\tilde{X}}((-\infty,\ x_1)\times(-\infty,\ x_2)\times\dots\times(-\infty,\ x_s))=$$
$$=P_X((-\infty,\ x_1)\times\dots\times(-\infty,\ x_s)\times(-\infty,\ \infty)\times\dots\times(-\infty,\infty))=$$
$$=F_X(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_s,\ \infty,\ \dots,\ \infty).$$

Якщо $\tilde{B}$ – борелівська множина в R^s, а B – множина всіх точок $x=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ з R^n, для яких $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_s)\in\tilde{B}$, то очевидно, що множини

$$\{E:\tilde{X}(E)\in\tilde{B})\}=\tilde{X}^{-1}(\tilde{B})\ \text{ і }\ \{E:X(E)\in B\}=X^{-1}(B)$$

співпадають. Тому

$$P_{\tilde{X}}(\tilde{B})=P\{E:\tilde{X}(E)\in\tilde{B})\}=P(\{E:X(E)\in B\})=P_X(B).$$

Множину B у розглядуваному випадку називають *циліндричною множиною* в R^n з основою $\tilde{B}$ в R^s.

Якщо розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора X абсолютно неперервний, то таким є і розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора $\tilde{X}$.

У випадку абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на множині значень двохвимірного випадкового вектора $(X,\ Y)$ з щільністю $f_{(X,\ Y)}(x,\ y)$ маємо:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,\ Y)}(x,y)\,dy=f_X(x)$, де $f_X(x)$ – щільність одновимірного розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X, що входить до системи $(X,\ Y)$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,\ Y)}(x,y)\,dx=f_Y(y)$, де $f_Y(y)$ – щільність одновимірного розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y, що входить до системи $(X,\ Y)$.

В геометричній інтерпретації $f_X(x_0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,\ Y)}(x_0,\ y)\,dy$ є площа перерізу площиною $x=x_0$ тіла, обмеженого поверхнями $z=f_{(X,Y)}(x,y)$ і $z=0$ (Рис. 5.1).

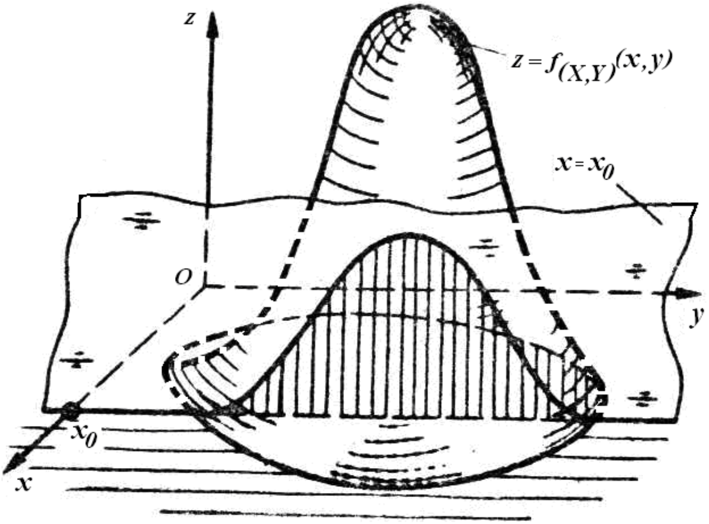


Рис. 5.1

В геометричній інтерпретації $f_Y(y_0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,\ y)\,dx$ є площа перерізу площиною $y=y_0$ тіла, обмеженого поверхнями $z=f_{(X,Y)}(x,y)$ і $z=0$ (Рис. 5.2).

Випадкові величини $X_1,\ X_2,\ \dots,X_n$ називаються *незалежними*, якщо якими б не були $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$, події $X_1^{-1}((-\infty,\ x_1))$, $X_2^{-1}((-\infty,\ x_2))$, …, $X_n^{-1}((-\infty,\ x_n))$ незалежні в сукупності, тобто

$$P\left(\prod_{i\in I} X_i^{-1}((-\infty,\ x_i))\right)=\prod_{i\in I} P(X_i^{-1}((-\infty,\ x_i))), \qquad I\subset\{1,2,\ \dots,\ n\},$$

$I\neq\varnothing$.

Нехай X і Y – два випадкові вектори із значеннями в R^s і R^l відповідно,

$$X=(X_1,\ \dots,X_s),\ Y=(Y_1,\ \dots,Y_l).$$

Функцію $F_{(X,Y)}(x,y)$ розподілу ймовірностей на множині значень складеного вектора

$$(X,Y)=(X_1,\dots,\ X_s,\ Y_1,\dots,\ Y_l)$$

$$F_{(X,Y)}(x,y)=F_{(X,Y)}(x_1,\ \dots,\ x_s,y_1,\ \dots,\ y_l)=P_{(X,\ Y)}((-\infty,\ x)\times(-\infty,\ y)),$$

де $x=(x_1,\ x_2,\ \dots,x_s)$, $y=(y_1,\dots,\ y_l)$, називають *функцією сумісного розподілу* ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових векторів X і Y.

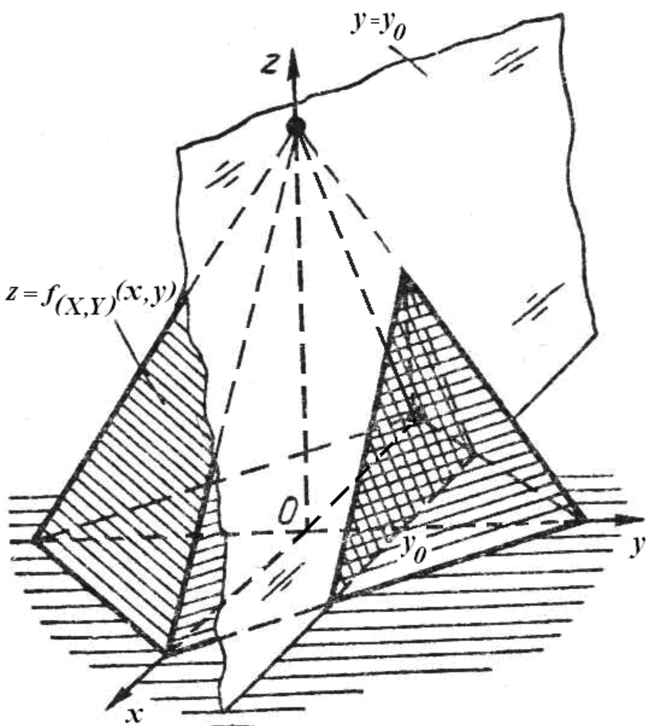


Рис. 5.2

Випадкові вектори X і Y називаються *незалежними*, якщо для довільних борелівських множин $B_X \in \mathscr{B}(R^s)$, $B_Y \in \mathscr{B}(R^l)$ випадкові події $\{E : X(E) \in B_X\}$ і $\{E : Y(E) \in B_Y\}$ незалежні, тобто

$$P_{(X,Y)}(\{E : X(E) \in B_X\} \bigcap \{E : Y(E) \in B_Y\}) =$$
$$= P_X(\{E : X(E) \in B_X\}) P_Y(\{E : Y(E) \in B_Y\}).$$

Зокрема, якщо $B_X = \{x : x \in (-\infty, x_0)\}$, $B_Y = \{y : y \in (-\infty, y_0)\}$, то з умови незалежності відповідних подій випливає, що

$$F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) F_Y(y).$$

Правильне й обернене твердження: *якщо* $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$, *то випадкові вектори* X *і* Y *– незалежні.*

Для того, щоб випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ були незалежними, необхідно й достатньо, щоб для всіх $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ виконувалась рівність

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n).$$

Якщо розподіли ймовірностей на множинах значень незалежних випадкових векторів X і Y описуються щільностями розподілу ймовірностей $f_X(x)$ і $f_Y(y)$ відповідно, то сумісний розподіл описується щільністю розподілу ймовірностей $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, $x \in R^s$, $y \in R^l$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Розглянемо рівномірний двохвимірний розподіл ймовірностей у прямокутнику $D = \{(x,\ y) : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ (Рис. 5.3). Щільність розподілу ймовірностей при рівномірному розподілі ймовірностей в області D визначається рівностями

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{якщо } (x,y) \in D; \\ 0, & \text{якщо } (x,y) \overline{\in} D. \end{cases}$$

Враховуючи властивість 2 щільності розподілу ймовірностей $f_{(X,Y)}(x,y)$ та її геометричну інтерпретацію ($\iint\limits_D f_{(X,Y)}(x,\ y)\,dxdy$ є об'єм тіла під поверхнею $f_{(X,Y)}(x,y)$ над областю D, див. Рис. 5.3), слід зробити висновок, що при рівномірному розподілі ймовірностей в області D стала c повинна дорівнювати $\dfrac{1}{\text{пл.}D}$, щоб об'єм $\iint\limits_D f_{(X,Y)}(x,\ y)\,dxdy$ дорівнював одиниці.

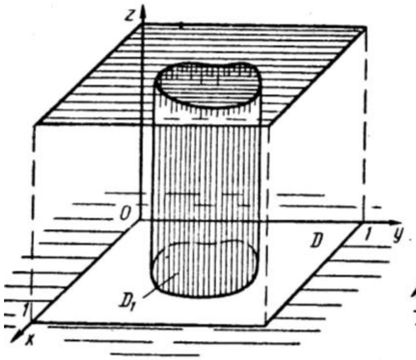


Рис. 5.3

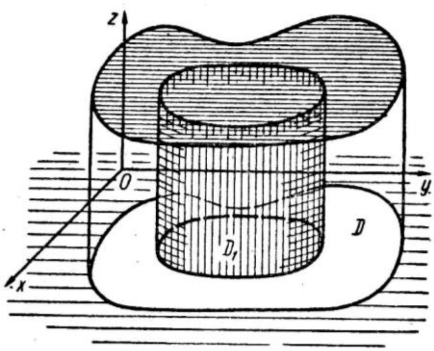


Рис. 5.4

Якщо область $D_1 \subset D$ (множина D_1 є підмножиною множини D) (Рис. 5.4), то при рівномірному розподілі ймовірностей в області D

$$P_{(X,\,Y)}(D_1) = \frac{\text{пл}.D_1}{\text{пл}.D}$$

(див. п. 2.4, ймовірність як нормована міра). Тут D_1 – випадкова подія, яка полягає в тому, що випадкова точка $(X,\ Y)$ попадає в область D_1.

Припустимо, що область D обмежена знизу неперервною дугою $y=\varphi_1(x)$, $x\in[a;\ b]$, а зверху неперервною дугою $y=\varphi_2(x)$, $x\in[a;\ b]$. Тоді для фіксованого $x\in[a;\ b]$ маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy=\frac{1}{\text{пл.}\,D}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy=\frac{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)}{\text{пл.}\,D}.$$

Тому

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\notin[a;b],\\ \dfrac{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)}{\text{пл.}\,D}, & \text{коли } x\in[a;\ b],\end{cases}$$

щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X.

Аналогічно, якщо область D обмежена зліва неперервною дугою $x=\psi_1(y)$, $y\in[c;\ d]$, а справа – неперервною дугою $x=\psi_2(y)$, $y\in[c;\ d]$, то щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y має вигляд

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\notin[c;\ d],\\ \dfrac{\psi_2(y)-\psi_1(y)}{\text{пл.}\,D}, & \text{коли } y\in[c;\ d].\end{cases}$$

Звідси випливає, що

$F_X(x)=\dfrac{1}{\text{пл.}\,D}\displaystyle\int_a^x(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))\,dt$, $x\in[a,b]$, – функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X, а

$F_Y(y)=\dfrac{1}{\text{пл.}\,D}\displaystyle\int_a^y(\psi_2(t)-\psi_1(t))\,dt$, $y\in[a,b]$, – функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y.

Зокрема, якщо $D=[a;\ b]\times[c;\ d]$, то $\text{пл.}\,D=(b-a)(c-d)$,

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\notin[a;b],\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{коли } x\in[a;\ b],\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\notin[c;d],\\ \dfrac{1}{d-c}, & \text{коли } y\in[c;\ d],\end{cases}$$

а тому $f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, тобто у цьому випадку випадкові величини X та Y є незалежними.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора цілком визначає розподіли ймовірностей на множині значень випадкових величин, що є координатами даного випадкового вектора.

2. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ є незалежними, то вони й попарно незалежні, тобто будь-які дві з цих величин є незалежними.

3. Твердження, обернене до 2, є правильним.

4. Координати будь-якого випадкового вектора є попарно незалежними випадковими величинами.

5. Випадкові величини X і Y незалежні тоді й тільки тоді, коли $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

6. Твердження 5 є правильним й для випадкових векторів X та Y.

7. Якщо розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових векторів X та Y абсолютно неперервні із щільностями $f_X(x)$ та $f_Y(y)$, то сумісний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень цих векторів має щільність розподілу ймовірностей

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

2. Нехай $X = (X_1(E),...,X_r(E))$, $Y = (Y_1(E),...,Y_s(E))$, а $(X,Y) = (X_1(E),...,X_r(E),Y_1(E),...,Y_s(E))$, $E \in \Omega$. Довести, що (X,Y) є випадковим вектором відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P) тоді й тільки тоді, коли X та Y є випадковими векторами відносно цього простору. При цьому функція

$$F_{XY}(x,y) = P_{(X,Y)}((-\infty, x) \times (-\infty, y))$$

спільного розподілу ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових векторів X та Y пов'язана з функціями $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ розподілів ймовірностей на множинах значень окремих векторів X та Y рівностями: $F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, +\infty)$ і $F_Y(y) = F_{(X,Y)}(+\infty, y)$.

3. Нехай виконано умови задачі **2**, причому розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X,Y) абсолютно неперервний із щільністю $f_{(X,Y)}(x,y)$. Довести, що розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових векторів X та Y також абсолютно неперервні відповідно із щільностями:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{s \text{ інтегралів}} f_{(X,Y)}(x, y_1, ..., y_s)\,dy_1 ... dy_s,$$

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x_1, ..., x_r, y)\,dx_1 ... dx_r.$$

4. Нехай розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових векториів X та Y дискретні: $P_X(x_k) = P(X = x_k) = p_k^{(1)}$,

$k \in N$, і $P_Y(y_i) = P(Y = y_i) = p_i^{(2)}$, $i \in N$, та спільний дискретний розподіл ймовірностей: $P_{(X,Y)}(x_k, y_i) = p_{ki}$, $k \in N$ і $i \in N$. Довести, що ці вектори незалежні тоді й тільки тоді, коли $p_{ki} = p_k^{(1)} \cdot p_i^{(2)}$ для кожних $k \in N$ та $i \in N$.

5. Для заданого спільного розподілу на декартовому добутку множин значень випадкових величин X та Y знайти розподіли ймовірностей на множинах значень кожної окремої випадкової величини та перевірити їх незалежність, а також знайти функції розподілу ймовірностей $F_X(x)$, $F_Y(y)$ і $F_{(X,Y)}(x, y)$:

1)

$y_i \backslash x_k$	0	1
0	0,01	0,09
1	0,09	0,81

2)

$y_i \backslash x_k$	0	1
0	0,01	0,09
1	0,81	0,09

3)

$y_i \backslash x_k$	1	2	3
0	0,01	0,02	0,07
1	0,02	0,04	0,14
2	0,07	0,14	0,49

4)

$y_i \backslash x_k$	0	1	2
1	0,02	0,01	0,07
2	0,02	0,04	0,14
3	0,07	0,14	0,49

5)

$y_i \backslash x_k$	0	1	2	3
1	0,01	0,02	0,03	0,04
2	0,02	0,04	0,06	0,08
3	0,03	0,06	0,09	0,12
4	0,04	0,08	0,12	0,16

6)

$y_i \backslash x_k$	1	2	3	4
0	0,01	0,02	0,03	0,04
1	0,02	0,04	0,06	0,08
2	0,03	0,06	0,09	0,16
3	0,04	0,08	0,12	0,12

6. Для заданих розподілів ймовірностей на множинах значень незалежних величин X та Y знайти відповідний спільний розподіл ймовірностей на декартовому добутку вказаних множин, а також функції розподілу ймовірностей $F_X(x)$, $F_Y(y)$ та $F_{(X,Y)}(x, y)$ (якщо є параметри, то визначити їх значення):

1)

x_k	0	1	2
$p_k^{(1)}$	0,1	0,2	0,7

y_i	1	2	3	4
$p_i^{(2)}$	0,1	0,2	0,3	0,4

2)

x_k	-1	0	1
$p_k^{(1)}$	0,3	0,35	C_1

y_i	-2	-1	0
$p_i^{(2)}$	C_2	0,1	0,3

3)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	c	$2c$	$3c$

y_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	d^2	d^2	d

4)

x_k	0	1
$p_k^{(1)}$	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$

y_i	-1	0	1
$p_i^{(2)}$	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\cos 2\alpha$

5)

x_k	1	2
$p_k^{(1)}$	$\frac{2\text{arctg}\, a}{\pi}$	$\frac{2\text{arcctg}\, a}{\pi}$

y_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	$\frac{2\text{arctg}\, a}{\pi}$	$\frac{2\text{arcctg}\, a}{\pi}$	$1-a$

6)

x_k	-1	1
$p_k^{(1)}$	a	$1-a$

y_i	-1	0	1
$p_i^{(2)}$	a^2	$1-a^2$	$a-\frac{1}{3}$

7. За даною щільністю $f_{(X,Y)}(x,y)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X,Y) знайти щільності $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ і відповідні функції $F_{(X,Y)}(x,y)$, $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ розподілу ймовірностей та перевірити незалежність випадкових величин X та Y (попередньо визначити параметр k):

1) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} k, \text{ коли } (x,y)\in[0;1]\times[0;1], \\ 0, \text{ коли } (x,y)\notin[0;1]\times[0;1]; \end{cases}$

2) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, \text{ коли } |x|+|y|>a, \\ k, \text{ коли } |x|+|y|\le a,\ a>0; \end{cases}$

3) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, \text{ коли } x^2+y^2\ge r^2, \\ k, \text{ коли } x^2+y^2<r^2,\ r>0; \end{cases}$

4) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} k, \text{ коли } |x+y|\le b \text{ і } |x-y|\le b, \\ 0, \text{ коли } |x+y|>b \text{ або } |x-y|>b,\ b>0; \end{cases}$

5) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} kxy, \text{ коли } x\in[0;1] \text{ і } y\in[0;1], \\ 0, \text{ коли } x\notin[0;1] \text{ або } y\notin[0;1]; \end{cases}$

6) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} k(x+y), \text{ коли } (x,y)\in[0;a]\times[0;a], \\ 0, \text{ коли } (x,y)\notin[0;a]\times[0;a],\ a>0; \end{cases}$

7) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} ke^{x+y}, \text{ коли } (x,y)\in[0;1]\times[0;1], \\ 0, \text{ коли } (x,y)\notin[0;1]\times[0;1]; \end{cases}$

8) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} kxye^{-x^2-y^2}, \text{ коли } x>0 \text{ і } y>0, \\ 0, \text{ коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0; \end{cases}$

9) $f_{(X,Y)}(x,y)=\dfrac{k}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$;

10) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} k\sin x\sin y, & \text{коли } (x,y)\in[0;\pi]\times[0;\pi], \\ 0, & \text{коли } (x,y)\notin[0;\pi]\times[0;\pi]. \end{cases}$

8. За даною функцією $F_{(X,Y)}(x,y)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X,Y) знайти відповідні функції $F_X(x)$ і $F_Y(y)$ розподілу ймовірностей та перевірити незалежність випадкових величин X та Y, а також визначити тип кожного розподілу:

1) $F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0, \\ xy, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1, \\ x, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>1, \\ y, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>1, \\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

2) $F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0, \\ \frac{1}{2}(x+y), & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>1, \\ \frac{1}{2}(y+1), & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>1, \\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

3) $F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a \text{ або } y\le a, \\ k(x-a)(y-a), & \text{коли } a<x\le b \text{ і } a<y\le b, \\ k(x-a)(b-a), & \text{коли } a<x\le b \text{ і } y>b, \\ k(y-a)(b-a), & \text{коли } a<y\le b \text{ і } x>b, \\ 1, & \text{коли } x>b \text{ і } y>b, \end{cases}$

де числа $a<b$ – фіксовані, а параметр k треба визначити;

4) $$F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ \frac{1}{2}xy, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1,\\ \frac{1}{2}x, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>1,\\ \frac{1}{2}y, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)(y-1), & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } 1<y\le 2,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-1), & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } y>2,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(y-1), & \text{коли } 1<y\le 2 \text{ і } x>2,\\ 1, & \text{коли } x>2 \text{ і } y>2.\end{cases}$$

9. Знайти функцію $F_{(X,Y)}(x,y)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X,Y), якщо X та Y – незалежні випадкові величини, для яких задано функції або щільності розподілу ймовірностей. Визначити тип кожного розподілу:

1. $$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{4}, & \text{коли } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1;\end{cases} \quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le -1,\\ \frac{1}{3}, & \text{коли } -1<y\le 1,\\ 1, & \text{коли y} >1;\end{cases}$$

2. $$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 1,\\ \frac{1}{3}, & \text{коли } 1<x\le 2,\\ 1, & \text{коли } x>2;\end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\notin[0;1],\\ k, & \text{коли } y\in[0;1];\end{cases}$$

3. $$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ kx^2, & \text{коли } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1;\end{cases} \quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le -1,\\ k(y+1)^2, & \text{коли } -1<y\le 0,\\ 1, & \text{коли y} >0;\end{cases}$$

4. $$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 1,\\ \frac{1}{5}, & \text{коли } 1<x\le 2,\\ 1, & \text{коли } x>2;\end{cases} \quad f_Y(y)=\frac{1}{2}e^{-|y|};$$

5. $f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\notin[0;2],\\ \dfrac{x}{2}, & \text{коли } x\in[0;2];\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\notin[1;e],\\ \dfrac{1}{y}, & \text{коли } y\in[1;e];\end{cases}$

6. $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 1,\\ \ln x, & \text{коли } 1<x\le e,\\ 1, & \text{коли } x>e;\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le 1,\\ \ln y, & \text{коли } 1<y\le e,\\ 1, & \text{коли } y>e;\end{cases}$

7. $f_X(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$; $f_Y(y)=\dfrac{b}{1+y^2}$.

10. Нехай ймовірності рівномірно розподілені на заданому проміжку $<a;b>=\Omega$. Перевірити, чи є задані функції $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, незалежними випадковими величинами відносно ймовірнісного простору $(\Omega,\mathscr{B}(R^1),P)$:

1) $X(E)=\sin E$, $Y(E)=\cos E$, $E\in[0;\frac{\pi}{2}]=\Omega$;

2) $X(E)=\operatorname{sign} E=\begin{cases}-1, & \text{коли } -1\le E<0,\\ 0, & \text{коли } E=0,\\ 1, & \text{коли } 0<E\le 1,\end{cases}$ $Y(E)=-X(E)$, $E\in[-1;1]=\Omega$;

3) $X(E)=\operatorname{tg} E$, $Y(E)=\sin^2 E+\cos^2 E$, $E\in[0;\frac{\pi}{2})=\Omega$;

4) $X(E)=[E]$ – ціла частина E, $Y(E)=\{E\}$ – дробова частина E, $E\in[0;1]=\Omega$;

5) $X(E)$ та $Y(E)$ із завдання 4, а $\Omega=[0;2]$;

6) $X(E)=2^E$, $Y(E)=\begin{cases}1, & \text{коли } E-\text{раціональне},\\ 0, & \text{коли } E-\text{ірраціональне},\end{cases}$ $E\in[0;1]=\Omega$;

7) $X(E)=\ln E$, $Y(E)=\begin{cases}1, & \text{коли } E-\text{ірраціональне},\\ 0, & \text{коли } E-\text{раціональне},\end{cases}$ $E\in[0;1]=\Omega$;

8) $X(E)=E^2$, $Y(E)=\sqrt{E}$, $E\in[0;1]=\Omega$;

9) $X(E)=\operatorname{arctg} E$, $Y(E)=\begin{cases}n, & \text{коли } E=\dfrac{1}{n},\\ 0, & \text{коли } E\ne\dfrac{1}{n},\ n\in N,\end{cases}$ $E\in[0;1]=\Omega$.

11. Нехай ймовірності рівномірно розподілені на заданому прямокутнику $\Omega=<a;b>\times<c;d>$.

1. Перевірити, чи є задані функції $X(E)$ та $Y(E)$ незалежними випадковими величинами відносно ймовірнісного простору $(\Omega,\mathscr{B}(R^2),P)$:

1) $X(E)=\sin E_1$, $Y(E)=\cos E_2$, $E=(E_1,E_2)\in\Omega=[0;\frac{\pi}{2}]\times[0;\frac{\pi}{2}]$;

2) $X(E)=\operatorname{sign} E_1$, $Y(E)=\operatorname{sign} E_2$, $E=(E_1,E_2)\in\Omega=[-1;1]\times[-1;1]$;

3) $X(E)=\operatorname{tg} E_1$, $Y(E)=\sin^2 E_2+\cos^2 E_2$,

$$E=(E_1,E_2)\in\Omega=[0;\frac{\pi}{2}]\times[0;\frac{\pi}{2}];$$

4) $X(E)=[E_1]$ – ціла частина E_1, $Y(E)=\{E_2\}$ – дробова частина E_2, $E=(E_1,E_2)\in\Omega=[0;1]\times[0;1]$;

5) $X(E)$ та $Y(E)$ із завдання 4, а $\Omega=[0;2]\times[0;2]$;

6) $X(E)=2^{E_1}$, $Y(E)=\begin{cases}1, & \text{коли } E_2 - \text{раціональне},\\ 0, & \text{коли } E_2 - \text{ірраціональне},\end{cases}$

$$E=(E_1,E_2)\in[0;1]\times[0;1]=\Omega;$$

7) $X(E)=\ln\sqrt{E_1^2+E_2^2}$, $Y(E)=\begin{cases}1, & \text{коли } E_1 \text{ і } E_2 - \text{ірраціональне},\\ 0, & \text{коли } E_1 \text{ або } E_2 - \text{раціональне},\end{cases}$

$$E=(E_1,E_2)\in[0;1]\times[0;1]=\Omega;$$

2. Порівняти одержані результати з результатами розв’язування задачі 9 і зробити висновок.

12. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, незалежні випадкові величини з функціями розподілу ймовірностей на множині значень $F_X(x)$ і $F_Y(y)$. Знайти функцію розподілу ймовірностей випадкової величини Z, якщо:

1) $Z(E)=\max\{X(E),Y(E)\}$; 2) $Z(E)=\min\{X(E),Y(E)\}$;

3) $Z(E)=\max\{2X(E),Y(E)\}$; 4) $Z(E)=\max\{X^3(E),Y(E)\}$.

13. Нехай $X(E)$, $Y(E)$ та $Z(E)$, $E\in\Omega$, – незалежні випадкові величини, причому розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин X і Y описуються відповідно функціями розподілу ймовірностей $F_X(x)$ та $F_Y(y)$, а $P(Z=1)=p\in(0;1)$ і $P(Z=0)=1-p$. Знайти функцію розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин:

1) $ZX+(1-Z)Y$;

2) $ZX+(1-Z)W^*$, де $W^*(E)=\max\{X(E),Y(E)\}$;

3) $ZX+(1-Z)W_*$, де $W_*(E)=\min\{X(E),Y(E)\}$.

14. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $X(E)$, $E\in\Omega$, описується неперервною функцією розподілу ймовірностей $F_X(x)$, а $Y=Y(E)=F_X(X(E))$, $E\in\Omega$. Довести, що:

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_X(x)\,dF_X(x)=\int\limits_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_X^k(x)\, dF^n(x) = \dfrac{n}{n+k}$, $n>0$, $k>0$.

15. Нехай розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$ описуються функціями розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$, а $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)(1+\alpha(1-F_X(x))(1-F_Y(y)))$, де $|\alpha| \le 1$. Довести, що: 1) $F(x,y)$ є функцією розподілу ймовірностей на просторі R^2, що є спільним розподілом ймовірностей випадкових величин X та Y; 2) функція $F(x,y)$ є абсолютно неперервною тоді й тільки тоді, коли $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ абсолютно неперервні.

16. Для виконання вправи учень має 2 спроби. Ймовірність правильно виконати вправу дорівнює $\dfrac{1}{2}$. Нехай X – випадкова величини – кількість правильно виконаних вправ, Y – кількість неправильно виконаних вправ. Залежні чи незалежні дані випадкові величини?

3.6. Функції кількох випадкових аргументів

Якщо $\psi(x)$ – *борелівська функція,* $\psi(x): R^n \to R^1$, *а* $X_1(E), X_2(E), \ldots, X_n(E)$ – *випадкові величини на ймовірнісному просторі* (Ω, S, P), *то* $\psi(X_1(E), X_2(E), \ldots, X_n(E))$ – *випадкова величина.*

Нехай в деякій області $A \subset R^s$ задано неперервні диференційовні функції

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_s),$$
$$y_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_s), \ldots, y_s = g_s(x_1, x_2, \ldots, x_s), \tag{6.1}$$

причому існує єдиний розв’язок цієї системи рівнянь:

$$x_1 = g_1^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_s),\ x_2 = g_2^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_s), \ldots,$$
$$x_s = g_s^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Нехай C – образ області A при перетворенні (6.1) в просторі значень $y_1, y_2, \ldots, y_s$, якобіан $J = \left|\dfrac{\partial x_j}{\partial y_i}\right|$ відмінний від нуля. Тоді правильне твердження: якщо розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора X описується щільністю $f_X(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, то розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора $Y = (g_1(X), g_2(X), \ldots, g_s(X))$ описується щільністю

$$f_Y(y_1, y_2, \ldots, y_s) =$$
$$= f_X(g_1^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_s), g_2^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_s), \ldots, g_s^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_s))\, J.$$

Нехай $h(x)$, $g(y)$, $x \in R^s$, $y \in R^l$, – борелівські функції із значеннями в R^{s_1}, R^{l_1}, а $X(E)$ та $Y(E)$ – випадкові вектори відповідно R^s- та R^l-значні. Тоді $X' = h(X)$ та $Y' = g(Y)$ – випадкові вектори.

Якщо X і Y незалежні, то X' і Y' також незалежні.

Приклад 6.1. Знайти розподіл імовірностей суми $X+Y$ одновимірних випадкових величин X і Y за умови, що розподіл імовірностей системи випадкових величин (X, Y) описується щільністю розподілу ймовірностей $f_{(X,Y)}(x, y)$.

Прообразом $\psi^{-1}((-\infty, z))$ множини $(-\infty, z)$ при відображенні $z = x + y$ є півплощина площини *xOy*, в точках якої виконується нерівність $x + y < z$ (Рис. 6.1), тобто множина розв'язків нерівності $x + y < z$.

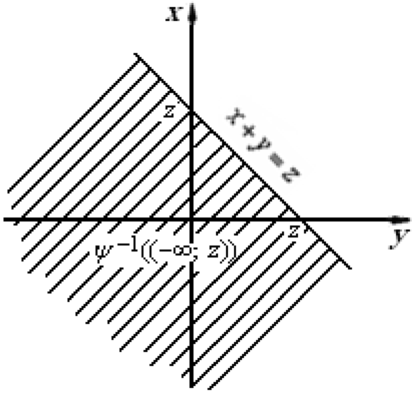


Рис. 6.1

Таким чином,

$$F_Z(z) = P_{(X,Y)}(\psi^{-1}((-\infty, z))) = \iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty, z)} f_{(X,Y)}(x, y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{(X,Y)}(x, y)dy\right\}dx.$$

Для щільності розподілу ймовірностей дістаємо

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_{(Z)}(z) = \frac{d}{dz}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{(X,Y)}(x, y)dy\right\}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, z-x)dx.$$

Якщо змінити порядок інтегрування, то

$$F_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{z-y} f_{(X,Y)}(x, y)dx\right\}dy,$$

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_{(Z)}(z)=\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{z-y}f_{(X,\,Y)}(x,\ y)dx\right\}dy=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(X,\,Y)}(z-y,y)dy\,.$$

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx\,, \tag{6.2}$$

або

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy \tag{6.3}$$

Функція $f_Z(z)$ при цьому називається *згорткою функцій* $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

Приклад 6.2. Щільність двохвимірного розподілу ймовірностей має вигляд

$$f_{(X,\,Y)}(x,y)=\begin{cases}c, & \text{якщо} \ (x,\ y)\in D;\\ 0, & \text{якщо} \ (x,\ y)\overline{\in}\ D,\end{cases}$$

де $D=\{(x,\ y);\ x\in[0,\,1],\ y\in[0,\,1]\}$.

Знайти функцію розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z=X+Y$.

Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy=\iint_D cdxdy=c\cdot пл.D=c$, то $c=1$.

Враховуючи попередні міркування, матимемо

$$F_Z(z)=P_{(X,Y)}(\psi^{-1}((-\infty,\ z)))=\iint_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))}f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy=c\iint_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))\bigcap D}dxdy\,.$$

Оскільки $c=1$, то остаточно дістаємо

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \ \ z\le 0;\\ \dfrac{z^2}{2}, & \text{якщо} \ \ 0<z\le 1;\\ 1-\dfrac{(2-z)^2}{2}, & \text{якщо} \ \ 1<z\le 2;\\ 1, & \text{якщо} \ \ 2\le z.\end{cases}$$

Графік функції $F_Z(z)$ зображено на Рис. 6.2.

Щільність $f_Z(z)$ можна знайти як похідну $\frac{d}{dz}F_Z(z)$ або як згортку функцій $f_X(x)$, $f_Y(y)$, використовуючи одну з формул (6.2) або (6.3), оскільки випадкові величини X і Y в даному випадку незалежні.

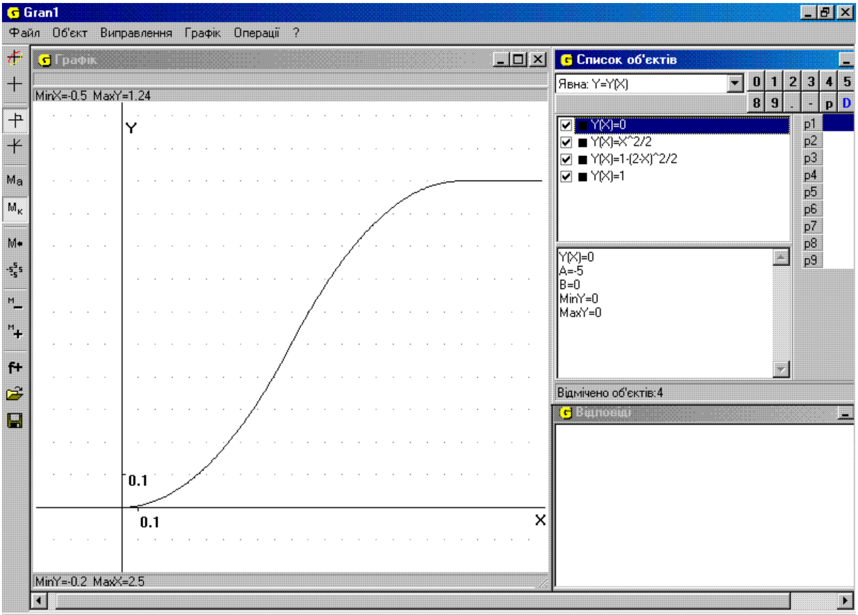


Рис. 6.2

Беручи до уваги те, що

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in[0,1];\\ 0, & \text{якщо } x\,\overline{\in}\,[0,1],\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & \text{якщо } y\in[0,1];\\ 0, & \text{якщо } y\,\overline{\in}\,[0,1],\end{cases}$$

знаходимо $f_X(x)f_Y(z-x)=1\cdot 1$, якщо $0\le x\le 1$ і $0\le z-x\le 1$.

Множину точок $(x,\ z)$, в яких виконуються нерівності $0\le x\le 1$, $0\le z-x\le 1$, зображено на Рис. 6.3.

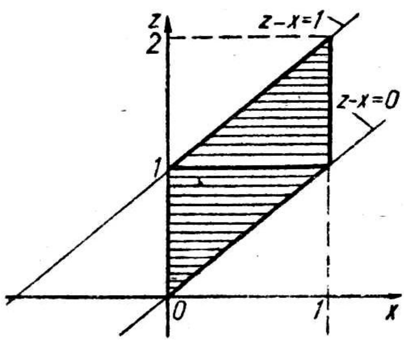


Рис. 6.3

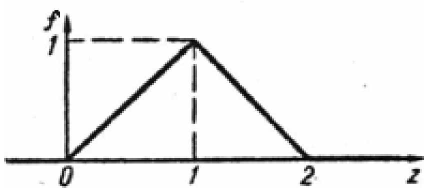


Рис. 6.4

Тепер знаходимо

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z 1\cdot 1\cdot dx=z, & \text{якщо } z\in[0,\ 1];\\ \int_{z-1}^1 1\cdot 1\cdot dx=2-z, & \text{якщо } z\in[1,2];\\ 0, \text{якщо } z\,\overline{\in}\,[0,\ 2]. & \end{cases}$$

Графік щільності $f_Z(z)$ зображено на Рис. 6.4.

Зразки ровз'язування вправ

Вправа 1. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z=X^2+Y^2$, якщо розподіл ймовірностей на множині значень двохвимірної випадкової величини (X,Y) рівномірний у крузі радіуса R з центром у початку координат і описується щільністю розподілу ймовірностей (Рис. 6.5)

$$f_{(X,\,Y)}(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\le R^2;\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2>R^2.\end{cases}$$

Враховуючи, що поверхня $z=x^2+y^2$ є параболоїдом обертання (Рис. 6.6), дістаємо $P_Z((-\infty,\ z))=0$ при $z\le 0$, оскільки прообрази множин $(-\infty,\ z)$ при відображенні $z=x^2+y^2$ порожні, якщо $z\le 0$.

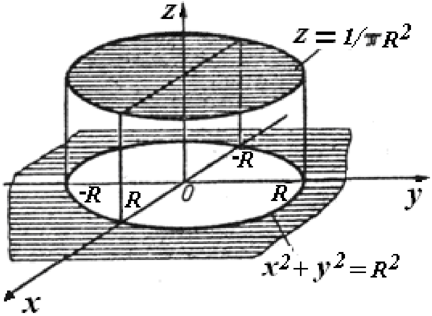


Рис. 6.5

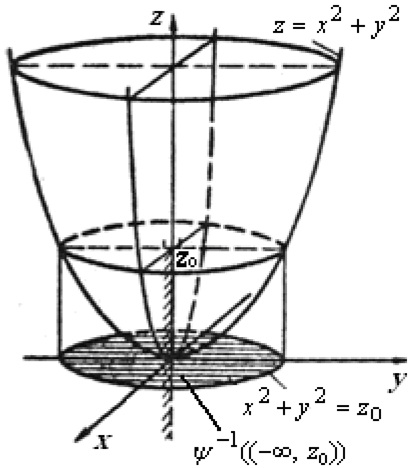


Рис. 6.6

Якщо $0 < z$, але $z \le R^2$, то прообразом множини $(-\infty, z)$ при відображенні $z = x^2 + y^2$ є круг радіуса $\sqrt{z}$ з центром у початку координат (див. Рис. 6.6). Ймовірність того, що пари координат двохвимірної випадкової величини (X, Y) належатимуть такому прообразу, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\pi z$$

як об'єм під поверхнею щільності ймовірності над прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, тобто над кругом радіуса $\sqrt{z}$ з центром у початку координат (Рис. 6.7).

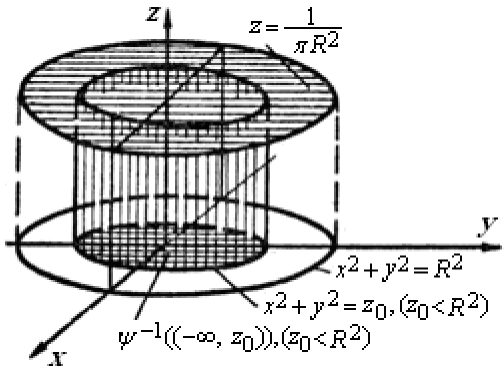


Рис. 6.7

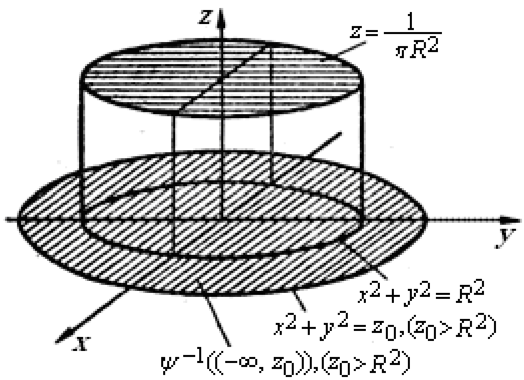


Рис. 6.8

При $z > R^2$ прообразом $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$ множини $(-\infty,\ z)$ є також круг радіуса $\sqrt{z}$, але оскільки поза кругом радіуса R функція $f_{(X,Y)}(x,\ y) = 0$ (Рис. 6.8), то при $z > R^2$ імовірність того, що пари координат випадкової величини (X,Y) належатимуть прообразу $\psi^{-1}((-\infty,\ z))$, дорівнює

$$\iint\limits_{\psi^{-1}((-\infty,\ z))} f_{(X,Y)}(x,\ y)\ dxdy = 1.$$

Таким чином,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z \le 0; \\ \dfrac{z}{R^2}, & \text{якщо} \quad 0 \le z \le R^2; \\ 1, & \text{якщо} \quad R^2 \le z. \end{cases}$$

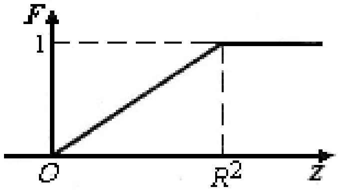


Рис. 6.9

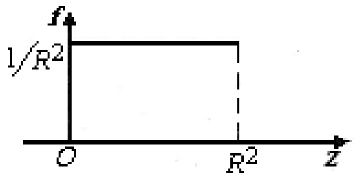


Рис. 6.10

Графік функції $F_Z(z)$ зображено на Рис. 6.9. Графік щільності $f_Z(z)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z :

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{R^2}, & \text{якщо} \ z \in [0, R^2]; \\ 0, & \text{якщо} \ z \,\overline{\in}\, [0, R^2]. \end{cases}$$

зображено на Рис. 6.10.

Вправа 2. Нехай випадкові величини $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, дискретні, а спільний розподіл ймовірностей задано таблицею

$y_i \backslash x_k$	1	2	3
1	0,01	0,02	0,07
2	0,02	0,04	0,14
3	0,07	0,14	0,49

1. Перевірити, чи є X та Y незалежними випадковими величинами.

2. Знайти функції $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ розподілів ймовірностей на множинах значень випадкових величин X та Y.

3. Знайти функцію $F_Z(z)$ розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

4. Виявити зв’язок між функціями $F_Z(z)$, $F_X(x)$ та $F_Y(y)$.

5. Перевірити, чи правильні рівності $F_Z(z) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, $F_Z(z) = F_X(z-y) \cdot F_Y(y)$.

1. Оскільки $p_k^{(1)} = P(X = x_k) = \sum_i p_{ki}$, то

$$p_1^{(1)} = P(X = x_1) = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}07 = 0{,}1,$$

$$p_2^{(1)} = P(X = x_2) = 0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}14 = 0{,}2,$$

$$p_3^{(1)} = P(X = x_3) = 0{,}07 + 0{,}14 + 0{,}49 = 0{,}7.$$

Отже, розподіл випадкової величини X можна подати у вигляді таблиці:

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	0,1	0,2	0,7

Аналогічно знаходимо, розподіл випадкової величини Y:

y_i	1	2	3
$p_k^{(2)}$	0,1	0,2	0,7

Оскільки $p_{ki} = p_k^{(1)} p_i^{(2)}$, для всіх $k \in \overline{1,3}$ і $i \in \overline{1,3}$, то випадкові величини X та Y є незалежними.

2. За означенням функції розподілу ймовірностей на множині значень дискретної випадкової величини маємо:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0{,}1, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0{,}3, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{коли } x > 3, \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } y \le 1, \\ 0{,}1, & \text{коли } 1 < y \le 2, \\ 0{,}3, & \text{коли } 2 < y \le 3, \\ 1, & \text{коли } \mathrm{y} > 3. \end{cases}$$

3. Із спільного розподілу випадкових величин X та Y випливає, що випадкова величина $Z = X + Y$ має такий розподіл ймовірностей

z_j	2	3	4	5	6
p_j	$p_{11} = 0{,}01$	$p_{12} + p_{21} = 0{,}04$	$p_{13} + p_{22} + p_{31} = 0{,}18$	$p_{23} + p_{32} = 0{,}28$	$p_{33} = 0{,}49$

Тому

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z \le 2, \\ 0{,}01, & \text{коли } 2 < z \le 3, \\ 0{,}05, & \text{коли } 3 < z \le 4, \\ 0{,}23, & \text{коли } 4 < z \le 5, \\ 0{,}51, & \text{коли } 5 < z \le 6, \\ 1, & \text{коли } \mathrm{z} > 1. \end{cases}$$

4. Враховуючи, що $Z = X + Y$, а

$$F_Z(z) = P_z((-\infty, z)) = P(X+Y<z) = \sum_{i=1}^{3} P((X+Y<z)\cdot(Y=y_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(X+y_i<z)\cdot P(Y=y_i) = \sum_{i=1}^{3} P(X<z-y_i)\cdot P(Y=y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} F_X(z-y_i)\cdot(F_Y(y_i+0)-F_Y(y_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)\,dF_Y(y).$$

Отже, $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)\,dF_Y(y)$. Останній інтеграл Лебега-Стілтьєса називають *згорткою* функцій розподілів F_X та F_Y і позначають $F_X \times F_Y(z) = F_Z(z)$.

5. Рівності $F_Z(z) = F_X(x)F_Y(y)$, $F_Z(z) = F_X(z-y)F_Y(y)$ не є правильними, оскільки, коли $z = 3 = 1+2 = 2+1$, то

$$F_Z(z) = F_Z(3) = 0{,}01 \neq F_X(1)\cdot F_Y(2) = 0\cdot 0{,}1 = 0 = F_X(2)\cdot F_Y(1).$$

Вправа 3. Нехай функція $W = \psi(X) = X^2$. Якщо розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$, то

$$F_W(w) = P_W((-\infty,\ w)) = P_X(\psi^{-1}((-\infty,\ w))) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } w \le 0, \\ \int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{w}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, & \text{якщо } w > 0, \end{cases}$$

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w}{2}} \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} w^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{w}{2}}, & \text{якщо } w > 0; \\ 0, & \text{якщо } w \le 0. \end{cases}$$

Вправа 4. Нехай функція $Z_2 = \psi(X_1,\ X_2) = X_1^2 + X_2^2$. Якщо випадкові величини X_1 і X_2 незалежні і відповідні розподіли ймовірностей нормальні з параметрами $a_{X_1} = 0$, $\sigma_{X_1} = 1$, $a_{X_2} = 0$, $\sigma_{X_2} = 1$, то

$$F_{Z_2}(z_2) = P_{Z_2}((-\infty,\ z_2)) = P_{(X_1,\ X_2)}(\psi^{-1}((-\infty,\ z_2))) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } z_2 \le 0; \\ (1-e^{-\frac{z_2}{2}}), & \text{якщо } z_2 > 0. \end{cases}$$

Вправа 5. Нехай $Z_3 = \psi(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, де X_1, X_2, X_3 – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей з параметрами $a_{X_i} = 0$, $\sigma_{X_i} = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Тоді

$$F_{Z_3}(z_3) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^{\sqrt{z_3}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^2 d\rho,$$

$$f_{Z_3}(z_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z_3^{1/2} e^{-\frac{z_3}{2}}.$$

Цей розподіл імовірностей випадкової величини Z_3 називають *розподілом Максвелла*. Величина Z_3 описує квадрат швидкості частинки в припущенні, що проекції швидкості на осі координат у тривимірному просторі є випадковими величинами зі стандартними нормальними розподілами ймовірностей.

Вправа 6. При довільному $n \geq 1$ розподіл імовірностей на множині значень випадкової величини $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, де X_i – незалежні випадкові величини зі стандартними нормальними розподілами ймовірностей, $m_{X_i} = 0$, $\sigma_{X_i} = 1$, називається χ_n^2-розподілом з n ступенями вільності. Саму величину Z_n також позначають через χ_n^2. Виявляється, що

$$f_{Z_n}(z_n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z_n < 0; \\ \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{n/2}} z_n^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z_n}{2}}, & \text{якщо } z_n \geq 0. \end{cases}$$

При необмеженому збільшенні числа доданків у сумі Z_n розподіл імовірностей випадкової величини Z_n асимптотично наближається до нормального.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожна функція $y = f(x)$, $x \in R^n$, є борелівською.

2. Якщо функція $y = f(x)$, $x \in R^n$, неперервна, то вона борелівська.

3. Якщо $f: R^n \to R^1$ – борелівська функція, то вона неперервна.

4. Якщо $y = f(x),\ x \in R^n,\ y \in R^1$, а $X(E),\ E \in \Omega$, – випадковий R^n-значний вектор, то $Y(E) = f(X(E))$ – випадкова величина.

5. Твердження 4 є правильним, коли f – борелівська функція.

6. Якщо $X_i(E),\ i \in \overline{1,n}$, – випадкові величини, а $\psi : R^n \to R^1$ – неперервна функція, то $\psi(X_1(E), X_2(E), \ldots, X_n(E))$ – випадкова величина.

7. Якщо $h(X(E))$ і $g(Y(E))$ – незалежні випадкові величини, то такими є й випадкові величини $X(E)$ і $Y(E)$.

8. Якщо X_1 та X_2 незалежні R^s–значні випадкові величини, а $y = f(x),\ x \in R^s,\ y \in R^l$, то $Y_1 = f(X_1)$ і $Y_2 = f(X_2)$ – незалежні R^l–значні випадкові величини.

9. Якщо щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора $X = (X_1, X_2)$ є $f_X(x_1, x_2)$, а $y_1 = g_1(x_1, x_2),\ y_2 = g_2(x_1, x_2)$ – довільні функції, то розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора $Y = (g_1(X),\ g_2(X))$ описується щільністю,

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X\ (g_1^{-1}(y_1, y_2),\ g^{-2}(y_1, y_2)).$$

10. Розподіл ймовірностей на множині значень суми $X + Y$ одновимірних випадкових величин X і Y з абсолютно неперервними розподілами ймовірностей завжди можна знайти за допомогою згортки щільностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$.

11. Твердження 10 є правильним, коли X та Y незалежні випадкові величини.

12. Для будь-яких щільностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ розподілів ймовірностей на множинах значень випадкових величин X та Y існує їх згортка.

13. Згортка щільностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ розподілів ймовірностей на множинах значень випадкових величин X та Y визначає щільність спільного розподілу ймовірностей $f_{(X,Y)}(x, y)$ на декартовому добутку множин значень випадкових величин X та Y.

14. Існують функції $f_X(x)$ та $f_Y(y)$, для яких згорткою є функція $f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)\, dx$.

15. Твердження 14 є правильним для будь-яких функцій $f_X(x)$ та $f_Y(y)$.

16. Якщо розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин X та Y нормальні, то й розподіл ймовірностей на множині значень суми $X + Y$ також нормальний.

17. Твердження, обернене до 16, є правильним.

18. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Y = X^2$ може бути нормальним, коли: 1) розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний розподіл; 2) розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X не є нормальним.

19. Якщо розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин X_1 та X_2 нормальні, то розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z = X_1^2 + X_2^2$ не може бути нормальним розподілом ймовірностей.

20. Розподіл Максвелла – це розподіл ймовірностей суми квадратів трьох незалежних випадкових величин з нормальними розподілами ймовірностей.

2. Нехай $\psi(x, y)$ – неперервна на просторі R^2 дійсна функція, а $X = X(E)$ та $Y = Y(E)$, $E \in \Omega$, випадкові величини відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P). Довести, що :

1) множина $\psi^{-1}((-\infty; c)) = \{(x, y) \in R^2 : \psi(x; y) < c\}$ є відкритою для будь-якого числа $c \in R$;

2) кожна відкрита множина з простору R^2 є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників $B_k = [a_1^{(k)}; b_1^{(k)}) \times [a_2^{(k)}; b_2^{(k)})$, $k \in N$, які попарно не перетинаються;

3) множина

$$\{E \in \Omega : X_1(E) \in [a_1; b_1), X_2(E) \in [a_2; b_2)\} =$$
$$= \{E : a_1 \le X_1(E) < b_1\} \bigcap \{E : a_2 \le X_2(E) < b_2\} =$$
$$= X_1^{-1}([a_1, b_1)) \bigcap X_2^{-1}([a_2, b_2)),$$

а тому є подією для будь-якого прямокутника $B = [a_1; b_1) \times [a_1; b_1)$;

4) якщо $Z(E) = \psi(X(E), Y(E))$, $E \in \Omega$, то сукупність множин $A \subset R^2$, для яких $\psi^{-1}(A) \in S$, тобто є подією, утворює σ-алгебру;

5) σ-алгебра з твердження 4 містить усілякі прямокутники $B = [a_1; b_1) \times [a_1; b_1)$, а тому містить і кожну відкриту множину простору R^2;

6) якщо $W(E) = \psi(X(E), Y(E))$, то

$$\{E \in \Omega : \psi(X(E), Y(E)) < c\} = \{E \in \Omega : (X(E), Y(E)) \in \psi^{-1}((-\infty; c))\} \in S,$$

тобто є подією для будь-якого числа $c \in R$.

7) $W(E) = \psi(X(E), Y(E))$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною.

3. Узагальнити задачу **2** на випадок, коли $X = X(E)$ та $Y = Y(E)$ є випадковими векторами.

4. Узагальнити задачу **3** на випадок, коли функція $\psi(x, y)$ є R^2-значною.

5. Нехай задано розподіл ймовірностей на заданій множині $A \subset R^2$ значень випадкового вектора $(X, Y) = (X(E), Y(E))$, $E \in \Omega$.

Для заданої функції $\psi(x,y)$ довести, що $Z=\psi(X(E),Y(E))$, $E\in\Omega$, є випадковою величиною і знайти функцію $F_Z(z)$, $z\in R$, розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z:

1) розподіл рівномірний, $A=[0;\,1]\times[0;\,1]$, $\psi(x,y)=x+y$;

2) розподіл рівномірний, $A=\{(x,y)\in R^2 :|\,x\,|+|\,y\,|\le 1\}$, $\psi(x,y)=x\cdot y$;

3) розподіл рівномірний, $A=\{(x,y)\in R^2 :|\,x\,|+|\,y\,|\le 1\}$, $\psi(x,y)=|\,x\,|+y$;

4) розподіл рівномірний, $A=\{(x,y)\in R^2 : x+y\le 1, y-x\le 1, y\ge -2\}$, $\psi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

5) розподіл рівномірний, $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 1\}$, а) $\psi(x,y)=|\,x\,|-y^2$; б) $\psi(x,y)=x^2+y^2$;

6) розподіл рівномірний, $A=\{(x,y)\in R^2 : x\in\{0,1,2\}, y\in\{0,1,2\}\}$, $\psi(x,y)=x+y$;

7) розподіл рівномірний, $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 1\}$, $\psi(x,y)=x+y$;

8) розподіл рівномірний, $A=\{(x,y)\in R^2 :|\,x+y\,|\le 1$ і $|\,x-y\,|\le 1\}$, $\psi(x,y)=|\,y\,|-x$;

9) розподіл рівномірний, $A=\{(x,y)\in R^2 :|\,x+y\,|\le 1$ і $|\,x-y\,|\le 1\}$, а) $\psi(x,y)=|\,x\,|-|\,y\,|$; б) $\psi(x,y)=-y$;

10) розподіл задано таблицею

$y_i \backslash x_k$	0	1
0	0,01	0,09
1	0,09	0,81

$\psi(x,y)=|\,x\,|+|\,y\,|$;

11) розподіл задано таблицею

$y_i \backslash x_k$	0	1	2
0	0,01	0,02	0,07
-1	0,02	0,04	0,14
-2	0,07	0,14	0,49

$\psi(x,y)=|\,y\,|-|\,x\,|$;

12) A є квадратом з вершинами у точках $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, графік щільності утворює бічну поверхню піраміди з основою A і вершиною у точці $(0,0,h)$, а $\psi(x,y)=x$.

6*. Нехай $h(x): R^s\to R^{s_1}$ і $g(y): R^l\to R^{l_1}$ – неперервні функції, а $X(E):\Omega\to R^s$ і $Y(E):\Omega\to R^l$ – випадкові вектори. Довести, що:

1) $X^*(E)=h(X(E))$ і $Y^*(E)=g(Y(E))$, $E\in\Omega$, є випадковими векторами;

2) якщо X та Y незалежні вектори, то й вектори X^* та Y^* також незалежні.

7*. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, незалежні випадкові величини з щільностями розподілу ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$, а $Z = X(E) + Y(E)$, $E \in \Omega$. Довести, що Z – абсолютно неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x) \cdot f_X(x)dx .$$

8*. Узагальнити задачу **7** на випадок, коли $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, є s-значними випадковими векторами.

9. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, незалежні випадкові величини з щільностями розподілу ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$, а $Z(E) = X(E)/Y(E)$, причому $P(E \in \Omega : Y(E) = 0) = 0$. Довести, що $Z(E)$ – абсолютно неперервна випадкова величина з щільністю розподілу

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y)dy .$$

10. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, – незалежні випадкові величини, а $Z(E) = X(E) + Y(E)$. Довести, що коли $Y(E)$ – дискретна випадкова величина з множиною значень $\{y_k : k \in N\}$, то

$$F_Z(z) = \sum_k F_X(z - y_k)(F_Y(y_k + 0) - F_Y(y_k)) .$$

11. Нехай виконано умови задачі **10**, тільки випадкова величина Y є неперервною. Довести, що

1) для будь-якого $h > 0$ правильна нерівність

$$\sum_k F_X(z-(k+1)h)(F_Y((k+1)h) - F_Y(kh)) \le F_Z(z) \le$$
$$\le \sum_k F_X(z-kh)(F_Y(k+1)h - F_Y(kh)) .$$

2) якщо $h \to 0$, то і ліва, і права частини останньої нерівності прямують до інтеграла Лебега-Стілтьєса $\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)\, dF_Y(y)$.

3) $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)\, dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z-x)\, dF_X(x)$.

Функцію $F_Z(z)$, визначену рівністю 3), називають *згорткою функцій* розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$.

12*. Узагальнити задачі **10** і **11** на випадок довільних незалежних випадкових величин X та Y.

13. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, – незалежні випадкові величини, а $Z = X(E)/Y(E)$, причому $Y(E)$ – дискретна випадкова величина з множиною значень $\{y_k : k \in N\}$ і $P(\{E \in \Omega : Y(E) = 0\}) = 0$. Довести, що

$$F_Z(z) = \sum_{k: y_k > 0} F_X(y_k z)(F_Y(y_k + 0) - F_Y(y_k)) - \sum_{k: y_k < 0} (1 - F_X(y_k z))(F_Y(y_k + 0) - F_Y(y_k)).$$

14. Довести, що коли виконано умови задачі **13**, тільки випадкова велична Y є неперервною, то

$$F_Z(z) = \int_0^{+\infty} F_X(zy)\,dF_Y(y) - \int_{-\infty}^{0} (1 - F_X(zy)\,dF_Y(y).$$

15*. Узагальнити задачі **13**, **14** на випадок довільних незалежних величин X та Y.

16. Для заданих розподілів ймовірностей на множинах значень дискретних незалежних випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, та заданих функцій $\psi(x, y)$ знайти розподіл ймовірностей випадкової величини $Z(E) = \psi(X(E), Y(E))$, $E \in \Omega$, та функції розподілу ймовірностей $F_X(x)$, $F_Y(y)$ та $F_Z(z)$ (коли є невідомі параметри, визначити їх):

1)

x_k	0	1
$p_k^{(1)}$	0,2	0,8

,

y_i	0	1	2
$p_i^{(2)}$	0,1	0,2	0,7

, $\psi(x, y) = x + y$;

2)

x_k	-1	1
$p_k^{(1)}$	0,4	0,6

,

y_i	-1	0	1
$p_i^{(2)}$	0,2	0,3	0,5

, $\psi(x, y) = x - y$;

3)

x_k	1	2
$p_k^{(1)}$	0,8	0,2

,

y_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	0,3	0,4	0,3

, $\psi(x, y) = xy$;

4)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	0,5	0,4	0,1

,

y_i	1	2
$p_i^{(2)}$	0,5	0,5

, $\psi(x, y) = \dfrac{x}{y}$;

5)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	c	$2c$	$3c$

,

y_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	$6c^2$	$6c^2$	$4c$

, $\psi(x, y) = 2x + y$;

6)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	$\sin^2 2\alpha$	$\cos^2 2\alpha$	$\cos 2\alpha$

,

y_i	1	2
$p_i^{(2)}$	$\sin\beta$	$-\cos\beta$

, $\psi(x, y) = x - 2y$;

7)

x_k	1	2
$p_k^{(1)}$	$\frac{c}{2}$	$\frac{1}{2c}$

,

y_i	0	1
$p_i^{(2)}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{1}{2a}$

, $\psi(x,y)=\dfrac{y}{2x}$.

17. Для заданих щільностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ розподілів ймовірностей на множинах значень незалежних випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, визначити невідомі параметри k_1 і k_2, знайти щільність та функцію розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z=\psi(X(E),Y(E))$, $E\in\Omega$, де $\psi(x,y)$ задана функція:

1) $f_X(x)=\begin{cases}k_1, \text{ коли } x\in[0;2],\\ 0, \text{ коли } x\notin[0;2],\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}k_2, \text{ коли } y\in[-1;1],\\ 0, \text{ коли } y\notin[-1;1],\end{cases}$

$\psi(x,y)=x+y$;

2) $f_X(x)=\begin{cases}k_1, \text{ коли } x\in[-1;1],\\ 0, \text{ коли } x\notin[-1;1],\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y<0,\\ k_2e^{-2y}, \text{ коли } y\ge 0,\end{cases}$,

$\psi(x,y)=x-y$;

3) $f_X(x)=\begin{cases}k_1e^{-2x}, \text{ коли } x\ge 0,\\ 0, \text{ коли } x<0,\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}k_2e^{-3y}, \text{ коли } y\ge 0,\\ 0, \text{ коли } y<0,\end{cases}$

$\psi(x,y)=2x+y$;

4) $f_X(x)=\begin{cases}k_1, \text{ коли } x\in[1;2],\\ 0, \text{ коли } x\notin[1;2],\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{k_2}{1+y^2}, \text{ коли } y\ge 0,\\ 0, \text{ коли } y<0,\end{cases}$

$\psi(x,y)=x+2y$;

5) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{k_1}{1+x^2}, \text{ коли } x\le 0,\\ 0, \text{ коли } x>0,\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{k_2}{1+y^2}, \text{ коли } y\ge 0,\\ 0, \text{ коли } y<0,\end{cases}$

$\psi(x,y)=x-2y$.

18. Для заданих функцій $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ розподілів ймовірностей на множинах значень неперервних незалежних випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, визначити невідомі параметри знайти функцію розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $Z=\psi(X(E),Y(E))$, $E\in\Omega$, де $\psi(x,y)$ задана функція:

1) $F_X(x)=a+b\,\mathrm{arctg}\,x$, $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ ky, \text{ коли } 0<y\le 2,\\ 1, \text{ коли y}>2,\end{cases}$

$\psi(x,y)=x-y$;

2) $F_X(x) = a + b\operatorname{arctg} x$, $F_Y(y) = a + b\operatorname{arctg} y$,
$\psi(x, y) = x + y$;

3) $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-|\lambda|x}, & \text{коли } x \ge 0, \\ 0, & \text{коли } x < 0, \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } y \le -1, \\ k(y+1), & \text{коли } -1 < y \le 1, \\ 1, & \text{коли } y > 1, \end{cases}$
$\psi(x, y) = xy$;

4) $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-|\lambda|x}, & \text{коли } x \ge 0, \\ 0, & \text{коли } x < 0, \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} e^{|\lambda|y}, & \text{коли } y \le 0, \\ 1, & \text{коли } y > 0, \end{cases}$
$\psi(x, y) = x + y$;

5) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ k_1(x-1), & \text{коли } 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{коли } x > 3, \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } y \le -3, \\ k_2(y+3), & \text{коли } -3 < y \le -1, \\ 1, & \text{коли } y > -1, \end{cases}$
$\psi(x, y) = \dfrac{x}{y}$.

3.7. Математичне сподівання випадкової величини

Нехай (Ω, S, P) – ймовірнісний простір, X – проста випадкова величина з множиною можливих значень

$$\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\},$$

тобто $X(E) = \sum_{i=1}^{k} x_i I_{X^{-1}(x_i)}(E)$, $I_{X^{-1}(x_i)}(E)$ – індикаторна функція множини $X^{-1}(x_i)$.

Математичним сподіванням простої випадкової величини X називається число

$$M[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i P_X(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X^{-1}(x_i)) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i .$$

Якщо множина $X(\Omega)$ нескінченна (але зчисленна), то за означенням

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_X(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X^{-1}(x_i)),$$

коли ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X^{-1}(x_i))$ абсолютно збігається.

Якщо останній ряд не збігається абсолютно, то математичне сподівання випадкової величини X не існує.

Приклад 7.1. Нехай A – випадкова подія,

$$I_A(E) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } E \in A; \\ 0, & \text{якщо } E \overline{\in} A, \end{cases}$$

індикаторна функція, яка є простою випадковою величиною.

Тоді $M[I_A(E)] = P(A)$.

Приклад 7.2. Знайти математичне сподівання числа очок, що випадають на верхній грані правильного однорідного ігрового кубика при однократному підкиданні.

Позначимо це число очок, яке є простою випадковою величиною, через X. Тоді розподіл ймовірностей на множині значень даної випадкової величини X має вигляд, поданий в табл. 7.1.

За означенням математичного сподівання маємо

$$M[X] = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5.$$

Табл. 7.1

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Зміст математичного сподівання випадкової величини можна простежити на такому прикладі.

Якщо ймовірності p_i інтерпретувати як маси, то загальна сума мас (імовірностей) дорівнюватиме 1, і таким чином у механічній інтерпретації математичне сподівання випадкової величини X є не що інше, як абсциса центра мас загальної одиничної маси, розподіленої дискретно вздовж осі абсцис так, що на точку з абсцисою x_i припадає маса (ймовірність) p_i.

Приклад 7.3. Нехай є два дискретних розподіли ймовірностей (табл. 7.2, 7.3).

Табл. 7.2

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_i	0,01	0,01	0,96	0,01	0,01

Табл. 7.3

x_i'	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'	x_6'
p_i'	0,01	0,01	0,48	0,48	0,01	0,01

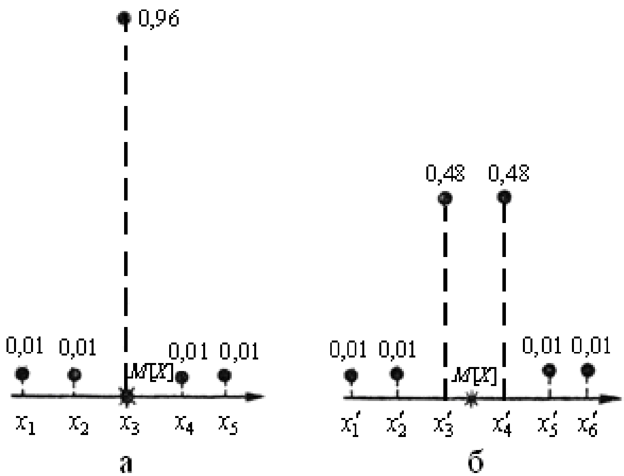


Рис. 7.1

Розглядаючи ці розподіли (Рис. 7.1, а, б), можна помітити, що при проведенні випробувань для випадкової величини, що має розподіл імовірностей, поданий в табл. 7.2, слід сподіватися, що в результаті випробування випадкова величина X швидше за все набуде значення x_3, а для випадкової величини з розподілом, поданим в табл. 7.3 – X швидше за все рівноможливо набуде одного із значень x'_3 або x'_4, на які припадають найбільші ймовірності і які найближчі до математичного сподівання. Цим і пояснюється назва *математичне сподівання випадкової величини* X.

Зазначимо, що не обов'язково $M[X] \in X(\Omega)$, тобто математичне сподівання $M[X]$ може і не належати до множини $X(\Omega)$ можливих значень випадкової величини X. Точку, абсциса якої дорівнює математичному сподіванню, називають *центром розсіювання ймовірностей* на множині можливих значень випадкової величини X.

Математичне сподівання простої випадкової величини X є не що інше, як інтеграл Лебега від S-вимірної функції $X(E)$ за мірою P, для якого поряд з $M[X]$ використовуються також позначення

$$\int_{\Omega} X(E)P(dE) \text{ або } \int_{\Omega} XdP.$$

Нехай $(R^1, \mathscr{B}(R^1), P_X)$ – ймовірнісний простір, що індукується випадковою величиною X з простору (Ω, S, P), а $P_X(G) = P(X^{-1}(G))$, $G \in \mathscr{B}(R^1)$, – ймовірнісна міра на $(R^1, \mathscr{B}(R^1))$, $F_X(x)$ – відповідна функція розподілу.

Тоді математичне сподівання випадкової величини X визначають рівністю

$$M[X] = \int_{R^1} xP_X(dx) = \int_{R^1} xF_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} xF_X(dx),$$

за умови $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| F_X(dx) < +\infty$.

Якщо функція розподілу $F_X(x)$ абсолютно неперервна, то

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx.$$

за умови $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < +\infty$.

В механічній інтерпретації, як і раніше, математичне сподівання є абсцисою центра мас загальної одиничної маси, розподіленої вздовж осі абсцис із щільністю $f_X(x)$.

Приклад 7.4. Знайти математичне сподівання неперервної випадкової величини X з рівномірним розподілом імовірностей на відрізку $[a,b]$.

Маємо

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0\cdot dx+\int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{\infty} x\cdot 0\cdot dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини X з рівномірним розподілом імовірностей на відрізку $[a,b]$ знаходиться посередині цього відрізка (Рис. 7.2). Цей результат очевидний, якщо мати на увазі механічну інтерпретацію математичного сподівання.

Рис. 7.2

Приклад 7.5. Щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X має вигляд (розподіл Коші) (Рис. 7.3):

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\ x\in(-\infty,\infty),$$

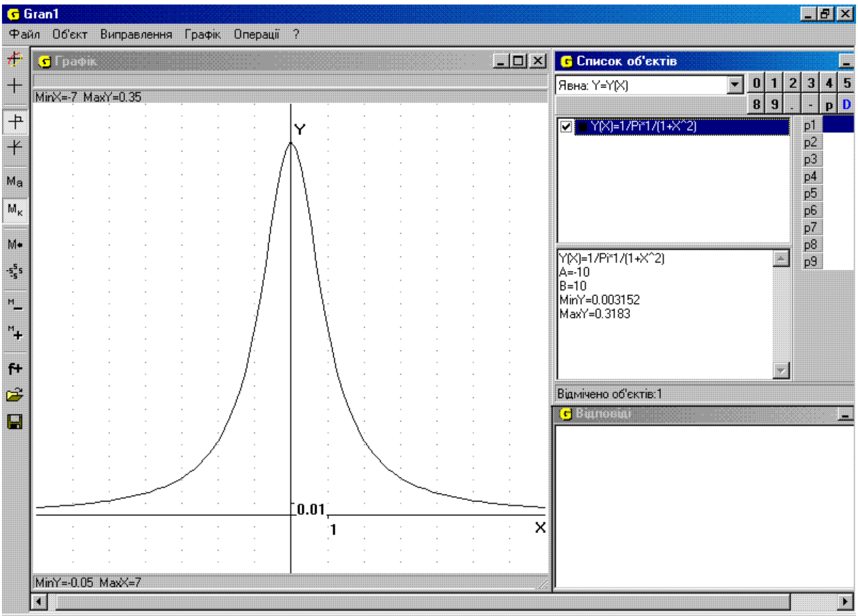


Рис. 7.3

Оскільки

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{dx}{1+x^2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\infty,$$

то в даному випадку математичного сподівання не існує.

Нехай розподіл імовірностей не є неперервним, а такий, що функція розподілу $F_X(x)$ має в деяких точках $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ розриви $F_X(x_i-0)-F_X(x_i)=p_i\neq 0$ (Рис. 7.4), причому $\sum_{i=1}^{\infty}p_j<1$, і існує невід'ємна обмежена функція $\tilde{f}_X(x)$ така, що

$$F_X(x)=\sum_{x_i<x}p_i+\int_{-\infty}^{x}\tilde{f}_X(x)\,dx.$$

Тоді

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i\Delta F_X(x_i)+\int_{-\infty}^{\infty}x\,\tilde{f}_X(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\,p_i+\int_{-\infty}^{\infty}x\,\tilde{f}_X(x)\,dx,$$

за умови $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\,p_i+\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\tilde{f}_X(x)dx<\infty$.

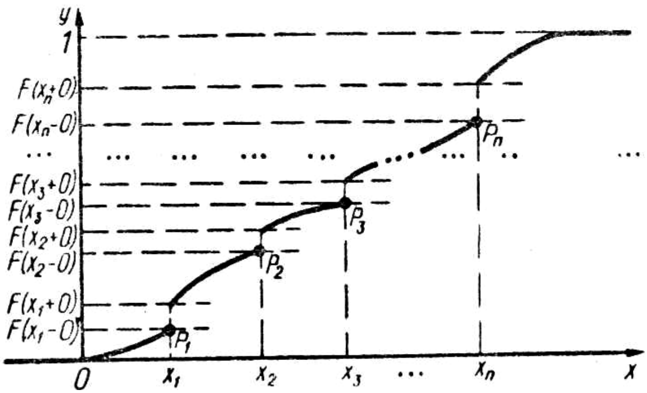


Рис. 7.4

В механічній інтерпретації в даному випадку частина p одиничної маси розподілена на множині точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дискретно так, що на точку x_i припадає маса $P_X(\{x_i\})=p_i$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=p$, а решта $1-p$ одиничної маси розподілена вздовж осі абсцис неперервно зі щільністю $\tilde{f}_X(x)$.

Математичним сподіванням випадкового вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$ називають точку $M[X]=(M[X_1], \ldots, M[X_n])\in R^n$ – центр розсіювання ймовірностей на множині значень випадкового вектора X.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Знайти математичне сподівання випадкової величини, ймовірності можливих значень якої розподілені за законом Пуассона (див. Розділ 2, п. 2.15).

Маємо

$$M[X]=\sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{a^i}{i!}e^{-a} = \sum_{i=1}^{\infty} i\frac{a^i}{i!}e^{-a} =$$

$$= e^{-a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^i}{(i-1)!} = e^{-a}a\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-a}a\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!} = e^{-a}ae^{a} = a.$$

Вправа 2. Нехай $X(E)$, $E\in\Omega$, невід'ємна випадкова величина стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P), причому існує послідовність чисел x_i, $i\in N$, для якої

$0=x_0<x_1<\ldots<x_n<x_{n+1}\to+\infty$, коли $n\to\infty$, $x_{k+1}-x_k<\delta$, $k\in N$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k\cdot P(\{E: x_{k-1}\le X(E)<x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X^{-1}([x_{k-1}, x_k))) < +\infty.$$

1. Довести, що для будь-якої іншої послідовності чисел $\overline{x_n}$, $n\in N$, для якої $\bar{x}_0=0, \bar{x}_n<\bar{x}_{n+1}\to+\infty$, коли $n\to\infty$, і $\bar{x}_{k+1}-\bar{x}_k<\bar{\delta}$, $k\in N$, правильні нерівності:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bar{x}_{k-1}P(\{E:\bar{x}_{k-1}\le X(E)<\bar{x}_k\}) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k P(\{E: x_{k-1}\le X(E)<x_k\})$,

тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bar{x}_{k-1}P(X^{-1}([\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k))) \le \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X^{-1}([x_{k-1}, x_k)));$$

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bar{x}_k P(\{E:\bar{x}_{k-1}\le X(E)<\bar{x}_k\}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\bar{x}_k P(X^{-1}([\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k))) < +\infty$;

3) $0\le \inf\limits_{(x_i)}\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k P(\{E: x_{k-1}\le X(E)<x_k\}) -$

$$-\sup_{(x_i)}\sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} P(\{E: x_{k-1}\le X(E)<x_k\}) \le \delta$$

або

$$0 \le \inf_{(x_i)} \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X^{-1}([x_{k-1}, x_k))) - \sup_{(x_i)} \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} P(X^{-1}([x_{k-1}, x_k))) \le \delta .$$

2. Невід'ємну *випадкову величину* $X(E)$, $E \in \Omega$ називають *інтегровною за Лебегом* відносно міри P, якщо

$$\inf_{(x_i)} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, P(\{E : x_{k-1} \le X(E) < x_k\}) = \sup_{(x_i)} \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} \, P(\{E : x_{k-1} \le X(E) < x_k\})$$

або

$$\inf_{(x_i)} \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X^{-1}([x_{k-1}, x_k))) = \sup_{(x_i)} \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} P(X^{-1}([x_{k-1}, x_k))) ,$$

а спільне значення лівої і правої частин останньої рівності називають інтегралом Лебега функції $X(E)$ відносно міри P і позначають $\int\limits_{\Omega} X(E)\, dP$. Довести, що $X(E)$ є інтегровною за Лебегом, коли для неї існує принаймні одна послідовність x_i, $i \in N$, що задовольняє вказані вище умови:

$0 = x_0, \ x_n < x_{n+1} \to +\infty, \ x_{k+1} - x_k < \delta, \ n \in N$, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \, P(\{E : x_{k-1} \le X(E) < x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X^{-1}([x_{k-1}, x_k))) < +\infty$$

1. Насамперед зауважимо, що коли

$$A_k = \{E \in \Omega : x_{k-1} \le X(E) < x_k\} = X^{-1}([x_{k-1}, x_k))$$

і аналогічно $\overline{A}_k = (\{E : \bar{x}_{k-1} \le X(E) < \bar{x}_k\}) = X^{-1}(\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k)$, то події A_k (а також $\overline{A}_k$) попарно несумісні і в сумі вичерпують простір Ω. Тому для будь-якого $E \in \Omega$ існує єдиний номер $k = k(E)$, (номер $\bar{k} = \bar{k}(E)$), для якого $E \in A_k = X^{-1}([x_{k-1}, x_k))$, ($E \in \overline{A}_k = X^{-1}([\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k))$), а тому $x_{k-1} \le X(E) < x_k$, ($\bar{x}_{k-1} \le X(E) < \bar{x}_k$).

Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_{k-1} \, I_{\overline{A}_k}(E) \le X(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, I_{A_k}(E), E \in \Omega ,$$

а тому для будь-якого $n \in N$ існує $m = m(n) \in N$, для якого

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_{k-1} \, I_{\overline{A}_k}(E) \le \sum_{k=1}^{m} x_k \, I_{A_k}(E), \quad E \in \Omega .$$

Останні суми визначають прості випадкові величини, для яких маємо

$$M[\sum_{n=1}^{n} \bar{x}_{k-1} I_{\overline{A}_k}(E)] = \sum_{n=1}^{n} \bar{x}_{k-1} \cdot P(\overline{A}_k) \le M[\sum_{k=1}^{m} x_k \, I_{A_k}(E)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} x_k \, P(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, P(x_{k-1} \le X < x_k) < +\infty \, .$$

Враховуючи довільність числа $n \in N$, маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_{k-1} \, P(\{E : \bar{x}_{k-1} \le X(E) < \bar{x}_k\}) \le \sum_{k=1}^{\infty} x_k \; P(\{E : x_{k-1} \le X(E) < x_k\}) \, .$$

Цим доведено нерівність 1).

З нерівності 1), враховуючи, що $0 < x_k - x_{k-1} < \delta$, дістанемо нерівність:

4) $$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k \; P(\{E : \bar{x}_{k-1} \le X(E) < \bar{x}_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_{k-1} \, P(\{E : \bar{x}_{k-1} \le X(E) < \bar{x}_k\}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) \, P(\{E : \bar{x}_{k-1} \le X(E) < \bar{x}_k\}) <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_{k-1} \; P(\{E : \bar{x}_{k-1} \le X(E) < \bar{x}_k\}) + \delta < +\infty \, .$$

Цим доведено нерівність 2).

Оскільки

$$\inf_{(x_n)} \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\{E : x_{k-1} \le X(E) < x_k\}) - \sup_{(x_n)} \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} P(\{E : x_{k-1} \le X(E) < x_k\}) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} x_k \; P(\{E : x_{k-1} \le X(E) < x_k\}) - \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} P(\{E : x_{k-1} \le X(E) < x_k\}) \, ,$$

то з нерівності 4) випливає права частина нерівності 3). Ліва частина нерівності 3) випливає з нерівності 1).

2. Якщо виконано умови твердження 2, то правильна нерівність 3), де в силу твердження 1 можна вважати, що число $\delta > 0$ – довільне. Тому можна спрямувати δ до нуля і дістати з нерівності 3) інтегровність функції $X(E)$ і формулу для обчислення її математичного сподівання:

$$M[X] = \int_{\Omega} X(E) \, dP \, .$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожна проста випадкова величина має математичне сподівання.
2. Кожна дискретна випадкова величина має математичне сподівання.
3. Математичне сподівання випадкової величини – це її середнє значення.
4. Математичне сподівання можна тлумачити і як статичний момент маси, розподіленої на множині Ω, відносно початку координат, і як координату центра цієї маси.

5. Кожна проста випадкова величина $X(E),\ E \in \Omega$, є інтегровною за Лебегом-Стілтьєсом.

6. Кожна інтегровна за Лебегом-Стілтьєсом випадкова величина є простою.

7. Математичне сподівання $M[X]$ існує тоді і тільки тоді, коли існують $M[X^{+}]$ та $M[X^{-}]$.

8. Випадкова величина $X(E),\ E \in \Omega$, інтегровна за ймовірнісною мірою P тоді й тільки тоді, коли функція $f(x) = x, x \in R$, інтегровна за мірою P_X, породженою випадковою величиною X.

9. Для будь-якої випадкової величини $X(E),\ E \in \Omega$,

$$M[X] = \int\limits_{\Omega} X(E)\, dP = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, d\, F_X \text{ , де } F_X(x) = P_X\,(-\infty,\ x).$$

10. Твердження 9 є правильним лише для інтегровної випадкової величини $X(E), E \in \Omega$.

11. Якщо існує $M[X]$, то існує й $M[|X|]$.

12. Твердження, обернене до 11, є правильним.

13. Якщо при $n \to \infty$ $X_n(E) \to X(E)$ для всіх $E \in \Omega$, то

$$M[X_n] \to M(X).$$

14. $M[X]$ існує тоді й тільки тоді, коли існує $M[X\, I_A]$ для будь-якої події A.

15. Для кожної випадкової величини, що має математичне сподівання, правильна рівність: $M[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$.

16. Кожен розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини має центр розсіювання.

2. Довести, що коли $M[|X_1 - X_2|] = 0$, то випадкові величини майже напевно однакові, тобто $P(\{E \in \Omega : X_1(E) \ne X_2(E)\}) = 0$.

3. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, якщо розподіл ймовірностей на множині її значень є:

1) дискретним рівномірним;
2) біноміальним;
3) геометричним;
4) розподілом Пуассона;
5) рівномірний неперервний на проміжку $[a;b]$;
6) розподілом Коші з щільністю

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi a}\,\frac{1}{1 + (\frac{x - x_0}{a})^2},$$

де числа $x_0 \in R$ і $a > 0$ – фіксовані;

7) розподілом Лапласа з щільністю

$$f_X(x) = \frac{1}{2\beta}\; e^{-\frac{|x-x_0|}{\beta}},$$

де числа $x_0 \in R$ і $\beta > 0$ – фіксовані;

8) гамма-розподілом з щільністю

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{коли } x > 0, \end{cases}$$

де числа $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ – фіксовані, а $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

4. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X, якщо розподіл ймовірностей на множині її значень задано у вигляді таблиці (при наявності параметрів визначити їх значення):

1)

x_k	0	1	2
$p_k^{(1)}$	0,1	0,2	0,7

2)

x_i	1	2	3	4
$p_i^{(2)}$	0,1	0,2	0,3	0,4

3)

x_k	-1	0	1
$p_k^{(1)}$	0,3	0,35	C_1

4)

x_i	-2	-1	0
$p_i^{(2)}$	C_2	0,1	0,3

5)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	c	$2c$	$3c$

6)

x_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	d^2	d^2	d

7)

x_k	0	1
$p_k^{(1)}$	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$

8)

x_i	-1	0	1
$p_i^{(2)}$	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\cos 2\alpha$

9)

x_k	1	2
$p_k^{(1)}$	$\dfrac{2\operatorname{arctg} a}{\pi}$	$\dfrac{2\operatorname{arcctg} a}{\pi}$

10)

x_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	$\dfrac{2\operatorname{arctg} a}{\pi}$	$\dfrac{2\operatorname{arcctg} a}{\pi}$	$1-a$

11)

x_k	-1	1
$p_k^{(1)}$	a	$1-a$

12)

x_i	-1	0	1
$p_i^{(2)}$	a^2	$1-a^2$	$a-\dfrac{1}{3}$

5. Довести, що коли $F_X(x)$ – функція розподілу ймовірностей на множині значень дискретної випадкової величини

X, то математичне сподівання $M[X]$ можна обчислити за формулою

$$M[X]=\sum_k x_n(F_X(x_k+0)-F_X(x_k))$$

за умови $\sum_k |x_k|(F_X(x_k+0)-F_X(x_k))<+\infty$, де x_k, $k\in\{1,2,\ldots\}$ – точки розриву функції $F_X(x)$.

6. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X, якщо задана функція розподілу ймовірностей $F_X(x)$:

1) $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{4}, & \text{коли } 1<x\le 2,\\ 1, & \text{коли } x>1;\end{cases}$ 2) $F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le -1,\\ \frac{1}{3}, & \text{коли } -1<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1;\end{cases}$

3) $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 1,\\ \frac{1}{6}, & \text{коли } 1<x\le 2,\\ \frac{1}{3}, & \text{коли } 2<x\le 3,\\ 1, & \text{коли } x>3;\end{cases}$ 4) $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } -x\le -2,\\ \frac{1}{5}, & \text{коли } -2<x\le -1,\\ \frac{1}{2}, & \text{коли } -1<x\le 0,\\ 1, & \text{коли } x>0.\end{cases}$

7. Знайти математичне сподівання абсолютно неперервної випадкової величини, якщо задана щільність розподілу ймовірностей $f_X(x)$ або функція розподілу ймовірностей $F_X(x)$ (за наявності параметрів визначити їх значення):

1) $f_X(x)=\begin{cases}k_1, & \text{коли } x\in[0;2],\\ 0, & \text{коли } x\notin[0;2];\end{cases}$ 2) $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ kx^2, & \text{коли } 0<x\le 4,\\ 1, & \text{коли } x>4;\end{cases}$

3) $f_X(x)=\begin{cases}k|x|, & \text{коли } x\in[-1;1],\\ 0, & \text{коли } x\notin[-1;1];\end{cases}$ 4) $f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x<0,\\ kxe^{-x^2}, & \text{коли } x\ge 0;\end{cases}$

5) $f_X(x)=\begin{cases}kx^2, & \text{коли } x\in[-1;1],\\ 0, & \text{коли } x\notin[-1;1];\end{cases}$ 6) $f_X(x)=\begin{cases}ke^{-3x}, & \text{коли } x\ge 0,\\ 0, & \text{коли } x<0;\end{cases}$

7) $f_X(x)=\begin{cases}kx, & \text{коли } x\in[0;k],\\ 0, & \text{коли } x\notin[0;k];\end{cases}$ 8) $f_X(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6, & \text{коли } x\in[2;4],\\ 0, & \text{коли } x\notin[2;4];\end{cases}$

9) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{k}{1+x^2}, & \text{коли } x\le 0,\\ 0, & \text{коли } x>0;\end{cases}$ 10) $f_X(x)=ke^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$;

11) $F_X(x)=\begin{cases} k\arcsin x, & \text{коли } x\in[0;1], \\ 0, & \text{коли } x\le 0, \\ 1, & \text{коли } x>1; \end{cases}$ 12) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0, \\ kx, & \text{коли } 0<x\le 2, \\ 1, & \text{коли } x>2; \end{cases}$

13) $F_X(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$, 14) $F_X(x)=\begin{cases} k\operatorname{arctg} x, & \text{коли } x>0, \\ 0, & \text{коли } x<0; \end{cases}$,

15) $F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-|\lambda|x}, & \text{коли } x\ge 0, \\ 0, & \text{коли } x<0; \end{cases}$ 16) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le -1, \\ k(x+1), & \text{коли } -1<x\le 1, \\ 1, & \text{коли } x>1; \end{cases}$

17) $f_X(x)=\begin{cases} |\lambda|\, e^{-|\lambda|x}, & \text{коли } x\ge 0, \\ 0, & \text{коли } x<0; \end{cases}$ 18) $F_X(x)=\begin{cases} e^{|\lambda|x}, & \text{коли } x\le 0, \\ 1, & \text{коли } x>0; \end{cases}$

19) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1, \\ k(x-1), & \text{коли } 1<x\le 3, \\ 1, & \text{коли } x>3; \end{cases}$ 20) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le -3, \\ k(x+3), & \text{коли } -3<x\le -1, \\ 1, & \text{коли } x>-1; \end{cases}$

21) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0, \\ \sqrt[4]{x}, & \text{коли } 0<x\le \dfrac{1}{16}, \\ 8x, & \text{коли } \dfrac{1}{16}<x\le \dfrac{1}{8}, \\ 1, & \text{коли } x>\dfrac{1}{8}. \end{cases}$

8. Нехай експеримент полягає у тому, що монету підкидають доти, поки герб не випаде m разів (m – задане натуральне число) і фіксують відповідну кількість підкидань та результат кожного з n підкидань (випав герб або цифра).

1. Знайти відповідний простір Ω елементарних подій.
2. Вважаючи, що ймовірність випадання герба при кожному підкиданні дорівнює $p\in(0;1)$, знайти розподіл ймовірностей на просторі Ω.
3. Вважаючи, що $X(E)$, $E\in\Omega$, – це кількість підкидань, що відповідає елементарній події E, довести, що $X(E)$ – дискретна випадкова величина і знайти розподіл ймовірностей на множині значень цієї випадкової величини (*розподіл Паскаля*).
4. Обчислити математичне сподівання $M[X]$ випадкової величини X.
5. Довести, що при $m=1$ розподіл Паскаля перетворюється у геометричний розподіл.
6. Знайти найбільш ймовірне значення випадкової величини $X(E)$, $E\in\Omega$.

9. Знайти математичне сподівання (центр розподілу ймовірностей на множині значень) випадкового вектора (X, Y), якщо задано розподіл ймовірностей:

1.

$y_i \backslash x_k$	0	1	2
1	0,01	0,02	0,07
2	0,02	0,04	0,14
3	0,07	0,14	0,49

2.

$y_i \backslash x_k$	0	1	2
1	0,02	0,01	0,07
2	0,02	0,04	0,14
3	0,07	0,14	0,49

3. $$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ xy, & \text{коли } 0 < x \le 1 \text{ і } 0 < y \le 1, \\ x, & \text{коли } 0 < x \le 1 \text{ і } y > 1, \\ y, & \text{коли } 0 < y \le 1 \text{ і } x > 1, \\ 1, & \text{коли } x > 1 \text{ і } y > 1; \end{cases}$$

4. $$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & \text{коли } x \ge 0 \text{ і } y \ge 0, \\ 0, & \text{коли } x < 0 \text{ або } y < 0; \end{cases}$$

5. $$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k \sin x \sin y, & \text{коли } (x, y) \in [0; \pi] \times [0; \pi], \\ 0, & \text{коли } (x, y) \notin [0; \pi] \times [0; \pi]; \end{cases}$$

6. $$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} ke^{x-y}, & \text{коли } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1], \\ 0, & \text{коли } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1]; \end{cases}$$

7. $$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k \sin(x + y), & \text{коли } (x, y) \in [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; \frac{\pi}{2}], \\ 0, & \text{коли } (x, y) \notin [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

3.8. Властивості математичного сподівання

Із властивостей інтеграла Лебега випливають такі властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій, тобто якщо $X = c$, то $M[X] = c$.

2. Якщо X – інтегровна невід'ємна випадкова величина, то $M[X] \ge 0$.

3. Якщо $|X| \le c$, то і $M[X] \le c$.

4. Якщо X – інтегровна випадкова величина, то $M[aX]=a\,M[X]$.

5. Якщо випадкові величини X і Y інтегровні і $X \le Y$, то $M[X] \le M[Y]$.

6. Якщо $M[X]$ існує, то $|M[X]| \le M[|X|]$.

7. Якщо X і Y інтегровні випадкові величини, то $X+Y$ також інтегровна і

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y].$$

8. Якщо $M[X]$ існує, то для кожного $A \in S$ також існує $M[XI_A]$.

9. Якщо X і Y – інтегровні випадкові величини, то при будь-яких сталих a і b випадкова величина $aX+bY$ також інтегровна і

$$M[aX+bY]=aM[X]+bM[Y].$$

10. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то

$$M[XY]=M[X]M[Y].$$

11. Якщо $\{X_i\}$ – зростаюча послідовність невід'ємних інтегровних випадкових величин $X_i \underset{i\to\infty}{\to} X$ і $\sup_i M[X_i] < \infty$, то X також інтегровна і $\lim_{i\to\infty} M[X_i]=M[X]$.

12. Якщо $\{X_i\}$ – послідовність невід'ємних випадкових величин, для яких $\sum_{i=1}^{\infty} M[X_i] < +\infty$, то $M\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right]=\sum_{i=1}^{\infty} M[X_i]$.

13. Якщо X – невід'ємна випадкова величина і $a>0$, то виконується нерівність Чебишова

$$P_X([a,\infty))=P(X^{-1}(a,\infty))=P(\{E: X(E)\ge a\}) \le \frac{1}{a}M[X].$$

Нехай $Y=\psi(X)$ – функція випадкового аргументу X і треба знайти математичне сподівання $M[Y]$ випадкової величини Y за умови, що розподіл імовірностей на множині значень випадкової величини X відомий.

Для цього корисна наступна теорема.

Теорема (про заміну змінних під знаком інтеграла Лебега). *Нехай* (Ω,S) *і* (W,Q) *– вимірні простори,* $X=X(E)$ *–* S/Q*-вимірна функція із значеннями в* W*;* P *– ймовірнісна міра на* (Ω,S)*;* P_X *– ймовірнісна міра на* (W,Q)*, що індукується випадковою величиною* $X=X(E)$*:*

$$P_X(A)=P(\{E: X(E)\in A\})=P(X^{-1}(A)),\ A\in Q. \tag{8.1}$$

Тоді для довільної Q*-вимірної функції* $y=\psi(x)$, $x\in W$,

$$\int_A \psi(x)dP_X = \int_{X^{-1}(A)} \psi(X(E))dP\,,\ A \in Q\,, \qquad (8.2)$$

(*у тому розумінні, що коли існує один з інтегралів, то визначений і другий, і їх значення співпадають*).

Міра P_X однозначно визначається функцією розподілу F_X. Тому інтеграл Лебега $\int_{R^1} \psi(x)dP_X$ часто позначають $\int_{R^1} \psi(x)dF_X$ або $\int_{R^1} \psi(x)dF_X(x)$ і називають *інтегралом Лебега-Стільтьєса* (за мірою, що відповідає функції розподілу $F_X(x)$).

Нехай існує невід'ємна інтегровна борелівська функція $f_X(x)$ *така, що* $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$, *де інтеграл розглядається як інтеграл Лебега за мірою Лебега на множині* $(-\infty, x)$.

Тоді

$$M[\psi(X(E))] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_X(x)dx\,,$$

де інтеграл розглядається як інтеграл Лебега від функції $\psi(x) f_X(x)$ *за мірою Лебега.*

Математичне сподівання випадкової величини $Y = \psi(X)$ можна знайти двома способами.

I спосіб. Знайти розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини Y, тобто знайти функцію розподілу ймовірностей $F_Y(y) = P_Y((-\infty,\ y))$ або щільність розподілу ймовірностей $f_Y(y)$ і далі знайти математичне сподівання за формулою

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y dF_Y(y)\,, \qquad (8.3)$$

або за формулою (якщо існує щільність $f_Y(y)$)

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy\,.$$

II спосіб. Не визначаючи розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $Y = \psi(x)$, знайти математичне сподівання $M[Y]$ за формулою

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dF_X(x)\,,$$

або (якщо відома щільність розподілу ймовірностей $f_X(x)$) за формулою

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, f_X(x) dx, \qquad (8.4)$$

де $F_X(x)$ і $f_X(x)$ – відповідно функція розподілу та щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X.

Формули (8.3) і (8.4) правильні і тоді, коли випадкова величина X є R^n-значною (Рис. 8.1).

Якщо функція розподілу ймовірностей $F_X(x)$ є кусково-сталою (функцією стрибків, тобто міра $P_X(A)$, що породжується функцією $F_X(x)$, є дискретною мірою), то інтеграл Лебега-Стільтьєса

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dF_X(x)$$

зводиться до суми

$$\sum_i \psi(x_i) P_X(\{x_i\}) = \sum_i \psi(x_i) p_i \ ,$$

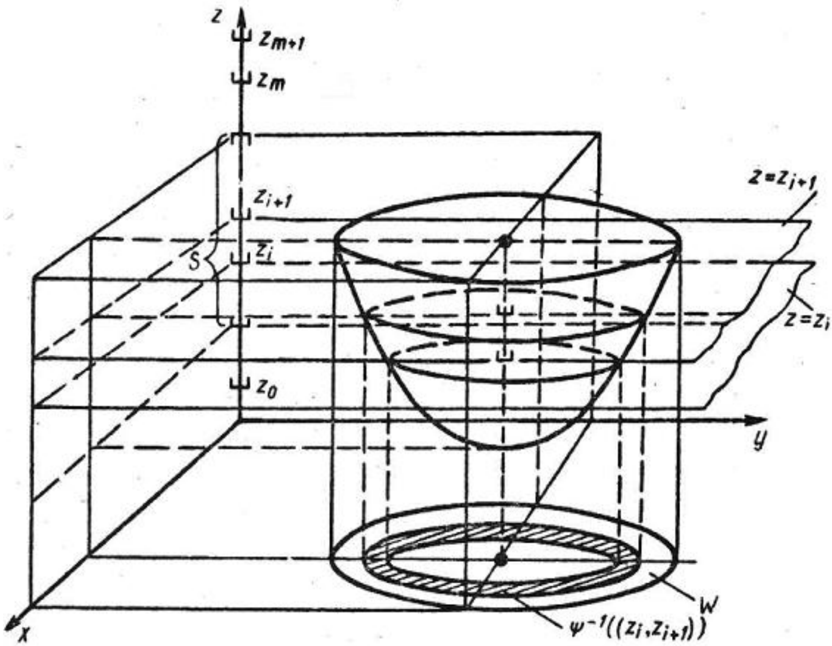


Рис. 8.1

де x_i – точки розриву функції $F_X(x)$, а p_i – стрибки функції $F_X(x)$ у точках x_i, тобто ймовірності $P_X(\{x_i\}) = p_i$.

Якщо $F_X(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha)F_2(x)$, де $F_1(x)$ є функцією стрибків, а $F_2(x)$ абсолютно неперервна функція, то інтеграл Лебега-Стільтьєса за мірою P_X, що породжується функцією $F_X(x)$, набуває вигляду

$$\alpha \sum_i \psi(x_i) p_i + (1-\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) F_2'(x) dx,$$

де $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) F'(x) dx$ – інтеграл від функції $\psi(x) F'(x)$ за мірою Лебега.

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини $Y = \psi(x)$ завжди можна подати як інтеграл Лебега-Стільтьєса

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dF_X(x).$$

Якщо $Y = g(X)$, де X – випадковий вектор, і існує щільність $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-вимірного розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора X, то

$$M[g(X)] = \int_{R^n} g(x) f_X(x) dx$$

для довільної борелівської функції $g(x)$, $x \in R^n$, для якої одна з частин останньої рівності має зміст.

Нехай X і Y – незалежні випадкові вектори з функціями розподілу ймовірностей $F_X(X)$, $F_Y(Y)$, $x \in R^s$, $y \in R^l$, $g(x, y)$ – дійсна борелівська функція на R^{s+l}. Тоді вираз для $M[g(x, y)]$ можна подати у вигляді

$$M[g(X, Y)] = \int_{R^s \times R^l} g(x, y) dF_X\, dF_Y,$$

причому інтеграл можна звести до повторного інтеграла

$$M[g(x, y)] = \int_{R^s} \left(\int_{R^l} g(x, y) dF_Y \right) dF_X.$$

При цьому спочатку обчислюють математичне сподівання випадкової величини $g(x, Y)$, де x – фіксоване, а потім здобутий результат розглядають як функцію від x. Таким чином

$$M[g(X, Y)] = M[M[g(x, Y)]|_{x=X}].$$

Розглянемо кілька прикладів.

П р и к л а д 8.1. Задано функцію випадкового аргументу $Y = \psi(X)$, де (Рис. 8.2)

$$\psi(x) = \begin{cases} 0{,}5, & \text{якщо} \quad x \le 0{,}5; \\ 1 - x, & \text{якщо} \quad x \ge 0{,}5. \end{cases}$$

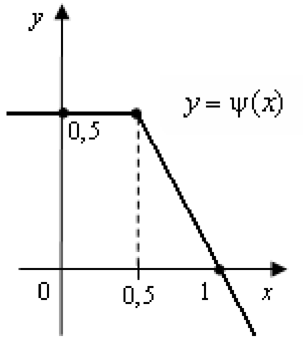


Рис. 8.2

Знайти математичне сподівання $M[Y]$ випадкової величини Y, якщо на множині значень випадкової величини X розподіл ймовірностей рівномірний на проміжку $[0,\,1]$.

Розв'яжемо задачу двома способами.

I с п о с і б. Знайдемо розподіл імовірностей на множині значень випадкової величини Y:

$$F_Y(y) = P_Y((-\infty,\ y)) = P_X(\psi^{-1}((-\infty,\ y))).$$

Оскільки прообразом множини $(-\infty,\ y)$ при заданому відображенні $y = \psi(x)$ є множина $(1 - y, +\infty)$, якщо $y \le 0{,}5$, і множина $(-\infty,\ \infty)$, якщо $y > 0{,}5$, а також враховуючи, що на множині значень випадкової величини X розподіл ймовірностей рівномірний на відрізку $[0,1]$ (Рис. 8.3), дістаємо

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо} \ y \le 0; \\ y, \text{якщо} \ 0 \le y \le 0{,}5; \\ 1, \ \text{якщо} \ 0{,}5 < y. \end{cases} \qquad \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо} \ y \,\overline{\in}\, [0;\ 0{,}5]; \\ 1, \ \text{якщо} \ y \in (0;\ 0{,}5). \end{cases}$$

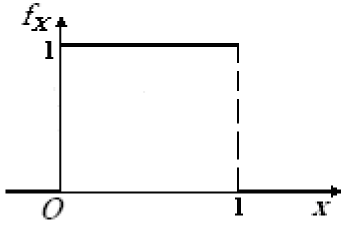


Рис. 8.3

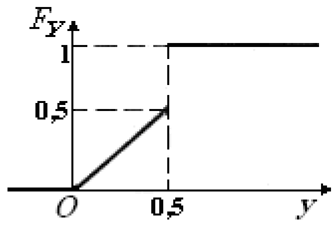


Рис. 8.4

Графік функції $F_Y(y)$ зображено на Рис. 8.4.

У механічній інтерпретації – половина одиничної маси зосереджена в точці $y = 0{,}5$, інша половина розподілена рівномірно на відрізку $[0; 0{,}5]$.

Таким чином

$$M[Y] = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + \int_0^{0{,}5} yF'_Y(y)dy = 0{,}25 + \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{0{,}5} = 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375.$$

II спосіб. За формулою (8.4) з врахуванням вигляду функцій $\psi(x)$ і $f_X(x)$ дістаємо

$$M[Y] = \int_0^{0{,}5} 0{,}5 \cdot 1dx + \int_{0{,}5}^{1} (1-x)\cdot 1dx = 0{,}5x\Big|_0^{0{,}5} + \left.\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_{0{,}5}^{1} =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 1 - \frac{1}{2} - \left(0{,}5 - \frac{(0{,}5)^2}{2}\right) = 0{,}375.$$

Наступні дві числові характеристики розподілу ймовірностей випадкової величини X, які деякою мірою характеризують положення центра розсіювання – мода і медіана.

Модою абсолютно неперервного розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X називається точка $Mo[X]$ максимуму її щільності розподілу ймовірностей (Рис. 8.5). Якщо щільність розподілу ймовірностей досягає максимуму в кількох точках, то розподіл називається *полімодальним*, а якщо тільки в одній точці, то *унімодальним*.

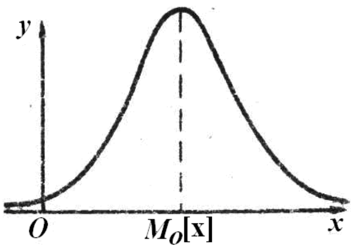


Рис. 8.5

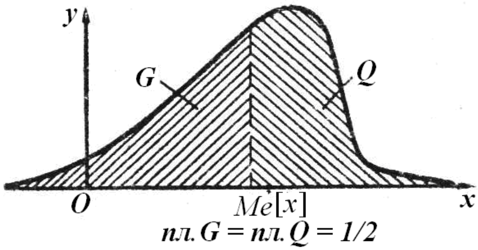


Рис. 8.6

У випадку дискретної випадкової величини *модою* називається така точка $Mo[X]$, у достатньо малому околі якої ця точка є найбільш імовірним значеннм випадкової величини X.

Медіаною випадкової величини X називається таке її значення $Me[X]$, для якого

$$F_X(Me[X]) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P_X((-\infty, Me[X])) = P_X([Me[X], +\infty)) = \frac{1}{2}.$$

Ця точка завжди існує для неперервного розподілу ймовірностей і не завжди для дискретного.

У геометричній інтерпретації медіана – це абсциса точки, в якій площа під графіком щільності розподілу ймовірностей над віссю абсцис ділиться навпіл (Рис. 8.6).

Приклад 8.2. Знайти $Mo[X]$ (найбільш імовірне значення) випадкової величини X з біноміальним розподілом імовірностей (див. пп. 1.15, 2.8).

Розглянемо відношення

$$\frac{P_n(\mu = m+1)}{P_n(\mu = m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Якщо це відношення більше від одиниці, то $P_n(\mu = m+1) > P_n(\mu = m)$. Отже, ймовірності $P_n(\mu = m)$ із зростанням m зростають доти, доки виконується нерівність $\dfrac{P_n(\mu = m+1)}{P_n(\mu = m)} > 1$, тобто доки $np > mp + q + mq$, або, оскільки $p + q = 1$, доки $m < np - q$.

Аналогічно, ймовірності $P_n(\mu = m)$ із зростанням m спадають, коли $m > np - q$. Таким чином, якщо $np - q$ не є цілим числом, то найбільш імовірним є значення $Mo[X] = m = [np - q] + 1$, де через $[np - q]$ позначено цілу частину числа $np - q$. Якщо $np - q$ є цілим числом, то найбільш імовірних значень буде два, а саме $m_1 = np - q = Mo_1[X]$ і $m_2 = m_1 + 1 = np - q + 1 = Mo_2[X]$, оскільки при $m = np - q$ матимемо

$$\frac{P_n(\mu = m+1)}{P_n(\mu = m)} = 1, \text{ тобто } P_n(\mu = m+1) = P_n(\mu = m).$$

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Задано функцію $Z = |X| + |Y|$, де (X, Y) – R^2-значна випадкова величина з рівномірним розподілом імовірностей у квадраті

$$G = \{(x,\ y) : |x| + |y| \le 1\}$$

(Рис. 8.7). Знайти математичне сподівання $M[Z]$.

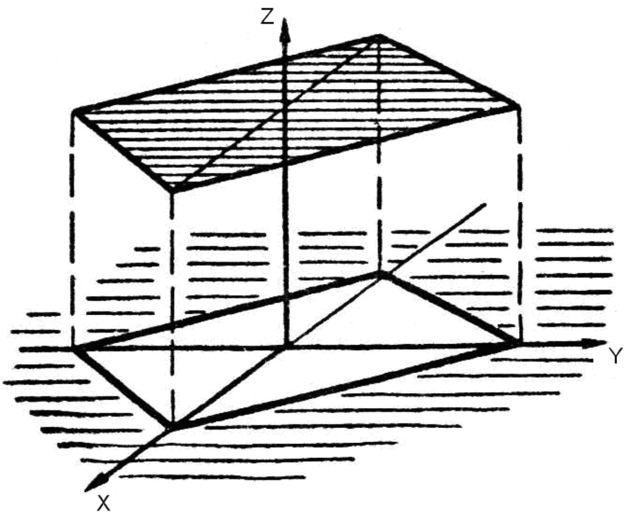


Рис. 8.7

I спосіб. Знайдемо розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини Z :

$$F_Z(z) = P_Z((-\infty,\ z)) = P_{(X,\,Y)}(\psi^{-1}((-\infty,\ z))) ,$$

де $z = \psi(x,\ y) = |\,x\,| + |\,y\,|$, а

$$\psi^{-1}((-\infty; z)) = \{(x, y) : \psi(x, y) \in (-\infty; z)\} = \{(x, y) : |\,x\,| + |\,y\,| < z\} .$$

Очевидно, що прообраз множини $(-\infty,\ z)$ порожній, якщо $z < 0$, і є квадратом (Рис. 8.8):

$$G(z) = \{(x, y) : |\,x\,| + |\,y\,| < z\}, \text{ якщо } z > 0 .$$

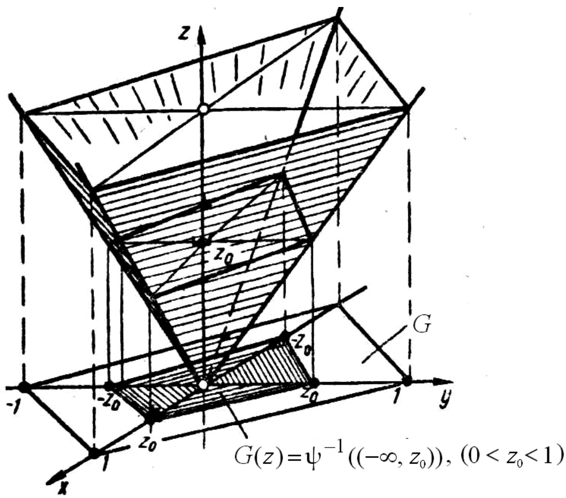


Рис. 8.8

Площа квадрата $G(z)$ дорівнює $2z^2$. Площа квадрата G дорівнює 2. Звідси, якщо $G(z) \subset G$, тобто $z \le 1$, то

$$P_{(X,\,Y)}((\psi^{-1}((-\infty,\ z))) = \iint\limits_{G(z)} f_{(X,\,Y)}(x,\ y)dxdy = z^2 .$$

Таким чином,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \le 0; \\ z^2, \text{якщо } 0 \le z \le 1; \\ 1, \text{ якщо } 1 < z. \end{cases} \qquad f_Z(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \,\overline{\in}\, [0,1]; \\ 2z, \text{ якщо } z \in (0,\ 1). \end{cases}$$

Графіки функцій $F_Z(z)$, $f_Z(z)$ зображено на Рис. 8.9. Для $M[Z]$ маємо

$$M[Z]=\int_0^1 zf_Z(z)\,dz = 2\frac{z^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

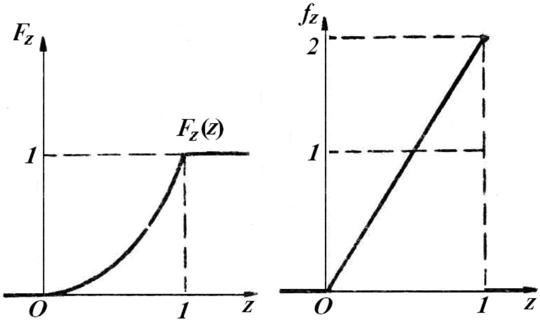


Рис. 8.9

II спосіб. Обчислюючи $M[Z]$ безпосередньо за формулою (8.4) і враховуючи, що $f_{(X,Y)}(x,\ y)=\frac{1}{2}$ у всіх точках квадрата G, дістаємо

$$M[Z]=\iint_G (|\,x\,|+|\,y\,|)\,f_{(X,\,Y)}(x,\ y)\,dxdy =$$

$$=4\iint_{G^+}(x+y)\,\frac{1}{2}\,dxdy = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}(x+y)dy\right\}dx =$$

$$=2\int_0^1\left(\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\bigg|_0^{1-x}\right)dx = 2\int_0^1 (x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2)dx =$$

$$=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\,\frac{(1-x)^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3},$$

де

$$G^+=\{(x,\ y): x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}.$$

Вправа 2. На деякий обслуговуючий пристрій у випадкові моменти часу надходять запити на обслуговування. Проміжок часу між двома сусідніми запитами є випадковою величиною τ із щільністю розподілу ймовірностей $f_\tau(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$, $t\ge 0$ (так званий *експоненціальний розподіл ймовірностей*, який має широкі застосування в теорії масового обслуговування). Знайти математичне сподівання, моду і медіану розглядуваного розподілу ймовірностей.

Враховуючи, що одинична ймовірність розподілена на інтервалі $[0,\infty)$, маємо

$$M[\tau]=\int_0^\infty t\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}dt .$$

Інтегруючи частинами:

$$u=t\,,\ dv=e^{-\frac{t}{T}}dt\,,\ du=dt\,,\ v=-Te^{-\frac{t}{T}}\,,$$

дістанемо

$$\frac{1}{T}\int_0^\infty t\,e^{-\frac{t}{T}}dt=\frac{1}{T}\left(-tTe^{-\frac{t}{T}}\Bigg|_0^\infty+T\int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}}dt\right)=-t\,e^{-\frac{t}{T}}\Bigg|_0^\infty-T\,e^{-\frac{t}{T}}\Bigg|_0^\infty .$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t/T}}=0$ (за правилом Лопіталя), то використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення розглядуваного інтеграла, остаточно одержимо $M[\tau\}=T$. Таким чином T є математичним сподіванням проміжку часу між двома сусідніми запитами.

Із графіка щільності розподілу ймовірностей (Рис. 8.10) випливає, що щільність $f_\tau(t)$ в точці $t=0$ набуває максимуму, який дорівнює $\frac{1}{T}$. Отже, $Mo[\tau]=0$.

Для обчислення медіани розглядуваного розподілу ймовірностей знайдемо спочатку функцію розподілу ймовірностей $F_\tau(t)$:

$$F_\tau(t)=\int_0^1\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}dt=1-e^{-\frac{t}{T}}\,,\ t\ge 0 .$$

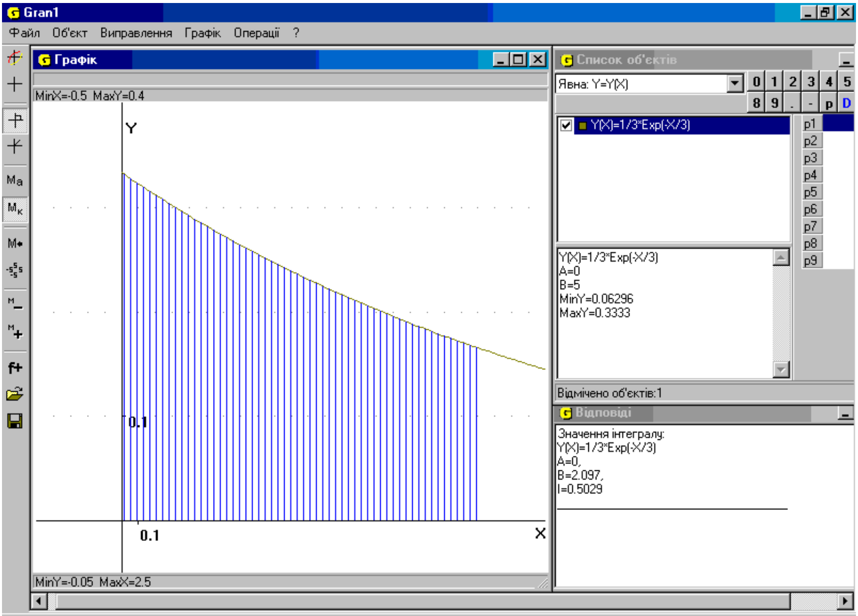


Рис. 8.10

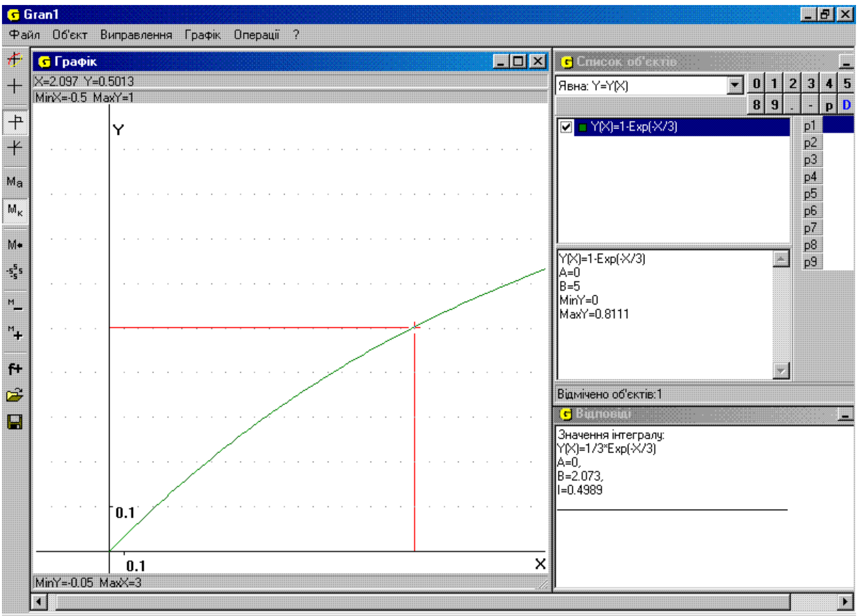


Рис. 8.11

Графік функції $F_\tau(t)$ зображено на Рис. 8.11. Прирівнюючи $F_\tau(t)$ до $1/2$, можна знайти точку, строго зліва від якої лежить маса ймовірності, що дорівнює $1/2$. Оскільки розподіл неперервний, то ця точка ділить одиничну ймовірність на дві рівні частини. Отже, з рівності $F_\tau(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} = \frac{1}{2}$ маємо $e^{-\frac{t}{T}} = 1/2$, $-\frac{t}{T} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, $t = T \ln 2$.

Таким чином, $Me[\tau] = T \ln 2$.

Вправа 3. Лінійна функція $Y = \psi(X) = aX + b$, $a \neq 0$, від випадкової величини X з нормальним розподілом ймовірностей, що описується щільністю

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

є також випадковою величиною з нормальним розподілом ймовірностей з параметрами

$$M[Y] = aM[X] + b = am + b, \ \sigma[Y] = |a|\sigma[X] = |a|\sigma.$$

Розглянемо два випадки.

1-й випадок. Нехай $a > 0$. Тоді (Рис. 8.12)

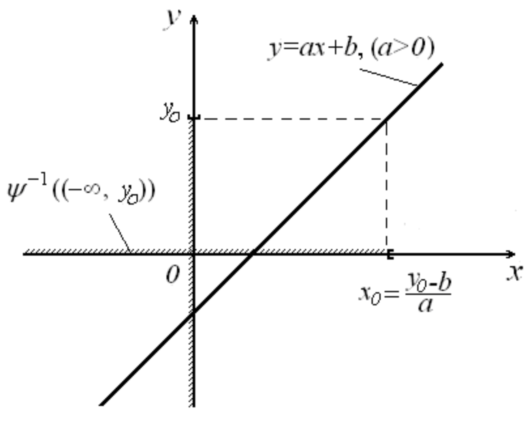


Рис. 8.12

$$F_Y(y) = P_Y((-\infty,\ y)) = P_X(\psi^{-1}((-\infty,\ y))) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Звідси

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{d}{dy}\int\limits_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m\right)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)}e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2(a\sigma)^2}}.$$

Таким чином, розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини Y також нормальний, причому

$$M[Y]=aM[X]+b=am+b\,,\ \sigma(Y)=a\sigma[X]=a\sigma\,.$$

2-й випадок. Нехай $a<0$. Дістаємо (Рис. 8.13)

$$F_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{\frac{y-b}{a}}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx\,,$$

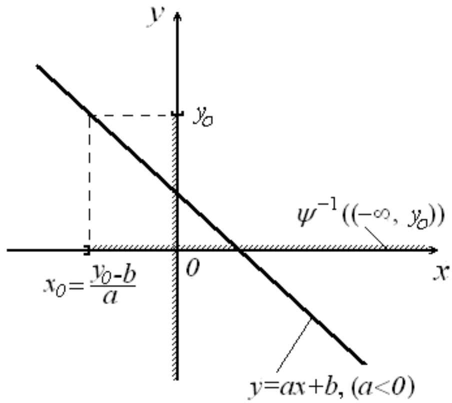


Рис. 8.13

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m\right)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma\,|\,a\,|)}e^{-\frac{(y-(a\,m+b))^2}{2(a\,\sigma)^2}}.$$

Отже, розподіл імовірностей на множині значень лінійної функції $Y=aX+b$, $a\neq 0$, випадкового аргумента X з нормальним розподілом імовірностей є також нормальним, причому параметрами цього розподілу є

$$M[Y]=aM[X]+b=am+b\,,\ \sigma[Y]=|\,a\,|\,\sigma[X]=|\,a\,|\,\sigma\,.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $M[X]=0$, то $X(E)=0$ для всіх $E\in\Omega$.

2. Якщо $M[|X|]=0$, то $X(E)=0$.

3. Якщо $M(X)\geq 0$, то й $X(E)\geq 0$ на Ω.

4. Якщо $|X(E)|\leq c$ майже всюди на Ω, то існує $M[X]$ і $M[X]\leq c$.

5. Якщо існує $M[cX]$ для деякої сталої c, то існує й $M[X]$.

6. Якщо $M[X]\leq M[Y]$, то $X\leq Y$.

7. Якщо $X(E)\leq Y(E)$, то $M[X]\leq M[Y]$.

8. Для будь-якої випадкової величини X правильна нерівність $|M[X]|\leq M[|X|]$.

9. Якщо існує $M[X+Y]$, то $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$.

10. Якщо існують скінченні $M[X\pm Y]$, то

$$M[aX+bY]=aM[X]+bM[Y]$$

для будь-яких сталих a і b.

11. Якщо $M[XY]=M[X]M[Y]$, то випадкові величини X і Y незалежні.

12. Якщо $M[X_i]<+\infty$, $i\in N$, та при $i\to+\infty$ $X_i(E)\to X(E)$ для всіх $E\in\Omega$, то $M[X_i]\to M[X]$.

13. Для довільного $a>0$ і будь-якої інтегровної випадкової величини X правильна нерівність

$$P_X(\{E:-a\leq X(E)\leq a\})\leq\frac{1}{a}M(|X|).$$

14. Якщо X – випадкова величина з функцією розподілу ймовірностей $F_X(x)=P_X((-\infty,\ x))$, а $y=\psi(x)$ неперервна функція, то

$$M[\psi(X)]=\int_{\Omega}\psi(X(E))\,P(dE)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,dF_X\ .$$

15. Якщо X – випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $f_X(x)$, $x\in R$, а $y=\psi(x)$ – інтегровна за Лебегом функція, то $M[\psi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,f_X(x)\,dx$.

16. Кожен розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора має центр розсіювання ймовірностей.

17. Для довільних випадкових векторів X та Y і борелівської функції $g(x,y)$ правильна рівність $M[g(X,Y)]=M[M[g(X,Y)]]$, де у виразі $M[g(X,Y)]$ елемент X вважається фіксованим.

18. Кожен розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини має моду.

19. Якщо випадкова величина неперервна, то розподіл ймовірностей на множині її значень має медіану.

20. Розподіл ймовірностей на множині значень дискретної випадкової величини може не мати ані моди, ані медіани.

21. Якщо на множині значень випадкової величини X розподіл ймовірностей нормальний з параметрами m та σ, то й на множині значень випадкової величини $Y = X + b$, $b = const$, розподіл ймовірностей такий самий.

2. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, випадкові величини відносно простору (Ω, S, P). Довести, що:

1. Якщо $X(E) \geq 0$ майже напевне на Ω, то $M[X] \geq 0$.

2. Якщо $X(E) = c$ майже напевне на Ω, то $M[X] = c$.

3. Якщо $|X(E)| \leq Y(E)$ майже напевне на Ω і $M[Y] < +\infty$, то $M[X]$ – скінченне число.

4. Якщо $M[|X|] = 0$, то $X(E) = 0$ майже напевне на Ω.

5. Якщо $M[|X - Y|] = 0$, то $X(E) = Y(E)$ майже напевне на Ω.

6. $M[|X|] < +\infty$ тоді й тільки тоді, коли існує $h > 0$, для якого

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\{E : |X(E)| \geq kh\}) = P(X^{-1}((-\infty, -kh] \cup [kh, \infty)).$$

3. Нехай задано ймовірнісні простори (Ω, S, P_i), $i \in \overline{1,n}$ і фіксована подія $A \in S$. Експеримент полягає у тому, що проводять n незалежних випробувань, у кожному i-му з яких подія A відбувається з ймовірністю $p_i = P_i(A)$, $i \in \overline{1,n}$. При цьому фіксується, відбудеться чи ні подія A у кожному випробуванні.

1. Побудувати простір Ω^n можливих елементарних подій і вказати можливий розподіл ймовірностей на ньому.

2. Визначити, з яких елементарних подій $E \in \Omega$ складається кожна подія A_i, $i \in \overline{1,n}$, яка полягає у тому, що в i-му випробуванні подія A відбулася.

3. Довести, що для кожного $i \in \overline{1,n}$ функція

$$X_i(E) = \begin{cases} 1, & \text{коли } E \in A_i, \\ 0, & \text{коли } E \notin A_i, \end{cases}$$

є випадковою величиною і знайти її математичне сподівання.

4. Нехай $X(E)$ дорівнює числу відбувань події A в n випробуваннях, результати яких відповідають елементарній події E. Довести, що: 1) $X(E) = \sum_{i=1}^{n} X_i(E)$, $E \in \Omega$; 2) $X(E)$ є випадковою величиною.

5. Знайти математичне сподівання $M[X]$.

4. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, – дискретна випадкова величина з розподілом ймовірностей $P(X = x_k) = p_k$, $k \in \{1, 2, \ldots\}$, а $\psi(x)$ – довільна функція, область визначення якої містить усі значення випадкової величини $X(E)$.

1. Довести, що $\psi(X(E))$, $E \in \Omega$, – випадкова величина і знайти розподіл ймовірностей на множині її значень.

2. Знайти формулу для обчислення математичного сподівання випадкової величини $\psi(X(E))$, $E \in \Omega$, та визначити умови існування $M[\psi(X)]$.

5. Для заданої функції розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X і заданої функції $\psi(x)$ знайти математичне сподівання випадкової величини $\psi(X(E))$:

1) $$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}, & \text{коли } 0 < x \le \dfrac{1}{4}, \\ 1, & \text{коли } x > \dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

$\psi(x) = x^2$;

2) $$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{коли } x > 2; \end{cases}$$

$\psi(x) = 2^x$;

3) $$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{коли } -1 < x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{коли } x > 1; \end{cases}$$

$\psi(x) = x^2 + x$.

6. Нехай $P(X = k) = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $k \in N$.

1. Перевірити, чи задає дана рівність розподіл ймовірностей на множині значень деякої дискретної випадкової величини X, множиною значень якої є множина натуральних чисел.

2. Визначити, чи існує скінченне математичне сподівання $M[X]$.

3. Визначити, чи існує скінченне математичне сподівання $M[X^2]$.

7. Нехай $F_X(x)$ – функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, а $\psi(x)$ – неперервна функція, для якої $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)| dF_X(x) < \infty$. Довести, що випадкова величина $\psi(X)$ має скінченне математичне сподівання, причому $M[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dF_X(x)$.

8. Знайти математичне сподівання $M[\psi(X)]$, якщо задано функцію $\psi(x)$ і розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X:

1. $\psi(x) = \dfrac{1}{x+1}$; розподіл Пуассона.

2. $\psi(\frac{x}{n})$, $x \in [0;1]$ – довільна неперервна функція; розподіл біноміальний з параметрами n та $p = t \in (0;1)$.

3. $\psi(x) = \sin^2 \pi x$; розподіл рівномірний на відрізку $[0;1]$.

4. $\psi(x) = \min\{|x|,1\}$; розподіл Коші.

9. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, випадкова величина, а $\psi(x)$, $x \in (-\infty;+\infty)$, неспадна функція, для якої $\psi(X(E))$, $E \in \Omega$, також випадкова величина із скінченним математичним сподіванням $M[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dF_X(x)$. Довести *узагальнену нерівність Чебишова*:

$$P_X((\varepsilon,\infty)) = P(X^{-1}(\varepsilon,\infty)) \le \frac{M[\psi(X)]}{\psi(\varepsilon)}$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

10. Для заданого розподілу ймовірностей на множині значень дискретної випадкової величини і заданої функції $\psi(x)$ записати узагальнену нерівність Чебишова (за наявності параметрів, визначити їх значення):

1)

x_k	0	1	2
$p_k^{(1)}$	0,1	0,2	0,7

$\psi(x)=x^2$;

2)

x_i	1	2	3	4
$p_i^{(2)}$	0,1	0,2	0,3	0,4

$\psi(x)=\sqrt{x}$;

3)

x_k	-1	0	1
$p_k^{(1)}$	0,3	0,3	C_1

$\psi(x)=\sqrt[3]{x}$;

4)

x_i	-2	-1	0
$p_i^{(2)}$	C_2	0,1	0,3

$\psi(x)=\cos \pi x$;

5)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	c	$2c$	$3c$

$\psi(x)=e^x$;

6)

x_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	d^2	d^2	d

$\psi(x)=e^{-x}$;

7)

x_k	0	1
$p_k^{(1)}$	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$

$\psi(x)=x^2+x$;

8)

x_i	-1	0	1
$p_i^{(2)}$	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\cos 2\alpha$

$\psi(x)=2^x$;

9)

x_k	1	2
$p_k^{(1)}$	$\frac{2\operatorname{arctg} a}{\pi}$	$\frac{2\operatorname{arcctg} a}{\pi}$

$\psi(x)=x^2$;

10)

x_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	$\frac{2\operatorname{arctg} a}{\pi}$	$\frac{2\operatorname{arcctg} a}{\pi}$	$1-a$

$\psi(x)=x^3$;

11)

x_k	-1	1
$p_k^{(1)}$	a	$1-a$

$\psi(x)=\sqrt{x^2+1}$;

12)

x_i	-1	0	1
$p_i^{(2)}$	a^2	$1-a^2$	$a-\frac{1}{3}$

$\psi(x)=x+\sqrt{|x|}$.

11. 1.Для заданих розподілів ймовірностей на множинах значень дискретних незалежних випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, і заданої функції $\psi(x,y)$ знайти центр розсіювання ймовірностей на множинах значень випадкового вектора (X,Y) і випадкової величини $Z=\psi(X(E),Y(E))$, $E\in\Omega$ (за наявності параметрів визначити їх значення):

1)

x_k	0	1
$p_k^{(1)}$	0,2	0,8

,

y_i	0	1	2
$p_i^{(2)}$	0,1	0,2	0,7

, $\psi(x,y)=x+y$;

2)

x_k	-1	1
$p_k^{(1)}$	0,4	0,6

,

y_i	-1	0	1
$p_i^{(2)}$	0,2	0,3	0,5

, $\psi(x,y)=x-y$;

3)

x_k	1	2
$p_k^{(1)}$	0,8	0,2

,

y_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	0,3	0,4	0,3

, $\psi(x,y)=xy$;

4)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	0,5	0,4	0,1

,

y_i	1	2
$p_i^{(2)}$	0,5	0,5

, $\psi(x,y)=\dfrac{x}{y}$;

5)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	c	$2c$	$3c$

,

y_i	1	2	3
$p_i^{(2)}$	a^2	a^2	a

, $\psi(x,y)=2x+y$;

6)

x_k	1	2	3
$p_k^{(1)}$	$\sin^2 2\alpha$	$\cos^2 2\alpha$	$\cos 2\alpha$

,

y_i	1	2
$p_i^{(2)}$	$\sin\beta$	$-\cos\beta$

, $\psi(x,y)=x-2y$;

7)

x_k	1	2
$p_k^{(1)}$	$\dfrac{c}{2}$	$\dfrac{1}{2c}$

,

y_i	0	1
$p_i^{(2)}$	$-\dfrac{\alpha}{2}$	$-\dfrac{1}{2\alpha}$

, $\psi(x,y)=\dfrac{y}{2x}$.

2. Обчислити моди і медіани розподілів ймовірностей на множинах значень випадкових величин X, Y та $\psi(X(E),Y(E))$.

12. 1. Для заданих функцій розподілу ймовірностей незалежних випадкових величин X та Y і заданої функції $\psi(x,y)$ знайти центр розсіювання ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X,Y) та випадкової величини $Z=\psi(X(E),Y(E))$:

1) $F_X(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$, $F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le 0,\\ \dfrac{1}{2}y, & \text{коли } 0<y\le 2,\\ 1, & \text{коли } y>2,\end{cases}$ $\psi(x,y)=x-y$;

2) $F_X(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$, $F_Y(y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y$, $\psi(x,y)=x+y$;

3) $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-|\lambda|x}, & \text{коли } x\ge 0,\\ 0, & \text{коли } x<0,\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{коли } y\le -1,\\ \dfrac{1}{2}(y+1), & \text{коли } -1<y\le 1,\\ 1, & \text{коли } y>1,\end{cases}$

$\psi(x,y)=xy$;

4) $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-|\lambda|x}, \text{ коли } x\ge 0,\\ 0, \quad \text{коли } x<0,\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases}e^{|\lambda|y}, \text{ коли } y\le 0,\\ 1, \quad \text{коли } y>0,\end{cases}$

$\psi(x,y)=x+y$;

5) $F_X(x)=\begin{cases}0, \quad \text{коли } x\le 1,\\ \frac{1}{2}(x-1), \text{ коли } 1<x\le 3,\\ 1, \quad \text{коли } x>3,\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, \quad \text{коли } y\le -3,\\ \frac{1}{2}(y+3), \text{ коли } -3<y\le -1,\\ 1, \quad \text{коли } y>-1,\end{cases}$

$\psi(x,y)=\dfrac{y}{x}$.

2. Обчислити моду і медіану розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин X, Y та $\psi(X, Y)$.

13. 1. Для заданих щільностей розподілу ймовірностей на множинах значень незалежних випадкових величини X та Y і заданої функції $\psi(x,y)$ знайти центр розсіювання ймовірностей на множинах значень випадкового вектора (X,Y) і випадкової величини $\psi(X(E),Y(E))$:

1) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{ коли } x\in[0;2],\\ 0, \text{ коли } x\notin[0;2],\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{ коли } y\in[-1;1],\\ 0, \text{ коли } y\notin[-1;1],\end{cases}$

$\psi(x,y)=x+y$;

2) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{ коли } x\in[-1;1],\\ 0, \text{ коли } x\notin[-1;1],\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}0, \quad \text{коли } y<0,\\ 2e^{-2y}, \text{ коли } y\ge 0,\end{cases}$,

$\psi(x,y)=x-y$;

3) $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, \text{ коли } x\ge 0,\\ 0, \quad \text{коли } x<0,\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, \text{ коли } y\ge 0,\\ 0, \quad \text{коли } y<0,\end{cases}$

$\psi(x,y)=2x+y$;

4) $f_X(x)=\begin{cases}1, \text{ коли } x\in[1;2],\\ 0, \text{ коли } x\notin[1;2],\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{(1+y^2)\pi}, \text{ коли } y\ge 0,\\ 0, \quad \text{коли } y<0,\end{cases}$

$\psi(x,y)=x+2y$;

5) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(1+x^2)\pi}, \text{ коли } x\le 0,\\ 0, \quad \text{коли } x>0,\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{(1+y^2)\pi}, \text{ коли } y\ge 0,\\ 0, \quad \text{коли } y<0,\end{cases}$

$\psi(x,y)=x-2y$.

2. Обчислити моду і медіану розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин X, Y та $\psi(X,Y)$.

14. Знайти моду і медіану розподілу ймовірностей на множинах значень випадкової величин X, коли цей розподіл є:

1) дискретним рівномірним;
2) біноміальним;
3) геометричним;
4) розподілом Пуассона;
5) рівномірний неперервний по проміжку $[a;b]$;
6) розподілом Коші з щільністю

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi a} \frac{1}{1+(\frac{x-x_0}{a})^2},$$

де число $x_0 \in R$ і $a > 0$ – фіксовані;

7) розподілом Лапласа з щільністю

$$f_X(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-x_0|}{\beta}},$$

де числа $x_0 \in R$ і $\beta > 0$ – фіксовані;

8) гамма-розподілом з щільністю

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{коли } x > 0, \end{cases}$$

де числа $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ – фіксовані, а $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

3.9. Моменти випадкових величин

Нехай (Ω, S, P) – імовірнісний простір; X – випадкова величина, визначена на Ω; $m \ge 0$ – ціле число.

Величина $M[X^m]$, якщо вона визначена, називається *моментом m-го порядку випадкової величини X*.

Величина $M[|X|^m]$ називається *абсолютним моментом m-го порядку*. Іноді такі моменти називають *початковими моментами m-го порядку*.

Центральним моментом m-го порядку називається величина $M[(X - M[X])^m]$. *Абсолютним центральним моментом m-го порядку* називається величина $M[|X - M[X]|^m]$.

Нехай $\varphi(x)$ – деяка невід'ємна функція випадкової величини X. Якщо існує $M[\varphi(X)]$, то для довільного $\varepsilon > 0$, для якого $\varphi(\varepsilon) > 0$, правильна *узагальнена нерівність П.Л. Чебишова*.

$$P(\{E:\varphi(X(E))\ge\varphi(\varepsilon)\})\le\frac{M[\varphi(X)]}{\varphi(\varepsilon)}.$$

Якщо X – невід'ємна випадкова величина, то при $\varphi(X)=X$ дістанемо *нерівність П.Л. Чебишова*

$$P_X\ ([\varepsilon,\ \infty))\le\frac{M[X]}{\varepsilon}.$$

Якщо $\varphi(X)=|X|^r$, $r>0$, то дістанемо *нерівність Маркова*

$$P(\{E:|X^r(E)|\ge\varepsilon\})=P_{|X|^r}((-\infty,\ -\varepsilon]\cup[\varepsilon,\ \infty))\le\frac{M[|X|^r]}{\varepsilon^r}.$$

Важливою числовою характеристикою розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X є *центральний момент другого порядку*, який називається *дисперсією* випадкової величини X і позначається $D[X]$:

$$D[X]=M[(X-M[X])^2].$$

Оскільки $(X-M[X])^2$ – невід'ємна випадкова величина, то $D[X]$ завжди визначена, коли визначене $M[X]$. Вона може набувати і значення $+\infty$.

Величина $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$ називається *середнім квадратичним відхиленням* або *стандартним відхиленням* випадкової величини X.

Величини $D[X]$ і $\sigma[X]$ є характеристиками того, наскільки щільно групуються ймовірності на множині значень випадкової величини X біля математичного сподівання $M[X]$ (навколо центра розсіювання), оскільки, як слідує із узагальненої нерівності *П.Л. Чебишова*:

$$P_X(|X-M[X]|\ge\varepsilon)=P_X((X-M[X])^2\ge\varepsilon^2)\le\frac{M[(X-M[X])^2]}{\varepsilon^2}=\frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Цю нерівність також називають *нерівністю П.Л. Чебишова.*

Приклад 9.1. Розглянемо випадкові величини X і Y з розподілами ймовірностей (табл. 9.1, 9.2).

Табл. 9.1

x_i	–0,01	0,01
p_i	0,5	0,5

Табл. 9.2

y_i	–100	100
p_i	0,5	0,5

Математичні сподівання випадкових величин X і Y дорівнюють відповідно

$$M[X]=-0{,}01\cdot0{,}5+0{,}01\cdot0{,}5=0,$$

$$M[Y]=-100\cdot0{,}5+100\cdot0{,}5=0,$$

тобто вони однакові. Проте розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин X та Y суттєво відрізняються: випадкова величина X

набуває значень, які мало відрізняються від її математичного сподівання (середнього значення) $M[X]$, тобто ймовірності на множині значень випадкової величини X досить скупчені біля центра розсіювання, а значення випадкової величини Y суттєво відрізняються від її математичного сподівання $M[Y]$, тобто ймовірності на множині значень випадкової величини Y досить сильно віддалені від центра розсіювання.

В механічній інтерпретації дисперсія є моментом інерції щодо центра мас системи мас із загальною одиничною масою, розподіленою вздовж осі абсцис за правилом P_X.

Приклад 9.2. Нехай значеннями випадкової величини X є числа, що випадають на верхній грані при підкиданні кубика. Знайти дисперсію випадкової величини X, якщо всі грані кубика рівноймовірні.

Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X має вигляд, поданий в табл. 9.3.

Табл. 9.3

x_i	"1"	"2"	"3"	"4"	"5"	"6"
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$M[X]=3{,}5$. За означенням $D[X]$ знаходимо

$$D[X]=\sum_{i=1}^{6}(x_i-3{,}5)^2\,p_i=\frac{1}{6}((1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+$$

$$+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2)=\frac{35}{12}.$$

Властивості початкових і центральних моментів:

1. Якщо $D[X]=0$, то $P_X\,(X=M[X])=1$.
2. $D[aX+b]=a^2D[X]$. Зокрема, $D[b]=0$, $D[aX]=a^2D[X]$.
3. $D[X]=M[X^2]-M^2[X]$. Звідси випливає, зокрема, що

$$M[X^2]=M^2[X]+D[X] \text{ і } M[X^2]\ge D[X].$$

4. Нехай $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $M[|X|^p]<\infty$, $M[|Y|^p]<\infty$.

Тоді виконується *нерівність Гельдера*

$$M[|XY|]\le (M[|X|^p])^{1/p}(M[|Y|^q])^{1/q}.$$

Зокрема, якщо $p=2$, $q=2$, то дістаємо *нерівність Коші-Буняковського*

$$|M[XY]|\le\sqrt{M[X^2]}\sqrt{M[Y^2]}.$$

і *нерівність Шварца*

$$M[(X+Y)^2]\le(\sqrt{M[X^2]}+\sqrt{M[Y^2]})^2.$$

5. $M[(X-c)^2] \geq D[X] = M[(X-M[X])^2]$, тобто $\min\limits_{c \in R} M[(X-c)^2]$ досягається при $c = M[X]$ за умови $|M[X]| < +\infty$.

6. Нехай X – випадкова величина, $\varphi(x)$ – опукла донизу функція, причому існують скінченні $M[X]$ та $M[\varphi(X)]$. Тоді виконується *нерівність Ієнсена*

$$M[\varphi(X)] \geq \varphi(M[X]).$$

Зокрема, якщо $\varphi(x) = x^2$, то $M[X^2] \geq (M[X])^2$; якщо $\varphi(x) = |x|^r$, $r \geq 1$, то

$$M[|X|^r] \geq |M[X]|^r.$$

7. Якщо $1 < s < t$, то виконується *нерівність Ляпунова*

$$(M[|X|^s])^{1/s} \leq (M[|X|^t])^{1/t}.$$

Приклад 9.3. Нехай розподіл імовірностей на множині значень випадкової величини *X* має вигляд, поданий в табл. 9.4.

Табл. 9.4

x_i	-1	1
p_i	0,5	0,5

Тоді

$$M[X \cdot X] = M[X^2] = (-1)^2 \cdot 0{,}5 + (1)^2 \cdot 0{,}5 = 1,$$

а $M[X] = -1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0$, тобто $M[X^2] \neq M^2[X]$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Розглянемо два розподіли ймовірностей, тобто дві випадкові величини X і X', для яких $P_X(\{x_i\}) = P_{X'}(\{x_i'\}) = p_i$, $i \in \overline{1,\ 6}$ і $M[X] = M[X']$ (Рис. 9.1). В одному випадку (Рис. 9.1, *а*) маємо

$$D[X] = \sum_{i=1}^{6} (x_i - M[X])^2 p_i,$$

а в другому (Рис. 9.1, *б*)

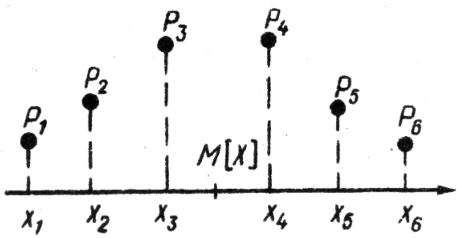


Рис. 9.1, *а*

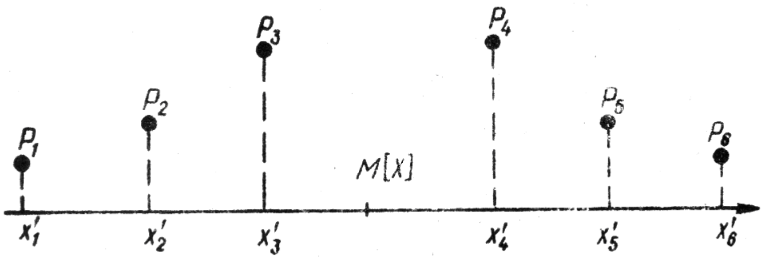


Рис. 9.1, *б*

$$D\,[X'] = \sum_{i=1}^{6} (x_i' - M\,[X])^2\, p_i \ .$$

Оскільки $|x_i' - M[X]| > |x_i - M[X]|$ для всіх $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, тобто в другому випадку ймовірності $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ більше віддалені від точки $x = M[X]$, ніж у першому випадку (Рис. 9.1), то очевидно, що

$$D[X'] > D[X].$$

Вправа 2. Знайти дисперсію випадкової величини X з рівномірним розподілом ймовірностей на інтервалі $(a;b)$.

Маємо

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\,[X])^2\, f_X\,(x)\,dx = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2\, \frac{1}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}(x - \frac{a+b}{2})^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3(b-a)}((\frac{b-a}{2})^3 - (\frac{a-b}{2})^3) = \frac{(b-a)^2}{12}\ .$$

Отже, чим довший відрізок $[a,b]$, на якому рівномірно розподілена одинична ймовірність, тим більша дисперсія. Це ще раз показує, що дисперсія є однією з характеристик розсіювання ймовірностей.

Вправа 3. Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкового числа μ появ події A в серії з n незалежних випробувань за умови, що в кожному випробовуванні подія A відбувається з імовірністю p і не відбувається з імовірністю $q = 1 - p$. Випадкову величину $\tilde{\mu}_n$ (число появ події A в серії з n незалежних випробувань) можна подати у вигляді суми випадкових величин

$$\tilde{\mu}_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\ ,$$

де μ_i – число появ події A в i-му випробуванні. Очевидно, що випадкові величини μ_i при будь-якому i можуть набувати лише двох можливих значень: 0, якщо подія A в i-му випробуванні не відбувається, і 1, якщо подія A в i-му випробуванні відбувається. Ряд розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини μ_i при будь-якому i має вигляд (табл. 9.5).

Табл. 9.5

0	1
q	p

Оскільки випробовування незалежні, то й величини μ_i між собою незалежні. Таким чином,

$$M[\mu_i]=0\cdot q+1\cdot p=p,$$

$$D[\mu_i]=(0-p)^2q+(1-p)^2p=p^2q+q^2p=pq(p+q)=pq.$$

Тому

$$M[\tilde{\mu}_n]=M[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]=\sum_{i=1}^{n}M[\mu_i]=p+p+\cdots+p=np,$$

$$D[\tilde{\mu}_n]=D[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]=pq+pq+\cdots+pq=npq,$$

$$\sigma[\tilde{\mu}_n]=\sqrt{D[\tilde{\mu}_n]}=\sqrt{npq}.$$

Враховуючи формулу Бернуллі, одержимо

$$M[\tilde{\mu}_n]=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^k(1-p)^{n-k}.$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^k(1-p)^{n-k}=np,\ \ p\in[0,1].$$

Аналогічно

$$\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=np(1-p),\ \ p\in[0,1].$$

Якщо $\varphi(x)$ неперервна функція $(p=x,\ x\in[0,1])$, то

$$M[\varphi(\frac{\tilde{\mu}_n}{n})](x)=M[\varphi(P_n^*(A))](x)=\sum_{k=0}^{n}\varphi(\frac{k}{n})C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=B_n(x).$$

Поліноми $B_n(x)$ називають *поліномами Бернштейна.*

Вправа 4. Знайти математичне сподівання й дисперсію статистичної ймовірності $P_n^*(A)$, яку дістають за результатами серії з n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися з імовірністю p і не відбутися з імовірністю $q = 1 - p$.

Оскільки $P_n^*(A) = \dfrac{\tilde{\mu}_n}{n}$, де $\tilde{\mu}_n$ – випадкова величина, визначена у вправі 3, то за властивостями математичного сподівання, а також початкових і центральних моментів

$$M[P_n^*(A)] = \frac{1}{n} M[\tilde{\mu}_n] = \frac{1}{n} np = p,$$

$$D[P_n^*(A)] = \frac{1}{n^2} D[\tilde{\mu}_n] = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n},$$

$$\sigma[P_n^*(A)] = \sqrt{D[P_n^*(A)]} = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Таким чином, із збільшенням числа випробувань $D[P_n^*(A)]$ зменшується і при досить великому n може стати як завгодно малою, а це означає, що при досить великих n значення випадкової величини $P_n^*(A)$, здобуті в різних серіях з n незалежних випробувань, в більшості своїй мало між собою відрізняються і зосереджуються в досить малому околі деякого значення p, яке є математичним сподіванням випадкової величини $P_n^*(A)$ (див. властивість 1 початкових і центральних моментів).

Вправа 5. Обчислити дисперсію дискретної випадкової величини X, якщо на множині її значень ймовірності розподілені за законом Пуассона.

Для обчислення $D[X]$ знайдемо спочатку $M[X^2]$:

$$M[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{a^i}{i!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{a^i}{i!} = e^{-a} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{a^i}{(i-1)!} =$$

$$= e^{-a} a \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1) \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-a} a \left(\sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} \right) =$$

$$= e^{-a} a \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-2)!} + e^a \right) = e^{-a} a \left(a \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a^{i-2}}{(i-2)!} + e^a \right) =$$

$$= e^{-e} a (a e^a + e^a) = a^2 + a.$$

Оскільки для даного розподілу ймовірностей

$$M[X]=\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{a^i}{i!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{i=1}^{\infty} i\frac{a^i}{i!}=e^{-a}\sum_{i=1}^{\infty} a\frac{a^{i-1}}{(i-1)!}=e^{-a}a\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}=e^{-a}a\,e^{a}=a\,,$$

то

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=a^2+a-a^2=a\,.$$

Вправа 6. Знайти початкові моменти k-го порядку випадкової величини X з показниковим розподілом імовірностей, щільність якого

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}\,,\; x\ge 0\,,\; \lambda>0 \text{ – фіксоване число.}$$

Маємо

$$M[X^k]=\lambda\int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x}dx\,,$$

або після заміни змінних $\lambda x=t$, $x=\dfrac{t}{\lambda}$,

$$M[X^k]=\frac{1}{\lambda^k}\int_0^{\infty} t^k e^{-t}dt=\frac{1}{\lambda^k}\Gamma(k+1)\,,$$

де $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ – так звана Г-функція (гамма-функція).

Інтегруючи частинами, дістаємо

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-t}dt=-t^k e^{-t}\Big|_0^{\infty}+k\int_0^{\infty} t^{k-1}e^{-t}dt=k(k-1)\int_0^{\infty} t^{k-2}e^{-t}dt=\cdots$$

$$\cdots=k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\int_0^{\infty} e^{-t}dt=k!$$

Таким чином при даному розподілі ймовірностей

$$M[X^k]=\frac{1}{\lambda^k}\Gamma(k+1)=\frac{k!}{\lambda^k}\,.$$

Зокрема $M[X]=\dfrac{1}{\lambda}$, $M[X^2]=\dfrac{2}{\lambda^2}$. Звідси

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}\,,\;\sigma[X]=\frac{1}{\lambda}\,.$$

Вправа 7. Центральні моменти k-го порядку випадкової величини X з нормальним розподілом ймовірностей з параметрами m і σ, обчислюються за формулами:

$$M[(X-m)^k]=\frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,.$$

$M[(X-m)^k]=0$, якщо $k=2r-1$, $r=1, 2, \ldots$,

$M[(X-m)^{2r}]=\sigma^{2r}(2r-1)(2r-3)\ldots 3\cdot 1=\sigma^{2r}(2r-1)!!$, якщо $k=2r$.

Зокрема, при $r=1$

$$M[(X-m)^2]=\sigma^2.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для кожної випадкової величини визначений її початковий момент m-го порядку для будь-якого $m\in N$.

2. Момент $M[|X|^m]$ визначений тоді і тільки тоді, коли визначений початковий момент m-го порядку.

3. Початковий момент m-го порядку – це те саме, що й абсолютний початковий момент m-го порядку.

4. Якщо існує скінченний початковий момент m-го порядку, то існує скінченний центральний момент m-го порядку.

5. Центральний момент m-го порядку не існує тоді й тільки тоді, коли не існує абсолютний центральний момент m-го порядку.

6. Центральний момент m-го порядку є скінченним тоді й тільки тоді, коли є скінченним абсолютний центральний момент m-го порядку.

7. Узагальнена нерівність Чебишова є правильною для будь-якої невід'ємної функції $\varphi(x)$.

8. Нерівність Маркова є наслідком нерівності Чебишова.

9. Нерівність Чебишова є частинним випадком нерівності Маркова.

10. $D[X]=0$ тоді й тільки тоді, коли випадкова величина є сталою.

11. Якщо $M[X^{2k}]=0$ для деякого $k\in N$, то $M[X^m]=0$ для будь-якого $m\in N$.

12. Якщо $M[X^2]<\infty$ і $M[Y^2]<\infty$, то й $M[XY]<\infty$.

13. Нерівність Коші-Буняковського є правильною для будь-яких випадкових величин X і Y.

14. Нерівність Шварца є наслідком нерівності Коші-Буняковського.

15. Якщо дисперсія $D(X)$ – скінченна, то для будь-якого $c\in R$ скіченним є $M[(X-c)^2]$, причому $D[X]=\min\limits_c M[(X-c)^2]$.

16. Нерівність Гельдера є узагальненням нерівності Коші-Буняковського.

17. Нерівність Ієнсена правильна для будь-якої опуклої донизу функції.

18. Нерівність Ляпунова є наслідком нерівності Ієнсена.

19. Якщо момент m-го порядку випадкової величини скінченний, то скінченний також момент будь-якого k-го порядку, де $k < m$.

20. Якщо розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний з параметрами m та σ, то її центральні моменти k-го порядку: а) залежать від m і σ; б) не залежать від m та σ; в) залежать від m і не залежать від σ; г) залежать від σ і не залежать від m.

2. 1. Довести, що будь яка опукла донизу (чи догори) функція $\varphi(x)$ борелівська.

2. Перевірити, чи випливає з умови $M[X] < +\infty$ нерівність $M[\varphi(X)] < +\infty$.

3. Нехай ймовірності на множині значень випадкової величини X розподілені за законом Пуассона з параметром $a > 0$.

1. Довести, що для будь-якого $m \in N$ правильна рівність

$$M[X^m] = a\sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^{i} M[X^i].$$

2. Обчислити: 1) $M[X^0]$; 2) $M[X^1]$; 3) $M[X^2]$; 4) $M[X^3]$; 5) $M[X^4]$; 6) $M[X^5]$; 7) $M[X^6]$.

4. Для випадкової величини X з неперервним рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[a;b]$, обчислити:

1. Момент m-го порядку.
2. Центральні моменти m-го порядку.
3. Абсолютні моменти m-го порядку, коли $a = -b$, а $b > 0$.
4. Абсолютні центральні моменти m-го порядку.

5. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний з параметрами a і σ^2. Обчислити центральні моменти m-го порядку.

6. Нехай $F_X(x)$ – функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X.

1. Довести, що:

1) $M[X^m] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^m \, dF(x)$;

2) $M[|X|^m] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^m \, dF(x)$;

3) $M[(X - M[X])^m] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^m \, dF(x)$.

2. Визначити вигляд формул 1)-3), коли: а) X – дискретна випадкова величина; б) X – абсолютно неперервна випадкова величина.

7. 1. Довести, що $M[X^m]$ – скінченне число тоді й тільки тоді, коли $M[|X|^m] =< +\infty$.

2. Довести, що коли $M[|X|^m] =< +\infty$, то $M[X^i]$ – скінченне число для будь-якого $i \in \overline{0,m}$. Зокрема, якщо $M[X^2] < +\infty$, то існують скінченні математичне сподівання $M[X]$ та дисперсія $D[X]$ випадкової величини X.

3. Довести, що коли $M[|X|^m] = +\infty$, то $M[|X|^i] = +\infty$ для будь-якого $i \geq m$.

8. Довести, що коли розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X симетричний відносно свого центра (тобто точки $M[X]$), то усі центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулеві.

9. 1. Нехай дисперсія $D[X]$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, скінченна. Довести, що:

1) $P(\{E : | X(E) - M[X] | \geq k\sqrt{D[X]}\}) \leq \dfrac{1}{k^2}$;

2) $P(\{E : | X(E) - M[X] | < k\sqrt{D[X]}\}) > 1 - \dfrac{1}{k^2}$.

2. Довести, що ймовірність того, що значення випадкової величини X лежать в інтервалі $(M[X] - 3\sqrt{D[X]}; M[X] + 3\sqrt{D[X]})$, більша, ніж $\dfrac{8}{9}$.

3. Вважаючи, що розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний з параметрами a і σ, обчислити $P(\{E : | X(E) - a | < 3\sigma\})$ і порівняти з результатом завдання 2.

10. Довести, що коли $X_i(E)$, $E \in \Omega$, $i \in \overline{1,m}$ незалежні випадкові величини із скінченними дисперсіями, то

$$D[\sum_{i=1}^{m} X_i] = \sum_{i=1}^{m} D[X_i].$$

11. Нехай випадкова величина $X_i(E)$, $E \in \Omega_1^m$ – це кількість відбувань фіксованої події A в m незалежних випробуваннях, а Y_i, $i \in \overline{1,m}$, – це індикатор події A_i, що полягає у відбуванні події A в i-му випробуванні з ймовірністю $p \in (0;1)$.

1. Вказати зв'язок простору Ω_1^m з подією A.

2. Знайти аналітичний вираз випадкової величини Y_i, $i \in \overline{1,m}$.

3. Довести, що: 1) випадкові величини Y_i є незалежними, коли $\widetilde{P}_m(A_i) = p$, $i \in \overline{1,\ m}$; 2) $X(E) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(E)$, $E \in \Omega_1^m$.

4. Знайти дисперсію випадкових величин Y_i, $i \in \overline{1,m}$, та X.

12. Нехай X – це кількість незалежних випробувань, проведених до відбування події A. При цьому ймовірність відбування події A у кожному з незалежних випробувань дорівнює $p \in (0;1)$.

1. Довести, що X має геометричний розподіл ймовірностей:

$$P(X = k-1) = p(1-p)^{k-1},\ k \in N.$$

2. Довести, що для будь-якого $m \in N$ правильна рівність:

$$M[X^m] = \frac{(1-p)}{p} \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i M[X^i].$$

3. Використовуючи попереднє твердження обчислити: 1) $M[X]$; 2) $M[X^2]$; 3) $D[X]$; 4) $M[X^3]$.

13. Обчислити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X з заданим розподілом ймовірностей:

1) *розподіл Паскаля*: $P(X = k) = C_{m+k-1}^k p^m (1-p)^k$, де $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, m – фіксоване натуральне число, $p \in (0;1)$ – фіксоване число;

2) гіпергеометричний розподіл: $P(X = k) = \dfrac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$, де $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, $N_1 = pN$, $p \in (0;1)$, $N \geq n > 0$, натуральні числа N, N_1 і n – фіксовані;

3) розподіл рівномірний з щільністю

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha}, & \text{коли } |x - x_0| < \alpha, \\ 0, & \text{коли } |x - x_0| \geq \alpha, \end{cases}$$

де $x_0 \in R$ і $\alpha > 0$ – фіксовані;

4) розподіл Коші з щільністю

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\alpha} \frac{1}{1 + (\frac{x - x_0}{\alpha})^2},\ x \in R,$$

де $x_0 \in R$ і $\alpha > 0$ – фіксовані числа;

5) розподіл Лапласа з щільністю

$$f_X(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-x_0|}{\beta}},$$

де числа $x_0 \in R$ і $\beta > 0$ – фіксовані;

6) гамма-розподіл з щільністю

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{коли } x > 0, \end{cases}$$

де числа $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ – фіксовані, а

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt .$$

14. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X є розподілом Коші з щільністю розподілу $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty; +\infty)$, а випадкова величина $Y = \min\{|X|, 1\}$. Обчислити: 1) $M[Y]$; 2) $M[Y^2]$; 3) $D[Y]$; 4) $M[Y^3]$.

15. Нехай X – випадкова величина з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0;1]$, а $Y = \sin \pi X$. Обчислити: 1) $M[Y]$; 2) $M[Y^2]$; 3) $D[Y]$; 4) $M[Y^3]$.

16. Для заданої випадкової величини X знайти розподіл ймовірностей на множині її значень та обчислити математичне сподівання та дисперсію:

1. X – кількість вгаданих номерів у лотереї “6 з 39”;
2. X – кількість випадань цифри 6 при двох підкиданнях грального кубика;
3. X – кількість влучень у мішень при 4-х пострілах, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі однакова і дорівнює $p = 0{,}6$;
4. X – кількість влучень в мішень, коли в мішень стріляють по одному разу два стрільці, причому ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює $0{,}6$, а для другого – $0{,}7$;
5. X – кількість підкидань монети до першого випадання герба;
6. X – кількість підкидань грального кубика до першого випадання цифри 6;
7. X – кількість бракованих деталей серед 3-х навмання вибраних з 10 деталей, серед яких 2 бракованих;
8. X – кількість неправильно набраних символів серед 3000 набраних символів, коли ймовірність того, що навмання вибраний символ є неправильно набраним, дорівнює $p = 0{,}001$;

9. X – кількість неякісно оформлених книг серед 10000 виданих, якщо ймовірність того, що навмання вибрана книга неякісно оформлена, дорівнює $p = 0{,}001$;

10. Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}, \text{ коли } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{3}{4}, \text{ коли } 1 < x \le 2, \\ 1, \text{ коли } x > 2. \end{cases}$$

11. Задано ряд розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X:

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	c	0,2

12. Розподіл ймовірностей на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ значень дискретної випадкової величини рівномірний.

13. Завод виробляє 96% виробів І-го сорту і 4% виробів ІІ-го сорту. Навмання відібрано партію з 1000 виробів, X – число виробів першого сорту в цій вибірці.

14. Щільність розподілу ймовірностей на інтервалі $(-c, c)$ має вигляд $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$, а за межами цього інтервалу $f_X(x) = 0$.

15. Функція розподілу ймовірностей має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2; \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}, & \text{при } -2 < x \le 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

16. Щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ A \sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi; \end{cases}$$

де $A > 0$. Знайти: A.

17. Потяги метро йдуть з інтервалом в t хвилин. Пасажир з'являється на пероні в довільний момент часу. Випадкова величина X – час очікування потягу, розподіл ймовірностей на множині значень якої рівномірний.

18. Функція розподілу ймовірностей має вигляд:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ a+b\arcsin x & \text{при} \quad -1 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad 1 \le x. \end{cases}$$

При цьому X є неперервною випадковою величиною. Визначити сталі a і b.

19. $X=(X_1,\ X_2)$ – випадковий вектор з дискретним розподілом ймовірностей:

$x_i \backslash x_k$	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

20. Дано ряди розподілу випадкового числа набраних очків кожним з двох стрільців, які змагаються:

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

y_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

Виконати порівняльний аналіз результатів змагань.

17. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\psi(X)$, коли задано функцію $\psi(x)$ і щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X (визначити невідомий параметр a):

1) $$f_X(x)=\begin{cases} 0, \ \text{коли} \ x \le 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \ \text{коли} \ 0 < x \le \dfrac{1}{4}, \\ ax, \ \text{коли} \ \dfrac{1}{4} < x \le \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ 0, \ \text{коли} \ x > \dfrac{\sqrt{2}}{4}; \end{cases}$$

$\psi(x)=x^2$;

2) $$f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \ x \le 0, \\ ae^{-2x}, & \text{коли} \ x > 0; \end{cases}$$

$\psi(x)=2x+1$;

3) $$f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \ x \le 1 \ \text{або} \ x \ge 2, \\ a(x-1), & \text{коли} \ 1 < x < 2; \end{cases}$$

$\psi(x)=\sqrt{x}$;

4) $f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } x\ge\pi, \\ a\sin x, & \text{коли } 0<x<\pi; \end{cases}$

$\psi(x)=\cos x$;

5) $f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\notin[0;\frac{\pi}{4}], \\ a\,\mathrm{tg}\,x, & \text{коли } x\in[0;\frac{\pi}{4}]; \end{cases}$

$\psi(x)=\sin 2x$;

6) $f_X(x)$ має графік, зображений на рис. 9.2, $\psi(x)=x^3$.

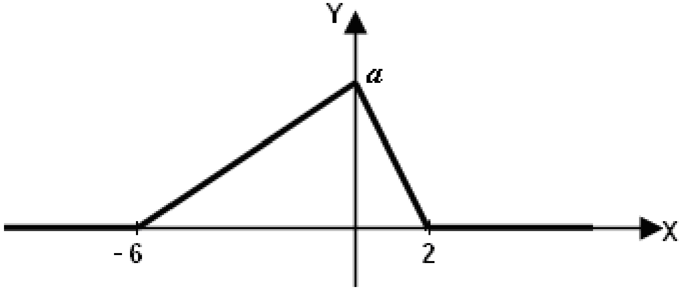


Рис. 9.2

18. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, коли задана функція розподілу ймовірностей на множині її значень:

1) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0, \\ \sin x, & \text{коли } 0<x\le\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{коли } x>\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ 2) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1, \\ a\sqrt{2(x-1)}, & \text{коли } 1<x\le 9, \\ 1, & \text{коли } x>9; \end{cases}$

3) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 1, \\ 1-\alpha e^{-\alpha(x-1)}, & \text{коли } x>1; \end{cases}$

4) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0, \\ 1-\cos x, & \text{коли } 0<x\le\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{коли } x>\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ 5) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le -1, \\ \frac{x+1}{7}, & \text{коли } -1<x\le 6, \\ 1, & \text{коли } x>6; \end{cases}$

6) $F_X(x)$ має графік, зображений на рис.9.3.

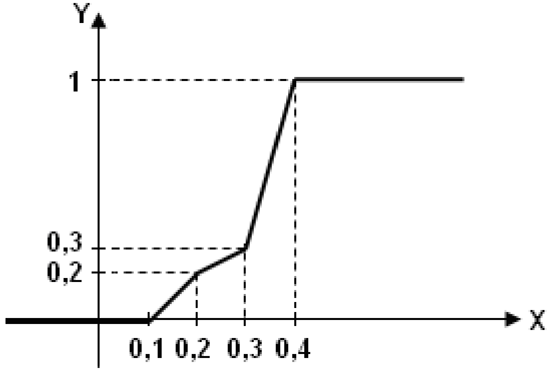


Рис. 9.3

19. Довести, що $\sqrt{M[(X+Y)^2]} = |\sqrt{M[X^2]} + \frac{|a|}{a}\sqrt{M[Y^2]}$, якщо $Y = ax$, $a \in R$, $a \neq 0$.

20. Довести, що $|M[(XY)]| = \sqrt{M[X^2] \cdot M[Y^2]}$, якщо $Y = ax$, $a \in R$.

21. Нехай X – випадкова величина з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Довести, що $\cos(M[X]) \geq M[\cos(X)]$.

22. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, довести, що коли X додатна випадкова величина, то $M[X^{-p}] \geq (M[X^p])^{-1}$ для будь-якого $p \in \{0,1,2,\ldots\}$.

23. Нехай $f_{X_1}(x) \geq f_{X_2}(x)$, коли $x < a$ та $f_{X_1}(x) \leq f_{X_2}(x)$, коли $x > a$. Довести, що:

1. $M[X_1] \leq M[X_2]$.
2. Якщо додатково $a = 0$ і $f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = 0$, коли $x < a$, то $M[X_1^k] \leq M[X_2^k]$ для будь-якого $k \in \{0,1,2,\ldots\}$.

3.10. Кореляція випадкових величин

Величину $M[(X - M[X])(Y - M[Y])]$ називають *коваріацією випадкових величин* X і Y і позначають $\mathrm{cov}[X, Y]$. Часто цю величину називають також *кореляційним моментом* випадкових величин X і Y і позначають $K[X, Y]$. Зокрема $K[X, X] = D[X]$.

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $K[X,Y] = 0$.

Для суми $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ випадкових величин X_i, $i = \overline{1, n}$,

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j} K[X_i,\ X_j] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K[X_i,\ X_j].$$

Матриця, складена з елементів $K_{ij} = K[X_i,\ X_j]$, називається *кореляційною матрицею*. Вона має вигляд

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \ldots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} \ldots K_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} \ldots K_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $K_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то *випадкові величини* $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ називаються *попарно некорельованими*. Для попарно некорельованих випадкових величин так само, як і для попарно незалежних,

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D[X_i].$$

Для дисперсії лінійної функції $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i$ випадкових величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ знаходимо

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j K[X_i,\ X_j].$$

Кореляційний момент вказує на зв'язок між випадковими величинами в тому розумінні, що для незалежних випадкових величин X і Y виконується рівність $K[X,Y] = 0$. Якщо $K[X,Y] \neq 0$, то випадкові величини X і Y залежні. Проте з того, що $K[X,Y] = 0$, незалежність випадкових величин X і Y не випливає.

З означення $K[X,Y]$ випливає, що кореляційний момент (коваріація) описує не тільки зв'язок між випадковими величинами, але і їх розсіювання.

Досить часто для характеристики зв’язку між випадковими величинами X і Y використовують *коефіцієнт кореляції*

$$r[X,\ Y] = \frac{K[X,\ Y]}{\sigma[X]\sigma[Y]}.$$

Коефіцієнт кореляції характеризує тільки зв'язок між випадковими величинами і є безрозмірною величиною.

Зазначимо, що $K[X, Y] = M[(X - M[X])(Y - M[Y])]$ можна розглядати як скалярний добуток величин $(X - M[X])$ і $(Y - M[Y])$. Тоді $K[X, X] = D[X]$, $K[Y, Y] = D[Y]$ – скалярні добутки елементів $(X - M[X])$ чи $(Y - M[Y])$ самих на себе, тобто квадрати норм елементів $(X - M[X])$ і $(Y - M[Y])$, а $\sigma[X]$ і $\sigma[Y]$ – норми елементів $(X - M[X])$ і $(Y - M[Y])$. Для введеного таким чином скалярного добутку елементів $(X - M[X])$ і $(Y - M[Y])$ та їх норм виконується нерівність Коші-Буняковського

$$K[X, Y] \le \sigma[X]\sigma[Y].$$

Отже $|r[X, Y]| \le 1$. Коефіцієнт кореляції є аналогом косинуса кута між векторами $(X - M[X])$ і $(Y - M[Y])$.

Якщо між випадковими величинами X і Y існує лінійна залежність $Y = aX + b$, то $|r(X, Y)| = 1$, причому якщо $a > 0$, то $r[X, Y] = 1$; якщо $a < 0$, то $r[X, Y] = -1$.

Виявляється, що й навпаки, якщо $|r[X, Y]| = 1$, то між випадковими величинами X і Y існує лінійна залежність виду $Y = aX + b$, причому $a > 0$, якщо $r[X, Y] = 1$, і $a < 0$, якщо $r[X, Y] = -1$ (оскільки в нерівності Коші-Буняковського рівність досягається тільки тоді, коли між величинами X і Y існує лінійна залежність).

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Щоб упевнитися в тому, що незалежність випадкових величин X і Y не випливає з некорельованості, розглянемо приклад, коли імовірності попадання в точки $(-1; 0), (0; -1), (1; 0), (0; 1)$ дорівнюють по $1/4$ (Рис. 10.1).

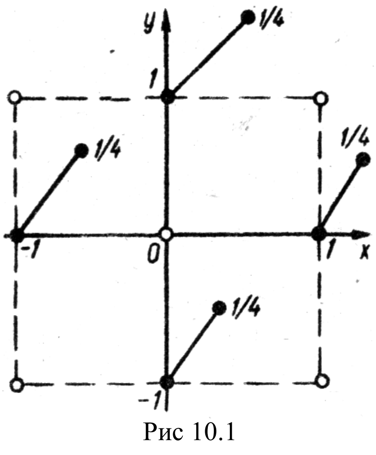


Рис 10.1

Цей двохвимірний розподіл імовірностей має вигляд, показаний у табл. 10.1.

Табл. 10.1

$y_i \backslash x_j$	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

Знайдемо безумовні розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин X та Y (табл. 10.2, 10.3).

Табл. 10.2

x_j	-1	0	1
$\mathrm{P}_X(x_j)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Табл. 10.3

y_i	-1	0	1
$\mathrm{P}_Y(y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Очевидно, що рівності

$$\mathrm{P}_X(x_j)\mathrm{P}_Y(y_i) = p_{ij} = P_{XY}(\{(x_j; y_i)\})$$

для всіх i та j не справджуються. Отже, випадкові величини X і Y, що входять до даної системи двох випадкових величин (X, Y), залежні.

Знайдемо кореляційний момент даного розподілу ймовірностей для системи (X, Y).

Для цього спочатку визначимо математичні сподівання $M[X]$ і $M[Y]$ випадкових величин X і Y:

$$M[X] = \sum_{j=1}^{3} x_j \mathrm{P}_X(x_j) = -1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0,$$

$$M[Y] = \sum_{i=1}^{3} y_i \mathrm{P}_Y(y_i) = -1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0.$$

Тоді

$$K[X, Y] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_j - M[X])(y_i - M[Y])\,p_{ij} = (-1)\cdot(-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1)\cdot\frac{1}{4} +$$

$$+1\cdot(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 0\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot\frac{1}{4} + (-1)\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

Таким чином, $K[X, Y] = 0$, хоч випадкові величини X і Y залежні.

Вправа 2. Щільність розподілу ймовірностей на множині значень системи випадкових величин (X, Y) має вигляд

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2} & \text{при } (x,y)\in W;\\ 0 & \text{при } (x,y)\,\overline{\in}\, W,\end{cases}$$

де $W=\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\}$. Знайти математичні сподівання $M[X]$, $M[Y]$ і кореляційний момент $K[X, Y]$.

Маємо

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=\int\limits_{-R}^{R} x\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{1/2}d(R^2-x^2)=-\frac{1}{\pi R^2}\cdot\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\Big|_{-R}^{R}=0.$$

Аналогічно $M[Y]=0$. Таким чином, центром розсіювання ймовірностей на множині значень системи випадкових величин (X, Y) є точка $C(0,0)$. Цей результат очевидний, якщо враховувати механічну інтерпретацію розподілу ймовірностей.

Для $K[X, Y]$ маємо

$$K[X, Y]=\iint\limits_{R^2}(x-M[X])(y-M[Y])f_{(X,Y)}(x,y)dxdy=\iint\limits_{W} xy\frac{1}{\pi R^2}dxdy=$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{-R}^{R}x\left\{\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy\right\}dx=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{-R}^{R}x\left\{\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_{-R}^{R}x\{(R^2-x^2)-(R^2-x^2)\}dx=0.$$

Таким чином, $K[X, Y]=0$, хоч, як легко перевірити, випадкові величини X і Y залежні, бо

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\ne f_{(X,Y)}(x,y)$$

для всіх $(x,y)\in R^2$.

Тут

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)\,dy=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & \text{якщо } x\in[-R,R],\\ 0, & \text{якщо } x\,\overline{\in}\,[-R,R],\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & \text{якщо } y\in[-R,R],\\ 0, & \text{якщо } y\,\overline{\in}\,[-R,R],\end{cases}$$

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\le R^2,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2>R^2.\end{cases}$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь-яких випадкових величин X та Y існує коваріація $\operatorname{cov}[X,Y]$.

2. Для будь-яких випадкових величин X та Y правильна рівність

$$K[X,Y]=M[XY]-M[X]\cdot M[Y].$$

3. $K[X,Y]=0$ тоді й тільки тоді, коли величини X та Y незалежні.

4. Для будь-яких випадкових величин X_k, $k\in\overline{1,n}$, існує відповідна кореляційна матриця.

5. Якщо випадкові величини X_k, $k\in\overline{1,n}$, незалежні, то відповідна кореляційна матриця є діагональною.

6. $D[\sum_{i=1}^{n} X_i]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]$ тоді й тільки тоді, коли величини X_i попарно некорельовані.

7. Коефіцієнт кореляції може набувати будь-яких значень.

8. Коефіцієнт кореляції $r[X,Y]$ задовольняє рівність $|r[X,Y]|=1$ тоді й тільки тоді, коли між випадковими величинами існує лінійна залежність.

2. Довести, що $K[X,Y]=M[XY]-M[X]M[Y]$, коли права частина існує.

3. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, – випадкові величини стосовно ймовірнісного простору (Ω,S,P), причому $D[X]<+\infty$ і $D[Y]<+\infty$.

Довести, що:

1. $K[X,Y]=K[Y,X]$;
2. $K[X,X]=D[X]$;
3. $D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K[X,Y]$.

4. 1. Скласти кореляційну матрицю K_{ij}, $i\in\overline{1,2}$, $j\in\overline{1,2}$; знайти кореляційний момент (коваріацію) і коефіцієнт кореляції випадкових величин X_1 та X_2; з'ясувати незалежність та корельованість X_1 та X_2, коли задано спільний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень дискретних випадкових величин X_1 та X_2:

1)

X_2 \ X_1	0	1
0	0,01	0,09
1	0,02	0,18
2	0,07	0,63

2)

X_2 \ X_1	1	2
0	0,01	0,02
1	0,09	0,18
2	0,07	0,63

3)

X_2 \ X_1	1	2	3
-1	0,2	0,1	0,3
0	0,15	0,15	0,1

4)

X_2 \ X_1	-1	0	1
1	0,1	0,3	0,1
2	0,1	0,3	0,1

5)

X_2 \ X_1	0	1	2
1	0	0,3	0,1
2	0	0,2	0,1
3	0	0,1	0,1
4	0,1	0	0

6)

X_2 \ X_1	-2	-1	1	2
-2	0	0,01	0,01	0
-1	0,24	0	0	0,24
1	0,24	0	0	0,24
2	0	0,01	0,01	0

7)

X_2 \ X_1	5	10	15	20
-10	0,012	0,038	0,2	0,1
-8	0,038	0,012	0,05	0,05
-6	0,05	0,05	0,012	0,038
-4	0,1	0,2	0,038	0,012

8)

X_2 \ X_1	-10	-8	-6	-4
10	0,023	0,027	0,05	0,1
20	0,05	0,1	0,025	0,025
30	0,05	0,05	0,025	0,025
40	0,027	0,023	0,05	0,35

2. Обчислити дисперсію випадкової величини $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b$, коли

1) $a_1 = a_2 = 1$; 2) $a_1 = -a_2 = 1$; 3) $a_1 = 2a_2 = 2$; 4) $a_1 = -\frac{1}{2}a_2 = 1$;

5) $a_1 = e^{a_2} = 2$; 6) a_1 і a_2 є коренями рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$.

5. 1. Скласти кореляційну матрицю K_{ij}, $i \in \overline{1,2}$, $j \in \overline{1,2}$; знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції випадкових величин $X = X_1$ та $Y = X_2$; з'ясувати незалежність та корельованість $X = X_1$ та $Y = X_2$, коли спільний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень абсолютно неперервних випадкових величин задано щільністю розподілу $f_{(X,Y)}(x,y)$ або функцією розподілу $F_{(X,Y)}(x,y)$ (за наявності параметрів, визначити їх значення):

1) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} a\,(xy+y^2), \text{ коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0{,}5x\le y\le x, \\ 0, \quad \text{коли } x<0, \text{ або } x>1, \text{ або } y>x, \text{ або } y<0{,}5x; \end{cases}$

2) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, \text{ коли } (x,y)\notin[0;1]\times[0;1], \\ a, \text{ коли } (x,y)\in[0;\frac{1}{2}]\times[0;\frac{1}{2}], \\ 3a, \text{ коли } (x,y)\in[0;\frac{1}{2}]\times(\frac{1}{2};1]\bigcup(\frac{1}{2};1]\times(0;\frac{1}{2}], \\ 9a, \text{ коли } (x,y)\in(\frac{1}{2};1]\times(\frac{1}{2};1]; \end{cases}$

3) $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$;

4) $f_{(X,Y)}(x,y)=ae^{-2x^2+xy-y^2}$, $(x,\ y)\in R^2$;

5) $f_{(X,Y)}(x,y)=ae^{-4x^2-6xy-10y^2}$, $(x,\ y)\in R^2$;

6) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} a\,xy, \text{ коли } (x,y)\in[0;\ 2]\times[0;\ 2], \\ 0, \quad \text{коли } (x,y)\notin[0;\ 2]\times[0;\ 2]; \end{cases}$

7) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} a\,e^{x+y}, \text{ коли } (x,y)\in[0;\ 1]\times[0;\ 1], \\ 0, \text{ коли } (x,y)\notin[0;\ 1]\times[0;\ 1]; \end{cases}$

8) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} a\sin x\sin y, \text{ коли } (x,y)\in[0;\ \pi]\times[0;\ \pi], \\ 0, \quad \text{коли } (x,y)\notin[0;\ \pi]\times[0;\ \pi]; \end{cases}$

9) $F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, \text{ коли } x\ge 0 \text{ і } y\ge 0, \\ 0, \quad \text{коли } x<0 \text{ або } y<0; \end{cases}$

10) $F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, \quad \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0, \\ \frac{1}{2}(x+y), \text{ коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1, \\ \frac{1}{2}(x+1), \text{ коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>1, \\ \frac{1}{2}(y+1), \text{ коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>1, \\ 1, \quad \text{коли } x>1 \text{ і } y>1; \end{cases}$

11) $F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le a \text{ або } y\le a, \\ k(x-a)(y-a), & \text{коли } a<x\le b \text{ і } a<y\le b, \\ k(x-a)(b-a), & \text{коли } a<x\le b \text{ і } y>b, \\ k(y-a)(b-a), & \text{коли } a<y\le b \text{ і } x>b, \\ 1, & \text{коли } x>b \text{ і } y>b; \end{cases}$

12) $F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0, \\ \frac{1}{2}xy, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1, \\ \frac{1}{2}x, & \text{коли } 0<x\le 1,\ y>1, \\ \frac{1}{2}y, & \text{коли } 0<y\le 1,\ x>1, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)(y-1), & \text{коли } 1<x\le 2 \text{ і } 1<y\le 2, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-1), & \text{коли } 1<x\le 2,\ y>2, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(y-1), & \text{коли } 1<y\le 2, \text{ і } x>2, \\ 1, & \text{коли } x>2 \text{ і } y>2. \end{cases}$

2. З'ясувати, чи існує лінійна залежність між величинами $X_1 = X$ та $X_2 = Y$.

3. Знайти кут між величинами $(X_1 - M[X_1])$ та $(X_2 - M[X_2])$.

6. Нехай кожна з випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E\in\Omega$, набуває лише двох значень, причому $K[X,\,Y]=0$. Довести, що X і Y незалежні випадкові величини.

7. Нехай $X_1(E)$ і $X_2(E)$, $E\in\Omega$, – дискретні випадкові величини, спільний розподіл яких є *триноміальним*, тобто визначається рівністю:

$$p_{ij} = P((X_1 = i)\cdot(X_2 = j)) = \frac{n!\,p_1^i p_2^j (1-p_1-p_2)^{n-i-j}}{i!\,j!\,(n-i-j)!},$$

де i та j невід'ємні цілі числа, для яких $i+j\le n$.

1. Знайти коваріацію (кореляційний момент) випадкових величин X_1 та X_2.

2. Чи є X_1 та X_2 залежними або корельованими величинами?

3. Чи існує лінійна залежність між величинами X_1 та X_2?

8. Знайти коваріацію кількостей випадань одиниці та шістки при n підкиданнях грального кубика.

9. Нехай $X_1(E)$ і $X_2(E)$, $E \in \Omega$, – випадкові величини, що мають скінченні дисперсії, причому $\sigma_i = \sqrt{D[X_i]} > 0$, $i \in \overline{1,\ 2}$. Довести, що:

1) відповідні нормовані випадкові величини $X_i^* = (X_i - M[X_i]) / \sigma_i$, $i \in \overline{1,\ 2}$, мають нульове математичне сподівання та одиничну дисперсію;

2) коефіцієнт кореляції $r[X_1,\ X_2] = K[X_1^*,\ X_2^*]$;

3) $r[X_1,\ X_2] = r[a_1 X_1 + b_1,\ a_2 X_2 + b_2]$ для будь-яких чисел $a_i > 0$, $i \in \overline{1,\ 2}$, b_i, $i \in \overline{1,\ 2}$;

4) $D[X_1^* \pm X_2^*] = 2(1 \pm r[X_1,\ X_2])$;

5) $|\, r[X_1,\ X_2]| \le 1$;

6) якщо $r[X_1,\ X_2] = 1$, то $X_1^* - X_2^* = const$ майже напевно, а тому $X_1 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} X_2 + const$ майже напевно;

7) якщо $r[X_1,\ X_2] = -1$, то $X_1^* + X_2^* = const$ майже напевно, а тому $X_1 = -\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} X_2 + const$ майже напевно.

10. Нехай випадкова величина X набуває значень $-2, -1$, 1, 2 кожне з ймовірністю $\dfrac{1}{4}$, а $Y = X^2$, причому спільний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень X та Y визначається рівностями

$$P((X = -1) \cdot (Y = 1)) = P(X = 1) \cdot (Y = 1)) =$$
$$= P((X = 2) \cdot (Y = 4)) = P((X = -2) \cdot (Y = 4)) = \frac{1}{4}.$$

Обчислити коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y і зробити висновок щодо їх незалежності та корельованості.

11. Експеримент полягає у підкиданні двох гральних кубиків. Нехай X_i – кількість очок, що випало на i-му кубику, $i \in \overline{1,\ 2}$, $X = X_1 + X_2$, $Y = X_1 - X_2$.

Обчислити коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y і зробити висновок щодо їх корельованості та незалежності.

12. Експеримент полягає у п’яти незалежних підкиданнях монети та фіксації результата кожного підкидання. Нехай X – кількість випадань герба, Y – кількість серій гербів, а Z – довжина максимальної серії гербів.

1. Знайти область визначення Ω_1^5 заданих випадкових величин, а також $X(E)$, $Y(E)$ і $Z(E)$ для кожного $E \in \Omega_1^5$.

2. Знайти спільний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин: 1) X та Y; 2) X та Z; 3) Y та Z.

3. Знайти розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин: 1) $X+Y$; 2) $X \cdot Y$.

4. Обчислити коваріацію (кореляційний момент) випадкових величин $U = X+Y$ та $V = X \cdot Y$.

3.11. Умовні розподіли ймовірностей

Нехай $X = X(E)$ і $Y = Y(E)$, $E \in \Omega$, – випадкові величини з одновимірними дискретними розподілами ймовірностей на множинах їх значень, причому X набуває значень з множини $Q_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, Y набуває значень з множини $Q_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $Q = Q_1 \times Q_2$.

Якщо $P_Y(\{y_i\}) \neq 0$, то

$$P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_i\}) = \frac{P_{(X,Y)}(\{x_j\}\{y_i\})}{P_Y(\{y_i\})} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{l} p_{ij}}, \quad i \in \overline{1,\, m}, \;\; j \in \overline{1,\, l}.$$

Числами $P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_i\})$, $i \in \overline{1,\, m}$, $j \in \overline{1,\, l}$ визначається так званий *умовний дискретний розподіл ймовірностей* на множині значень випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y набуває значення y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Їх можна тлумачити для кожного фіксованого $j \in \overline{1,\, l}$ як значення $z_i = P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_i\})$, $i \in \overline{1,\, m}$, деякої випадкової величини $Z_j = P_{X/Y}(\{x_j\}/Y)$, яких вона набуває з імовірностями $P_Y(\{y_i\})$, $i \in \overline{1,\, m}$. За формулою повної ймовірності

$$\sum_{i=1}^{m} P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_i\}) P_Y(\{y_i\}) = P_X(\{x_j\}), \quad j \in \overline{1,\, l}.$$

Отже, $P_X(\{x_j\})$ для кожного фіксованого $j \in \overline{1,\, l}$ є математичним сподіванням випадкової величини $P_{X/Y}(\{x_j\}/Y)$.

У механічній інтерпретації $P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_i\})$ є частка маси, розподіленої на множині точок з Q вздовж прямої $y = y_i$, яка припадає на множину тих точок з Q, що лежать на прямій $x = x_j$. Аналогічно $P_{Y/X}(\{y_i\}/\{x_j\})$ є частка маси, розподіленої в точках з Q вздовж прямої $x = x_j$, яка припадає на множину тих точок з Q, що лежать на прямій $y = y_i$.

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $P_{(X,Y)}(\{x_j\}\{y_i\}) = P_X(\{x_j\})P_Y(\{y_i\})$ при будь-яких i та j.

Випадкова величина Y не залежить від випадкової величини X, якщо при будь-якому x_j умовний розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини Y співпадає з безумовним розподілом ймовірностей на множині значень цієї випадкової величини, тобто якщо

$$P_{Y/X}(\{y_i\}/\{x_j\}) = P_Y(\{y_i\}) \text{ при будь-якому } x_j.$$

Можна показати, що коли випадкова величина Y не залежить від випадкової величини X, то й випадкова величина X не залежить від випадкової величини Y.

Приклад 11.1. Для виконання спортивної вправи учневі надається три спроби. Ймовірність того, що він правильно виконає вправу при кожній спробі, дорівнює $1/2$.

Нехай випадкова величина X – кількість правильно виконаних вправ у трьох спробах, випадкова величина Y – кількість неправильно виконаних вправ. Очевидно, що тут випадкові величини X і Y залежні, причому функціонально,

$$X + Y = 3, \text{ або } Y = 3 - X.$$

Тому сумісний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин X і Y має вигляд (див. схеми Бернуллі і Пуассона, п. 2.8):

$$p_{ij} = P_{(X,Y)}((\{x_j\})/(\{y_i\})) = 0 \text{ при } x_j + y_i \neq 3$$

як імовірності неможливих подій,

$$p_{0,3} = P_{(X,Y)}((\{3\})(\{0\})) = P_X(\{3\})P_{Y/X}(\{0\}/\{3\}),$$

де $P_X(\{3\}) = C_3^3(1/2)^3(1/2)^0 = 1/8$ (за формулою Бернуллі), а $P_{Y/X}(\{0\}/\{3\}) = 1$ як імовірність вірогідної події. Тому $p_{0,3} = 1/8$.

Аналогічно $p_{1,2} = 3/8$ і $p_{2,1} = 3/8$, $p_{3,0} = 1/8$.

За цим двохвимірним розподілом

y_i \ x_j	0	1	2	3
0	0	0	0	1/8
1	0	0	3/8	0
2	0	3/8	0	0
3	1/8	0	0	0

можна визначити ряди розподілу на множинах значень випадкових величин X і Y (табл. 11.1, 11.2).

Табл. 11.1

x_j	0	1	2	3
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Табл. 11.2

y_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\sum_{j=0}^{3} p_j = 1, \ \sum_{i=0}^{3} p_i = 1.$$

Приклад 11.2. Сумісний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин X і Y має вигляд, поданий в табл. 11.3.

Чи залежні дані випадкові величини X і Y ?

Табл. 11.3

y_j \ x_j	0	1
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{12}{20}$

Безумовні розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин X і Y мають вигляд, поданий відповідно в табл. 11.4, 11.5.

Табл. 11.4

x_j	0	1
p_j	$\frac{4}{20}$	$\frac{16}{20}$

Табл. 11.5

y_i	1	2
p_i	$\frac{5}{20}$	$\frac{15}{20}$

Умовні розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини X мають вигляд, поданий в табл. 11.6, 11.7.

Табл. 11.6

x_j	0	1
$P_{X/Y}(\{x_j\}/\{1\})$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

Табл. 11.7

x_j	0	1
$P_{X/Y}(\{x_j\}/\{2\})$	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$

Таким чином, усі умовні розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини X співпадають з безумовним, а отже, випадкова величина X не залежить від випадкової величини Y .

Для умовних розподілів ймовірностей на множині значень випадкової величини Y маємо (табл. 11.8, 11.9):

Табл. 11.8

y_i	1	2
$P_{Y/X}(\{y_i\}/\{0\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Табл. 11.9

y_i	0	1
$P_{Y/X}(\{y_i\}/\{1\})$	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$

Таким чином, умовні розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини Y теж співпадають з безумовним розподілом ймовірностей на множині значень цієї випадкової величини.

Нехай $(X,Y) - R^2$-значна випадкова величина з випадковими координатами X і Y, причому двохвимірний розподіл ймовірностей визначається щільністю $f_{(X,Y)}(x,y)$.

Тоді *щільність* $f_{Y/X}(y/x)$ *умовного розподілу ймовірностей* на множині значень випадкової величини Y за умови, що X набуває значення x, і аналогічно щільність $f_{X/Y}(x/y)$ визначаються рівностями

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}. \qquad (11.1)$$

Якщо щільність умовного розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y не залежить від того, якого значення набуває випадкова величина X, тобто якщо $f_{Y/X}(y/x) = f_Y(y)$, то випадкова величина Y не залежить від випадкової величини X.

Якщо випадкова величина Y не залежить від випадкової величини X, то й випадкова величина X не залежить від випадкової величини Y.

Якщо $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, то й $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$ і навпаки.

Нехай X і Y – відповідно R^s-значна і R^l-значна випадкові величини $(s \geq 1,\ l \geq 1)$, а $B \subset R^s$ – фіксована борелівська множина.

Нехай існує щільність $f_{(X,Y)}(x,y)$ сумісного розподілу ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин X і Y.

Умовною ймовірністю $P_{X/Y}(X \in B/Y = y)$ *події* $(X \in B)$ *за умови* (*гіпотези*) $Y = y$ називають величину

$$P_{X/Y}(X \in B/Y = y) = \frac{\int\limits_B f_{(X,Y)}(x,y)\,dx}{f_Y(y)} = \int\limits_B \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = P_{X/Y}(B/y),$$

де

$$f_Y(y) = \int\limits_{R^s} f_{(X,Y)}(x,y)dx.$$

Якщо $f_Y(y) = 0$, то вважають, що $P_{X/Y}(X \in B/Y = y)$ дорівнює нулю.

Функцію $\dfrac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$ можна інтерпретувати як щільність розподілу ймовірностей на множині значень R^s-значної величини X при гіпотезі $Y = y$. Таку *щільність розподілу* називають *апостеріорною* і позначають $f_{X/Y}(x/y)$. Отже,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_{Y/X}(y/x) = f_Y(y) f_{X/Y}(x/y).$$

Формулу

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_X(x) f_{Y/X}(y/x)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) f_{Y/X}(y/x)}{\int\limits_{R^s} f_X(x) f_{Y/X}(y/x)dx}$$

називають *формулою Байєса* для апостеріорної щільності розподілу ймовірностей.

Для будь-якої борелівської множини $B \subset R^s$

$$P_{X/Y}(B/y) = \int_B f_{X/Y}(x/y)dx \text{ і } \int_{R^s} f_{X/Y}(x/y)dx = 1, \text{ коли } f_Y(y) \neq 0.$$

Нехай (Ω, S, P) – ймовірнісний простір, $D = \{D_1, D_2, \ldots\}$, $D_i \in S$ – деяке скінченне або зчисленне розбиття Ω, тобто $D_1 + D_2 + \ldots = \Omega$, $D_i \cap D_j = \varnothing$, $i \neq j$, $P(D_i) > 0$.

Нехай $A \in S$ – деяка подія, $P(A/D_i)$ – умовна ймовірність події A відносно події D_i. З набором імовірностей $P(A/D_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, можна пов'язати випадкову величину $\sum_i P(A/D_i) I_{D_i}(E)$ зі значеннями $P(A/D_i)$ при $E \in D_i$, яких вона набуває з ймовірністю $P(D_i)$. Цю випадкову величину, пов'язану з розбиттям D, позначають $P(A/D)(E)$ і називають *умовною ймовірністю події* A *щодо розбиття* D.

Якщо D – тривіальне розбиття, що складається з однієї множини Ω, то

$$P(A/\Omega) = P(A).$$

Обчислюючи математичне сподівання випадкової величини $P(A/D)$, дістанемо формулу повної ймовірності:

$$M[P(A/D)] = \sum_i P(A/D_i) P(D_i) = P(A).$$

Нехай $Y = Y(E)$ – дискретна випадкова величина, множину значень якої утворюють числа $y_1, y_2, \ldots$,

$$Y(E) = \sum y_j I_{Y^{-1}(y_j)}(E).$$

Розбиття $D_Y = \{Y^{-1}(y_1), Y^{-1}(y_2), \ldots\}$ називається *розбиттям, що породжується випадковою величиною* Y.

Умовну ймовірність $P(A/D_Y)$ називають *умовною ймовірністю події* A *щодо величини* Y *і позначають* $P(A/Y)$. Під $P(A/Y = y_i)$ розуміють $P(A/Y^{-1}(y_i))$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Двоє стрільців стріляють в мішень так: спочатку стріляє один, і якщо він влучить, то постріл виконує другий.

Нехай випадкова величина X – кількість влучень у першого стрільця, Y – кількість влучень у другого стрільця. Треба побудувати сумісний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин X і Y, якщо перший стрілець виконує тільки один постріл і влучає з імовірністю 0,6, а другий стрілець влучає з імовірністю 0,8.

Очевидно, що випадкові величини X і Y можуть набувати тільки по два значення: $x=0$, $x=1$ і $y=0$, $y=1$. Якщо перший стрілець промахнеться, то в другого не буде жодного влучення. Отже,

$$p_{11} = P_{(X,Y)}((\{0\})(\{0\})) = P_X(\{0\})P_{Y/X}(\{0\}/\{0\}) = 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4,$$

$$p_{21} = P_{(X,Y)}((\{0\})(\{1\})) = P_X(\{0\})P_{Y/X}(\{1\}/\{0\}) = 0{,}4 \cdot 0 = 0,$$

$$p_{12} = P_{(X,Y)}((\{1\})(\{0\})) = P_X(\{1\})P_{Y/X}(\{0\}/\{1\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12,$$

$$p_{22} = P_{(X,Y)}((\{1\})(\{1\})) = P_X(\{1\})P_{Y/X}(\{1\}/\{1\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

Матриця розподілу ймовірностей має вигляд (табл. 11.10),

Табл. 11.10

y_j \ x_j	0	1
0	0,40	0,12
1	0,00	0,48

Ряди розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин X і Y подані відповідно в табл. 11.11 та табл. 11.12.

Табл. 11.11

x_j	0	1
p_j	0,4	0,6

Табл. 11.12

y_i	0	1
p_i	0,52	0,48

Умовні розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини X мають вигляд, поданий в табл. 11.13, 11.14.

Табл. 11.13

x_j	0	1
$P_{X/Y}(\{x_j\}/\{0\})$	$\frac{40}{52}$	$\frac{12}{52}$

Табл. 11.14

x_j	0	1
$P_{X/Y}(\{x_j\}/\{1\})$	0	1

Умовні розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини Y мають вигляд, поданий в табл. 11.15, 11.16.

Табл. 11.15

y_i	0	1
$P_{Y/X}(\{y_i\}/\{0\})$	1	0

Табл. 11.16

y_i	0	1
$P_{Y/X}(\{y_i\}/\{1\})$	$\frac{12}{60}$	$\frac{48}{60}$

Отже, оскільки умовні розподіли ймовірностей випадкових величин X і Y не співпадають з безумовними, випадкові величини X і Y залежні.

Вправа 2. Розподіл ймовірностей на множині значень R^2-значної випадкової величини має вигляд (табл. 11.17).

Табл. 11.17

$y_j \backslash x_j$	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

Можна показати, що випадкові величини X і Y залежні. Проте після повороту осей координат на кут $\frac{\pi}{4}$, тобто після перетворення

$$X' = X\cos\frac{\pi}{4} + Y\sin\frac{\pi}{4},\ Y' = -X\sin\frac{\pi}{4} + Y\cos\frac{\pi}{4},$$

сумісний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин X' і Y' матиме вигляд поданий в табл. 11.18.

Табл. 11.18

$y'_j \backslash x'_j$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	0	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Оскільки для будь-яких x'_j і y'_j виконуються рівності $P_{(X',Y')}((\{x'_j\}),(\{y'_i\})) = P_{X'}(\{x'_j\})P_{Y'}(\{y'_i\})$, то випадкові величини X' і Y' незалежні. Зазначимо, що умовні ймовірності $P_{Y'/X'}(\{y'_i\}/\{0\})$ та $P_{X'/Y'}(\{x'_j\}/\{0\})$ невизначені, їх можна визначити довільно.

Таким чином у деяких випадках за рахунок перетворення системи координат можна перейти від залежних випадкових величин до незалежних, досліджувати які простіше.

Вправа 3. Нехай на множині значень R^2-значної випадкової величини (S,W) задано рівномірний розподіл ймовірностей у прямокутнику $D = \{(s,w): |s|+|w| \le \sqrt{2}\}$ (Рис. 11.1), тобто

$$f_{(S,W)}(s,w)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, \text{ якщо } (s,w)\in D;\\ 0, \text{ якщо } (s,w)\notin D.\end{cases}$$

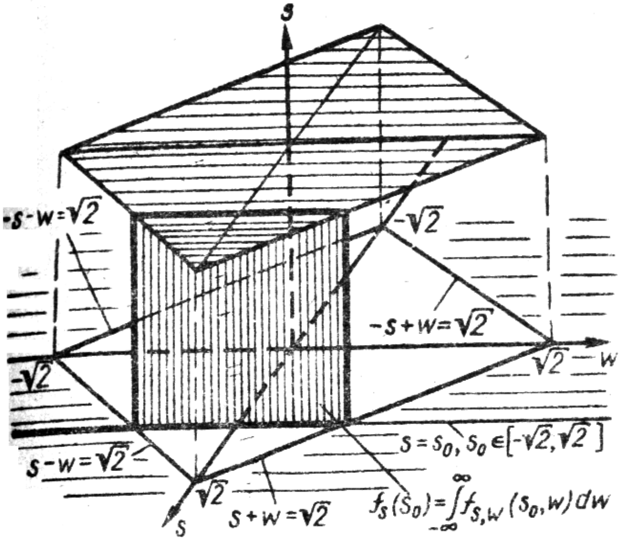


Рис. 11.1

Тоді

$$f_S(s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(S,W)}(s,w)dw=\begin{cases}0, & \text{якщо } s\notin\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right];\\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+s), & \text{якщо } s\in\left[-\sqrt{2},0\right];\\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-s), & \text{якщо } s\in\left[0,\sqrt{2}\right].\end{cases}$$

Аналогічно

$$f_W(w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(S,W)}(s,w)ds=\begin{cases}0, & \text{якщо } s\notin\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right];\\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+w), & \text{якщо } s\in\left[-\sqrt{2},0\right];\\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-w), & \text{якщо } s\in\left[0,\sqrt{2}\right].\end{cases}$$

Оскільки $f_S(s)f_W(w)\neq f_{S,W}(s,w)$, то випадкові величини S і W залежні.

Виконаємо тепер перетворення $X = S\cos\frac{\pi}{4} + W\sin\frac{\pi}{4}$, $Y = -S\sin\frac{\pi}{4} + W\cos\frac{\pi}{4}$, тобто повернемо систему координат на кут $\frac{\pi}{4}$.

Тоді

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (x,y) \overline{\in} D; \\ \frac{1}{4}, \text{ якщо } (x,y) \in D, \end{cases}$$

де (в нових координатах)

$$D = \{(x,y) : x \in [-1,1], y \in [-1,1]\}.$$

Легко бачити, що

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ якщо } x \in [-1,1]; \\ 0, \text{ якщо } x \overline{\in} [-1,1], \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ якщо } y \in [-1,1]; \\ 0, \text{ якщо } y \overline{\in} [-1,1]. \end{cases}$$

Отже,

$$f_X(x) f_Y(y) = f_{(X,Y)}(x,y).$$

Таким чином, випадкові величини X і Y незалежні.

Визначаючи функцію розподілу ймовірностей, дістаємо

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(x,y)dy \right\} dx = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy =$$

$$= F_X(x) F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \quad x \le -1 \quad \text{або} \quad y \le -1; \\ \frac{1}{4}(x+1)(y+1), & \text{якщо } -1 \le x \le 1 \quad \text{і} \quad -1 \le y \le 1; \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & \text{якщо } -1 \le x \le 1 \quad \text{і} \quad 1 \le y; \\ \frac{y}{2} + \frac{1}{2}, & \text{якщо } \quad 1 \le x \quad \text{і} \quad -1 \le y \le 1; \\ 1, & \text{якщо } \quad 1 \le x \quad \text{і} \quad 1 \le y, \end{cases}$$

оскільки

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0;\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}, & \text{якщо} \quad -1\le x\le 1;\\ 1, & \text{якщо} \quad 1\le x,\end{cases} \qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad y\le 0;\\ \dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}, & \text{якщо} \quad -1\le y\le 1;\\ 1, & \text{якщо} \quad 1\le y.\end{cases}$$

Поверхню $z=F_{(X,Y)}(x,y)$ для розглядуваного розподілу ймовірностей зображено на Рис. 11.2.

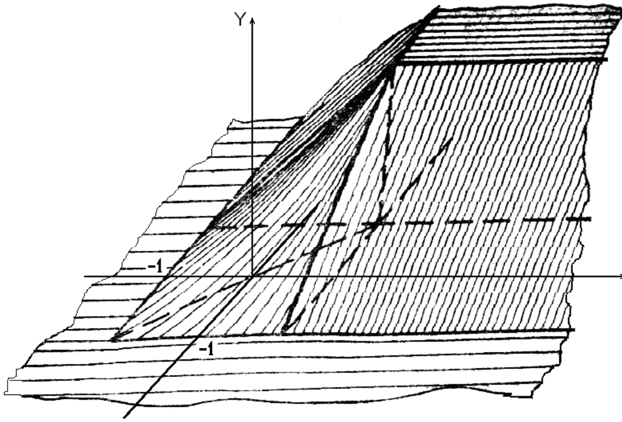


Рис. 11.2

Вправа 4. Щільність двохвимірного розподілу ймовірностей $f_{(X,Y)}(x,y)$ має вигляд

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}c, & \text{якщо} \quad (x,y)\in D;\\ 0, & \text{якщо} \quad (x,y)\overline{\in} D,\end{cases}$$

де $D=\{(x,y):x^2+y^2\le R^2\}$.

Знайти: сталу c, $f_X(x)$ і $f_Y(y)$, щільності умовних розподілів ймовірностей $f_{Y/X}(y/x)$ та $f_{X/Y}(x/y)$. З'ясувати, залежні чи ні випадкові величини X і Y. Знайти ймовірність того, що випадкова точка (X,Y) належатиме області

$$D_1=\left\{(x,y):x^2+y^2\le\frac{R^2}{4}\right\}.$$

Поверхню $z=f_{(X,Y)}(x,y)$ для даного випадку зображено на Рис. 11.3. На основі властивості щільності

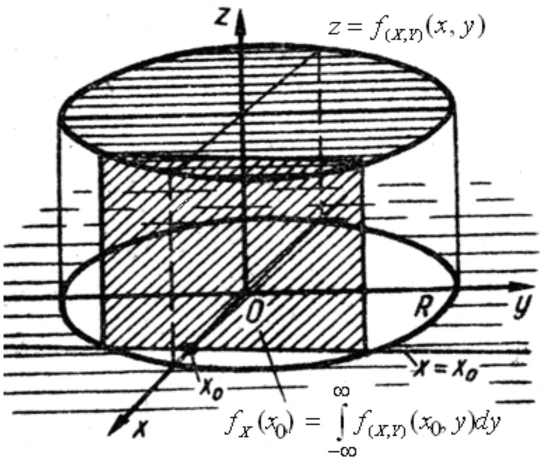


Рис. 11.3

$$\iint_{R^2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy = 1,$$

де $R^2 = \{(x, y) : -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$.

Враховуючи при цьому, що в геометричному тлумаченні подвійний інтеграл є об’єм тіла, що знаходиться під поверхнею $z = f_{(X,Y)}(x, y)$ і над площиною $z = 0$, а також те, що об’єм тіла під поверхнею щільності повинен дорівнювати 1, маємо

$$\iint_{R^2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy = c\pi R^2 = 1.$$

Отже, $c = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

Визначимо $f_X(x)$ і $f_Y(y)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)dy = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [-R, R]; \\ \displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\, dy = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} & \text{при } x \in [-R, R], \end{cases}$$

де $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ – рівняння півкола, що лежить нижче від осі Ox, $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ – рівняння півкола, що лежить вище від осі Ox. Аналогічно для $f_Y(y)$ маємо

$$f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx=\begin{cases} 0 & \text{при } y\,\overline{\in}\,[-R,R];\\ \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\dfrac{1}{\pi R^2}dx=\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} & \text{при } y\in[-R,R].\end{cases}$$

За формулою (11.1) знаходимо

$$f_{Y/X}(y/x)=\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}=$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при } x\in[-R,R],\ \ y\,\overline{\in}\,[-\sqrt{R^2-x^2},\sqrt{R^2-x^2}];\\ \dfrac{1}{\pi R^2}\dfrac{\pi R^2}{2\sqrt{R^2-x^2}} & \text{при } x\in[-R,R],\ \ y\in[-\sqrt{R^2-x^2},\sqrt{R^2-x^2}];\\ \text{невизначена} & \text{при } x\,\overline{\in}\,[-R,R].\end{cases}$$

Отже, $f_{Y/X}(y/x)\neq f_Y(y)$, щільність $f_{Y/X}(y/x)$ умовного розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y залежить від того, якого значення набуває випадкова величина X, тобто випадкові величини X і Y залежні.

Аналогічно для $f_{X/Y}(x/y)$ маємо

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}=$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при } y\in[-R,R],\ \ x\,\overline{\in}\,[-\sqrt{R^2-x^2},\sqrt{R^2-x^2}];\\ \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}} & \text{при } y\in[-R,R],\ \ y\in[-\sqrt{R^2-y^2},\sqrt{R^2-y^2}];\\ \text{невизначена} & \text{при } y\in[-R,R].\end{cases}$$

Нарешті, ймовірність того, що точка (X,Y) належатиме області D_1, $(D_1\subset D)$, є

$$P_{(X,Y)}((X,Y)\in D_1)=\iint\limits_{D_1} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi R^2}\cdot\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь яких дискретних випадкових величин X та Y існує умовний розподіл ймовірностей на множині значень однієї випадкової величини за умови, що інша набуває фіксованого значення.

2. Величина $P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_j\})$ завжди визначена однозначно.

3. Завжди $P_{(X,Y)}(\{x_j\}\{y_j\}) = P_X(\{x_j\})P_Y(\{y_j\})$.

4. Випадкові величини X та Y незалежні тоді й тільки тоді, коли $P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_i\}) = P_X(\{x_j\})$ для будь-якого y_i.

5. Розподіли ймовірностей на множинах значень будь-яких випадкових величин X та Y абсолютно неперервні, якщо спільний розподіл ймовірностей на декартовому добутку множин їх значень абсолютно неперервний, причому

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx .$$

6. Для будь-яких абсолютно неперервних випадкових величин X та Y існує абсолютно неперервний умовний розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X за умови, що Y набуває значення y_0, $f_{X/Y}(x/y_0) = \dfrac{f_{(X,Y)}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}$.

7. Для абсолютно неперервних випадкових величин X та Y $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$ для всіх (x,y) тоді й тільки тоді, коли $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ для майже всіх $x \in R$ та $y \in R$.

8. З формули Байєса для апостеріорної щільності розподілу ймовірностей випливає формула Байєса для апостеріорного розподілу ймовірностей: $P_{X/Y}(B/y) = \dfrac{\int_B f_X(x)\, f_{Y/X}(y/x)\,dx}{\int_{R^s} f_X(x)\, f_{Y/X}(y/x)\,dx}$, де $B \in \mathscr{B}(R^s)$.

9. Для будь-якого ймовірнісного простору (Ω, S, P) існує єдине не більш ніж зчисленне розбиття простору Ω на події $D_1, D_2, \ldots$.

10. Кожне розбиття $D = \{D_1, D_2, \ldots\}$ простору Ω визначає єдину випадкову величину $X(E)$, для якої $X(E) = P(A/D_i)$, коли $E \in D_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ A \in S$ – фіксована подія.

11. Умовна ймовірність $P(A/D)(E)$ є простою випадковою величиною.

12. $P(A/D) = P(A)$ тоді й тільки тоді, коли розбиття D містить лише одну подію.

2. Для заданого спільного розподілу ймовірностей $P_{(X,Y)}(\{x_j\}\cdot\{y_i\})$ на декартовому добутку множин значень випадкових величин X та Y знайти умовні ймовірності $P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_i\})$ для кожного заданого x_j та y_i, а також розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин X, Y, $Z = Z_j = P_{X/Y}(\{x_j\}/Y)$ і $W = W_i = P_{Y/X}(\{y_i\}/X)$. Перевірити незалежність випадкових величин X і Y.

1)

$y_i \backslash x_j$	0	1	2	3
0	1/8	0	0	0
1	0	3/8	0	0
2	0	0	3/8	0
3	0	0	0	1/8

2)

$y_i \backslash x_j$	1	2	3	4
0	0	0	0	3/8
1	0	0	1/8	0
2	0	1/8	0	0
3	3/8	0	0	0

3)

$y_i \backslash x_j$	0	1
1	1/27	2/27
2	8/27	16/27

4)

$y_i \backslash x_j$	0	1
1	2/27	1/27
2	16/27	8/27

5)

$y_i \backslash x_j$	1	2	3
0	1/5	0	1/5
1	0	1/5	0
2	1/5	0	1/5

6)

$y_i \backslash x_j$	1	2	3
0	1/8	0	1/8
1	0	1/2	0
2	1/8	0	1/8

7)

$y_i \backslash x_j$	-1	0	1
2	1/6	1/6	1/6
3	1/6	1/6	1/6

8)

$y_i \backslash x_j$	-1	0	1
2	1/3	1/3	1/12
3	1/12	1/12	1/12

3. 1. Для заданої щільності $f_{(X,Y)}(x,y)$ спільного розподілу ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин X і Y знайти апостеріорні щільності $f_{Y/X}(y/x)$ та $f_{X/Y}(x/y)$ умовних розподілів ймовірностей та перевірити незалежність випадкових величин X і Y (попередньо визначити невідомий параметр k):

1) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k, & \text{коли } |x|+|y| \le a,\ a>0, \\ 0, & \text{коли } |x|+|y| > a; \end{cases}$

2) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & \text{коли } (x,y) \in [0;a]\times[0;a], \\ 0, & \text{коли } (x,y) \notin [0;a]\times[0;a],\ a>0; \end{cases}$

3) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} kxy, & \text{коли } x \in [0;1] \text{ і } y \in [0;1], \\ 0, & \text{коли } x \notin [0;1] \text{ або } y \notin [0;1]; \end{cases}$

4) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} ke^{x+y}, & \text{коли } x\in[0;1]\times[0;1], \\ 0, & \text{коли } x\notin[0;1]\times[0;1]; \end{cases}$

5) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} k(x+y)^2, & \text{коли } x\in[0;1]\times[0;1], \\ 0, & \text{коли } x\notin[0;1]\times[0;1]; \end{cases}$

6) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} kxye^{-x^2-y^2}, & \text{коли } x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0; \end{cases}$

7) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} k(x-y), & \text{коли } (x,y)\in D=\{(x,y): x\ge y, 0\le x, y\le 1\}, \\ 0, & \text{коли } (x,y)\notin D; \end{cases}$

8) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} k, & \text{коли } x^2+y^2>R^2, \\ 0, & \text{коли } x^2+y^2\le R^2. \end{cases}$

2. Знайти умовні ймовірності $P_{X/Y}(B/y)$ та $P_{Y/X}(B/x)$ попадання у відкриту множину $B\subset R^1$ з двома складовими інтервалами.

4. Нехай задано ймовірнісний простір $(R^1,\mathscr{B}(R^1),P)$ з абсолютною неперервною ймовірнісною мірою P, щільність розподілу якої має вигляд

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\notin[-5;5], \\ k, & \text{коли } x\in[-5;5]. \end{cases}$$

Для заданої випадкової величини $Y=\psi(x)$, $x=E\in\Omega=R^1$ знайти: множину її значень $\Omega_Y=\{y_1,y_2,.,.,.\}$; розбиття D_Y, що породжується випадковою величиною Y та умовну ймовірність $P(A/D_Y)=P(A/Y)$ заданої події $A\in\mathscr{B}(R^1)$ щодо випадкової величини Y:

1) $Y=\begin{cases} \dfrac{|x^2-5x+6|}{x^2-5x+6}, & \text{коли } x^2-5x+6\ne 0, \\ 0, & \text{коли } x^2-5x+6=0; \end{cases}$ $A=(-1;1)$;

2) $Y=[x]$ – ціла частина x; $A=(-2;-1)\cup(1;2)$;

3) $Y=\begin{cases} \dfrac{\sin\pi x}{|\sin\pi x|}, & \text{коли } \sin\pi x\ne 0, \\ 0, & \text{коли } \sin\pi x=0; \end{cases}$ $A=[0;2]$;

4) $Y=\begin{cases} \arcsin x+\arccos x, & \text{коли } x\in[-1;1], \\ 1, & \text{коли } x\notin[-1;1]; \end{cases}$ $A=[0;2]$;

5) $Y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos x}, & \text{коли } \cos x \neq 0,\\ 2, & \text{коли } \cos x = 0;\ A=(-1;2];\end{cases}$

6) $Y=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x, & \text{коли } x\in[-1;1],\\ \pi, & \text{коли } x\notin[-1;1];\ A=[0;3];\end{cases}$

7) $Y=[x^2]$; $A=[0;\frac{3}{2}]$.

5. Нехай $X_k(E)$, $E\in\Omega$, $k\in\overline{1,n}$, взаємно незалежні випадкові величини, причому функції розподілу ймовірностей $F_{X_k}(x)=F(x)$ однакові, неперервні і зростаючі. Покладемо $X(E)=\max\limits_{1\le k\le n} X_k(E)$ і $Y(E)=\min\limits_{1\le k\le n} X_k(E)$. Довести, що:

1. $P((\{E:X(E)\le x\})\cdot(\{E:Y(E)>y\}))=$

$=P(X^{-1}((-\infty,x])(Y^{-1}(y,\infty))=(F(x)-F(y))^n$, коли $y<x$;

2. $P((\{E:Y(E)>y\})\,|\,\{E:X(E)=x\})=$

$=P(Y^{-1}(y,\infty)/X^{-1}(\{x\}))=(1-F(y)/F(x))^{n-1}$;

3. $P((\{E:X_k\le x\})\,|\,\{E:X=t\})=$

$$=P(X_k^{-1}(-\infty,x]/X^{-1}(\{t\}))=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{F(x)}{F(t)}, & \text{коли } x<t,\\ 1, & \text{коли } x\ge t,\ k\in\overline{1,n}.\end{cases}$$

3.12. Числові характеристики умовних розподілів ймовірностей

Нехай $X(E)$, $E\in\Omega$, – дискретна випадкова величина, що набуває значень x_1, x_2, ..., тобто

$$X(E)=\sum_i x_i I_{X^{-1}(x_i)}(E).$$

Нехай $D=\{D_1,D_2,\ldots\}$ – деяке розбиття простору Ω.

Умовним математичним сподіванням випадкової величини X *відносно розбиття* D називають випадкову величину

$$M[X/D](E)=\sum_i x_i P(X^{-1}(x_i)/D)(E),$$

де

$$P(X^{-1}(x_i)/D)(E) = \sum_j P(X^{-1}(x_i)/D_j) I_{D_j}(E).$$

До означення умовного математичного сподівання $M[X/D]$ можна підійти й так. Спочатку означити

$$M[X/D_j] = \sum_i x_i P(X^{-1}(x_i)/D_j),$$

а потім покласти

$$M[X/D](E) = \sum_j M[X/D_j] I_{D_j}(E).$$

Нехай $D = \{D_1, D_2, \ldots\}$ – деяке розбиття простору Ω, $Y = Y(E)$ – дискретна випадкова величина, а D_Y – розбиття, що породжується випадковою величиною Y.

Випадкова величина Y називається *вимірною відносно розбиття* D, якщо D дрібніше за D_Y, тобто $Y = Y(E)$ набуває сталих значень на підмножинах D_j. Якщо, наприклад, $D = \{\Omega\}$ – тривіальне розбиття, то Y є D-вимірною тільки тоді, коли $Y = \text{const}$.

Будь-яка дискретна випадкова величина Y вимірна відносно розбиття D_Y. Якщо X і Y дискретні випадкові величини і розбиття D_Y породжується випадковою величиною Y, то $M[X/D_Y]$ називають *умовним математичним сподіванням* X *відносно* Y *і позначають* $M[X/Y]$.

Безпосередньо з означення випливають такі *властивості умовного математичного сподівання дискретної випадкової величини*.

1. $M[aX + bY/D] = aM[X/D] + bM[Y/D]$, $a - \text{const}$, $b - \text{const}$.

2. $M[X/\Omega] = M[X]$.

3. $M[c/D] = c$, $c - \text{const}$.

4. Якщо $X(E) = I_A(E)$, то $M[X/D] = P(A/D)$.

5. $M[M[X/D]] = M[X]$ (узагальнення формули повної ймовірності).

6. Якщо $X \geq 0$, то $M[X/Y] \geq 0$. Зокрема, якщо $X_1 < X_2$, то $M[X_1/Y] \leq M[X_2/Y]$.

7. Якщо $X_1 < X_2 < \ldots X_n \ldots$ і $M[\lim\limits_{n\to\infty} X_n] < \infty$, то з імовірністю 1

$$\lim_{n\to\infty} M[X_n/Y] = M[\lim_{n\to\infty} X_n/Y].$$

Якщо X і Y незалежні дискретні випадкові величини, то, як випливає з означення, $M[X/Y]$ є сталою випадковою величиною:

$$M[X/Y] = M[X].$$

Якщо D – довільне розбиття простору Ω й дискретна випадкова величина X не залежить від розбиття D, тобто X і I_{D_i} незалежні при будь-якому $D_i \in D$, то $M[X/D] = M[X]$.

Якщо X – довільна випадкова величина, для якої визначено $M[X]$, $A \in S$ – випадкова подія така, що $P(A) > 0$, то величину

$$M[X/A] = \frac{M[XI_A]}{P(A)}, \ P(A) > 0,$$

називають *умовним математичним сподіванням випадкової величини* X *відносно події* A.

Нехай (Ω, S, P) – імовірнісний простір, Q – деяка σ-алгебра, $Q \subseteq S$, X – невід'ємна випадкова величина. Невід'ємна випадкова величина $M\,[X/Q](E)$ називається *умовним математичним сподіванням невід'ємної випадкової величини* X *відносно* σ*-алгебри* Q, якщо:

1) $M[X/Q]$ є Q-вимірною;

2) для будь-якого $A \in Q$ виконується рівність

$$\int_A XdP = \int_A M[X/Q]\,dP.$$

При цьому інтеграл зліва визначено мірою P на σ-алгебрі S, а інтеграл справа – мірою P на σ-алгебрі Q.

Якщо X – довільна випадкова величина, то

$$M[X/Q] = M[X^+/Q] - M[X^-/Q],$$

причому на множині нульової міри при $M[X^+/Q] = M[X^-/Q] = \infty$ різниця $M[X^+/Q] - M[X^-/Q]$ визначається довільно, наприклад може дорівнювати нулю.

Умовне математичне сподівання $M[I_B/Q]$ випадкової величини I_B, $B \in S$, називають *умовною ймовірністю події* B *відносно* σ-алгебри Q, $Q \subseteq S$, і позначають $P(B/Q)$.

Таким чином, умовна ймовірність $P(B/Q)$, $B \in S$, є такою випадковою величиною, що

1) $P(B/Q)$ є Q-вимірною;

2) для довільного $A \in Q$ виконується рівність

$$P(A \cap B) = \int_A P(B/Q)\,dP.$$

Нехай X – випадкова величина і Q_Y – σ-алгебра, породжена деяким випадковим елементом Y. Тоді $M[X/Q_Y]$, якщо воно існує, називається *умовним математичним сподіванням* X *відносно* Y і позначається $M[X/Y]$.

Умовна ймовірність події B відносно σ-алгебри Q_Y позначається $P(B/Y)$ і називається *умовною ймовірністю події* B відносно Y.

Умовним математичним сподіванням випадкової величини X *за умови* $Y = y$ називають і позначають $M[X/Y = y]$ будь-яку борелівську функцію $m(y)$, для якої

$$\int\limits_{Y^{-1}(B)} XdP = \int\limits_{B} m(y)P_Y(dy) .$$

Нехай X і Y – відповідно s-вимірний і l-вимірний випадкові вектори. Якщо відомий умовний розподіл ймовірностей $f_{X/Y}(x/y)$, то

$$M[X/Y = y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_{X/Y}(x/y)\,dx .$$

Якщо замість значення y розглядати випадковий вектор Y, то дістанемо випадкові величини $f_{X/Y}(x/Y)$, $M[X/Y]$, які називаються відповідно *умовною щільністю розподілу ймовірностей і умовним математичним сподіванням випадкової величини* X *відносно випадкового вектора* Y. При цьому те, що функція $f_{X/Y}(x/y)$ на множині $\{y : y \in \mathscr{N}_Y\}$ визначається довільно, не призводить до суперечностей, оскільки

$$P(\{Y \in \mathscr{N}_Y\}) = \int\limits_{\mathscr{N}_Y} f_Y(y)\,dy = 0 .$$

Умовним математичним сподіванням $M[X/Y]$ випадкової величини X, $(M[|X|] < \infty)$, відносно випадкового вектора Y називають випадкову величину виду $g(Y)$, де $g(y)$ – деяка борелівська функція така, що для довільної обмеженої борелівської функції $h(y)$ виконується рівність

$$M[h(Y)X] = M[h(Y)g(Y)] .$$

Це означення співпадає з означенням, даним раніше.

Якщо $f_{(X,Y)}(x, y)$ щільність сумісного розподілу ймовірностей, на декартовому добутку множин значень випадкових векторів X і Y, то для довільної борелівської функції $\varphi(x)$, $x \in R^l$, для якої $M[\varphi(X)] < \infty$, виконується рівність

$$M[\varphi(X)/Y] = \int\limits_{R^l} \varphi(x) f_{X/Y}(x/Y)\,dx .$$

Нехай $M[Y^2]<\infty$. У класі H всіх борелівських функцій $h(x)=h(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ на R^n, для яких $M[h^2(X)]<\infty$, функція $g(X)=M[Y\ /\ X]$ є такою, що для всіх $h(x)\in H$ виконується умова

$$M[(Y-g(X))^2]\le M[(Y-h(X))^2].$$

У геометричній інтерпретації $M[Y/X]$ є елементом з H, який найменше відхиляється від елемента X у зазначеному смислі, тобто $M[Y/X]$ є ортогональною проекцією елемента Y на простір H. Функція $g(X)=M[Y/X]$ називається *функцією регресії величини* Y *на* X.

Функції регресії можна дати таке тлумачення.

Нехай між деякими фізичними величинами існує зв'язок $y=g(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ і виконуються експерименти, в яких величина $Y=Y(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n)$ набуває випадкового значення $g(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)+\Delta_y(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ із незміщеною похибкою Δ_y, математичне сподівання якої дорівнює нулю, тобто $M[\Delta_y/X=x]=0$ для всіх $x\in R^n$.

Тоді, з одного боку,

$$M[Y/X=x]=g(x),$$

а з іншого боку, функція $g(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ визначає умовне середнє значення випадкової величини $Y=g(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n)$ за умови, що випадкові величини X_i набувають значень x_i, $i=1,\ 2,\ ...,\ n$.

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $X(E)$ і $Y(E)$, $E\in\Omega$, – незалежні дискретні випадкові величини, то $M[X\ /\ Y](E)=M[X]$, $E\in\Omega$.

2. Умовна ймовірність події A щодо дискретної випадкової величини Y існує завжди.

3. Для довільної випадкової величини $X(E)$, $E\in\Omega$, і довільної події $A\subset\Omega$ існує умовне математичне сподівання випадкової величини X щодо події A.

1. За означенням $M[X\ /\ Y]=M[X\ /\ D_Y]$, де $D_Y=\{D_1,\ D_2,\ ...\}$ – розбиття простору Ω, породжене дискретною випадковою величиною Y з множиною значень $\{y_1,\ y_2,\ ...\}$. При цьому $D_i=Y^{-1}(y_i)$.

Згадуючи означення $M[X\ /\ D_Y]$, маємо:

$$M[X\ /\ D_Y](E)=\sum_i x_i P(X^{-1}(x_i)\ /\ D_Y)(E)=$$

$$= \sum_i x_i \sum_j P(X^{-1}(x_i) / D_j) \cdot I_{D_j}(E) =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j P(X^{-1}(x_i) / Y^{-1}(y_j)) \cdot I_{D_j}(E), \ E \in \Omega.$$

Враховуючи незалежність випадкових величин X та Y, дістанемо, що $P(X^{-1}(x_i) / Y^{-1}(y_j)) = P(X^{-1}(x_i))$, а тому $M[X / D_Y](E) = \sum_i x_i P(X^{-1}(x_i)) \sum_j I_{D_j}(E) = \sum_i x_i P(X^{-1}(x_i)) = M[X]$, $E \in \Omega$, оскільки $\sum_j I_{D_j}(E) = 1$ для довільного $E \in \Omega$.

Отже, твердження 1 є правильним.

2. Умовна ймовірність події A щодо випадкової величини Y напевне не існує, коли подія A відповідає одному ймовірнісному простору (Ω_1, S, P_1), а Y є випадковою величиною відносно іншого ймовірнісного простору. Тому твердження 2, взагалі кажучи, неправильне.

Припустимо, що подія A і дискретна випадкова величина X пов'язані з одним ймовірнісним простором (Ω, S, P).

Тоді

$$P[A / X] = P[A / D_X](E) = \sum_i P(A / D_i) I_{D_i}(E)$$

і остання сума завжди існує, оскільки умовні ймовірності $P(A / D_i)$ існують завжди:

$$P(A / D_i) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cdot D_i)}{P(D_i)}, & \text{коли } P(D_i) \neq 0, \\ P(A), & \text{коли } P(D_i) = 0. \end{cases}$$

Отже, у цьому випадку твердження 2 є правильним.

3. Оскільки умовне математичне сподівання $M[X / A]$ випадкової величини X щодо події A визначається рівністю

$$M[X / A] = \frac{M[X \cdot I_A]}{P(A)}, \text{ коли } P(A) > 0,$$

то це математичне сподівання існує лише за умови $P(A) > 0$. Тому твердження 3 не є правильним.

Вправа 2. Нехай

$$0 < a < 1 \text{ і } f_{(X,Y)}(x, y) = ((1 + ax)(1 + ay) - a)e^{-x-y-axy},$$

коли $x > 0$ і $y > 0$, та $f(x,\ y) = 0$, коли $x \le 0$ або $y \le 0$.

1. Довести, що $f_{(X,\,Y)}(x,\ y)$ є щільністю розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора $(X,\ Y)$.

2. Знайти щільності $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин X та Y.

3. Знайти щільність $f_{(Y/X)}(y/x)$ умовного розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X та умовне математичне сподівання $M[Y/X]$. Перевірити залежність випадкових величин X та Y.

1. Задана функція $f_{(X,\,Y)}(x,\ y)$ невід'ємна і неперервна на R^2. Обчислимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dxdy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty}((1+ax)(1+ay)-a)e^{-x-y-axy}dy =$$

$$= \int_0^{+\infty}(1+ax)e^{-x}dx\int_0^{+\infty}(1+ay)e^{-y-axy}dy - a\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y-axy}dy =$$

$$= \int_0^{+\infty}(1+ax)e^{-x}dx\left((1+ay)\cdot\frac{1}{-(1+ax)}e^{-y-axy}\Big|_{y=0}^{y=+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{a}{1+ax}e^{-y-axy}dy\right) -$$

$$-a\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\cdot\frac{1}{-(1+ax)}e^{-y-axy}\Big|_{y=0}^{y=+\infty} =$$

$$= \int_0^{+\infty}(1+ax)e^{-x}dx\left(\frac{1}{1+ax} - \frac{a}{(1+ax)^2}e^{-y-axy}\Big|_{y=0}^{y=+\infty}\right) - a\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\cdot\frac{1}{1+ax} =$$

$$= \int_0^{+\infty}e^{-x}dx + a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+ax}dx - a\int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+ax}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Отже, функція $f_{(X,\,Y)}(x,\ y)$ задовольняє характеристичні властивості щільності розподілу ймовірностей. Твердження 1 доведено.

2. За означенням

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dy = \int_0^{+\infty}((1+ax)(1+ay)-a)e^{-x-y-axy}dy.$$

Враховуючи вже проведені обчислення, дістанемо:

$$f_X(x) = e^{-x} + \frac{ae^{-x}}{1+ax} - \frac{ae^{-x}}{1+ax} = e^{-x},$$

коли $x > 0$, та $f_X(x) = 0$, коли $x < 0$.

Аналогічний висновок для $f_Y(y)$.

3. Для знаходження щільності для умовного розподілу ймовірностей скористаємося формулою

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{1}{f_X(x)} f_{(X,Y)}(x,\ y) = ((1+ax)(1+ay)-a)e^{-y-axy},$$

коли $x > 0$ і $y > 0$, та $f_{Y/X}(y/x) = 0$, коли $x \le 0$ або $y \le 0$.

Оскільки $f_{Y/X}(y/x) \ne f_Y(y)$, то випадкові величини X та Y залежні.

Умовне математичне сподівання

$$M[Y/X] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y/X}(y/X)dy = \int_0^{+\infty} y((1+aX)(1+ay)-a)e^{-y-aXy}dy =$$

$$= y((1+aX)(1+ay)-a)\frac{1}{-(1+aX)}e^{-y-aXy}\Bigg|_{y=0}^{y=+\infty} +$$

$$+\int_0^{+\infty}\frac{((1+aX)(1+2ay)-a)}{1+aX}e^{-y-aXy}dy = \frac{1+2ay}{-(1+aX)}e^{-y-aXy}\Bigg|_{y=0}^{y=+\infty} +$$

$$+\frac{a}{(1+aX)^2}e^{-y-aXy}\Bigg|_{y=0}^{y=+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2a}{1+aX}e^{-y-aXy}dy =$$

$$= \frac{1}{1+aX} - \frac{a}{(1+aX)^2} - \frac{2a}{(1+aX)^2}e^{-y-aXy}\Bigg|_{y=0}^{y=+\infty} = \frac{1}{1+aX} + \frac{a}{(1+aX)^2} = \frac{1+aX+a}{(1+aX)^2}.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Випадкова величина $P(A/D)(E)$ має скінченне математичне сподівання для будь-якого розбиття D простору Ω.
2. Завжди $0 < M[P(A/D)] < 1$.
3. Кожна випадкова величина $Y(E)$, $E \in \Omega$, породжує деяке розбиття D_Y простору Ω.
4. Якщо $Y(E)$ – дискретна випадкова величина, то твердження 3 є правильним.
5. Умовна ймовірність події A відносно випадкової величини Y – це нова випадкова величина $P(A/Y)$, що набуває значень

$$P(A/(Y = y_i)) = P(A/Y^{-1}(y_i))$$

для будь-якого значення y_i випадкові величини Y.

6. Умовна ймовірність події A відносно випадкової величини Y існує завжди.

7. Умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, відносно розбиття D простору Ω завжди існує і є скінченним числом.

8. Завжди

$$\sum_i x_i \sum_j P(X^{-1}(x_i)/D_j) Y_{D_j}(E) = \sum_j Y_{D_j}(E) \sum_i x_i P(X^{-1}(x_i)/D_j)$$

9. Кожна дискретна випадкова величина є вимірною щодо будь-якого розбиття D простору Ω.

10. Для будь-яких випадкових величин X та Y існує $M[X/Y]$ – умовне математичне сподівання X відносно Y.

11. Якщо $M[X/Y]$ існує, то воно є скінченним числом.

12. $M[X/Y]$ є випадковою величиною.

13. $M[X/Y]$ є простою випадковою величиною.

14. Для довільної випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, і довільної події A існує умовне математичне сподівання випадкової величини X відносно події A.

15. Для довільної випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, і довільної σ-алгебри $Q \subset S$ існує умовне математичне сподівання випадкової величини X відносно σ-алгебри Q.

16. Для довільної події $A \in S$ і довільної σ-алгебри $Q \subset S$ існує умовна ймовірність події A відносно σ-алгебри Q.

17. Для довільної випадкової величини X існує $P(A/X)$.

18. Для будь-яких випадкових величин X та Y існує умовне математичне сподівання випадкової величини X за умови $Y = y$, де $y \in R$ – довільне фіксоване.

19. Для того, щоб знайти $M[X/Y]$, необхідно й достатньо знайти $M[X/Y = y]$ для деякого $y \in R$.

20. Умовне математичне сподівання випадкової величини X відносно випадкового вектора Y існує завжди і є певним числом.

21. Для довільної випадкової величини X і довільного випадкового вектора Y існує борелівська функція $g(y)$ така, що $M[h(Y) \cdot X] = M[h(Y) \cdot g(Y)]$, де $h(y)$ – довільна борелівська функція.

22. Для довільних випадкових векторів X та Y і довільної борелівської функції $\varphi(x)$ існує борелівська функція $g(y)$ така, що $M[h(Y) \cdot \varphi(X)] = M[h(Y) \cdot g(Y)]$, де $h(y)$ – довільна борелівська функція.

23. Для будь-яких випадкових векторів X та Y правильна рівність

$$M[M[X/Y]] = M[X].$$

24. Завжди $M[\varphi(X)/Y]=M[\varphi(X)]$.

25. Для будь-якої випадкової величини $Y\in L^2$ та випадкового вектора $X=(X_1,X_2,\ ...,X_n)$ існує борелівська функція $g(X)\in L^2$, для якої $M[(Y-g(X))^2]\le M[Y-h(X))^2]$, де $h(X)\in L^2$ – довільна борелівська функція.

26. Якщо $g(X)$ з твердження 25, то $g(X)=M[Y/X]$.

27. Твердження, обернене до 26, є правильним.

2. 1. Нехай $\Omega=[0;1)$, S – сукупність вимірних за Лебегом підмножин півввідрізка $[0;1)$, P – міра Лебега. Для заданої випадкової величини $X_k(E)$, $E\in[0;1)$ і заданого $D=\{D_1,D_2,\dots\}$ розбиття простору Ω знайти умовне математичне сподівання випадкової величини X щодо розбиття D:

1) $X_1(E)=\begin{cases}1,\text{ коли } E\in[0;\frac{1}{2}),\\ 2,\text{ коли } E\in[\frac{1}{2};1),\end{cases}$

$D=\{[0;\frac{1}{3}),[\frac{1}{3};\frac{1}{2}),[\frac{1}{2};\frac{2}{3}),[\frac{2}{3};1)\}$;

2) $X_2(E)=\begin{cases}1,\text{ коли } E\in[0;\frac{1}{4})\cup[\frac{1}{2};\frac{3}{4}),\\ -1,\text{ коли } E\in[\frac{1}{4};\frac{1}{2})\cup[\frac{3}{4};1),\end{cases}$

$D=\{[0;\frac{1}{3}),[\frac{1}{3};\frac{2}{3}),[\frac{2}{3};1)\}$;

3) $X_3(E)=\begin{cases}1,\text{ коли } E\in[0;\frac{1}{3}),\\ 2,\text{ коли } E\in[\frac{1}{3};\frac{2}{3}),\\ 3,\text{ коли } E\in[\frac{2}{3};1),\end{cases}$

$D=\{[0;\frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2};1)\}$;

4) $X_4(E)=\begin{cases}\frac{1}{n},\text{ коли } E\in[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}), n\in N,\\ 0,\ \text{ коли } E=0,\end{cases}$

$D=\{[0;\frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2};1)\}$;

5) $X_5(E)=\begin{cases}-1,\text{ коли } E\in[0;\frac{1}{2}),\\ 1,\quad\text{ коли } E\in[\frac{1}{2};1),\end{cases}$

$D=\{0\}\bigcup\{[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}):n\in N\}$.

2. Перевірити, чи є випадкова величина X_k вимірною щодо розбиття D.

3. Знайти умовне математичне сподівання $M[X_i / A]$, де множина $A = D_i$ – одна з складових розбиття D.

4. Утворити найвужчу σ-алгебру $Q = W(D)$, що містить у собі розбиття D, і знайти умовне математичне сподівання $M[X_i / W(D)]$ випадкової величини X_i відносно σ-алгебри $W(D)$.

5. Для події $B = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ знайти умовну ймовірність події B щодо σ-алгебри $W(D)$.

6. Для події $B = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ знайти умовну ймовірність події B щодо випадкової величини X_i, $i \in \overline{1,5}$.

7. Для кожного значення $x_{j,k}$ випадкової величини X_j знайти умовне математичне сподівання $M[X_i / \{E : X_j(E) = x_{jk}\}]$ випадкової величини X_i щодо події $\{E : X_j(E) = x_{jk}\}$.

8. Знайти умовне математичне сподівання $M[X_i / X_j]$, $i \in \overline{1,5}$, $j \in \overline{1,5}$.

3*. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, – випадкові величини стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P), що мають скінченні математичні сподівання, причому

$$\int_A X(E)\, dP = \int_A Y(E)\, dP$$

для будь-якої події $A \in S$. 1. Перевірити, чи можна стверджувати, що $X(E) = Y(E)$ майже напевно на просторі Ω. 2. Знайти $M[X / S]$.

4. 1. Для даної щільності $f_{(X,Y)}(x, y)$ спільного розподілу ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин X та Y і даної неперервної функції $\varphi(t)$, $t \in R^1$, знайти $M[\varphi(X) / Y]$ та $M[\varphi(Y) / X]$, визначивши невідомий параметр k:

1) $f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, \text{коли } |x| + |y| > 1, \\ k, \text{коли } |x| + |y| \le 1; \end{cases}$

$\varphi(t) = t^2$;

2) $f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } (x, y) \notin [0;1] \times [0;1], \\ k(x + y), & \text{коли } x, y \in [0;1] \times [0;1]; \end{cases}$

$\varphi(t) = 2t + 1$;

3) $f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \notin [0;1] \text{ або } y \notin [0;1], \\ kxy, & \text{коли } x \in [0;1] \text{ і } y \in [0;1]; \end{cases}$

$\varphi(t) = 1 - 2t$;

4) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}0, \text{коли } x^2+y^2>1,\\ k, \text{коли } x^2+y^2\le 1;\end{cases}$

$\varphi(t)=\sqrt[3]{t}$;

5) $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}k(x-y)^2, & \text{коли } x\in[0;1] \text{ і } y\in[0;1],\\ 0, & \text{коли } x\in[0;1] \text{ або } y\notin[0;1];\end{cases}$

$\varphi(t)=t^2+1$.

2. Знайти функцію $g(x)$ регресії величини Y на X.

5. Нехай щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X,Y) має вигляд:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right),$$

де $\sigma_i>0$, $i\in\overline{1,2}$, $\rho\in(-1;1)$ (двохвимірний нормальний розподіл ймовірностей).

Довести, що функція регресії величини Y на X є лінійною:

$$g(x)=M[Y/X]=\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}X, \text{ а } D[Y/X]=(1-\rho^2)\sigma_2^2.$$

6. Нехай випадкові величини X та Y незалежні з рівномірними розподілами ймовірностей на відрізку $[0;1]$. Нехай $X_*(E)=\min\{X(E),Y(E)\}$, а $Y^*(E)=\max\{X(E),Y(E)\}$.

1. Довести, що щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X_*,Y^*) має вигляд

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}2, \text{коли } (x,y)\in D=\{(x,y):0\le x\le y\le 1\},\\ 0, \text{коли } (x,y)\notin D.\end{cases}$$

2. Знайти функцію регресії величини Y^* на X_*.

3. Довести, що за умови $X_*=x_1$ розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини Y^* рівномірний на проміжку $[x_1;1]$ і знайти щільність цього розподілу.

7. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора (X,Y) – симетричний розподіл Коші в R^2 з щільністю

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$$

1. Знайти $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{Y/X}(y/x)$ та $f_{X/Y}(x/y)$.

2. Чи існують $M[X]$ та $M[Y/X]$?

8*. Нехай $X_k(E)$, $E \in \Omega$, $k \in \overline{1,n}$, – взаємно незалежні випадкові величини, функції розподілу ймовірностей $F_{X_k}(x) = F(x)$ на множинах значень яких неперервні і однакові; $X(E) = \max\limits_{1 \le k \le n} X_k(E)$, а $Y(E) = \min\limits_{1 \le k \le n} X_k(E)$. Довести, що

$$M[X_k \mid X^{-1}(t)] = \frac{n-1}{n} \frac{1}{F(t)} \int_{-\infty}^{t} y\, dF(y) + \frac{t}{n}, \quad k \in \overline{1,n}.$$

3.13. Лінійна регресія

Функцією регресії випадкової величини X на випадкову величину Y є функція від y, яка дорівнює умовному математичному сподіванню випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y набула значення y, тобто

$$f(y) = M[X / y].$$

Рівняння $x = f(y)$ ($y = g(x)$) називається *рівнянням регресії* X на Y (Y на X), а лінія на площині, яка відповідає цьому рівнянню, називається *лінією регресії*.

Лінія регресії Y на X (X на Y) показує, як в середньому залежить Y від X (X від Y).

Приклад 13.1. Нехай X і Y незалежні випадкові величини, $M(X) = m_X$, $M(Y) = m_Y$. Тоді

$$g(x) = M[Y / x] = M(Y) = m_Y; \quad f(y) = M[X / y] = M(X) = m_X.$$

Лінії регресії зображені на Рис. 13.1.

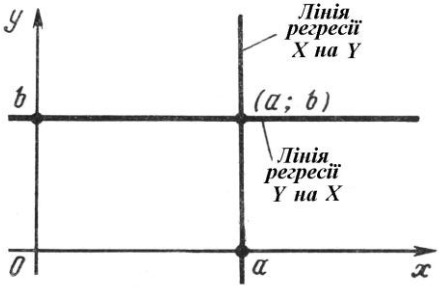


Рис. 13.1

Якщо кожному значенню однієї величини відповідає множина можливих значень іншої величини, то подібного роду залежності відносяться до *кореляційних залежностей*.

Кореляційна залежність між випадковими величинами X і Y називається *лінійною кореляцією*, якщо обидві функції регресії $f(y)$ і $g(x)$ є лінійними.

У цьому випадку обидві лінії регресії є прямими; вони називаються *прямими регресії*.

Коефіцієнт регресії Y *на* X позначається через $\rho(Y/X)$ і визначається рівністю:

$$\rho(Y/X)=\frac{K[X,Y]}{\sigma_X^2}.$$

Рівняння лінії регресії Y на X має вигляд

$$y=\rho(Y/X)(x-m_X)+m_Y.$$

Аналогічно можна отримати рівняння лінії регресії X на Y

$$x=\rho(X/Y)(y-m_Y)+m_X,$$

де

$$\rho(X/Y)=\frac{K[X,Y]}{\sigma_Y^2}.$$

є *коефіцієнтом регресії* X *на* Y.

Рівняння прямих регресії можна записати у більш симетричному вигляді, якщо скористатися *коефіцієнтом кореляції*,

$$r=\frac{M[XY]-M[X]M[Y]}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}=\frac{K[X,Y]}{\sigma_X\,\sigma_Y}.$$

Враховуючи цей коефіцієнт, маємо:

$$\rho(Y/X)=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X};\qquad \rho(X/Y)=r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y},\qquad (13.1)$$

і тому рівняння прямих регресії набувають вигляду:

$$y-m_Y=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X);$$

$$x-m_X=r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y).$$

З рівнянь прямих регресії видно, що обидві ці прямі проходять через точку $(m_X;m_Y)$; кутові коефіцієнти прямих регресії відповідно дорівнюють (позначення кутів див. на Рис. 13.2):

$$\mathrm{tg}\,\alpha=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X};\qquad \mathrm{tg}\,\beta=(1/r)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}.$$

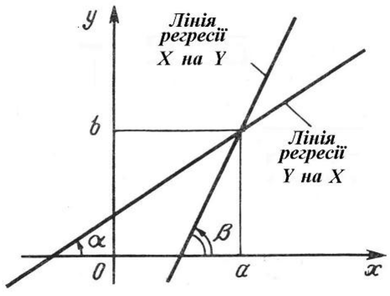


Рис. 13.2

Оскільки $|r| \le 1$, то $|\operatorname{tg}\alpha| \le |\operatorname{tg}\beta|$. Це означає, що пряма регресії Y на X має менший нахил до осі абсцис, ніж пряма регресії X на Y. Чим ближче $|r|$ до одиниці, тим менший кут між прямими регресії. Ці прямі співпадають тоді і тільки тоді, коли $|r| = 1$.

При $r = 0$ прямі регресії задаються рівняннями $y = m_Y$, $x = m_X$.

У цьому випадку

$$M[Y / X = x] = m_Y = M(Y);\; M[X / Y = y] = m_X = M(X).$$

З формул (13.1) видно, що коефіцієнти регресії мають той самий знак, що і коефіцієнт кореляції r, і пов'язані співвідношенням

$$\rho(Y / X)\,\rho(X / Y) = r^2.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай між випадковими величинами X і Y існує лінійна залежність: $Y = aX + b$, $a \ne 0$. Тоді функція регресії Y на X буде мати вигляд

$$g(x) = M[Y / x] = M[aX + b / x] = ax + b.$$

Оскільки $X = \frac{1}{a}(Y - b)$, то функція регресії X на Y набуває вигляду

$$f(y) = M[X / y] = M\left[\frac{1}{a}(Y - b) / y\right] = \frac{1}{a}(y - b).$$

Отже, лінія регресії X на Y: $x = \frac{y - b}{a}$, тобто $y = ax + b$. Таким чином, у випадку лінійної залежності між випадковими величинами X і Y лінії регресії X на Y і Y на X співпадають, і ця спільна лінія є прямою.

Вправа 2. Розглянемо двохвимірний нормальний розподіл ймовірностей з параметрами m_X, m_Y, σ_X, σ_Y, r (див. Розділ 2, п. 2.17).

Обчислюючи $K[X, Y]$, одержимо

$$K[X, Y] = r\sigma_X \sigma_Y.$$

Таким чином, r – коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y. Якщо $r = 0$, то $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$ і випадкові величини X і Y незалежні. Отже, для двохвимірного нормального розподілу ймовірностей із некорельованості випадкових величин X і Y випливає їх незалежність (хоч, як було показано, в загальному випадку це не так).

Щільність умовного розподілу ймовірностей випадкової величини Y за умови, що випадкова величина X набуває значення x, має вигляд

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(y-m_Y - r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X))^2}{2(1-r^2)\sigma_Y^2}}.$$

Таким чином, $f_{Y/X}(y/x)$ є щільністю нормального розподілу ймовірностей з параметрами $M[Y/X=x] = m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)$, $\sigma[Y/X=x] = \sigma_Y\sqrt{1-r^2}$. Функція $g(x) = m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)$ є функцією регресії Y на X.

Після переходу до нової системи координат $X - m_X = S\cos\alpha - W\sin\alpha$, $Y - m_Y = S\sin\alpha - W\cos\alpha$ при відповідному доборі кута α щільність розподілу ймовірностей набуває вигляду

$$f_{(S,W)}(s,w) = \frac{1}{2\pi\sigma_S\sigma_W} e^{-\frac{s^2}{2\sigma_S^2} - \frac{w^2}{2\sigma_W^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-\frac{s^2}{2\sigma_S^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_W} e^{-\frac{w^2}{2\sigma_W^2}} = f_S(s) f_W(w).$$

Таким чином після переходу до нової системи координат s, w при відповідному доборі кута α випадкові величини S і W стають незалежними, хоч випадкові величини X і Y могли бути залежними (якщо $r \neq 0$).

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь-яких випадкових величин X та Y існують функції регресії однієї з цих величин на іншу.
2. Функція регресії – це те саме, що й рівняння регресії.
3. Лінія регресії – це множина точок на площині, що задовольняє рівняння регресії.
4. Для будь-яких випадкових величин існує кореляційна залежність між ними.
5. Для будь-яких випадкових величин X та Y існує рівняння лінії регресії Y на X та X на Y.
6. Якщо випадкові величини X та Y пов’язані лінійною залежністю, то існують коефіцієнти регресії $\rho(Y/X)$ та $\rho(X/Y)$.

7. Для будь-яких випадкових величин X та Y існує коефіцієнт кореляції.

8. Коефіцієнт кореляції $r = 0$ тоді і тільки тоді, коли $K[X,Y] = 0$.

9. Для будь-яких величин X та Y можна знайти коефіцієнт кореляції $r = \dfrac{K[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$ та записати рівняння прямих регресії:

$$y - M[Y] = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - M[X]) \text{ та } x - M[X] = r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - M[Y]).$$

10. Коефіцієнт кореляції r завжди не перевищує 1 та не менший за -1.

11. Прямі регресії X на Y та Y на X співпадають тоді й тільки тоді, коли $|r| = 1$.

12. Якщо $r = 0$, то прямі регресії взаємно перпендикулярні.

2. Для заданого спільного розподілу ймовірностей на декартових добутках множин значень дискретних випадкових величин X та Y знайти рівняння регресії X на Y та Y на X; перевірити чи існує лінійна кореляція між X та Y; обчислити коефіцієнти регресії X на Y та Y на X; записати рівняння лінійних регресій X на Y та Y на X і порівняти їх із відповідними рівняннями регресій:

1)

$y_i \backslash x_j$	0	1
1	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$
2	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$

2)

$y_i \backslash x_j$	0	1
1	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$
2	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$

3)

$y_i \backslash x_j$	-1	0	1
2	1/6	1/6	1/6
3	1/6	1/6	1/6

4)

$y_i \backslash x_j$	-1	0	1
2	1/12	1/3	1/12
3	1/12	1/3	1/12

5)

$y_i \backslash x_j$	1	2	3
0	4/25	2/25	4/25
1	2/25	1/25	2/25
2	4/25	2/25	4/25

6)

$y_i \backslash x_j$	1	2	3
0	1/5	0	1/5
1	0	1/5	0
2	1/5	0	1/5

7)

$y_i \backslash x_j$	0	1	2	3
0	1/8	0	0	0
1	0	3/8	0	0
2	0	0	3/8	0
3	0	0	0	1/8

8)

$y_i \backslash x_j$	0	1	2	3
0	0	0	0	1/8
1	1/8	0	1/8	1/8
2	1/8	1/8	0	1/8
3	1/8	0	0	0

3. Для даної щільності $f_{(X,Y)}(x,y)$ спільного розподілу ймовірностей на декартовому добутку множин значень випадкових величин X та Y знайти рівняння регресії X на Y та Y на X; перевірити, чи існує лінійна кореляція між X та Y; обчислити коефіцієнт регресії X на Y та Y на X;записати рівняння лінійних регресій X на Y та Y на X і порівняти їх з відповідними рівняннями регресій (за наявності параметрів, визначити їх значення):

1) $f_{(X,Y)}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\dfrac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\dfrac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \dfrac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$, де $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\rho \in (-1;1)$ – фіксовані числа;

2) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} abe^{-ax-by}, \text{коли } x > 0 \text{ і } y > 0, \\ 0, \quad \text{коли } x \le 0 \text{ або } y \le 0, \end{cases}$

де $a > 0$, $b > 0$ – фіксовані числа;

3) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k, \text{коли } x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, \text{коли } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$

4) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k, \text{ коли } (x,y) \in [0;1]\times[0;2], \\ 0, \text{ коли } (x,y) \notin [0;1]\times[0;2]; \end{cases}$

5) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} ke^{x-y}, \text{ коли } x \in [0;1] \text{ і } y \in [0;1], \\ 0, \quad \text{коли } x \notin [0;1] \text{ або } y \notin [0;1]; \end{cases}$

6) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} ke^{x+y}, \text{ коли } (x,y) \in [0;1]\times[0;1], \\ 0, \quad \text{коли } (x,y) \notin [0;1]\times[0;1]; \end{cases}$

7) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} kxye^{-x^2-y^2}, \text{коли } x > 0, y > 0, \\ 0, \quad \text{коли } x \le 0 \text{ або } y \le 0. \end{cases}$

3.14. Поняття про випадкові процеси

Нехай T – деяка підмножина числової прямої. Сукупність випадкових величин $\{X_t,\ t \in T\}$ стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P) називається *випадковим процесом на множині часу* T. Випадковий процес вважається заданим, якщо для будь-якого набору параметрів $t_k \in T: t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ задано багатовимірний розподіл ймовірностей

$$F_{t_1 t_2 \ldots t_n}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = P(X_{t_1}^{-1}((-\infty, x_1))X_{t_2}^{-1}((-\infty, x_2))\ldots X_{t_n}^{-1}((-\infty, x_n))),$$

причому ці розподіли між собою узгоджені, тобто якщо $k < n$, то

$$F_{t_1 \ldots t_k}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k) = F_{t_1 t_2 \ldots t_n}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k, +\infty,\ \ldots, +\infty).$$

Функції

$$F_{X_{t_1} \ldots X_{t_n}}(x_1,\ \ldots,\ x_n) = P(\{E : X_{t_1}(E) \in (-\infty,\ x_1),\ \ldots,\ X_{t_n}(E) \in (-\infty,\ x_n)\}) =$$

$$= P(X_{t_1}^{-1}((-\infty, x_1))X_{t_2}^{-1}((-\infty, x_2))\ldots X_{t_n}^{-1}((-\infty, x_n))),$$

де $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, називаються *скінченновимірними функціями розподілу ймовірностей випадкового процесу.*

Якщо випадкові величини $X_{t_1},\ X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n}$ незалежні для будь-якого набору параметрів $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, то випадковий процес називається *процесом з незалежними значеннями*. У цьому разі

$$F_{t_1 t_2 \ldots t_n}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = F_{t_1}(x_1)F_{t_2}(x_2)\ \ldots\ F_{t_n}(x_n).$$

Якщо $T = \{t_1,\ t_2,\ \ldots\}$, то $X = \{X_{t_1},\ X_{t_2},\ \ldots\}$ називають *випадковим процесом з дискретним часом* або *випадковою послідовністю*. Якщо $T =< a; b >$, де $a < b$, то $X = \{X_t,\ t \in T\}$ називають *випадковим процесом з неперервним часом*.

Тут при кожному фіксованому $t = t_0$ функція $X_{t_0}(E)$, $E \in \Omega$, є звичайною випадковою величиною. Якщо $X = \{X_t,\ t \in T\}$ – випадковий процес, то для кожного фіксованого $E \in \Omega$ функція $X(E) = (X_t(E),\ t \in T)$ називається *реалізацією* або *траєкторією процесу*, що відповідає наслідку E.

Математичним сподіванням $M[X_t]$ випадкового процесу називається невипадкова (детермінована) функція $m(t)$, значення якої при фіксованому $t = t_0$ є математичним сподіванням $M[X_{t_0}]$ випадкової величини X_{t_0}.

Дисперсією $D[X_t]$ випадкового процесу X_t називається детермінована функція $\sigma^2(t) = \sigma^2[X_t] = M[(X_t - M(X_t])^2]$, значення якої при $t = t_0$ є дисперсією випадкової величини X_{t_0}.

Кореляційною (*автокореляційною*) функцією випадкового процесу X_t із скінченною дисперсією $\sigma^2(t)$ називається детермінована функція

$$B(t,\ s) = K[X_t,\ X_s] = M[(X_t - m(t))(X_s - m(s))],$$

значення якої при фіксованих $t = t_0$, $s = s_0$ є кореляційним моментом (коваріацією) двох випадкових величин X_{t_0} і X_{s_0}. При $t = s$

$$B(t,\ s)=B(t,\ t)=\sigma^2(t)\ .$$

Функція

$$\rho(t,\ s)=\frac{B(t,s)}{\sigma(t)\sigma(s)}$$

називається *нормованою кореляційною функцією*. Якщо випадковий процес є процесом з незалежними значеннями, то $B(t,\ s)=0$, $t\neq s$.

Випадковий процес називається *стаціонарним* (у вузькому розумінні), якщо відповідні багатовимірні розподіли ймовірностей інваріантні щодо зсуву, тобто

$$F_{t_1+s,t_2+s,\ldots,t_n+s}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=F_{t_1t_2\ldots t_n}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\ .$$

Випадковий процес називається *стаціонарним у широкому розумінні*, якщо

$$M[X_t]=\text{const}\ ,\ \sigma^2[X_t]=\text{const}\ ,\ B(t,\ s)=R(s-t)\ ,\ s\geq t\ ,$$

де $R(u)=\rho(0,\ u)$.

Стаціонарний у вузькому розумінні процес є стаціонарним в широкому розумінні, але не навпаки.

Нехай деяка система в будь-який момент часу може знаходитись в одному із станів з деякої не більш ніж зчисленної множини станів, яку називають *фазовим простором системи*, і нехай система може переходити з одного стану в інший у моменти часу 0, 1, 2, …, причому в кожен стан з будь-якого іншого система переходить випадково. Тоді дістаємо випадковий процес – послідовність випадкових величин $X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots$, кожна з яких може набувати одного із значень з множини $W=\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$.

Позначимо через $x(t)\in W$ стан, в якому система перебуває в момент $t\in\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$.

Означення. Випадковий процес називається *ланцюгом Маркова*, якщо для всіх $n\geq 1,\ x(t_n)\in W$, виконується рівність

$$P(X_{t_{n+1}}=x(t_{n+1})\,/\,X_{t_0}=x(t_0),\ \ldots,\ X_{t_n}=x(t_n))=$$
$$=P(X_{t_{n+1}}=x(t_{n+1})\,/\,X_{t_n}=x(t_n))$$

і при цьому умовна ймовірність

$$P(X_{t_{n+1}}=x(t_{n+1})\,/\,X_{t_0}=x(t_0),\ \ldots,\ X_{t_n}=x(t_n))$$

визначена, тобто $P(X_{t_0}=x(t_0),\ \ldots,\ X_{t_n}=x(t_n))>0$.

Функція

$$P_n(x_i,\ x_j)=\begin{cases}P((X_{t_n}=x_j)/(X_{t_{n-1}}=x_i)), & \text{коли}\ \ P(X_{t_{n-1}}=x_i)>0,\\ P((X_{t_n}=x_j), & \text{коли}\ \ P(X_{t_{n-1}}=x_i)=0,\end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots, \; x_i \in W, \; x_j \in W$, називається *ймовірністю переходу ланцюга Маркова із стану* x_i *до стану* x_j.

Теорема 1. *Якщо* $P_n(x_i, x_j)$ *– імовірність переходу ланцюга Маркова із стану* x_i *до стану* x_j *на* n*-му кроці, то для всіх* $n > 0$ *і* $x(t_i) \in W$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *виконується рівність*

$$P(X_{t_0} = x(t_0), \ldots, X_{t_n} = x(t_n)) =$$
$$= P(X_{t_0} = x(t_0)) P_1(x(t_0), x(t_1)) \ldots P_n(x(t_{n-1}), x(t_n)).$$

Якщо $k < m$, то число

$$P_{k,m}(x_i, x_j) = \sum_{x_{k+1}, \ldots, x_m} P_{k+1}(x_i, x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot P_m(x_{m-1}, x_j)$$

називають *ймовірністю переходу ланцюга Маркова із стану* x_i *до стану* x_j *за кілька кроків від* k *до* m.

При $k < n < m$ правильна рівність

$$P_{k,m}(x_i, x_j) = \sum_{x(t_n) \in W} P_{k,n}(x_i, x(t_n)) P_{n,m}(x(t_n), x_j).$$

яку називають *рівнянням Колмогорова–Чепмена*.

Якщо ймовірність $P_n(x_i, x_j)$ переходу ланцюга Маркова із стану x_i до стану x_j на n-му кроці не залежить від n, тобто при будь-якому n $P_n(x_i, x_j) = P(x_i, x_j)$, то ланцюг Маркова називається *однорідним*.

В однорідному ланцюгу Маркова ймовірність переходу до стану x_j на m-му кроці за умови, що система перебувала в стані x_i на n-му кроці, залежить лише від різниці $m - n$. Позначимо $P_{n,m}(x_i, x_j)$ через $P(x_i, x_j, m-n)$; через $\pi(1)$ позначимо матрицю $P(x_i, x_j) = P(x_i, x_j, 1)$, через $\pi(n)$ – матрицю $P(x_i, x_j, n)$. Тоді

$$\pi(n) = (\pi(1))^n.$$

Теорема 2. *Якщо для однорідного ланцюга Маркова при деякому* i *всі елементи матриці* $\pi(i)$ *додатні, то існують такі сталі числа* p_s, $s \in \overline{1, m}$, *що*

$$\lim_{i \to \infty} P(x_r, x_s, i) = p_s.$$

У фізичному тлумаченні зміст останньої теореми можна подати так: імовірність того, що система перейде до стану x_s у деякий момент часу t, не залежить від того, в якому стані вона перебувала в далекому минулому.

Стани x_i, з яких система може переходити тільки до них же, називаються *поглинаючими*. Для поглинаючих станів $P(x_i, x_i)=1$, $P(x_i, x_j)=0$ при $i \neq j$, а тому для ланцюгів Маркова з поглинаючими станами наведена теорема не справджується, оскільки не виконуються її умови $P(x_r, x_s, i) > 0$.

Якщо через e_i позначити вектор-рядок, в якого i-та координата дорівнює одиниці, а всі інші – нулю, то добуток $e_i \pi$ (1) є i-й рядок матриці $\pi(1)$, який визначає розподіл ймовірностей переходів за один крок з i-го стану системи, а $e_i \pi\ (n)$ – розподіл ймовірностей переходів за n кроків з i-го стану системи. Якщо через $p(n)$ позначити $e_i \pi\ (n)$, то за умов доведеної теореми

$$p(n) = e_i \pi\ (n) = e_i \pi\ (n-1)\pi(1) = p(n-1)\pi(1),$$

і оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p(n-1)$, то для граничного розподілу ймовірностей $p = p\pi(1)$, де $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ – набір граничних ймовірностей.

Теорема 3. *Для ланцюга Маркова з поглинанням імовірність того, що процес закінчиться в одному з поглинаючих станів, із зростанням* n *прямує до 1.*

Приклад. Поставимо такі запитання: 1) яка ймовірність того, що процес закінчиться переходом у заданий поглинаючий стан? 2) скільки в середньому необхідно кроків на перехід до якогось з поглинаючих станів? 3) скільки в середньому разів процес проходить через кожен непоглинаючий стан?

Нехай процес починається з непоглинаючого стану x_i і нехай t_{ij} – середня кількість разів, які процес, що починається з x_i, проходить через x_j; із стану x_i до x_k процес переходить з імовірністю p_{ik}. Якщо x_k – поглинаючий стан, то процес не дійде до стану x_j, у протилежному разі він пройде через стан x_j в середньому t_{kj} разів. Отже,

$$t_{ij} = p_{i1}t_{1j} + p_{i2}t_{2j} + \ldots + p_{i\,k-m}t_{k-m\,j}. \tag{14.1}$$

При цьому сума поширюється на всі непоглинаючі стани (m – кількість поглинаючих станів). Якщо при цьому $i = j$, то до даної суми слід додати 1. Позначимо через Q матрицю, яка утворюється з матриці $\pi(1)$ викреслюванням усіх стовпців і рядків, що відповідають поглинаючим станам. Оскільки числа t_{ij} визначені лише для непоглинаючих станів x_i та x_j, то квадратна матриця $T = (t_{ij}),\ i = \overline{1, k-m},\ j = \overline{1, k-m}$, матиме той самий порядок, що й Q.

Сума (14.1) є добутком i-го рядка матриці Q на j-й стовпчик матриці T. Якщо $i = j$, то до цієї суми слід додати 1, тобто відповідну компонентну одиничної матриці.

Таким чином,

$$T = QT + I,$$

звідки $I = T(I - Q)$, $T = (I - Q)^{-1}$. Здобутий результат є відповіддю на запитання 3).

Нехай кожне проходження процесу через деякий непоглинаючий стан становить один крок. Тоді загальна кількість кроків, при яких процес переходить в який-небудь непоглинаючий стан, дорівнює кількості кроків, необхідних для досягнення поглинаючого стану. Проте ця загальна кількість кроків дорівнює середній кількості проходжень процесу, що почався із стану x_i, через усі непоглинаючі стани, тобто сумі всіх елементів i-го рядка матриці T.

Якщо через t позначити вектор-стовпець з компонентами

$$t_i = \sum_{j=1}^{k-m} t_{ij} = \sum_{j=1}^{k-m} \sum_{r=1}^{k-m} p_{ir} t_{rj},$$

а через c – вектор-стовпець, усі компоненти якого дорівнюють 1, то вектор t можна подати у вигляді

$$t = (I - Q)^{-1} c.$$

Цей результат є відповіддю на запитання 2).

Нехай x_i – непоглинаючий стан, x_l – поглинаючий, b_{il} – імовірність того, що процес, починаючи із стану x_i, перейде до стану x_l. Імовірність переходу з x_i до x_l за один крок дорівнює b_{il}. Якщо за перший крок процес перейде до стану x_k, то він або залишиться в стані x_k, якщо цей стан поглинаючий, або перейде до стану x_l з імовірністю b_{kl}, тобто

$$b_{il} = p_{il} + \sum_{r=1}^{k-m} p_{ir} b_{rl}, \tag{14.2}$$

де сума поширюється на всі непоглинаючі стани. Позначимо через R матрицю, яка утворюється з $\pi(1)$ викреслюванням рядків, що відповідають поглинаючим станам, і стовпців, що відповідають непоглинаючим станам. Оскільки b_{il} визначені для непоглинаючого стану x_i та поглинаючого стану x_l, то матриця $B = (b_{ij})$ має той самий порядок, що й матриця R. Таким чином (14.2) можна подати так:

$$B = R + QB,$$

звідки

$$B = (I - Q)^{-1} R = TR.$$

Цей результат є відповіддю на запитання 1).

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай усі стани $x_1, x_2, \ldots, x_m$ системи рівноймовірні незалежно від того, в якому стані перебувала система на попередньому кроці, тобто $p_{ij} = \frac{1}{m}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тоді

$$\pi(2) = \pi(1)\pi(1) = \pi(1), \ \pi(n) = (\pi(1))^n = \pi(1),$$

тобто матриця переходів за будь-яку кількість кроків залишається такою ж, як і матриця переходу за один крок.

Той самий результат матимемо й тоді, коли всі рядки матриці переходів однакові.

Якщо виконуються умови теореми 2, то при досить великому k рядки матриці $\pi(k)$ будуть практично однаковими і із зростанням n все менше різнитимуться між собою.

Марковський ланцюг називається *ланцюгом з поглинанням*, якщо в ньому є принаймні один поглинаючий стан і з кожного стану можливий перехід до поглинаючого стану (можливо не за один крок).

Вправа 2. Нехай на прямій блукає частинка, яка може знаходитися в одній з п'яти точок $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$. Імовірність переходу з будь-якої точки x_i, $i = 1, 2, 3,$ до сусідньої точки зліва чи справа дорівнює $1/2$. З точок $x = 0$ і $x = 4$ частинка вийти не може. Тоді матриця ймовірностей переходів матиме вигляд, поданий в табл. 14.1. Тут стани $x = 0$ і $x = 4$ є поглинаючими, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ – непоглинаючими.

Табл. 14.1

$x_i \backslash x_j$	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
3	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
4	0	0	0	0	1

Вправа 3. Нехай задано множину станів, якими характеризуються перебування студентів у вузі з п'ятирічним терміном навчання: x_1 – першокурсник, x_2 – другокурсник, …, x_5 – п'ятикурсник, x_6 – закінчив вуз, x_7 – вчився, але не закінчив. Тоді матриця ймовірностей переходів у відповідному ланцюгу Маркова матиме вигляд (табл. 14.2).

Табл. 14.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	q_1	r_1	0	0	0	0	p_1
x_2	0	q_2	r_2	0	0	0	p_2
x_3	0	0	q_3	r_3	0	0	p_3
x_4	0	0	0	q_4	r_4	0	p_4
x_5	0	0	0	0	q_5	r_5	p_5
x_6	0	0	0	0	0	1	0
x_7	0	0	0	0	0	0	1

Тут p_1 – імовірність відчислення, q_1 – імовірність залишитись на І курсі, r_1 – імовірність перейти на ІІ курс. Стани x_6 і x_7 – поглинаючі, з них система може переходити тільки в них самих.

Якщо внаслідок переставляння рядків і стовпців подати матрицю ймовірностей переходів у вигляді

$$P=\left(\frac{I_m \mid 0}{R \ \mid Q}\right), \tag{14.3}$$

де I_m – одинична матриця розміру $m \times m$, яка відповідає поглинаючим станам; 0 – нульова матриця розміру $m \times (k-m)$; R – матриця розміру $(k-m) \times m$, Q – матриця розміру $(k-m) \times (k-m)$, а через τ_{ij} позначається випадковий час, що дорівнює сумарній кількості одиниць часу, протягом якого система перебувала в стані x_j за умови, що в початковий момент система перебувала в стані x_i, то $M[\tau_{ij}]$ можна знайти як елементи матриці

$$T=(I_{k-m}-Q)^{-1}.$$

Якщо $t_i = \sum_{j=1}^{k-m} \tau_{ij}$ – загальний час, протягом якого система перебуває в стані x_i до переходу в деякий поглинаючий стан, b_{ij} – імовірність переходу в поглинаючий стан x_j, $j=1, 2, \ldots, l$, то для ланцюгів Маркова з поглинаючими станами з матрицею ймовірностей переходів (14.3) $M[t_i]$ є компонентами вектора T_c, де c – вектор-стовпець, усі компоненти якого дорівнюють 1, b_{ij} – елементи матриці $B = TR$.

Нехай $p_i = 0{,}2$, $r_i = 0{,}7$, $q_i = 0{,}1$, рядки 6 і 7 і стовпці 6 і 7 переставляються на перше і друге місця. Тоді після переставляння рядків і стовпців матриця переходів матиме вигляд

$$P = \left(\frac{I \mid 0}{R \mid Q} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = (I_5 - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}86 & 1{,}11 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 & 0 \\ 0{,}52 & 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 & 0 \\ 0{,}41 & 0{,}52 & 0{,}67 & 0{,}86 & 1{,}11 \end{pmatrix},$$

$$t = Tc = \begin{pmatrix} 1{,}11 \\ 1{,}97 \\ 2{,}64 \\ 3{,}16 \\ 3{,}57 \end{pmatrix}, \quad TR = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}78 \\ 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0{,}53 & 0{,}47 \\ 0{,}63 & 0{,}37 \\ 0{,}72 & 0{,}28 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, за даних умов ймовірність закінчити вуз для першокурсника 0,28, для другокурсника 0,37 і т. д.

Для кожного п'ятикурсника середній час перебування у вузі (до закінчення або відчислення) – 1,11 року, для четвертокурсника – 1,97, для третьокурсника – 2,64, для другокурсника – 3,16, для першокурсника – 3,57 року.

Вправа 4. Розглянемо процес випадкових блукань (див. вправу 2). Тоді

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I-Q=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},\ T=(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо блукання починаються із стану 2, то до закінчення процесу в середньому частинка один раз потрапить у точку $x=1$, два рази – в точку $x=2$, один раз – у точку $x=3$. Тоді

$$t=Tc=\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, середня кількість кроків, які пройде частинка до поглинання, починаючи із стану $x=1$, дорівнює 3, із стану $x=2$ дорівнює 4, із стану $x=3$ дорівнює 3.

$$R=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$B=TR=\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

тобто якщо частинка починає блукати з точки $x=1$, то вона з імовірністю $3/4$ переходить у поглинаючий стан $x=0$ і з імовірністю $1/4$ – у поглинаючий стан $x=4$. Якщо блукання починається з точки $x=2$, то з однаковою ймовірністю $1/2$ частинка переходить у поглинаючі стани $x=0$ або $x=4$. Якщо блукання починаються з точки $x=3$, то з імовірністю $3/4$ процес закінчиться в точці $x=4$ і з імовірністю $1/4$ – в точці $x=0$.

Задачі

1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Кожну випадкову величину можна вважати випадковим процесом на множині часу T, що складається з одного елемента.
2. Якщо X – випадковий вектор, то X – випадковий процес.
3. Твердження, обернене до 2, є правильним.
4. Кожен випадковий процес є випадковою послідовністю.
5. Кожен випадковий процес є або випадковою послідовністю, або процесом з неперервним часом.

6. Кожен випадковий процес має безліч реалізацій.

7. Кожна реалізація випадкового процесу з дискретним часом є точкою з простору R^{∞}.

8. Задання випадкового процесу здійснюється через задання системи скінченновимірних функцій розподілу.

9. Кожен випадковий процес є процесом з незалежними значеннями.

10. Кожен випадковий процес має математичне сподівання.

11. Математичне сподівання довільного випадкового процесу є а) фіксованим числом ; б) фіксованою випадковою функцією.

12. Кожен випадковий процес має дисперсію.

13. Кореляційна функція: а) існує для будь якого випадкового процесу ; б) може набувати довільних дійсних значень.

14. Нормована кореляційна функція може набувати довільних дійсних значень.

15. Кожен випадковий процес є стаціонарним.

16. Стаціонарність випадкового процесу рівносильна його стаціонарності у широкому розумінні.

17. Кожен випадковий процес є ланцюгом Маркова.

18. Ланцюг Маркова є випадковим процесом з дискретним часом.

19. Ланцюг Маркова є випадковим процесом із скінченною кількістю реалізацій.

20. Стан ланцюга Маркова – це його певна реалізація або траєкторія.

21. Для довільного ланцюга Маркова завжди існує ймовірність $P_n(x_i, x_j)$ переходу із будь якого стану x_i у будь який стан x_j.

22. Будь який ланцюг Маркова є однорідним.

23. Для довільного ланцюга Маркова ймовірність переходу до фіксованого стану x_j у деякий момент часу t не залежить від стану, в якому система перебувала в далекому минулому.

24. Однорідний ланцюг Маркова може мати поглинаючі стани.

25. Кожен ланцюг Маркова є ланцюгом з поглинаннями.

2. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P), де $\Omega = R^1$, $S = \mathscr{B}(R^1)$, а P – якась міра Лебега-Стілтьєса на $\mathscr{B}(R^1)$.

Перевірити, чи є задана сукупність функцій випадковою послідовністю або випадковим процесом з неперервним часом, якщо так, то вказати траєкторію процесу, що відповідає заданому наслідку $E_0 \in \Omega$:

1) $X_n(E) = a_n$, $E \in \Omega$, $n \in N$, $E_0 = 0$;

2) $X_n(E) = (1 + \frac{1}{n})^n$, $E \in \Omega$, $n \in N$, $E_0 = 1$;

3) $X_n(E) = (1 + \frac{E}{n})^n$, $E \in \Omega = R^1$, $E_0 = 1$;

4) $X_n(E)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n}, & \text{коли } E\in A, \text{ де } A-\text{фіксована подія з} \\ & \text{простору } S=\mathscr{B}(R^1), \\ 0, & \text{коли } E\notin A,\end{cases}$

$E_0=0$;

5) $X_n(E)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n}, & \text{коли } E\in B, \text{ де } B\text{ - фіксована множина,} \\ & \text{що не належить до простору } S=\mathscr{B}(R^2), \\ 0, & \text{коли } E\notin B,\end{cases}$

$E_0=0$;

6) $X_t(E)=a\sin(wt+\alpha(E))$, $E\in\Omega$, де амплітуда $a>0$ і частота $w\in R$ – задані сталі, $t\in R^1$ – час, а фаза $\alpha(E)$ – випадкова величина з рівномірним розподілом ймовірностей на проміжку $[0;2\pi]$;
7) $X_t(E)=A(E)\cdot\sin(wt+\alpha(E))$, $E\in\Omega$, де усі параметри, крім a, такі самі, як у 6), а амплітуда $A(E)$ – випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $f_A(a)$, $a\in R^1$, не залежної від фази $\alpha(E)$;

8) $X_t(E)=c_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k(w_0t+\alpha)+b_k\sin k(w_0t+\alpha))$, де c_0, a_k, b_k і w_0 – задані сталі, $t\in R^1$, а фаза $\alpha=\alpha(E)$ – випадкова величина з рівномірним розподілом ймовірностей на проміжку $[0;2\pi]$, причому для кожного фіксованого $t\in R^1$ даний ряд є збіжним у середньому квадратичному, тобто у просторі $L^2[0;2\pi]$;

9) $X_t(E)=c_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cos kw_0t+b_k\sin kw_0t$, $t\in R^1$, де усі коефіцієнти c_0, a_k і b_k – випадкові величини.

3. Нехай $R^\infty=R_1\times R_2\times\ldots\times R_n\times\ldots$, де $R_k=R^1$, $k\in N$.

1. Для заданої множини $\tilde{W}\subset R_{i_1}\times R_{i_2}\times\ldots\times R_{i_m}$ охарактеризувати циліндричну множину W з основою $\tilde{W}$ і зобразити проекцію цієї циліндричної множини на простори R_1, $R_1\times R_2$, $R_1\times R_2\times R_3$:

1) $\tilde{W}=[0;1]\subset R_1$; 2) $\tilde{W}=[0;1]\subset R_2$;
3) $\tilde{W}=[0;1]\subset R_3$; 4) $\tilde{W}=[0;1]\times[0;1]\subset R_1\times R_2$;

5) $\widetilde{W}=[0;1]\times[0;1]\subset R_2\times R_3$; 6) $\widetilde{W}=[0;1]\times[0;1]\subset R_1\times R_3$;
7) $\widetilde{W}=[0;1]\times[0;1]\times[0;1]\subset R_1\times R_2\times R_3$;
8) $\widetilde{W}=[0;1]\times[0;1]\times[0;1]\subset R_1\times R_3\times R_4$;
9) $\widetilde{W}=((0;1)\bigcup(2;3))\times((0;1)\bigcup(2;3))\subset R_1\times R_2$.

2*. Нехай $I_k=[a_k;b_k)\subset R$, B_k – довільна борелівська множина у просторі R^1, а B^n – довільна борелівська множина у просторі R^n; $J_{1,n}(I_1\times\ldots\times I_n)$, $J_{2,n}(B_1\times\ldots\times B_n)$ і $J_{3,n}(B^n)$ – циліндричні множини у просторі R^∞ з основами відповідно $I_1\times\ldots\times I_n$, $B_1\times\ldots\times B_n$ і B^n. Довести, що:

1) $J_{1,n}(I_1\times\ldots\times I_n)=J_{1,n+1}(I_1\times\ldots\times I_n\times R^1)$,
$J_{2,n}(B_1\times\ldots\times B_n)=J_{2,n+1}(B_1\times\ldots\times B_n\times R^1)$, $J_{3,n}(B^n)=J_{3,n+1}(B^n\times R^1)$ для кожного фіксованого $n\in N$;

2) сукупність H_1 усіляких циліндричних множин $J_{1,n}(I_1\times\ldots\times I_n)$, що відповідають різним $n\in N$ та різним проміжкам $I_k=[a_k;b_k)$, $k\in\overline{1,n}$, є півалгеброю з одиницею $\Omega=R^\infty$;

3) сукупність H_2 усіляких циліндричних множин $J_{2,n}(B_1\times\ldots\times B_n)$, що відповідають різним $n\in N$ та різним борелівським множинам $B_k\subset R^1$, $k\in\overline{1,n}$, є півалгеброю, що містить у собі півалгебру H_1;

4) сукупність H_3 усіляких циліндричних множин $J_{3,n}(B^n)$, що відповідають різним $n\in N$ та різним борелівським множинам $B^n\in R^n$, є півалгеброю, що містить у собі півалгебру H_2;

5) σ-алгебра $\mathscr{B}(R^\infty)$ підмножин простору R^∞, породжена півалгеброю H_1, містить у собі півалгебру H_3, а тому й H_2;

6) якщо для кожного фіксованого $n\in N$ на сукупності усіляких n-вимірних прямокутників $I_1\times\ldots\times I_n$ визначено ймовірнісну міру $P_n(I_1\times\ldots\times I_n)$ причому ці міри узгоджуються, тобто завжди $P_n(I_1\times\ldots\times I_n)=P_{n+1}(I_1\times\ldots\times I_n\times R^1)$, то тоді можна однозначно визначити міру P на півалгебрі H_1 умовою, якщо: $A\in H_1$, то $P(A)=P_n(A)$, коли $A=J_{1,n}(I_1\times\ldots\times I_n)$;

7) визначену на півалгебрі H_1 ймовірнісну міру P можна однозначно продовжити на найменшу алгебру A_1, що містить у собі півалгебру H_1;

8) ймовірнісну міру P, визначену на алгебрі A_1, можна продовжити за Лебегом на σ-алгебру підмножин простору R^∞, що містить у собі алгебру A_1, а також σ-алгебру $\mathscr{B}(R^\infty)$.

3. Припустимо, що на кожній σ-алгебрі $\mathscr{B}(R_n)=\mathscr{B}(R^1)$, $k\in N$, задана ймовірнісна міра P_k з функцією розподілу ймовірностей $F_k(x)$, а на кожному просторі $R_1\times R_2\times\ldots\times R_n$, $n\in N$, ймовірнісна міра $\tilde{P}_n$ визначається функцією розподілу ймовірностей $\tilde{F}_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_1(x_1)F(x_2)\ldots F_n(x_n)$, $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R_1\times\ldots\times R_n$. Довести, що: 1) міри $\tilde{P}_n$, $n\in N$ узгоджуються; 2) існує єдина ймовірнісна міра на $\mathscr{B}(R^\infty)$, звуження якої на $\mathscr{B}(R^n)$ співпадає з мірою $\tilde{P}_n$, $n\in N$.

4*. Нехай $T\subset R^1$, а R^T – це сукупність усіляких дійсних функцій $x=x(t)$, $t\in T$. Довести, що:

1) коли $T=\{1\}$, то $R^T=R^1$;

2) коли $T=\overline{1,n}$, то $R^T=R^n$;

3) коли $T=N$, то $R^T=R^\infty$.

5*. Нехай $R^T=\{x=x(t):t\in T\}$ – простір усіляких дійсних функцій, визначених на $T\subset R^1$, а $I_k=[a_k;b_k)$. Довести, що:

1) коли $a_k<b_k$, то існують функція $x=x(t)\in R^T$ і точка $t_k\in T$, для яких $x(t_k)\in[a_k;b_k)$;

2) коли $a_k<b_k$, $k\in\overline{1,n}$, то існують функції $x=x_k(t)\in R^T$, $k\in\overline{1,n}$ (не обов'язково попарно різні) і точки $t_k\in T$ (також не обов'язково попарно різні), для яких $x_k(t_k)\in[a_k;b_k)$, $k\in\overline{1,n}$, а тому множина

$$J_{t_1,\ldots,t_n}(I_1\times\ldots\times I_n)=\{x=x(t)\in R^T : x(t_k)\in I_k, k\in\overline{1,n}\}$$

не є порожньою (ця множина називається циліндричною множиною у просторі R^T, що відповідає $I_1\times\ldots\times I_n$ і $t_k\in T$, $k\in\overline{1,n}$);

3) множина $J_{t_1,\ldots,t_n}(I_1\times\ldots\times I_n)$ є порожньою тоді і тільки тоді, коли $\exists k\in\overline{1,n}: I_k=\varnothing$, тобто $a_k=b_k$ принаймні для одного $k\in\overline{1,n}$;

4) сукупність H_1 усіляких циліндричних множин $J_{t_1,\ldots,t_n}(I_1\times\ldots\times I_n)$, що відповідають різним $n\in N$, різним проміжкам I_k, $k\in\overline{1,n}$, та різним $t_k\in T$, для яких існують $x=x_k(t)\in R^T$: $x_k(t_k)\in I_k$, $k\in\overline{1,n}$, є півалгеброю з одиницею $\Omega=R^T$;

5) якщо $T = N$ (або T – довільна зчисленна множина), то півалгебра H_1 співпадає з відповідною півалгеброю, визначеною у задачі 3.2.2.);

6) якщо для кожного фіксованого $n \in N$ на сукупності усіляких множин $I_1 \times \ldots \times I_n$ визначено міри $P_{t_1,\ldots,t_n}$, узгоджені відносно наборів $\{t_1,\ldots, t_n\}$ та номерів m, тобто завжди

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(I_1 \times \ldots \times I_n) = P_{t_1,\ldots,t_n,\ldots,t_m}(I_1 \times \ldots \times I_n \times I_{n+1} \times \ldots \times I_m),$$

де $I_{n+1} = \ldots = I_m = R^1$, то тоді можна однозначно визначити міру P на півалгебрі H_1 умовою: якщо $A \in H_1$, то $P(A) = R_{t_1,\ldots,t_n}(I_1 \times \ldots \times I_n)$, коли $A = J_{t_1,\ldots,t_n}(I_1 \times \ldots \times I_n)$;

7) визначену на півалгебрі H_1 ймовірнісну міру P можна продовжити на найменшу алгебру A_1, що містить у собі півалгебру H_1;

8) ймовірнісну міру P, визначену на алгебрі A_1, можна продовжити за Лебегом на σ-алгебру підмножин простору R^T, що містить у собі алгебру A_1, а також σ-алгебру $\mathscr{B}(R^T)$.

9) якщо T незчисленна множина, а $\mathscr{B}(R^T)$ – найменша σ-алгебра, породжена півалгеброю H_1, то для будь-якої множини $A \in \mathscr{B}(R^T)$ існує не більше, ніж зчисленна кількість точок $t_1, t_2, \ldots$ з T і борелівська множина $B \in \mathscr{B}(R^\infty)$ такі, що

$$A = \{x = x(t) \in R^T : (x(t_1), x(t_2), \ldots) \in B\};$$

6. 1. Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P) визначено умовами: $\Omega = R^1$, $S = \mathscr{B}(R^1)$, а P – ймовірнісна міра Лебега рівномірно розподілена на заданому відрізку $[a;b]$. Для заданого випадкового процесу $X_t(E)$, $E \in \Omega$, $t \in T$, визначити скінченновимірні функції розподілу ймовірностей та перевірити їх узгодженість:

1) $X_t(E) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{коли } E \in [\frac{1}{t};1), \\ 0, & \text{коли } E \notin [\frac{1}{t};1), \end{cases}$ $t = n \in N = T$, $[a;b] = [0;1]$;

2) $X_t(E) = \sin(t + E)$, $t = n \in N = T$, $[a;b] = [-\pi;\pi]$;

3) $X_t(E) = t\cos(2t + \frac{E}{2})$, $t \in (0;\pi] = T$, $[a;b] = [-2\pi;2\pi]$.

2. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкового процесу $X_t(E)$ та його автокореляційну функцію $K[X_t, X_s]$ і нормовану кореляційну функцію.

3. Перевірити, чи є заданий випадковий процес стаціонарним у вузькому та широкому розумінні.

4. Визначити, чи існує не більш ніж зчисленний фазовий простір системи для заданого простору подій.

7. 1. Перевірити, чи є заданий випадковий процес $X_n(E)$ ланцюгом Маркова і якщо так, то знайти ймовірності $P_n(x_i, x_j)$ переходу ланцюга Маркова із стану x_i до стану x_j на n-му кроці:

1) $X_{2k}(E) = E_2$, $X_{2k+1}(E) = E_1$, $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, $E = (E_1, E_2) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} = \Omega$, причому $P(E) = \dfrac{1}{4}$ $\forall E \in \Omega$;

2) $X_{3k}(E) = E_3$, $X_{3k+1}(E) = E_2$, $X_{3k+2}(E) = E_1$, $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, $E = (E_1, E_2, E_3) \in \{(i, j, k) : i \in \{0,1\}, j \in \{0,1\}, k \in \{0,1\}\} = \Omega$, причому $P(E) = \dfrac{1}{8}$ $\forall E \in \Omega$;

3) $X_0(E) = 0$, $X_n(E) = \alpha_n$, де α_n – n-ий двійковий розряд у двійковому подані числа $E \in [0;1)$, причому ймовірнісна міра P рівномірно розподілена на проміжку $[0;1)$;

4) $X_n(E) = 0$, якщо $\alpha_n = 0$ і $X_n(E) = k$, якщо $\alpha_{n-k} = 0$, а $\alpha_{n-k+1} = \alpha_{n-k+2} = \ldots = \alpha_n = p$, де α_n – n-ий p-двійковий розряд у p-двійковому подані числа $E \in [0;1) = \Omega$, причому ймовірнісна міра P рівномірно розподілена на проміжку $[0;1)$, *p-двійкове подання числа* $E \in [0;1)$ має вигляд

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (1-p)^{k-1},$$

де $\alpha_k \in \{0, p\}$, p – фіксоване число, $p \in (0;1)$, а серед чисел α_k є нескінченна кількість, відмінних від p.

2. Перевірити чи виконується рівняння Колмогорова-Чепмена.

3. Визначити, чи є ланцюг Маркова однорідним, і якщо так, то скласти матриці $\pi(1)$ та $\pi(n)$.

4. Перевірити, чи існують поглинаючі стани.

8. Нехай для певного стохастичного експерименту побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P). Новий стохастичний експеримент полягає у тому, що для заданої події $A \in S$ послідовно проводять незалежні випробування, пов’язані із заданим вище експериментом і фіксують номер випробування n, а також найбільше число $k \in \overline{0, n}$, для якого подія A не відбулася у випробуванні $n-k$. Отже, k – це довжина неперервної послідовності випробувань, що закінчуються n-м випробуванням і у кожному з яких подія A відбувається.

1. Утворити новий ймовірнісний простір (Ω_1, S_1, P_1) і випадковий процес $X_n(E)$, $E \in \Omega_1$, такий, що кожна E цілком характеризує відбування події A у кожному з n випробувань, а $X_n(E)$ набуває того значення k, про яке йшлося вище.

2. Перевірити, чи є утворений випадковий процес ланцюгом Маркова, і якщо так, то визначити множину $\{x_i\}$ його станів та обчислити відповідні ймовірності $P_n(x_i, x_j)$ переходу ланцюга Маркова із стану x_i до стану x_j.

9. Нехай матеріальна частинка рухається вздовж заданої осі так, що абсолютна величина її швидкості є сталою, а напрямок руху може змінюватися на протилежний з ймовірністю p_1, коли точка рухається вправо, і з ймовірністю p_2, коли точка рухається вліво (відносно заданого напрямку осі). Утворити ймовірнісний простір (Ω, S, P) і випадковий процес $X_t(E)$, $E \in \Omega$, $t \in T$, що описує цей рух.

10. Нехай $X_k(E)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ – система незалежних випадкових величин стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P).

1. Довести, що ця система є ланцюгом Маркова і знайти ймовірності переходу $P_n(x_i, x_j)$.

2. Довести, що система випадкових величин $Y_n(E) = \sum_{k=0}^{n} X_k(E)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, також є ланцюгом Маркова і знайти $P_n(y_i, y_j)$.

3. Визначити, чи є вказані ланцюги Маркова однорідними.

Розділ 4.
ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

4.1. Різні види збіжності послідовностей випадкових величин

Нехай $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n,\ \ldots$ − випадкові величини, задані на деякому ймовірнісному просторі (Ω, S, P).

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ називається *збіжною за ймовірністю* до випадкової величини X, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P(\{E \in \Omega : \left| X_n(E) - X(E) \right| \geq \varepsilon\}) \to 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\{E \in \Omega : \left| X_n(E) - X(E) \right| < \varepsilon\}) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Цей вид збіжності позначають $X_n \xrightarrow{P} X$.

Приклад 1.1. Нехай $\Omega = [0;1)$, P – міра Лебега на σ-алгебрі S вимірних за Лебегом підмножин $A \subset [0;1)$.

Для кожного $k \in N$ утворимо k функцій

$$X_i^{(k)}(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in [\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}), \\ 0, \text{ коли } E \notin [\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}),\ i \in \overline{1,k}. \end{cases}$$

Занумеруємо утворені функції таким чином:

$X_1^*(E) = X_1^{(1)}(E)$, $X_2^*(E) = X_1^{(2)}(E)$, $X_3^*(E) = X_2^{(2)}(E)$, $X_4^*(E) = X_1^{(3)}(E)$, $X_5^*(E) = X_2^{(3)}(E)$, $X_6^*(E) = X_3^{(3)}(E)$, $X_7^*(E) = X_1^{(4)}(E)$, ….

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо подію $A_n = \{E \in \Omega : | X_n^*(E) - 0 | \geq \varepsilon\} \in S$. Зрозуміло, що коли $\varepsilon > 1$, то $A_n = \varnothing$ і $P(A_n) = 0 \to 0 (n \to \infty)$.

Якщо $\varepsilon \leq 1$, то для кожного $n \in N$ існує єдина пара (i, k), для якої $X_n^*(E) = X_i^{(k)}(E)$, причому якщо $n \to \infty$, то й $k \to \infty$. Окрім цього $A_n = \{E \in \Omega : | X_n^*(E) - 0 | \geq \varepsilon\} = [\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}) \Rightarrow P(A_n) = \frac{1}{k} \to 0,$ коли n, а тому й k, прямує до ∞.

Цим доведено, що $X_n^*(E) \xrightarrow{P} 0$, коли $n \to \infty$.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ називається *збіжною з ймовірністю* 1 або *збіжною майже напевне* до випадкової величини X, якщо

$$P(\{E \in \Omega : X_n(E) \not\to X(E)\} = 0.$$

Цей вид збіжності позначають

$$X_n \to X \text{ (P – м.н.), або } X_n \xrightarrow{м.н.} X \text{, або } X_n \xrightarrow{м.в.} X$$

(м.н. – майже напевне, м.в. – майже всюди).

Приклад 1.2. Якщо ймовірнісний простір (Ω, S, P) з прикладу 1.1, а

$$X_n(E) = \begin{cases} (-1)^k, \text{коли } E = \dfrac{1}{k}, k \in \{1, 2, 3, 4, ...\}, \\ 1 + \dfrac{1}{n}, \text{коли } E \neq \dfrac{1}{k} \ \forall k \in \{1, 2, 3, 4, ...\}, \end{cases}$$

то легко бачити, що $\{E : E \in \Omega,\ X_n(E) \not\to 1\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$, причому $P(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}) = 0$, як міра Лебега зчисленної множини. Тому $X_n(E) \xrightarrow{м.н.} 1$, коли $n \to \infty$.

Легко бачити, що послідовність $X_n^*(E)$ з прикладу 1.1 є розбіжною (як числова послідовність) для кожного $E \in [0;1)$, а тому ця послідовність не є збіжною майже напевно до жодної випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ називається *збіжною в середньому порядку* α, $0 < \alpha < \infty$, до випадкової величини X, якщо $M[X_n^\alpha] \neq +\infty$ і $M[X^\alpha] \neq \infty$ та

$$M[|X_n - X|^\alpha] \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Цей вид збіжності позначають $X_n \xrightarrow{L^\alpha} X$. Зокрема, якщо $\alpha = 1$, то збіжність називають *збіжністю в середньому*, якщо $\alpha = 2$, то збіжність називають *збіжністю в середньому квадратичному* (іноді цю збіжність позначають $X = l.\ i.\ m.\ X_n$).

Приклад 1.3. Якщо послідовність $X_n^*(E)$ з прикладу 1.1, а $\alpha > 0$ – фіксоване число, то

$$M[|X_n^* - 0|^\alpha] = \int_0^1 |X_n^*(t)|^\alpha\, dt = \int_0^1 |X_i^{(k)}(t)|^\alpha\, dt = \int_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}} 1^\alpha\, dt = \frac{1}{k} \to 0,$$

коли n, а тому й k, прямує до ∞.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ називається *збіжною за розподілом ймовірностей* до випадкової величини X, якщо для будь-якої обмеженої неперервної функції $\varphi(x)$, $x \in R$

$$M[\varphi(X_n)] \to M[\varphi(X)] \text{ при } n \to \infty.$$

При цьому кажуть, що F_{X_n} *слабо збігається до* F_X.

Цей вид збіжності позначають $X_n \xrightarrow{d} X$.

Виявляється, що умова $M[\varphi(X_n)] \to M[\varphi(X)]$ еквівалентна умові збіжності функцій розподілу $F_{X_n}(x)$ до функції $F_X(x)$ у кожній точці x, де $F_X(x)$ – неперервна. Цим пояснюється назва даного виду збіжності.

Приклад 1.4. Нехай $X_n^*(E)$ з прикладу 1.1, а $\varphi(x)$, $x \in R$, – довільна обмежена і неперервна функція. Тоді

$$\varphi(X_n^*(E)) = \begin{cases} \varphi(1), \text{ коли } X_n^*(E) = X_i^{(k)}(E), \text{ а } E \in [\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}), \\ \varphi(0), \text{ коли } X_n^*(E) = X_i^{(k)}(E), \text{ а } E \notin [\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}). \end{cases}$$

Тому

$$M[\varphi(X_n^*(t)] = \int_0^1 \varphi(X_n^*(t))\,dt = \int_0^{\frac{i-1}{k}} \varphi(0)\,dt + \int_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}} \varphi(1)\,dt + \int_{\frac{i}{k}}^{1} \varphi(0)\,dt =$$

$$= \varphi(1) \cdot \frac{1}{k} + \varphi(0) \cdot (1 - \frac{1}{k}) \to \varphi(0),$$

коли n, а тому й k, прямує до ∞.

З іншого боку, якщо $X(E) = 0$, $E \in [0;1)$, то $\varphi(X(E)) = \varphi(0)$, а тому $M[\varphi(X)] = \varphi(0).$

Отже, $X_n^*(E) \xrightarrow{d} X(E),$ коли $n \to \infty$.

Деякі властивості розглянутих видів збіжності.

1. Якщо $X_n \xrightarrow{P} X$ і $\varphi(x)$ – неперервна функція, визначена на R^1, то $\varphi(X_n) \xrightarrow{P} \varphi(X)$.

2. Якщо задано m послідовностей випадкових величин $\{X_n^{(i)}\}$, i=1,2,…,m, причому $X_n^{(i)} \xrightarrow{P} X^{(i)}$, $\Phi(x_1, x_2, ..., x_m)$ – неперервна функція, визначена на R^m, то

$$\Phi(X_n^{(1)}, ..., X_n^{(m)}) \xrightarrow{P} \Phi(X^{(1)}, ..., X^{(m)}).$$

3. Якщо $X_n \xrightarrow{P} X$ і $P(|X_n| < c) = 1$ при деякому $c > 0$ та всіх $n \ge n_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} M[X_n] = M[X]$ і, крім того, $P(|X| < c) = 1$.

4. Якщо $X_n \xrightarrow{L^1} X$ (в середньому), то $X_n \xrightarrow{P} X$ (за ймовірністю).

5. Якщо $X_n \xrightarrow{L^2} X$, то $X_n \xrightarrow{L^1} X$ і, таким чином,

$$X_n \xrightarrow{P} X.$$

6. Якщо $X_n \xrightarrow{P} X$, причому випадкові величини X_i та X мають функції розподілу ймовірностей $F_{X_i}(x)$ та $F_X(x)$, то послідовність функцій розподілу $F_{X_i}(x)$, $i = 1,2,...$, збігається до $F_X(x)$ в кожній точці неперервності функції $F_X(x)$.

Іншими словами, із збіжності за ймовірністю $X_n \xrightarrow{P} X$ послідовності випадкових величин $X_1, X_2, \ldots$ до випадкової величини X випливає збіжність $X_n \xrightarrow{d} X$ за розподілом ймовірностей.

Теорема (критерій збіжності майже напевно). Для того щоб послідовність випадкових величин X_n збігалася з ймовірністю 1 до випадкової величини X, необхідно й достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ виконувалася рівність

$$\lim_{s\to\infty} P\left(\bigcap_{n=s}^{\infty}\{E: |X_n(E) - X(E)| \le \varepsilon\}\right) = 1,$$

що є рівносильною рівності

$$\lim_{s\to\infty} P\left(\bigcup_{n=s}^{\infty}\{E: |X_n(E) - X(E)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Оскільки

$$P\left(\bigcup_{n=s}^{\infty}\{E: |X_n(E) - X(E)| > \varepsilon\}\right) \le \sum_{n=s}^{\infty} P(\{E: |X_n(E) - X(E)| > \varepsilon\}),$$

то з останньої теореми випливає, що для того, щоб мати збіжність $X_n \xrightarrow{м.н.} X$, досить, щоб при довільному $\varepsilon > 0$ виконувалася умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{E: |X_n(E) - X(E)| > \varepsilon\}) < \infty.$$

При дослідженні збіжності з ймовірністю і послідовностей випадкових величин важливою є така лема.

Лема (Бореля – Кантеллі). Нехай A_k – послідовність подій. Для того щоб у цій послідовності з ймовірністю 1 відбулися події A_k у скінченній кількості, достатньо, а у випадку незалежності A_k і необхідно, щоб виконувалась умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty.$$

Наслідок. Якщо $X_n \xrightarrow{P} X$, то знайдеться така послідовність X_{n_k}, що $X_{n_k} \xrightarrow{м.н.} X$.

Зразки розв'язування вправ.

Вправа 1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $X_n(E) \xrightarrow{P} X(E)$, то $X_n(E) \xrightarrow{м.н.} X(E)$.
2. Якщо $X_n(E) \xrightarrow{м.н.} X(E)$, то $X_n(E) \xrightarrow{P} X(E)$.

3. $X_n(E) \xrightarrow{d} X(E) \Leftrightarrow F_{X_n}(x_0) \to F_X(x_0)$, $(n \to \infty)$, у кожній точці $x_0 \in R$, де усі функції $F_X(x)$ та $F_{X_n}(x)$ є неперервними.

1. У прикладі 1.1 побудовано послідовність випадкових величин $X_n^*(E),\ E \in [0;1),\ n \in N$, яка збігається за ймовірністю до тотожного нуля, тобто $X_n^*(E) \xrightarrow{P} 0\ (n \to \infty)$, де P – міра Лебега на проміжку $[0;1)$.

Оскільки для кожного фіксованого $E_0 \in [0;1)$ і для кожного $k \in N$ існує єдине число $i \in \overline{1,k}$, для якого $E_0 \in [\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k})$, то існує $n = n(k,i) \to \infty,\ (k \to \infty)$, для якого $X_n^*(E_0) = X_i^{(k)}(E_0) = 1$ (див. приклад 1.1), а тому $X_n^*(E_0) \not\to 0$ для будь-якого $E \in [0;1)$, коли $(n \to \infty)$. Таким чином, немає жодної точки $E \in [0;1)$, у якій $X_n^*(E) \to 0\ \ (n \to \infty)$, тобто збіжність $X_n(E) \xrightarrow{м.в.} 0$ не має місця. Отже, твердження 1 не є правильним.

2. Якщо $X_n(E) \xrightarrow{м.н.} X(E)$ $(n \to \infty)$, то позначимо $A = \{E : E \in \Omega,\ X_n(E) \not\to X(E)\}$, $A_k^{(\varepsilon)} = \{E \in \Omega : |X_k(E) - X(E)| \geq \varepsilon\}$,

$$B_n^{(\varepsilon)} = \sum_{k=n}^{\infty} A_k^{(\varepsilon)} \text{ і } B^{(\varepsilon)} = \prod_{n=1}^{\infty} B_n^{(\varepsilon)}.$$

Враховуючи, що $B_1^{(\varepsilon)} \supset B_2^{(\varepsilon)} \supset B_3^{(\varepsilon)} \supset \ldots$, дістаємо, що $P(B^{(\varepsilon)}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n^{(\varepsilon)})$.

Легко бачити, що $B^{(\varepsilon)} \subset A$, а тому, враховуючи, що $P(A) = 0$, дістаємо $P(B^{(\varepsilon)}) = 0$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n^{(\varepsilon)}) = 0$. Оскільки $A_n^{(\varepsilon)} \subset B_n^{(\varepsilon)}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n^{(\varepsilon)}) = 0$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P(\{E : E \in \Omega, |X_n(E) - X(E)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Отже, $X_n(E) \xrightarrow{P} X(E)$, а тому твердження 2 є правильним.

3. Нехай $X_n(E) \xrightarrow{d} X(E)$. Тоді для будь-якої обмеженої і неперервної функції $\varphi(x),\ x \in R$, правильна рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dF_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dF_X(x).$$

Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in R$, у якій функція $F_X(x)$ є неперервною і розглянемо подію $A = (-\infty; x_0) \in \mathscr{B}(R^1)$ з індикаторною функцією $I_A(x)$. Для цієї функції

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_A(x)\,dF_{X_n}(x) = P_{X_n}(A) = P_{X_n}((-\infty; x_0)) = F_{X_n}(x_0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_A(x)\,dF_X(x) = F(x_0)$$

Утворимо функцію

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } x \le x_0, \\ 1 - \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}, & \text{коли } x_0 < x \le x_1, \\ 0, & \text{коли } x > x_1, \end{cases}$$

де $x_1 > x_0$ – фіксована точка неперервності функції F_X.

Для функції $\varphi(x)$, що є неперервною і обмеженою, маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dF_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x_0} dF_{X_n}(x) + \int_{x_0}^{x_1} (1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}) dF_{X_n}(x) +$$

$$+ \int_{x_1}^{\infty} 0 dF_{X_n}(x) = F_{X_n}(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} (\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} - 1)\,dF_{X_n}(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dF_X(x) =$$

$$= F(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} (\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} - 1)\,dF_X(x), \ (n \to \infty).$$

Врахуємо тепер, що (після інтегрування частинами):

$$\int_{x_0}^{x_1} (\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} - 1)\,dF_{X_n}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} F_{X_n}(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} F_{X_n}(x)\,dx -$$

$$- F_{X_n}(x_1) + F_{X_n}(x_0) = \frac{\int_{x_0}^{x_1} F_{X_n}(x_0)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F_{X_n}(x)\,dx}{x_1 - x_0} \to 0,$$

коли $x_1 \to x_0$.

Аналогічно $\int_{x_0}^{x_1} (\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} - 1)\,dF_X(x) \to 0$, коли $x_1 \to x_0$.

Таким чином, якщо $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване, то

$$|F_n(x_0) - F(x_0)| \le |\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dF_{X_n}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dF_X(x)| +$$

$$+\left|\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}-1\right)dF_{X_n}(x)-\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}-1\right)dF_X(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},$$

причому перший доданок можна зробити меншим, ніж $<\frac{\varepsilon}{2}$, за рахунок вибору досить великого n (оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dF_{X_n}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dF_X(x)$), а другий – за рахунок близькості x_1 до x_0.

Цим доведено, що коли $X_n(E)\xrightarrow{d}X(E)$, то $F_{X_n}(x_0)\to F_X(x_0)$ у кожній точці $x_0\in R$, де функція $F_X(x)$ є неперервною.

Припустимо тепер, що $F_{X_n}(x_0)\to F_X(x)$ у кожній точці $x_0\in R$, де усі функції $F_X(x)$ і $F_{X_n}(x)$ є неперервними, і візьмемо довільну фіксовану функцію $\varphi(x)$, неперервну і обмежену на R, причому $|\varphi(x)|<c\ \forall\, x\in R$. Виберемо відрізок $[a;b]$ так, щоб a і b були точками неперервності усіх функцій $F_X(x)$ і $F_{X_n}(x)$, а також $P([a;b))=F_X(b)-F_X(a)>1-\frac{\varepsilon}{8c}$, де число $\varepsilon>0$ – досить мале фіксоване. Тоді існує $n_0(\varepsilon)$ таке, що $P_n([a;b))=F_{X_n}(b)-F_{X_n}(a)>1-\frac{\varepsilon}{8c}$, коли $n>n_0(\varepsilon)$.

На відрізку $[a;b]$ функція $\varphi(x)$ неперервна, а тому й рівномірно неперервна, тобто $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon):|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{8}$, коли $|x'-x''|<\delta(\varepsilon)$, $x'\in[a;b]$ і $x''\in[a;b]$. Враховуючи це, виберемо точки неперервності a_k усіх функцій $F_X(x)$ і $F_{X_n}(x)$ такими, щоб $a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{N-1}<a_N=b$ і $0<a_{k+1}-a_k<\delta(\varepsilon)\ \forall\ k\in\overline{0,(N-1)}$, а в кожному проміжку $[a_k;a_{k+1})$ зафіксуємо точку x_k і утворимо функцію

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x<a \text{ або } x\geq b,\\ \varphi(x_k), & \text{коли } x\in[a_k;a_{k+1}),\ k\in\overline{0,(N-1)}.\end{cases}$$

Зрозуміло, що $|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|<\frac{\varepsilon}{8}\ \forall\, x\in[a;b)$, а тому

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dF_X(x)-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dF_{X_n}(x)\right|\leq\left|\int\limits_{-\infty}^{a}\varphi(x)\,d(F_X(x)-F_{X_n}(x))\right|+$$

$$+\left|\int_b^{+\infty}\varphi(x)\,d(F_X(x)-F_{X_n}(x))\right|+\left|\int_a^b(\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x))\,d(F_X(x)-\right.$$

$$\left.-F_{X_n}(x))\right|+\left|\int_a^b\varphi_\varepsilon(x)\,dF_X(x)-\int_a^b\varphi_\varepsilon(x)\,dF_{X_n}(x)\right|\le$$

$$\le\frac{2c\varepsilon}{8c}+\frac{\varepsilon}{8}\left|(F_X(b)-F_X(a)+F_{X_n}(b)-F_{X_n}(a))\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(x_k)(F_X(a_{k+1})-F_X(a_k)-F_{X_n}(a_{k+1})+F_{X_n}(a_k))\right|\to\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4},$$

коли $n\to\infty$, оскільки усі точки a, b та a_k, $k\in\overline{0,N}$, є точками неперервності усіх функцій $F_X(x)$ і $F_{X_n}(x)$.

Отже, існує номер $n_1(\varepsilon)>n_0(\varepsilon)$ для якого

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dF_X(x)-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dF_{X_n}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon,$$

коли $n>n_1(\varepsilon)$, а це означає, що $M[\varphi(X_n)]\to M[\varphi(X)]$, коли $n\to\infty$, тобто $X_n(E)\xrightarrow{d}X(E)$, коли $n\to\infty$.

Таким чином, твердження 3 є правильним.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо при $n\to\infty$ $X_n(E)\to X(E)$ для всіх $E\in\Omega$, то $X_n\xrightarrow{P}X$.

2. Якщо при $n\to\infty$ $X_n(E)\to X(E)$ для всіх $E\in\Omega$, то $X_n\xrightarrow{м.н.}X$.

3. Твердження, обернене до 2, є правильним.

4. Якщо $X_n\xrightarrow{L^\alpha}X$, то $X_n\xrightarrow{м.н.}X$.

5. Якщо $X_n\xrightarrow{L^2}X$, то $X_n\xrightarrow{L^1}X$ і $X_n\xrightarrow{P}X$.

6. $X_n\xrightarrow{L^2}0\Leftrightarrow M[X_n]\to 0$ і $D[X_n]\to 0$.

7. Якщо $X_n\xrightarrow{P}X$ і $P(|X_n|\le c)=1$ для деякого $c>0$, то $X_n\xrightarrow{L^1}X$.

8. Якщо $X_n\xrightarrow{L^1}X$, то $M[X_n]\to M[X]$.

9. Якщо послідовність X_n є збіжною за ймовірністю, то такою є і послідовність $f(X_n)$ для будь-якої функції f.

10. Якщо послідовність X_n збігається за ймовірністю, то вона збігається за розподілом.

11. Твердження, обернене до 10, є правильним.

12. Якщо $P(\bigcap_{n=s}^{\infty}\{E:|X_n(E)-X(E)|<\varepsilon\})\to 1$, коли $s\to\infty$, то $X_n \xrightarrow{м.н.} X$.

13. $\bigcup_{n=s}^{\infty}\{E:|X_n(E)-X(E)|>\varepsilon\}=\Omega-\bigcap_{n=s}^{\infty}\{E:|X_n(E)-X(E)|\le\varepsilon\}$.

14. Якщо $\sum_{n=1}^{\infty}P(\{E:|X_n(E)-X(E)|>\varepsilon\})<+\infty$, то $X_n \xrightarrow{м.н.} X$.

15. Якщо $X_n \xrightarrow{P} X$, то $X_{nk} \xrightarrow{м.н.} X$ для будь-якої послідовності індексів $n_k\to\infty$.

16. Твердження, обернене до 15, є правильним.

2. Довести, що коли послідовність випадкових величин $X_n(E)$, $E\in\Omega$, $n\in N$, збігається до випадкової величини $X(E)$, $E\in\Omega$, за ймовірністю, то вона збігається до $X(E)$ і за розподілом ймовірностей.

3. Довести, що коли $X_n(E)\xrightarrow{P}X(E)$ і $X_n(E)\xrightarrow{P}X^*(E)$, то $X(E)=X^*(E)$ майже напевне на просторі Ω, тобто $P(\{E\in\Omega:X(E)\ne X^*(E)\})=0$.

4. Довести, що коли $X_n(E)\xrightarrow{P}X(E)$, а $Y_n(E)\xrightarrow{P}Y(E)$, то $(X_n(E)\pm Y_n(E))\xrightarrow{P}(X(E)\pm Y(E))$.

5. Довести, що коли $X_n(E)\xrightarrow{P}X(E)$, то існує підпослідовність $X_{n_k}(E)$, що збігається до $X(E)$ майже напевне.

6. Нехай $\Omega=[0;1]$, P – міра Лебега на $[0;1]$, а S – простір подій, кожна з яких є вимірною за Лебегом підмножиною простору $\Omega=(0;1)$. Для заданої послідовності $X_n(E)$, $E\in\Omega$, $n\in N$, переконатися, що це послідовність випадкових величин відносно ймовірнісного простору (Ω,S,P), а також перевірити, чи є вона збіжною: 1) майже напевне; 2) за ймовірністю P; 3) в середньому порядку $\alpha\in N$; 4) за розподілом.

1. $X_n(E)=\begin{cases} n, \text{ коли } E\in(0;\frac{1}{n}), \\ \frac{1}{E}, \text{коли } E\in[\frac{1}{n};1). \end{cases}$

2. $X_n(E) = \begin{cases} n, \text{коли}\, E \in (0; \frac{1}{n}), \\ 0, \text{коли}\, E \in [\frac{1}{n}; 1). \end{cases}$

3. $X_n(E) = \begin{cases} \frac{1}{E}, \text{коли}\, E \in (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}), \\ 0, \quad \text{коли}\, E \in (0;1) \setminus (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}). \end{cases}$

4. $X_n(E) = \frac{1}{nE} \cos \frac{n}{E}, \ E \in (0;1).$

5. $X_n(E) = E^n, \ E \in (0;1).$

6. $X_n(E) = arctg\, nE, \ E \in (0;1).$

7. $X_n(E) = n(\varphi(E + \frac{1}{E}) - \varphi(E)), \ E \in (0;1)$, а φ – диференційовна функція на $(0;2)$ з обмеженою похідною $\varphi'(E)$.

7. Нехай $X_k(E)$, $E \in \Omega$, $k \in N$, – незалежні випадкові величини, для яких $M[X_k] = 0$ і $D[X_k] < +\infty$, $k \in N$; $Y_k(E) = \sum_{i=1}^{k} X_i(E)$, $k \in N$ і $\varepsilon > 0$ – фіксоване число.

Довести, що:

1. Якщо

$$Z_k(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } |Y_i(E)| < \varepsilon, \ i \in \overline{1,(k-1)}, \text{і } |Y_k(E)| \geq \varepsilon, \\ 0 \text{ в інших випадках}, \end{cases}$$

то $M[\sum_{k=1}^{n} Z_k] = P(\{E \in \Omega : \sup_{1 \leq k \leq n} |Y_k(E)| \geq \varepsilon\})$;

2. $M[Y_n^2] \geq M[\sum_{k=1}^{n} Z_k Y_n^2] = M[\sum_{k=1}^{n} Z_k (Y_k^2 + 2(Y_n - Y_k)Y_k + (Y_n - Y_k)^2)] \geq$

$$\geq M[\sum_{k=1}^{n} Z_k (Y_k^2 + 2(Y_n - Y_k)Y_k)];$$

3. $Z_k(E) Y_k^2(E) \geq \varepsilon^2 Z_k(E)$;
4. $M[Z_k Y_k (Y_n - Y_k)] = 0$;
5. $M[Y_n^2] \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} M[Z_k]$;
6. $M[Y_n^2] = \sum_{k=1}^{n} D[X_k]$;

7. $P(\{E \in \Omega : \sup\limits_{1 \le k \le n} |Y_k(E)| \ge \varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum\limits_{k=1}^{n} D[X_k]$;

8. $P(\{E \in \Omega : \sup\limits_{1 \le k \le n} |Y_k(E)| \ge \varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} D[X_k]$.

8. Довести, що коли $X_n(E) \xrightarrow{P} X(E)$ і $P(\{E \in \Omega : |X_n(E)| \le c\}) = 1$ для деякого $c > 0$, то: 1) $P(\{E \in \Omega : |X(E)| \le c\}) = 1$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} M[X_n] = M[X]$.

9. Довести, що: 1) $X_n(E) \xrightarrow{P} X(E)$ тоді і тільки тоді, коли $|X_n(E) - X(E)| \xrightarrow{P} 0$; 2) якщо $X_n \xrightarrow{L^1} X$, то $X_n E) \xrightarrow{P} X$ і $M[X_n] \to M[X], (n \to \infty)$; 3) якщо $X_n \xrightarrow{L^2} X$, то $X_n \xrightarrow{L^1} X$ і $M[X_n^2] \to M[X^2], (n \to \infty)$.

10. Довести, що $X_n(E) \xrightarrow{L^2} c = const$ тоді й тільки тоді, коли $M[X_n] \to c$ і $D[X_n] \to 0$, $(n \to \infty)$.

4.2. Теореми Чебишова, Маркова, Колмогорова, Бореля, Бернуллі

Теорема Чебишова. Якщо дисперсії попарно незалежних випадкових величин X_i обмежені однією і тією самою сталою D, тобто $D[X_i] < D$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, то для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ ймовірність виконання нерівності $(|\overline{X}_n - \overline{M}| < \varepsilon)$, де $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{M} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} M[X_i]$, буде як завгодно близька до 1 при досить великому n, тобто

$$\lim_{n \to \infty} P(\{E : |\overline{X}_n(E) - \overline{M}| < \varepsilon\}) = 1.$$

Якщо за умов теореми Чебишова всі випадкові величини X_i мають однакові математичні сподівання $M[X_i] = M$, то середнє арифметичне $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ випадкових величин X_i збігається за ймовірністю до їх спільного математичного сподівання, тобто, якими б малими не були $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$, при досить великих n виконується нерівність

$$P(\{E : |\overline{X}_n(E) - M| < \varepsilon\}) > 1 - \delta.$$

Таким чином, згідно з теоремою Чебишова, середнє арифметичне $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ випадкових величин X_i практично не може набувати значень, які при досить великих n помітно відрізняються від числа $\overline{M}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]$, хоч можливо, що деякі з випадкових величин X_i можуть набувати значень, досить віддалених від $\overline{M}$.

Теорема Чебишова має велике практичне значення. Нехай, наприклад, вимірюється деяка фізична величина. Шуканим значенням вимірюваної величини вважають середнє арифметичне результатів кількох вимірювань, бо результат кожного окремого вимірювання є випадковим, оскільки на нього можуть впливати похибки приладу, температура повітря, освітлення, положення в просторі вимірювального приладу та спостерігача і т.д. Теорема Чебишова дає теоретичне обґрунтування правомірності такого підходу до вимірювання значень величин на практиці.

Приклад 2.1. Нехай $X_k(E)$, $E\in\Omega$, $k\in N$, – послідовності незалежних випадкових величин, причому розподіли ймовірностей цих величин задано таблицями:

$x_i^{(k)}$	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$
$p_i^{(k)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

коли $k\neq n^2$, $n\in N$,

та

$x_i^{(k)}$	-1	0	1
$p_i^{(k)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

коли $k=n^2$, $n\in N$

Тоді $M[X_k]=0$, $k\in N$; $D[X_k]=1$, коли $k\neq n^2$, $n\in N$ і $D[X_k]=\frac{1}{2}$, коли $k=n^2$, $n\in N$. Отже, $D[X_k]\leq 1$ для всіх $k\in N$, а $\overline{M}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M[X_k]=0$.

Тому за теоремою Чебишова $\lim_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k|<\varepsilon)=1$ для будь-якого $\varepsilon>0$. Отже, для досить великих n середнє значення випадкових величин практично не відрізняється від нуля, проте для кожної випадкової величини X_k існують значення, відмінні від нуля з досить великою ймовірністю: $P(X_k\neq 0)=\frac{1}{2}$.

Узагальненням теореми Чебишова на випадок довільних випадкових величин є теорема Маркова.

Теорема Маркова. Якщо

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

то середнє арифметичне $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ випадкових величин X_i збігається за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] \right| < \varepsilon \right) = 1$$

при як завгодно малому $\varepsilon > 0$.

Однією з форм закону великих чисел є теорема Бернуллі, яка є окремим випадком теореми Чебишова.

Теорема Бернуллі. При необмеженому збільшенні числа n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю $P(A) = p$ і не відбувається з ймовірністю $q = 1 - p$, статистична ймовірність $P_n^*(A)$ події A за наслідками n випробувань збігається за ймовірністю $\tilde{P}$ до ймовірності $P(A) = p$ події A, тобто, якими б малими не були $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$, при досить великих n буде виконуватися нерівність (див. п.2.8)

$$\tilde{P}(| P_n^*(A) - P(A) | < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

що означає

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{P}(| P_n^*(A) - P(A) | < \varepsilon) = 1.$$

Нехай X_1, X_2, …, X_n – незалежні випадкові величини стосовно імовірнісного простору (Ω, S, P), $M[X_i] = 0$, $D[X_i] < \infty$, $i \in \overline{1,\ n}$, і нехай $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Тоді виконується *нерівність Колмогорова*:

$$P(\{E : \max_{1\le k\le n} | S_k(E) | \ge \varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} D[X_k],\ \varepsilon > 0.$$

Теорема Колмогорова (посилений закон великих чисел). Нехай стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P) дано $\{X_k\}$ – послідовність незалежних випадкових величин, для яких $M[X_k]$ та $D[X_k]$ є скінченними числами.

Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D[X_k]}{k^2} < \infty$, то

$$P\left(\{E : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i(E) - M[X_i]) = 0\} \right) = 1.$$

Наслідок (теорема Бореля). Нехай виконується серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю $P(A) = p$ і не відбувається з ймовірністю $P(\overline{A}) = q = 1 - p$. Тоді

$$\tilde{P}(P_n^*(A) \to p) = 1.$$

Останнє твердження виправдовує статистичний підхід до визначення ймовірності за допомогою статистичної ймовірності. Однак оскільки стверджується збіжність $P_n^*(A)$ до $P(A)$ тільки з імовірністю 1, то статистичну ймовірність можна використовувати для наближеного обчислення ймовірності, але не для її логічного означення.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Імовірність того, що навмання взята деталь якісна, дорівнює 0,8. Скільки треба переглянути деталей, щоб з імовірністю, не меншою від 0,9, виявити процент якісних деталей, не допустивши при цьому похибку, більшу за 1%.

Позначимо через X_i кількість якісних деталей при i-му випробуванні. Очевидно, ця величина може набувати лише двох значень – 0 і 1. Тоді розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X_i матиме вигляд, поданий в табл. 2.2:

Табл.2.2

0	1
0,2	0,8

при цьому

$$M[X_i] = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8;$$

$$D[X_i] = (0-0{,}8)^2 \cdot 0{,}2 + (1-0{,}8)^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16.$$

Статистична ймовірність появи якісної деталі за результатами n випробувань є випадкова величина $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, при цьому $M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = 0{,}8$, $D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{0{,}16}{n}$, оскільки випробування, а тому і величини X_i, вважаються незалежними. Використовуючи нерівність Чебишова, дістанемо

$$\tilde{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0{,}8\right| \geq 0{,}01\right) \leq \frac{0{,}16}{n(0{,}01)^2}.$$

Щоб імовірність $\tilde{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0{,}8\right| < 0{,}01\right)$ була не меншою від $0{,}9$, треба, щоб виконувалась нерівність

$$\frac{0{,}16}{n \cdot (0{,}01)^2} < 0{,}1,$$

тобто

$$n > \frac{0{,}16}{0{,}1 \cdot 0{,}0001} = 1600.$$

Вправа 2. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P) $X_n(E)$, $E \in \Omega$, $n \in N$,– незалежні випадкові величини, для яких $M[X_n] = a$ і $D[X_n] < +\infty, n \in N$, то

$$P(\{E : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(E) - a| > \varepsilon\}) \le \varepsilon^{-2} n^{-2} \sum_{k=1}^{n} D[X_k]$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

2. Якщо $n^{-2}\sum_{k=1}^{n} D[X_k] \to 0, (n \to \infty)$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} D[X_k] < +\infty$.

3. Якщо $\frac{1}{n} D[X_n] \to 0, (n \to \infty)$, то $n^{-2}\sum_{k=1}^{n} D[X_k] \to 0, (n \to \infty)$.

1. Оскільки

$$P(\{E : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(E) - a| > \varepsilon\}) = P(\{E : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(E) - a|^2 > \varepsilon^2\}),$$

то за нерівністю Чебишова

$$P(\{E : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(E) - a| > \varepsilon\}) \le \frac{M[|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k]}{\varepsilon^2}.$$

Звідси, враховуючи незалежність випадкових величин X_n та властивості дисперсії, дістаємо, що твердження 1 є правильним.

2. Позначимо $b_n = n^{-2}\sum_{k=1}^{n} D[X_k]$, $n \in N$. Тоді $n^2 b_n = \sum_{k=1}^{n} D[X_k]$, а тому $D[X_n] = n^2 b_n - (n-1)^2 b_{n-1}$, $n \in N$, $b_{-1} = 0$. Таким чином:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} D[X_k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}(k^2 b_k - (k-1) b_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^2}{k^2} b_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{(k+1)^2} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k (1 - \frac{k^2}{(k+1)^2}) + b_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \frac{2k+1}{(k+1)^2}.$$

За умовою задачі $b_n \to 0$, $(n \to \infty)$, проте, як b_n прямує до нуля, невідомо. Якщо, наприклад, $b_n = \frac{1}{\ln(k+1)}$, то, використовуючи ознаку порівняння та інтегральну ознаку збіжності рядів, легко переконатися, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)}{(k+1)^2 \ln(k+1)}$ розбіжний. Тому розбіжний також ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} D[X_k]$, тобто твердження 2 не є правильним.

3. Позначимо $a_n = \frac{1}{n} D[X_n]$, $n \in N$. Тоді $D[X_n] = na_n$ і тому, враховуючи, що $a_n \geq 0$, маємо:

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{n} D[X_k] = n^{-2} \sum_{k=1}^{n} ka_k = n^{-2} (\sum_{k=1}^{m} ka_k + \sum_{k=m+1}^{n} ka_k) \leq$$

$$\leq n^{-2} \sum_{k=1}^{m} ka_k + n^{-2} \max_{m<k\leq n} a_k \cdot \frac{n(n+1)}{2} < n^{-2} \sum_{k=1}^{m} ka_k + \max_{m<k\leq n} a_k .$$

Оскільки $a_k \to 0$, $(k \to \infty)$, то число m можна вибрати настільки великим, щоб $\max\limits_{m<k\leq n} a_k$ став як завгодно малим. Після цього виберемо $n > m$ настільки великим, щоб вираз $n^{-2} \sum\limits_{k=1}^{m} ka_k$ також став як завгодно малим. Це означає, що вираз $n^{-2} \sum\limits_{k=1}^{n} D[X_k]$ можна зробити як завгодно малим за рахунок вибору досить великого n. Точніше:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) : 0 \leq n^{-2} \sum_{k=1}^{n} D[X_k] < \varepsilon \ \forall \ n \geq n_0(\varepsilon).$$

Тому твердження 3 є правильним.

Вправа 3. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P) і фіксована подія $A \in S$ та зчисленна сукупність послідовних незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю $p = P(A)$. Ця сукупність випробувань задає випадковий експеримент, результатами якого є нескінченні послідовності $E = (e_1, e_2, ..., e_k, ...)$, де $e_k = 1$ або $e_k = 0$, в залежності від того, відбувається чи ні подія A у $k-$му випробуванні. Сукупність таких результатів (елементарних подій) позначимо $\tilde{\Omega}$.

1. Утворити ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$, для якого кожна множина $A_k = \{E : E = (e_1, e_2, ...) \in \tilde{\Omega}, \ e_k = 1\} \in \tilde{S}$, тобто є подією, яка полягає у "відбуванні події A у $k-$му випробуванні", причому $\tilde{P}(A_k) = P(A) = p$ для всіх $k \in N$.

2. Довести, що $X_k(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A_k, \\ 0, \text{ коли } E \notin A_k, \end{cases}$ є простою випадковою величиною для кожного $k \in N$, причому $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(E) = P_n^*(A)(E)$ при кожному фіксованому $n \in N$ також є простою випадковою

величиною, яка набуває у точці E значення $\frac{m}{n}$, $m \in \overline{0,n}$, тоді й тільки тоді, коли серед перших n координат точки E кількість e_k, рівних 1, дорівнює m.

3. Довести, що для кожного $\varepsilon > 0$ правильні нерівності

$$\tilde{P}(|P_n^*(A) - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2},$$

$$\tilde{P}(|P_n^*(A) - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

1. Кожну елементарну подію $E = (e_1, e_2, \ldots)$ можна тлумачити як нескінченний двійковий дріб, сукупність яких утворює відрізок $[0;1]$. Розподілимо на цьому відрізку ймовірнісну міру наступним чином:

- $P(\{x\}) = 0$, $x \in [0;1]$ і $P([0;1]) = 1$.
- Якщо $[0;\frac{1}{2})$ і $[\frac{1}{2};1)$ – *проміжки першого рангу*, то $P([0;\frac{1}{2})) = 1 - p$, а $P([\frac{1}{2};1)) = p$.
- Якщо $[0;\frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ та $[\frac{1}{2};\frac{3}{4})$, $[\frac{3}{4};1)$ – пари *проміжків другого ранг*у, то кожен проміжок кожної такої пари має міру, що дорівнює мірі відповідного проміжку першого рангу, помноженої на $(1-p)$, коли маємо справу з лівим проміжком, або помноженої на p, коли цей проміжок правий. Отже,

  $$P([0;\frac{1}{4})) = (1-p)^2,\ P([\frac{1}{4};\frac{1}{2})) = (1-p)p,$$

  $$P([\frac{1}{2};\frac{3}{4})) = p(1-p) \text{ і } P([\frac{3}{4};1)) = p^2.$$

- Якщо вже утворено проміжки k –го рангу і визначено їх міри, то кожен такий проміжок ділимо навпіл на два проміжки $(k+1)$ рангу, міру кожного з яких дістаємо шляхом множення міри вихідного проміжку k -го рангу на $(1-p)$, коли проміжок $(k+1)$–го рангу лівий, і на p, коли цей проміжок правий. Так, наприклад,

  $$P([0;\frac{1}{2^{k+1}})) = (1-p)^{k+1}, \text{ а } P([\frac{1}{2^{k+1}};\frac{1}{2^k})) = (1-p)^k p.$$

Сукупність усіх проміжків k–рангів, $k \in N$, разом з усілякими скінченними їх об'єднаннями та порожньою множиною утворює алгебру, міра P на якій виражаються природньо: якщо $A = \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k; \beta_k)$ і об'єднувані проміжки є проміжками якихось рангів, а також попарно не перетинаються, то $P(A)=\sum_{k=1}^{n}P([\alpha_k;\beta_k))$.

Далі здійснюємо Лебегове продовження міри P з алгебри на σ –алгебру вимірних за Лебегом множин.

Нарешті вважаємо, що множина $\tilde{A}\subset\tilde{\Omega}$ є подією тоді й тільки тоді, коли $\tilde{A}$, як підмножина відрізка $[0;1)$, має міру $P(\tilde{A})$ і ця міра є ймовірністю події $\tilde{A}\subset\tilde{\Omega}$, а сукупність таких подій утворює простір подій $\tilde{S}$.

За такою домовленістю множину $A_1=\{E=(e_1,e_2,\ldots)\in\tilde{\Omega}: e_1=1\}$ можна тлумачити як множину точок проміжку $[\frac{1}{2};1)$, а тому $P(A_1)=P([\frac{1}{2};1))=p$.

Аналогічно, $A_2=\{E: E=(e_1,e_2,\ldots)\in\Omega,\ e_2=1\}$ можна тлумачити як множину точок, що лежать у проміжку $[\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$ або $[\frac{3}{4};1]$, тоді $P(A_2)=P([\frac{1}{4};\frac{1}{2}])+P([\frac{3}{4};1])=(1-p)p+p^2=p$, і взагалі для будь-якого $k\in N$ можна дістати $P(A_k)=p$.

Можна також переконатися, що для будь-якого $n\in N$ події A_1, A_2, …, A_n є незалежними.

2. Оскільки кожна множина A_k є подією стосовно побудованого у попередній вправі 3.1 ймовірнісного простору $(\tilde{\Omega},\tilde{S},\tilde{P})$, то $X_k(E)$ є простою випадковою величиною – індикатором події A_k. За властивостями випадкових величин функція $Y_n(E)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k(E)$ також є випадковою величиною стосовно ймовірнісного простору $(\tilde{\Omega},\tilde{S},\tilde{P})$. При цьому, якщо $E=(e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots)$ – фіксована точка простору Ω, то можливі два випадки:

1) серед чисел e_k нема одиниць і тоді $E\notin A_k$, а тому $X_k(E)=0$, коли $k\in\overline{1,n}$, тобто $Y_n(E)=0=\frac{0}{n}$ – нульове значення статистичної ймовірності $P_n^*(A)$;

2) серед чисел e_k є одиниці, нехай це $e_{k1}=e_{k_2}=\ldots=e_{k_m}=1$, де $1<k_1<k_2<\ldots<k_m<n$, а усі інші $e_k=0$; тоді $E\in A_{k_i}$, $i\in\overline{1,m}$, а тому $Y_n(E)=\frac{m}{n}=P_n^*(A)(E)$, і друге твердження доведено.

3. Твердження 3 випливає з нерівності Чебишова, якщо врахувати, що $X_k(E)$, $k \in N$, незалежні випадкові величини, для яких $M[X_k] = p$, а $D([X_k]) = p(1-p)$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь-якої послідовності випадкових величин X_n правильна рівність $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - M[X_k]\right) \xrightarrow{P} 0$.

2. Твердження 1 є правильним, коли X_n попарно незалежні випадкові величини.

3. Твердження 1 є правильним, коли $\frac{1}{n^2} D[\sum_{k=1}^{n} X_k] \to 0$ при $n \to \infty$.

4. Нерівність А.М. Колмогорова є правильною для будь-яких випадкових величин X_k, $k \in \overline{1,n}$.

5. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(X_k)}{k^2} < +\infty$, то $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M[X_k]) \xrightarrow{м.н.} 0$.

6. Рівність $P(\{E : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i(E) - M(X_i)) = 0\}) = 1$ є правильною тоді й тільки тоді, коли $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M[X_i]) \xrightarrow{м.н.} 0$.

7. Для будь-якої події A статистичні ймовірності $P_n^*(A)$ збігаються до ймовірності $P(A)$ при $n \to \infty$.

2. Нехай $X_n(E)$, $E \in \Omega$, $n \in N$, – послідовність незалежних випадкових величин, для яких $M[X_n] < \infty$ і $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D[X_k] \to 0$, $(n \to \infty)$. Довести, що $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(E) - M[X_k]) \xrightarrow{L^2} 0$, $(n \to \infty)$.

3. Довести, що з умови $D[X_n] \le c$, $n \in N$, випливає умова $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D[X_k] \le c$, $n \in N$, а з неї – умова $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D[X_k] \to 0$, $(n \to \infty)$.

4. 1. Довести, що з умови $\frac{D[X_n]}{n} \to 0$, $(n \to \infty)$, випливає умова $\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} D[X_k] \to 0$, $(n \to \infty)$.

2. Чи є правильним обернене твердження?

5.1. Довести, що коли $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(E)-M[X_k]) \xrightarrow{L^2} 0$, $(n\to\infty)$, то $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(E)-M[X_k]) \xrightarrow{L^1} 0$, $(n\to\infty)$, а з останньої умови випливає умова $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(E)-M[X_k]) \xrightarrow{P} 0$, $(n\to\infty)$.

2*. З'ясувати, за яких умов $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k(E) \xrightarrow{P} a$, $(n\to\infty)$.

6. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P) і стосовно нього випадкова величина $X(E)$, $E\in\Omega$, та послідовність випадкових величин $X_n(E)$, $E\in\Omega$. Довести, що коли

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\ \bigcup_{N=1}^{\infty}\ \bigcap_{n=N}^{\infty}\{E:|X_n(E)-X(E)|\le\frac{1}{k}\},$$

то $A\in S$ – є подією, яка полягає у тому, що "X_n збігається до X". Точніше:

$$A=\{E:E\in\Omega,\ \lim_{n\to\infty}X_n(E)=X(E)\}\in S.$$

7. Нехай $X(E)$ та $X_n(E)$, $n\in N$, – випадкові величини стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P).

1. Довести, що

$$P(\{E:\lim X_n(E)=X(E)\})=1 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty}P(\bigcap_{n=N}^{\infty}\{E:|X_n(E)-X(E)|\le\varepsilon\})=1$$

для будь-якого $\varepsilon>0$.

2. Довести, що коли $P(\{E:\lim X_n(E)=X(E)\})=1$, то $X_n \xrightarrow{P} X$, $(n\to\infty)$, тобто із збіжності з ймовірністю 1 випливає збіжність за ймовірністю.

3. Довести, що

$$P(\{E:\lim X_n(E)=X(E)\})=1 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty}P(\{E:\bigcup_{n=N}^{\infty}(|X_n(E)-X(E)|>\varepsilon)\})=0$$

для будь-якого $\varepsilon>0$.

8*. Довести, що $X_n(E) \xrightarrow{P} X(E)$, $(n\to\infty)$, тоді й тільки тоді, коли $\lim_{m>n\to\infty}P(\{E:|X_m(E)-X_n(E)|>\varepsilon\})=0$ для будь-якого $\varepsilon>0$. (Критерій Коші збіжності за ймовірністю).

9*. Довести, що коли $M[X_n^2] < \infty$, $n \in N$, то $X_n(E) \xrightarrow{L^2} X(E)$, $(n \to \infty)$, тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{m>n\to\infty} M[(X_n - X_m)^2] = 0$.

10*. Довести, що:

1) коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} D[X_k] < +\infty$, то $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} D[X_k] \to 0$, $(n \to \infty)$;

2) коли дисперсії попарно незалежних випадкових величин X_k задовольняють умову $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} D[X_k] < +\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} P(\{E : \frac{1}{n} | \sum_{k=1}^{n} (X_k(E) - M[X_k]|) < \varepsilon\}) = 1$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

11*. Нехай $X_n(E)$, $E \in \Omega$, $n \in N$, – послідовність незалежних випадкових величин, для яких $M[X_n] = 0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} D[X_k] < +\infty$, а $Y_n(E) = \underset{m \le 2^n}{Sup} | \sum\limits_{k=1}^{m} X_k(E) |$. Довести, що:

1) $\frac{1}{m} | \sum\limits_{k=1}^{m} X_k(E) | \le 2^{-n+1} Y_n(E)$, коли $2^{n-1} \le m \le 2^n$;

2) якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\{E : 2^{-n} Y_n(E) > \varepsilon\}) < +\infty$ для довільного $\varepsilon > 0$, то $P(\{E : \lim 2^{-n} Y_n(E) = 0\}) = 1$;

3) $P(\{E : 2^{-n} Y_n(E) > \varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon^2 2^{2n}} \sum\limits_{k=1}^{2^n} D[X_k]$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(\{E : 2^{-n} Y_n(E) > \varepsilon\}) \le \frac{4}{3} \varepsilon^{-2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} D[X_k]$;

5) якщо $P(\{E : \lim 2^{-n} Y_n(E) = 0\}) = 1$, то

$$P(\{E : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k(E) = 0\}) = 1.$$

12*. Нехай $X_n(E)$, $E \in \Omega$, $n \in N$, – послідовність незалежних випадкових величин з однаковими функціями розподілу ймовірностей $F_{X_n}(x) = F_X(x)$, $n \in N$, і математичними сподіваннями $M[X_n] = a$, $n \in N$. Довести, що:

1) якщо

$$X_n^*(E)=\begin{cases}X_n, \text{коли } |X_n(E)|\le n,\\ 0, \quad \text{коли } |X_n(E)|>n,\end{cases}$$

а $X_n^{**}(E)=X_n(E)-X_n^*(E)$, то з ймовірністю 1 серед величин $X_n^{**}(E)$ лише скінченна кількість відмінних від нуля;

2) $P(\{E:\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_n^{**}(E)=0\})=1$;

3) $D[X_k^*]\le M[X_k^{*2}]=\int\limits_{-k}^{k}x^2\,dF_X(x)$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int\limits_{-n}^{n}x^2\,dF_X(x)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{k-1\le|x|<k}|x|\,dF_X(x)(k\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2})$;

5) $k\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le H<+\infty$, $k\in N$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{k-1\le|x|<k}|x|\,dF(x)=M[|X|]<+\infty$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}D[X_n^*]\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int\limits_{-n}^{n}x^2\,dF_X(x)<+\infty$;

8) $P(\{E:\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k^*(E)-M[X_k^*])=0\})=1$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}M[X_k^*])=\lim\limits_{n\to\infty}M[X_n^*]=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n}x\,dF_X(x)=a$;

10) $P(\{E:\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k^*(E)=a\})=1$;

11) $X_n(E)=X_n^*(E)+X_n^{**}(E)$, $E\in\Omega$, $n\in N$;

12) $P(\{E:\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k(E)=a)=1$.

13*. Нехай:

1) є довільна як завгодно довга серія незалежних випробувань, у кожному i –му з яких подія A відбувається з відносною частотою p_i, $i\in N$;

2) $P_m^*(A)=\frac{k(m)}{m}$ – можлива відносна частота події A, визначена за першими m випробуваннями, де $k(m)$ – кількість можливих відбувань події A у перших m випробуваннях;

3) $\Omega_1=\{A,\overline{A}\}$, $\widetilde{P}_1^*(A)=p$, $\widetilde{P}_1^*(\overline{A})=1-p$;

4) Ω_1^m – декартів m–ий степінь простору Ω_1, тобто $\Omega_1^m=\{E:E=(E_1,\ldots,E_m),\ E_i=A$ або $E_i=\overline{A},\ i\in\overline{1,m}\}$;

5) $\widetilde{P}_m^*(E)=\prod\limits_{k=1}^{k(m)} p_{i_k}\cdot\prod\limits_{k=1}^{m-k(m)}(1-p_{i_k})$, де $E=\Omega_1^m$,

$\{i_k:k=\overline{1,k(m)}\}=\{i:i\in\overline{1,m},\ E_i=A\}$, $\{i_k:k=\overline{1,(m-k(m))}\}=\{i:i\in\overline{1,m},\ E_i=\overline{A}\}$;

6) $Y_m(E)=P_m^*(A)=\dfrac{k(m)}{m}$, коли точка $E=\Omega_1^m$ має $k(m)$ координат, рівних A, і $m-k(m)$ координат, рівних $\overline{A}$.

Довести, що $Y_m(E)$, $E=\Omega_1^m$, $m\in N$, – послідовність випадкових величин, для яких правильні твердження:

I. $\widetilde{P}_m^*((|\,P_m^*(A)-\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}p_i\,|\geq\varepsilon))\leq\dfrac{1}{m\varepsilon^2}$;

II. Для того, щоб існувало число p, для якого $\widetilde{P}_m^*((|\,P_m^*(A)-p\,|\geq\varepsilon))\to 0$, коли $\varepsilon>0$ довільне досить мале число, а $m\to\infty$, необхідно і досить, щоб $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}p_i=p$.

14*. Нехай відносна частота p_i події A визначається за першими i випробуваннями.

1. Довести: 1) послідовність p_i, $i\in N$, *повільно коливається*, тобто $p_m-p_n\to 0$, коли $(n\to\infty)$, а $1<\dfrac{m}{n}\to 1$; 2) послідовність $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i$, $n\in N$, повільно коливається для будь-яких чисел $p_i\in(-h;h)$, $i\in N$, для деякого фіксованого $h>0$; 3) якщо послідовність p_i повільно коливається, то вона є збіжною тоді й тільки тоді, коли збіжна послідовність $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i$, $n\in N$.

2. З'ясувати, коли у твердженні II задачі **13** можна замінити вираз $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}p_i$ на вираз $\lim\limits_{m\to\infty}p_m$.

3. Навести приклад послідовності $p_i\in(0;1)$, $i\in N$, що повільно коливається, проте розбіжна.

4. Навести приклад стохастичного експерименту і послідовності незалежних випадкових величин, що визначають розбіжну послідовність відносних частот $p_i\in(0;1)$ певної події, для

якої існує $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}p_i = p$.

15. Нехай $X_k(E)$, $E\in\Omega$, $k\in N$, – послідовність незалежних випадкових величин, причому $X_{n^2}(E)=1$, $E\in\Omega$, а коли $k\neq n^2$, $n\in N$, то розподіл ймовірностей випадкової величини X_k задано таблицею

$x_i^{(k)}$	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$
$p_i^{(k)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}P(\{E:|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k(E)|<\varepsilon\})=1$ для будь-якого $\varepsilon>0$.

16. Нехай $X_k(E)$, $E\in\Omega$, $k\in N$, – послідовність дискретних незалежних випадкових величин.

1. Перевірити, чи застосовний до цієї послідовності закон великих чисел у формі: а) теореми Чебишова; б) теореми Маркова; в) теореми Колмогорова, коли розподіл ймовірностей X_k має вигляд:

1) $P(\{E:X_k(E)=x_i\})=p_k$, $i\in\overline{1,m}$, $k\in N$;

2) $P(\{E:X_k(E)=k^{\alpha}\})=P(\{E:X_k(E)=k^{-\alpha}\})=\frac{1}{2}$, $k\in N$, α – фіксоване число;

3) $P(\{E:X_k(E)=\sqrt{\ln k}\})=P(\{E:X_k(E)=-\sqrt{\ln k}\})=\frac{1}{2}$, $k\in N$.

4) розподілу Пуассона з параметром $\lambda_k=k^{\alpha}$, $k\in N$, α – фіксоване число;

5) біноміального розподілу в точках $0,1,\ldots,n_k$, де $n_k\le k^{\alpha}\ln k$, $k\in N$, α – фіксоване число;

6) геометричний розподіл з параметрами $p_k>0$ і $q_k=1-p_k$, $k\in N$.

2. З'ясувати, до якої величини збігається за ймовірністю випадкова величина $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$.

17. Нехай $X_k(E)$, $E\in\Omega$, $k\in N$, – послідовність неперервних незалежних випадкових величин.

Перевірити, чи застосовний до цієї послідовності закон великих чисел у формі: а) теореми Чебишова; б) теореми Маркова; в) теореми Колмогорова, коли:

1) розподіл ймовірностей на множині значень X_k рівномірний на відрізку $[a_k;b_k]$, причому $b_k - a_k = k^{\alpha}$, $k \in N$, α – фіксоване;

2) розподіл ймовірностей на множині значень X_k показниковий з параметром $\lambda_k = \frac{\ln^2(k+1)}{k}$, $k \in N$;

3) розподіл ймовірностей на множині значень X_k нормальний з параметрами $a = a_k$ і $\sigma = \sigma_k$, де: а) $\sigma_k = k^{\alpha}$; б) $\sigma_k = \frac{k^{\alpha}}{\ln^2(k+1)}$, $k \in N$, α – фіксоване.

18. Ймовірність відбування події A у кожному випробуванні дорівнює $\frac{1}{2}$. Чи можна стверджувати, що з ймовірністю, більшою за 0,97, число відбувань події A у 1000 незалежних випробуваннях лежить у межах від 400 до 600?

4.3. Центральна гранична теорема

Центральна гранична теорема була встановлена в 1890 р. російським вченим О.М. Ляпуновим. Ця теорема узагальнює локальну та інтегральну асимптотичні теореми Муавра–Лапласа, які можна дістати як наслідки центральної граничної теореми.

Теорема 1 (Центральна гранична теорема). Нехай X_1, X_2, …, X_n, … – незалежні випадкові величини, що мають скінченний третій абсолютний центральний момент $c_i^3 = M[|X_i - M[X_i]|^3]$, $i = 1,2,\ldots$ Тоді якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}} = 0, \tag{3.1}$$

то при $n \to \infty$ для довільного $x \in (-\infty, \infty)$ виконується співвідношення

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} M[X_i]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2[X_i]}} \in (-\infty, x) \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{3.2}$$

Це співвідношення свідчить: що при досить великому n наближено можна вважати, що випадкова величина $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами

$$M[Y_n]=\sum_{i=1}^{n}M[X_i],\ \text{та}\ \sigma[Y_n]=\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2[X_i]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Якщо випадкові величини X_i мають однакові розподіли ймовірностей з математичним сподіванням $M[X]=M$ і дисперсією $D[X_i]=\sigma^2[X_i]=\sigma^2$, причому існує абсолютний центральний момент $M[|X_i-M[X_i]|^3]=c^3$, то з (3.2) дістанемо

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nM}{\sigma\sqrt{n}}\in(-\infty,x)\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Виявляється, що коли незалежні випадкові величини X_1, X_2, …, X_n, … мають однакові розподіли ймовірностей, то умову обмеженості третього центрального моменту можна зняти. При цьому досить обмеженості $D[X_i]$. Таким чином для незалежних випадкових величин X_1, X_2, …, X_n, … з однаковими розподілами ймовірностей виконується центральна гранична теорема у такій формі.

Теорема 2. Нехай X_1, X_2, …, X_n, … – незалежні випадкові величини з однаковими розподілами ймовірностей і мають скінченну дисперсію σ^2. Тоді при $n\to\infty$ для довільних $x\in(-\infty,\infty)$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nM}{\sigma\sqrt{n}}\in(-\infty,x)\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{3.3}$$

Одна з найбільших загальних форм центральної граничної теореми була доведена О.М. Ляпуновим у 1900 р. Для її доведення О.М. Ляпунов розробив спеціальний метод характеристичних функцій.

Характеристичною функцією випадкової величини X називається функція

$$g_X(t)=M[e^{itX}],$$

де $i=\sqrt{-1}$, $e^{itX}=\cos tX+i\sin tX$, а $M[e^{itX}]=M[\cos tX]+iM[\sin tX]$.

Знаючи розподіл ймовірностей випадкової величини X, можна знайти її характеристичну функцію

$$g_X(t)=\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k \text{ або } g_X(t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$$

при дискретному розподілі ймовірностей і

$$g_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx \qquad (3.4)$$

при абсолютно неперервному.

Перетворення (3.4) називають *перетворенням Фур'є*. Як відомо, якщо $g_X(t)$ є результатом перетворення Фур'є, застосованого до $f_X(x)$, то $f_X(x)$ можна виразити через $g_X(t)$ за допомогою так званого *оберненого перетворення Фур'є*:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g_X(t)dt\,.$$

Приклад 3.1. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний зі щільністю

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Тоді

$$g_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2+2itx}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2+t^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx\,.$$

Можна переконатися, що похідна за змінною t від останнього інтеграла дорівнює нулю. Тому цей інтеграл не залежить від t, отже він дорівнює $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$, а тому $g_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Характеристична функція має такі властивості.

1°. Якщо $Y=aX$, то $g_Y(t)=g_X(at)$.

2°. Характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добуткові характеристичних функцій доданків.

Найбільш загальною необхідною й достатньою умовою, при якій залишається правильною центральна гранична теорема, є умова Ліндеберга: при будь-якому $\tau>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-m_k|>\tau B_n} |x-m_k|^2 f_{X_k}(x)dx=0\,,$$

де $m_k = M[X_k]$, $B_n = \left(\sum_{k=1}^{n} D[X_k] \right)^{1/2}$, $f_{X_k}(x)$ – щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X_k.

На основі формули (3.3) можна при великих n наближено обчислювати ймовірності різних подій, пов'язаних із сумою n незалежних випадкових величин з однаковими розподілами ймовірностей, використовуючи нормальний розподіл ймовірностей:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nM}{\sigma\sqrt{n}} \in (-\infty,\ x) \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (3.4)$$

При цьому абсолютна похибка $R_n(x)$ даного наближення має таку оцінку: $|R_n(x)| < \frac{0{,}8\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$, де $\rho = M[|X_n - M|^3]$, для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$ та $n \in N$. Зокрема, $\rho \le c$, коли $|X_k(E) - M|^3 \le c$, $E \in \Omega$, $k \in N$.

З (3.4) випливає формула

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in [a,b] \right) = \tilde{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nM}{\sigma\sqrt{n}} \in \left[\frac{a - nM}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{b - nM}{\sigma\sqrt{n}} \right] \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-nM}{\sigma\sqrt{n}}}^{\frac{b-nM}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (3.5)$$

При наявності комп'ютерних програмних засобів типу GRAN1, DERIVE і ін. інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-nM}{\sigma\sqrt{n}}}^{\frac{b-nM}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

досить легко визначається. Цей інтеграл можна також подати у вигляді

$$\tilde{\Phi}\left(\frac{b-nM}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\tilde{\Phi}\left(\frac{a-nM}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

де $\tilde{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi(x)$ – функція нормального розподілу ймовірностей з параметрами $m=0$, $\sigma=1$, і скористатися таблицями значень функції Лапласа $\Phi(x)$ (див. додаток 1).

Слід зазначити, що коли випадкові величини X_i мають різні математичні сподівання і дисперсії, то їх завжди можна нормувати, виконавши деяке лінійне перетворення так, щоб математичні сподівання й дисперсії здобутих в результаті випадкових величин були однаковими, причому $M=0$, $\sigma=1$.

Наведемо приклади застосувань центральної граничної теореми.

Нехай виконується вимірювання деякої фізичної величини. Необхідно опрацювати результати вимірювань.

Будь-яке вимірювання дає тільки наближене значення вимірюваної величини, оскільки на результат вимірювання вливає багато незалежних випадкових факторів (температура повітря, коливання приладу, вологість повітря та ін.). Кожний з цих факторів породжує „часткову похибку”. Проте оскільки таких факторів багато, то сукупна їх дія породжує вже помітну „сумарну похибку”. Розглядаючи сумарну похибку як суму великої кількості взаємно незалежних часткових похибок, можна стверджувати, що випадкова сумарна похибка має розподіл ймовірностей, близький до нормального. Практика підтверджує цей висновок. Таким чином, при математичному опрацюванні результатів вимірювань виходять із такого постулату: усереднена похибка великої кількості вимірювань є випадковою величиною з нормальним розподілом імовірностей.

Одним з наслідків центральної граничної теореми є ***інтегральна асимптоматична теорема Муавра-Лапласа***. Нехай $\mu_n=\mu_n(A)$ – кількість відбувань події A в серії з n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події A однакова і дорівнює $P(A)=p\in(0;1)$, $P(\overline{A})=q=1-p$. Тоді при $n\to\infty$ та будь-якому $y\in(-\infty;\infty)$

$$F_n(y)=\tilde{P}\left(\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\in(-\infty,\ y)\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-t^2/2}dt,$$

а тому для будь-яких чисел a і b, $a<b$,

$$\tilde{P}\left(a\le\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}<b\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a}^{b}e^{-t^2/2}dt \text{ при } (n\to\infty).$$

З доведеної інтегральної теореми Муавра-Лапласа випливають наближені рівності:

$$\widetilde{P}\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \in (-\infty,\ y)\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2} dt .$$

та

$$\widetilde{P}\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-t^2/2} dt .$$

Виявляється, що коли n досить велике, то абсолютна похибка цих наближень не залежить відповідно від y та a і b. Тому

$$\widetilde{P}\left(\mu_n \in (-\infty,\ m)\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_{m,n}} e^{-t^2/2} dt \tag{3.7}$$

і

$$\widetilde{P}\left(m_1 \le \mu_n \le m_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_{m_1,n}}^{y_{m_2,n}} e^{-t^2/2} dt , \tag{3.8}$$

де $y_{m,n} = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $y_{m_1,n} = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $y_{m_2,n} = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

При цьому абсолютна похибка наближення (3.7) дорівнює

$$| R_{m,n} | \le \frac{|1 - 2p| \cdot |1 - y_{m,n}^2|}{6\sqrt{npq}\,\sqrt{2\pi}} e^{-y_{m,n}^2/2} +$$

$$+ \frac{(0{,}13 + 0{,}18\,|1 - 2p|)}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2} \le \frac{H}{\sqrt{n}} .$$

за умови, що $\sqrt{npq} \ge 5$, де $H > 0$ не залежить від m і n.

Зазначимо, що коли відрізок $[m_1, m_2]$ симетричний відносно значення np, тобто $m_1 = np - \alpha$, $m_2 = np + \alpha$, то

$$\widetilde{P}(|\,P_n^*(A) - p\,| \le \alpha) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{n\alpha}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{n\to\infty}{\to} 1 \tag{3.9}$$

З рівності (3.8) випливає наступне твердження.

Локальна асимптотична теорема Муавра-Лапласа. Нехай $p = P(A)$ – імовірність події A, причому $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Тоді ймовірність того, що за умов схеми Бернуллі подія A в n випробуваннях відбудеться рівно m разів при досить великому n виражається наближено формулою Лапласа

$$\widetilde{P}(\mu_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} .$$

Приклад 3.2. Імовірність p того, що виріб не пройде перевірку ВТК, а отже вважатиметься бракованим, дорівнює $0{,}2$. Знайти ймовірність того, що серед 400 навмання відібраних вважатимуться бракованими від 70 до 100 виробів.

З умови випливає:

$$n = 400;\ m_1 = 70;\ m_2 = 100;\ p = 0{,}2;\ q = 0{,}8;$$

$$np = 400 \cdot 0{,}2 = 80;\ npq = 64;\ \sqrt{npq} = 8;$$

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100-80}{8} = 2{,}5;\ \ \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-80}{8} = -1{,}25 .$$

Таким чином, за даних умов ймовірність того, що серед 400 виробів виявляться неперевіреними від 70 до 100 виробів, наближено дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1{,}25}^{2{,}5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}8882.$

Розглянуті форми закону великих чисел можуть бути застосовані до розв'язування таких важливих для практичних застосувань задач:

1. Якщо проведено серію з n випробувань, то з якою ймовірністю усереднений результат цієї серії випробувань буде знаходитись в заданому околі теоретично очікуваного результату.

2. Якщо проведено серію з n випробувань, в якому околі теоретично очікуваного результату буде із вказаною ймовірністю знаходитись усереднений результат?

3. Треба, щоб усереднений результат із заданою ймовірністю знаходився в даному околі теоретично очікуваного результату. Скільки при цьому треба провести випробувань?

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Використовуючи характеристичні функції, знайти композицію нормальних розподілів ймовірностей $f_X(x)$ і $f_Y(y)$ відповідно з параметрами 0; σ_X і 0; σ_Y.

Подамо випадкову величину X у вигляді $X = \sigma_X U$, де U – нормована випадкова величина з нормальним розподілом ймовірностей, $M[U] = 0$, $\sigma[U] = 1$. Враховуючи приклад 3.1, дістаємо

$$g_X(t) = g_U(\sigma_X t) = e^{-\frac{(\sigma_X t)^2}{2}} .$$

Аналогічно $g_Y(t) = e^{-\frac{(\sigma_Y t)^2}{2}}$. Тоді для $Z = X + Y$

$$g_Z(t) = e^{-\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2} t^2}.$$

Остання функція є характеристичною для випадкової величини, що має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами $M[Z] = 0$ і $\sigma[Z] = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.

Таким чином, дістали композицію нормальних розподілів ймовірностей випадкових величин X і Y.

Вправа 2. Імовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює $\frac{1}{2}$. Скільки випробувань треба провести, щоб з імовірністю 0,9 частота $P_n^*(A)$ відхилялася від імовірності $P(A)$ не більше, ніж на $\alpha = 0{,}05$.

Застосовуючи (3.9), знаходимо

$$\tilde{P}\left(\left|P_n^*(A) - \frac{1}{2}\right| \le 0{,}05\right) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}9,$$

де $x = \alpha \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = 2 \cdot 0{,}05\sqrt{n} = 0{,}1\sqrt{n}$.

Розв’язавши за допомогою програми GRAN1 або DERIVE рівняння відносно x

$$\int_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}9,$$

використовуючи при цьому, якщо необхідно, метод поділу проміжка навпіл і т.п., знайдемо $x = 1{,}6$. Такий же результат матимемо, використовуючи таблиці значень функції Лапласа. Отже, $0{,}1 \cdot \sqrt{n} = 1{,}6$; $\sqrt{n} = 16$, $n = 256$, тобто слід провести не менше 256 випробувань. Цю задачу можна розв’язувати і за допомогою нерівності Чебишова. Щоб виконувалася нерівність

$$\tilde{P}\left(\left|P_n^*(A) - \frac{1}{2}\right| < 0{,}05\right) \ge 0{,}9,$$

треба, щоб виконувалася нерівність (з врахуванням, що $p = \frac{1}{2}$,

$q = \frac{1}{2}$, $M[P_n^*(A)] = p = \frac{1}{2}$, $D[P_n^*(A)] = \dfrac{pq}{n} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{n}$)

$$\tilde{P}\left(\left|P_n^*(A)-\frac{1}{2}\right|\ge 0{,}05\right)\le \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n\cdot(0{,}05)^2}=\frac{0{,}25}{n\cdot 0{,}0025}\le 0{,}1\,,$$

тобто повинно бути $n>1000$. Як бачимо, результат досить завишений, чого й слід було сподіватися, оскільки в нерівності Чебишова не враховується конкретний вид розподілу ймовірностей. Ця нерівність виконується при будь-якому розподілі ймовірностей.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $M\left[\left|X-M[X]\right|^3\right]<\infty$, то і $\sigma[X]<+\infty$.

2. Якщо X_k, $k\in N$, – незалежні випадкові величини із скінченними дисперсіями, то $M[Y_n]=0$, а $D[Y_n]=1$, коли

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-M[X_k])}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}D[X_k]}}\,.$$

3. Якщо Y_n з твердження 2, а $F_{Y_n}(x)$ – функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y_n, то

$$F_{Y_n}(x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ \text{ при }\ (n\to\infty)\,.$$

4. Якщо незалежні випадкові величини X_k мають однакові математичні сподівання і дисперсії, причому $D[X_k]<+\infty$, то

$$F_{Y_n}(x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,,\ \text{де}\ Y_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k-nM\right),\ \text{а}\ M=M[X_k].$$

5. Характеристична функція завжди є перетворенням Фур’є відповідної щільності розподілу ймовірностей.

6. Якщо $g_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f_X(x)dx$, то $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}g_X(t)dt$.

7. Характеристична функція суми випадкових величин дорівнює сумі характеристичних функцій цих величин.

8. Для будь-яких випадкових величин X_k, $k\in N$, правильна рівність

$$P\left(\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - nM\right) \in [a,b]\right\}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

9. Локальна асимптотична теорема Муавра–Лапласа є наслідком центральної граничної теореми.

10. $\widetilde{P}\left(\left|P_n^*(A) - P(A)\right| \ge \varepsilon\right) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \approx 0$, коли n досить велике.

2. Нехай $X(E)$, $E \in \Omega$, – випадкова величина, для якої $M[X] = 0$ і $D(X) = \sigma^2$, $g_X(t) = M[e^{itX}] = u(t) + iv(t)$ – характеристична функція випадкової величини X. Довести, що:

1) $|e^{iu} - 1| \le \min\{2, |u|\}\ \forall u \in (-\infty; +\infty)$;

2) $\left|\int\limits_0^{\theta} (e^{iu} - 1)\,du\right| = |e^{i\theta} - 1 - i\theta| \le \min\{2|\theta|, \frac{\theta^2}{2}\}$, $\theta \in (-\infty; +\infty)$;

3) $\left|\int\limits_0^{t} (e^{iu} - 1 - iu)\,du\right| = \left|e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2}\right| \le \min\{t^2, \frac{|t|^3}{6}\}$, $t \in (-\infty; +\infty)$;

4) $e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2}(1 + \varepsilon(t))$, де $|\varepsilon(t)| \le \min\{\frac{|t|}{3}, 1\}$, $t \in (-\infty; +\infty)$, причому $\varepsilon(t)$ – неперервна функція на $(-\infty; +\infty)$ і $0(t \to 0)$;

5) $g_X(t) = M[e^{itX}] = 1 - \frac{t^2}{2}(\sigma^2 + \varepsilon_1(t))$, де $\varepsilon_1(t) \to 0$, коли $t \to 0$;

6) $g_{\frac{X}{\sqrt{n}}}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n}(\sigma^2 + \varepsilon_n)$, де $\varepsilon_n \to 0\ \ (n \to \infty)$;

7) $\operatorname{Re} g_X(t) = M[\cos tX]$, $\operatorname{Im} g_X(t) = M[\sin tX]$;

8) $|g_X(t)| \le 1\ \forall t \in (-\infty; +\infty)$, $g_X(0) = 1$;

9) $g_X(-t) = \overline{g_X(t)}$;

10) $g_{aX+b}(t) = e^{itb} g_X(at)$ для будь-яких фіксованих чисел a і b;

11) $|g_X(t + \Delta t) - g_X(t)| \le \sqrt{2(1 - \operatorname{Re} g_X(\Delta t))}$;

12) функція $g_X(t)$ рівномірно неперервна на числовій прямій $(-\infty; +\infty)$;

13) $u(t) = \operatorname{Re} g_X(t)$ – парна функція, а $v(t) = \operatorname{Im} g_X(t)$ – непарна;

14) $0 \le 1 - u(2t) \le 4(1 - u(t))$, $t \in (-\infty; +\infty)$.

3. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, – незалежні випадкові величини, а $g_X(t)$ та $g_Y(t)$ – характеристичні функції цих величин.

Довести, що $g_{X+Y}(t) = g_X(t) g_Y(t)$. Узагальнити це твердження на випадок довільної скінченної кількості випадкових величин.

4. Нехай випадкові величини $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, мають однакові характеристичні функції: $g_X(t) = g_Y(t) = \varphi(t)$. Нехай також K – клас функцій $f(x)$, для яких $M[f(X)] = M[f(Y)]$. Довести, що:

1) K – лінійний клас, тобто $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \in K$, коли $f_1 \in K$ і $f_2 \in K$, а α і β – довільні фіксовані числа;

2) для будь-якого фіксованого $t \in (-\infty; +\infty)$ функція $f(x) = e^{itx} \in K$;

3) будь-яка обмежена неперервна функція $f(x) \in K$ (скористатися теоремою Вейєрштраса про рівномірне наближення на відрізку $[a;b]$ многочленами вигляду $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{it_k x}$);

4) $M[f(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dF_X(x)$, а $M[f(Y)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dF_Y(y)$;

5) якщо $M[f(X)] = M[f(Y)]$ для будь-якої обмеженої неперервної функції $f(x)$, то $F_X(b) - F_X(a) = F_Y(b) - F_Y(a)$ для будь-якого проміжку $[a;b)$, а тому функції розподілу ймовірностей F_X та F_Y задають однакові ймовірнісні міри на σ – алгебрі $B(R^1)$. Тоді кажуть, що *розподіли ймовірностей випадкових величин X та Y однакові*.

5. Для заданої щільності $f_X(x)$ розподілу ймовірностей випадкової величини X знайти її характеристичну функцію $g_X(t)$:

1) $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$; 2) $f_X(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$, $a > 0$;

3) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, \text{коли } 0 < x < a, \\ 0, \text{коли } x \le 0 \text{ *або* } x \ge a, a > 0; \end{cases}$

4) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, \text{коли } |x| < a, \\ 0, \quad \text{коли } |x| \ge a; \end{cases}$

5) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}(1-\frac{|x|}{a}), \text{ коли } |x|<a, \\ 0, \quad \text{коли } |x|\ge a,\ a>0,\ x>0;\end{cases}$

6) $f_X(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos ax}{ax^2}$, $a>0$; 7) $f_X(x)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$, $a>0$;

8) $f_X(x)=\frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x}$, $a>0$, $x>0$; 9) $f_X(x)=\frac{1}{\pi\, chx}$.

6. Нехай випадкова величина $X(E)$, $E\in\Omega$, має дискретний розподіл ймовірностей: $P(X=x_k)=p_k\ge 0$, $\sum\limits_k p_k=1$. Знайти характеристичну функцію $g_X(t)$. Розглянути випадки, коли розподіл ймовірностей задано таблицею (визначити значення c):

1)

x_k	-2	-1	0	1	2
p_k	0,1	0,3	c	0,3	0,1

2)

x_k	1	2	3
p_k	c^2	$1{,}02-0{,}8c$	0,1

7. Нехай $X_k(E)$, $E\in\Omega$, $k\in N$, – незалежні, випадкові величини з однаковими розподілами ймовірностей, для яких $M[X_k]=0$ і $D[X_k]=1$, $k\in N$, а $F_{Y_n}(x)$ – функція розподілу ймовірностей випадкової величини $Y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$, $n\in N$. Довести, що:

1) $g_{Y_n}(t)=\prod\limits_{k=1}^{n}g_{\frac{X_k}{\sqrt{n}}}(t)=(1-\frac{t^2(1+\varepsilon_n)}{2n})^n$, де $\varepsilon_n\to 0$ $(n\to\infty)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}g_{Y_n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$;

3) $F_{Y_n}(x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $(n\to\infty)$ (скористатися теоремою про те, що $F_{Y_n}(x)$ збігається до неперервної функції $F_Y(x)$ тоді й тільки тоді, коли $g_{Y_n}(t)\to g_Y(t)$, $(n\to\infty)$, для кожного $t\in(-\infty;+\infty)$).

8. Нехай X_k – індикатор відбування події A у $k-$му випробуванні, причому $p=P(A)$, $1-p=q=P(\overline{A})$. 1. Довести, що:

1) $M[\frac{X_k-p}{\sqrt{pq}}]=0$, $D[\frac{X_k-p}{\sqrt{pq}}]=1$, $M[|\frac{X_k-p}{\sqrt{pq}}|^3]=\sqrt{\frac{q^3}{p}}+\sqrt{\frac{p^3}{q}}$;

2) $\sqrt{\frac{n}{pq}}(\frac{\mu_n}{n}-p)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k-p}{\sqrt{pq}}$, де μ_n – кількість відбувань події A у n незалежних випробуваннях;

3) $F_{Y_n}(x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $(n\to\infty)$, де $Y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k-p}{\sqrt{pq}}$;

4) $\tilde{P}(\sqrt{\frac{n}{pq}}(\frac{\mu_n}{n}-p)\in(-\infty,\ x))\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$,

причому абсолютна похибка цього наближення $|R_n(x)|<\frac{q^2+p^2}{\sqrt{npq}}$ для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ та $n\in N$.

2. Дістати оцінку наближення:

1) $\tilde{P}(a<\sqrt{\frac{n}{pq}}(\frac{\mu_n}{n}-p)<b)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$;

2) $\tilde{P}(\mu_n<m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y_{m,n}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, де $y_{m,n}=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$;

3) $\tilde{P}(\mu_n=m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{m-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{m+1-np}{\sqrt{npq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$;

4) $\tilde{P}(\mu_n=m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{npq}}e^{\frac{(m-np)^2}{2npq}}$;

5) $\tilde{P}(|\frac{\mu_n}{n}-p|\le\varepsilon)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

9. Процент браку у партії товару складає 1%.

1. Скільки одиниць товару слід відібрати для перевірки якості, щоб з ймовірністю $0{,}95$ можна було стверджувати, що у навмання вибраній такій кількості одиниць товару процент бракованих виробів відрізняється від 1% не більше, ніж на $0{,}5\%$.

2. Якщо відібрано 200 одиниць товару, то знайти ймовірність того, що $|P_n^*(A)-0{,}01|<0{,}001$.

3. Якщо відібрано 200 одиниць товару, то знайти $\varepsilon > 0$ таке, щоб з ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що $|P_n^*(A) - P(A)| < \varepsilon$.

10. Нехай t – навмання вибране число з проміжку $[0;1)$, а $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{10^k}$ – десятковий розклад цього числа , де $\alpha_k(t) \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Нехай $X_n(t,5)$ – кількість цифр $\alpha_k(t) = 5$, коли $1 \le k \le n$, а $Y_n(t) = \frac{X_n(t,5)}{n}$.

1. Довести, що для кожного $n \in N$ функція $Y_n(t)$, $t \in [0;1) = \Omega$ є дискретною випадковою величиною стосовно ймовірнісного простору $(\Omega, \mathscr{B}(R^1), P)$, де P – міра Лебега.

2. Знайти функцію $F_{Y_n}(x)$ розподілу ймовірностей випадкової величини Y_n та характеристичну функцію $g_{Y_n}(t)$ для кожного $n \in N$.

3. З'ясувати, чи є послідовність $Y_n(t)$, $n \in N$, збіжною за мірою P до якоїсь випадкової величини $Y(t)$, $t \in \Omega = [0;1)$.

4. Знайти ймовірність $p = P(A_k)$ події A_k, яка полягає в тому, що серед десяткових цифр навмання вибраного числа $x \in [0;1)$ k-та цифра дорівнює 5. Окрім цього: 1) знайти кількість n випробувань, при якій з ймовірністю 0,95 можна стверджувати, що $|P_n^*(A_k) - P(A_k)| < 0{,}05$; 2) якщо $n = 1000$, то знайти ймовірність того, що $|P_n^*(A_k) - P(A_k)| < 0{,}05$; 3) якщо $n = 1000$, то знайти таке $\varepsilon > 0$, щоб з ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що $|P_n^*(A_k) - P(A_k)| < \varepsilon$.

5. З'ясувати, чи зміняться по суті результати завдань 1-4, коли число 5 замінити будь-яким іншим числом $\alpha \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

11. Ймовірність позитивного результату в кожному випробуванні дорівнює 0,85.

1. Скільки випробувань треба провести, щоб з ймовірністю не меншою, ніж 0,97 можна було чекати, що не менше ніж 200 разів випробування дадуть позитивний результат.

2. Якщо проведено 1000 випробувань, то знайти ймовірність, того, що не менше ніж 200 з них дали позитивний результат.

3. Якщо проведено 1000 випробувань, то знайти таку кількість m, щоб з ймовірністю не меншою за 0,97 можна було стверджувати, що в цих m випробуваннях дістали позитивний результат.

РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

5.1. Основні задачі і поняття математичної статистики. Статистичні наближення функцій та щільностей розподілів ймовірностей

До основних задач математичної статистики належать задачі про наближене визначення розподілів ймовірностей та їх параметрів на основі статистичних даних.

Із задачами оцінки параметрів розподілу ймовірностей за статистичними даними тісно пов'язані задачі про перевірку статистичних гіпотез. Для відповіді на питання, суперечать чи ні статистичні дані гіпотезі про те, що розподіл ймовірностей має певний вигляд або певні числові характеристики, звертаються до спеціальних методів підтвердження чи спростування гіпотез на основі відповідного аналізу статистичних даних. Крім того, в математичній статистиці розглядаються задачі про встановлення взаємозв'язків між кількома характеристиками об'єктів, узгодження спостережених значень з теоретично передбачуваними, деякі задачі теорії прийняття рішень тощо.

У подальшому вважатимемо, що спостереження (випробування) взаємно незалежні і що досліджується деяка випадкова величина X.

В результаті кожного i*-го випробування із множини можливих значень випадкової величини* X *навмання* (*незалежно від спостерігача*) *вибирається одне єдине* (*спостережене*) *значення* $x_{cn\,i}$.

Приклад 1.1. Якщо випробування полягає в підкиданні шестигранного кубика, а випадкова величина X – кількість очок, що випадає на верхній грані кубика, то множина можливих значень випадкової величини X містить шість елементів: $\Omega_X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, тобто щоразу $x_{cn\,i} \in \Omega_X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

Скінченну множину спостережених значень $x_{cn1}, x_{cn2}, \ldots, x_{cnn}$ випадкової величини X називають *вибіркою об'єму* n.

Нехай проведено n випробувань, в результаті яких дістали вибірку $\{x_{cn1}, x_{cn2}, \ldots, x_{cnn}\}$. Елементи вибірки $\{x_{cn1}, x_{cn2}, \ldots, x_{cnn}\}$ називають *варіантами*, а впорядкований за зростанням набір варіант – *варіаційним рядом*. Якщо серед n спостережень можливе значення x_1 спостерігалось n_1 разів, значення x_2 – n_2 разів і т.д., значення x_k – n_k разів, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то число $P_n^*(\{x_i\}) = \dfrac{n_i}{n}$ є статистичною ймовірністю події $\{x_i\}$ (значення x_i).

Відповідність між окремими можливими значеннями випадкової величини X та їх статистичними ймовірностями, подану у вигляді табл. 1.1, називають *рядом дискретного розподілу* статистичних ймовірностей для даної вибірки.

Табл. 1.1

Можливі значення випадкової величини	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Статистичні ймовірності $P_n^*(\{x_i\})$	$P_n^*(\{x_1\})$	$P_n^*(\{x_2\})$	$\cdots$	$P_n^*(\{x_k\})$

Якщо на координатній площині нанести точки $(x_i, P_n^*(\{x_i\})$ і сполучити їх ламаною лінію, то дістанемо *многокутник розподілу статистичних ймовірностей* або *полігон відносних частот* (Рис. 1.1).

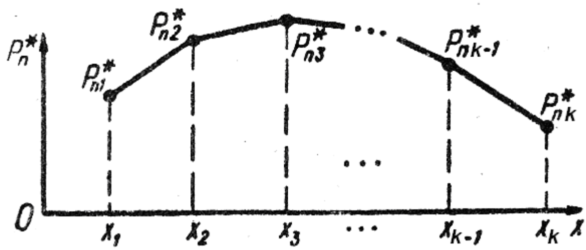


Рис. 1.1

Якщо спостерігається неперервна випадкова величина X, або випадкова величина із скінченною множиною можливих значень, але досить щільно розміщених на деякому проміжку $[a,b)$, так що на практиці таку дискретну випадкову величину наближено можна розглядати як неперервну (див. вправа 2 із п. 1.6), і число спостережень – n досить велике, то й довжина вибірки – k може виявитися досить великою. Тоді подання статистичного матеріалу у вигляді табл. 1.1 стає досить громіздким і практично недоцільним і непридатним. В такому разі проміжок $[a,b)$, в якому знаходяться всі спостережені значення випадкової величини X, ділять на практично прийнятну кількість часткових проміжків $[x_{i-1}, x_i)$, $i \in \overline{1,k}$, $x_0 = a$, $x_k = b$ однакової довжини h. Якщо a і b відповідно нижня й верхня межі проміжку, в якому знаходяться всі можливі значення досліджуваної випадкової величини, а k – кількість часткових проміжків, то

$$h = \frac{b-a}{k}.$$

На практиці часто покладають $a = \min\limits_{1 \le i \le n} x_{cni}$, $b = \max\limits_{1 \le i \le n} x_{cni} + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – деяке додатне число.

Число проміжків доцільно брати порядку 10–20. Іноді для визначення k використовують формулу Стерджеса

$$k = [1 + 3{,}322 \ln(n)],$$

де n – об’єм вибірки.

Для кожного часткового проміжку $[x_{i-1}; x_i)$ підраховують

n_i – кількість спостережених значень, які лежать у цьому проміжку, і статистичну ймовірність $P_n^*([x_{i-1}, x_i)) = \dfrac{n_i}{n}$.

Здобуті дані подають у вигляді табл. 1.2, в якій вказують часткові проміжки і відповідні статистичні ймовірності.

Табл. 1.3

Частковий інтервал $I_i = [x_{i-1}, x_i)$	$[x_0, x_0 + h)$	$[x_0 + h, x_0 + 2h)$	$\dots$	$[x_0 + (k-1)h, x_0 + kh)$
Статистична ймовірність $P_n^*([x_{i-1}, x_i))$	$P_n^*([x_0, x_0 + h))$	$P_n^*([x_0 + h, x_0 + 2h))$	$\dots$	$P_n^*([x_0 + (k-1)h, x_0 + kh))$

Таку таблицю називають *інтервальним (неперервним) розподілом статистичних ймовірностей.*

Функцію $f_n^*(x) = \begin{cases} \dfrac{P_n^*([x_{i-1}, x_i))}{h} & \text{при } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{при } x \notin [x_0, x_k), \end{cases}$

називають *щільністю розподілу статистичних ймовірностей* (Рис. 1.2) (див. Розділ 1, § 1.10), а графік цієї функції – *гістограмою*.

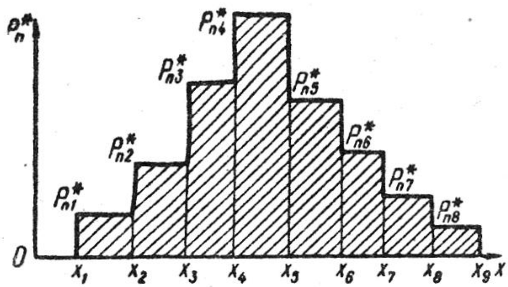


Рис. 1.2

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{k} P_n^*([x_{i-1}, x_i)) = \sum_{x \in [x_{i-1}, x_i),\, i \in \overline{1,\, k}} f_n^*(x) h = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_n^*(x) dx = 1.$$

Середнє арифметичне спостережених значень обчислюється за формулою

$$\bar{x}_{арифм} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{спі} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_n^*(\{x_i\}).$$

Середнє гармонійне обчислюється за формулою

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{cn.i}}}.$$

Якщо n_i, $i \in \overline{1, k}$ – довжина деякого проміжка, а x_i – швидкість, з якою на цьому проміжку рухається деяке тіло, то середня швидкість, з якою це тіло пройде всі k проміжків, є середнім гармонійним значень x_i.

Середнє геометричне

$$\bar{x}_{геом} = \left(\prod_{i-1}^{n} x_{cni} \right)^{\frac{1}{n}}$$

використовується для усереднення набору дробів, темпів росту та ін. (Логарифм середнього геометричного дорівнює середньому арифметичному логарифмів спостережених значень $x_{cn\,i}$).

Середнє квадратичне

$$\bar{x}_{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P_n^*(\{x_i\})$$

використовується для розрахунку показників розсіювання статистичних ймовірностей (дисперсії і середнього квадратичного відхилення). Нагадаємо в зв'язку з цим, що $D[X] = M[X^2] - M^2[X]$.

Коли для одного й того самого варіаційного ряду існують усі вказані середні, то

$$\bar{x}_{гарм} \le \bar{x}_{геом} \le \bar{x}_{арифм} \le \bar{x}_{\sigma}.$$

В статистичному аналізі використовують також інші числові характеристики розподілу статистичних ймовірностей.

Мода – це варіанта, якій відповідає найбільша (у певному околі цієї варіанти) статистична ймовірність в ряді розподілу статистичних ймовірностей. Таких варіант може бути кілька.

Медіана – це значення, частота попадання лівіше від якого дорівнює частоті попадання правіше від нього. Слід зазначити, що медіана має зміст не для будь-яких розподілів частот (наприклад, при розподілі статистичних ймовірностей на множині $\{x_1, x_2\}$ у співвідношенні 0,1 і 0,9 медіана втрачає зміст).

Розмах вибірки дорівнює різниці між максимальним і мінімальним значеннями сукупності спостережених значень:

$$R = \max_{1 \le i \le n} x_{cn\,i} - \min_{1 \le i \le n} x_{cn\,i}\,.$$

Функцією розподілу статистичних ймовірностей (на множині значень випадкової величини X) називають статистичну ймовірність попадання у множину $(-\infty, x)$, тобто (див. п. 1.11, п. 1.12 Розділ 1).

$$F_{nX}^{*}(x) = P_{nX}^{*}((-\infty, x))\,. \tag{2.1}$$

Згідно із законом великих чисел при досить великій кількості спостережень статистичну ймовірність $P_{nX}^{*}((-\infty, x))$ можна вважати наближеним значенням ймовірності $P_X((-\infty, x))$ без великого ризику мати значну похибку. Отже, при досить великій кількості спостережень функція розподілу статистичних ймовірностей $F_{nX}^{*}(x)$ досить добре наближає функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$. Це саме стосується й гістограми, яка при досить великій кількості спостережень і досить малих часткових інтервалах $[x_{i-1}, x_i) = [x_0 + (i-1)h, x_0 + ih)$, $i = \overline{1, k}$, досить добре наближає графік функції $y = f_X(x)$, де $f_X(x)$ – щільність абсолютно неперервного розподілу ймовірностей випадкової величини X.

Для дискретної випадкової величини X з розподілом статистичних ймовірностей $P_{nX}^{*}(\{x_k\}) = p_k$, маємо: $F_{nX}^{*}(x) = \sum\limits_{x_k < x} p_k$.

При абсолютно неперервному розподілі статистичних ймовірностей значення функції розподілу обчислюють у кінцях часткових інтервалів $[x_{i-1}, x_i) = (x_0 + (i-1)h,\ x_0 + ih)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Побудувавши на площині точки

$$(x_0, 0),\ (x_0 + h, P_n^{*}([x_0, x_0 + h))),$$

$$(x_0 + 2h, P_n^{*}([x_0, x_0 + h)) + P_n^{*}([x_0 + h, x_0 + 2h))),\ \ldots,$$

$$(x_0 + kh, P_n^{*}([x_0, x_0 + h)) + P_n^{*}([x_0 + h, x_0 + 2h)) + \ldots +$$

$$+ P_n^{*}([x_0 + (k-1)h, x_0 + kh)))$$

і сполучивши їх ламаною лінією, дістанемо графік функції неперервного розподілу статистичних ймовірностей (Рис. 1.3).

При цьому $F_{nX}^{*}(x) = 0$, коли $x \le x_0$, і $F_{nX}^{*}(x) = 1$, коли $x \ge x_k$.

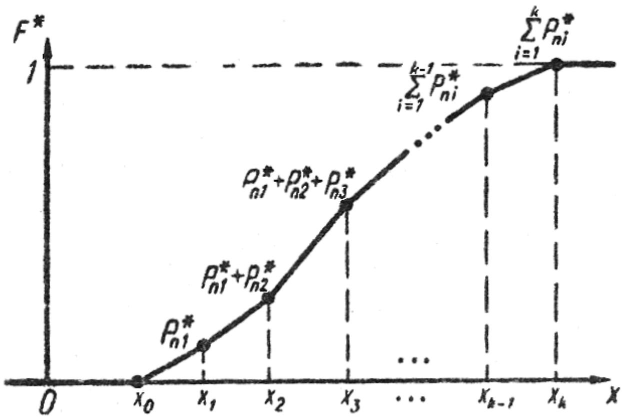


Рис. 1.3

Якщо випадкова величина X дискретна, але множина її значень досить щільна в деякому інтервалі $[a,b)$ і кількість можливих значень випадкової величини X дуже велика (див. п. 1.6, вправа 2), то функцію розподілу ймовірностей на множині значень такої випадкової величини також будують за відповідним інтервальним розподілом, замінюючи в такий спосіб дискретну випадкову величину неперервною, а дискретний розподіл статистичних ймовірностей неперервним, також вважаючи неперервним рівномірним розподіл статистичних ймовірностей в кожному частковому інтервалі $[x_{i-1}, x_i)$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Побудувати ряд розподілу статистичних ймовірностей і многокутник розподілу статистичних ймовірностей (полігон відносних частот) для вибірки, яку утворюють зафіксовані відхилення (вздовж лінії стріляння) точки падіння снаряда від цілі:

$-20,\ 20, -10,\ 20,\ 10,\ 20, -50, -20, -10,\ 40, -20, -30, -10,\ 10,\ 20, -40,\ 50,$

$-10,\ 10,\ 50.$

Варіаційний ряд має вигляд

$-50, -50, -40, -30, -20, -20, -10, -10, -10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 20,\ 20,\ 20, 20,\ 30,\ 40,$

$50, 50.$

Ряд дискретного розподілу статистичних ймовірностей подано в табл. 1.3.

Табл. 1.3

Варіанта (x_i)	-50	-40	-30	-20	-10	10	20	30	40	50
Статистична ймовірність $P_n^*(\{x_i\})$	0,1	0,05	0,05	0,1	0,15	0,15	0,2	0,05	0,05	0,1

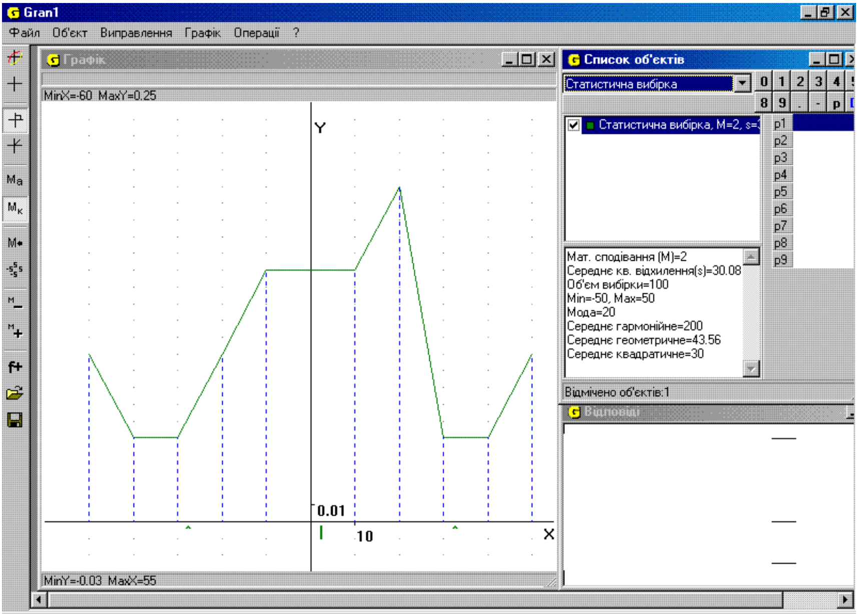


Рис. 1.4

Розподіл статистичних ймовірностей у розглянутому прикладі дещо нагадує нормальний розподіл ймовірностей (Рис. 1.4), проте оскільки вибірка не дуже велика, ця схожість не сильна. Насправді випадкове відхилення вздовж лінії стріляння точки падіння снаряда від цілі має нормальний розподіл ймовірностей.

Вправа 2. При визначенні похибки вимірювального приладу зроблено 40 вимірювань, при яких зафіксовано такі похибки (Табл. 1.4).

Табл. 1.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-2,5	3	4	2	0,5	-1	2	4	-4	0

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-0,5	-0,5	1	0,5	2,5	-0,5	2	1	-4	-2

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-1	1,5	0,5	4	-1,5	-1	0	1	0	1

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	-1,5	1,5	0,5	0,5	-0,5	-1,5	-0,5	-1	2	0,5

За цими даними побудувати інтервальний розподіл статистичних ймовірностей та гістограму, якщо $k = 8$.

Інтервальний розподіл статистичних ймовірностей для розглядуваного прикладу подано в табл. 1.5. Відповідну гістограму зображено на Рис. 1.5.

Табл. 1.5

[–4;–3)	[–3;–2)	[–2;–1)	[–1;0)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4,001)
$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{4}{40}$

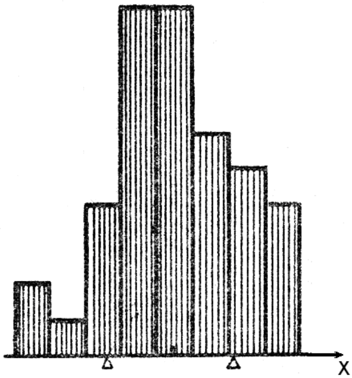


Рис. 1.5

Вправа 3. 20 навмання вибраних учнів виконують стрибки у висоту. При цьому зафіксовано такі результати (в сантиметрах) (табл. 1.6).

Табл. 1.6

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	137	140	143	135	142	139	141	137	142	131
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	145	138	141	143	130	138	140	135	137	138

Ряд розподілу статистичних ймовірностей у даному прикладі має вигляд (табл. 1.7):

Табл. 1.7

x_i	130	131	135	137	138	139	140	141	142	143	145
$P_n^*(\{x_i\})$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$

Многокутник розподілу статистичних ймовірностей (полігон відносних частот) подано на Рис. 1.6, а. Зазначимо, що за допомогою програмного засобу GRAN1 статистичні ймовірності

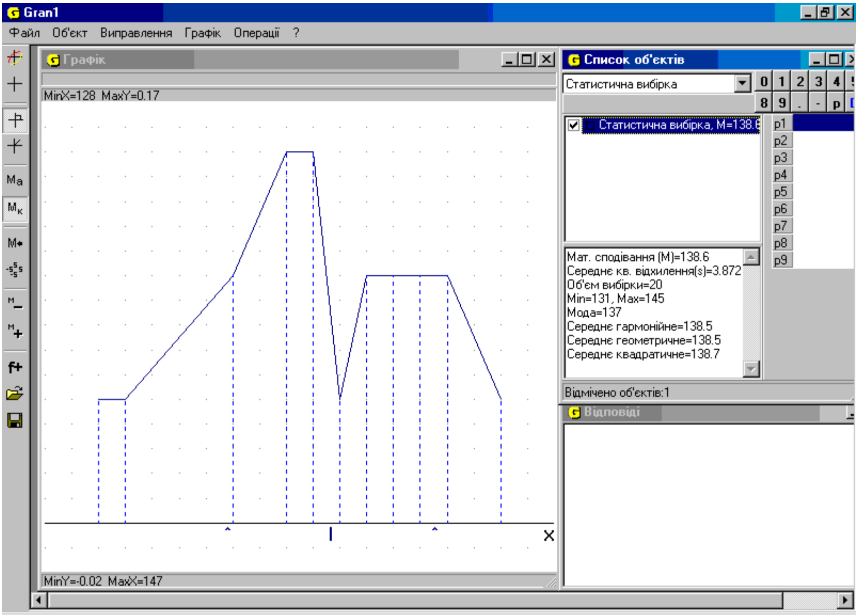


Рис. 1.6,а

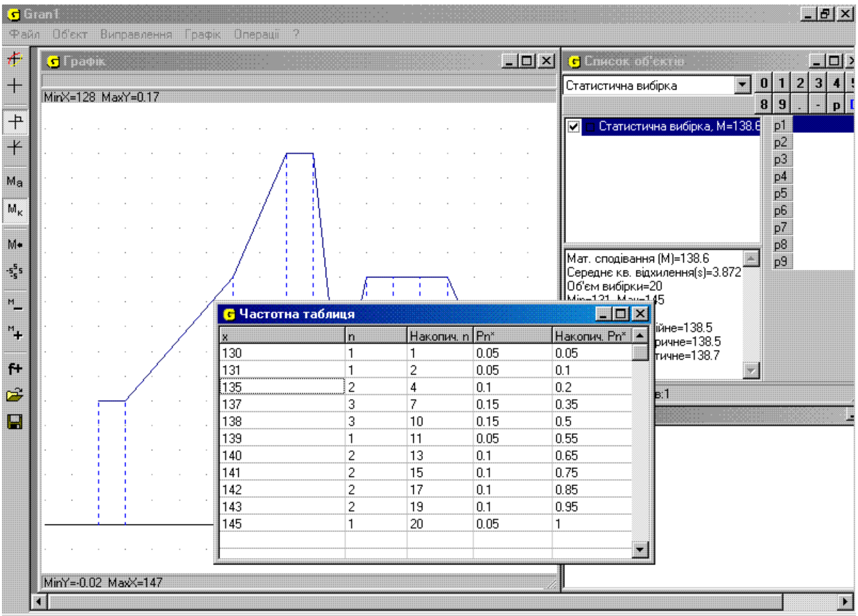


Рис. 1.6, б

(відносні частоти) окремих спостережених значень можна визначити за частотною таблицею (Рис. 1.6, б) або за многокутником розподілу статистичних ймовірностей (полігоном відносних частот), підвівши курсор у потрібні точки на графіку (Рис. 1.6, а).

На Рис. 1.7 подано графік функції розподілу статистичних ймовірностей та окремі числові характеристики розподілу статистичних ймовірностей для вибірки, поданої в таблиці 1.6.

Вправа 4. Перевірено 10 навмання вибраних класів. Кількість відмінників у кожному подано в табл. 2.1.

Табл. 2.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5	8	3	4	5	1	6	4	2	3

Побудувати функцію розподілу статистичних ймовірностей кількості відмінників та її графік.

Досліджувана випадкова величина дискретна (кількість відмінників у навмання вибраному класі) і набуває лише цілочисельних значень.

Згідно з означенням $F_n^*(x)$, за наведеними даними спостережень маємо

$$F_{10}^*(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 1; \\ 0{,}1 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}2 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}4 \ \textit{при} \ 3 < x \le 4; \\ 0{,}6 \ \textit{при} \ 4 < x \le 5; \\ 0{,}8 \ \textit{при} \ 5 < x \le 6; \\ 0{,}9 \ \textit{при} \ 6 < x \le 8; \\ 1 \ \textit{при} \ 8 < x. \end{cases}$$

При цьому $F_{10}^*(x)$ визначає статистичну ймовірність події $(-\infty, x)$ (відносну частоту попадання значень випадкової величини X на проміжок $(-\infty, x)$) для будь-якого $x \in (-\infty; \infty)$.

Так, для $x = 5{,}5$ серед усіх десяти проведених спостережень є 8 спостережень, в яких зафіксовано значення випадкової величини X менші, ніж $5{,}5$, тобто які попадають на проміжок $(-\infty; 5{,}5)$. Тому $F_{10}^*(5{,}5) = P_{10}^*(-\infty; 5{,}5) = \dfrac{8}{10}$.

Той самий результат дістанемо, коли взяти будь-яке x з проміжка $(5{,}6]$.

Графік функції $F_{10}^*(x)$ подано на Рис. 1.8.

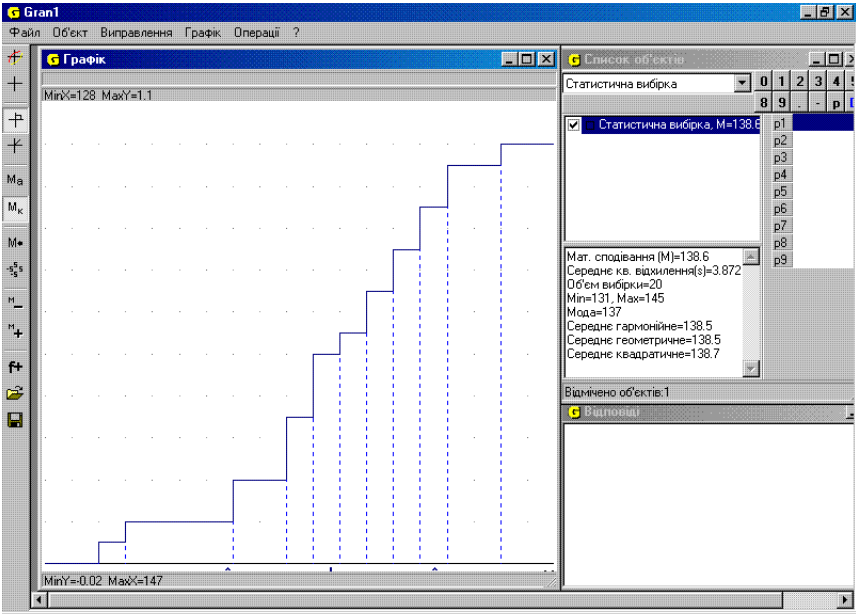

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=128 MaxY=1.1
MinY=-0.02 MaxX=147
Список об'єктів
Статистична вибірка
Статистична вибірка, M=138.6
Мат. сподівання (M)=138.6
Середнє кв. відхилення(s)=3.872
Об'єм вибірки=20
Min=131, Max=145
Мода=137
Середнє гармонійне=138.5
Середнє геометричне=138.5
Середнє квадратичне=138.7
Відмічено об'єктів:1
Відповіді

Рис. 1.7

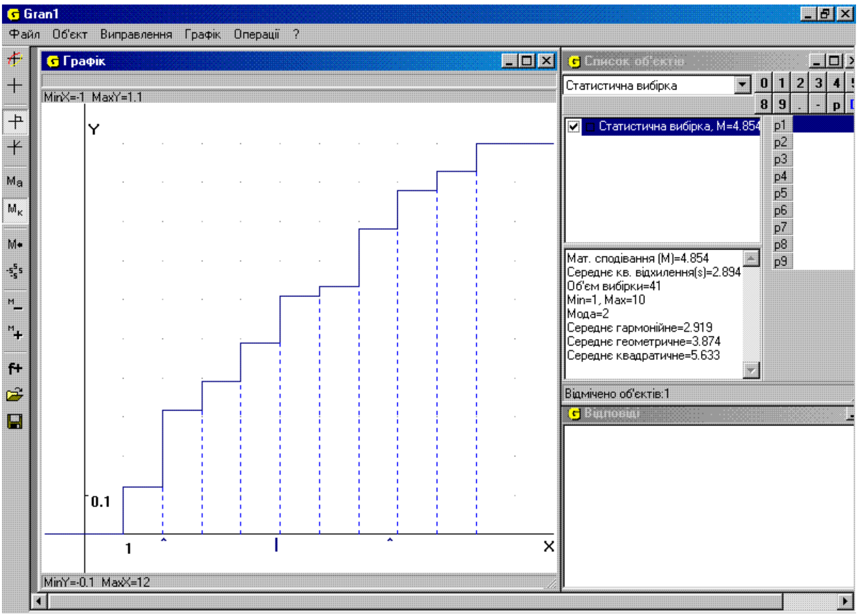

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-1 MaxY=1.1
Y
0.1
1
X
MinY=-0.1 MaxX=12
Список об'єктів
Статистична вибірка
Статистична вибірка, M=4.854
Мат. сподівання (M)=4.854
Середнє кв. відхилення(s)=2.894
Об'єм вибірки=41
Min=1, Max=10
Мода=2
Середнє гармонійне=2.919
Середнє геометричне=3.874
Середнє квадратичне=5.633
Відмічено об'єктів:1
Відповіді

Рис. 1.8

Вправа 5. Кількість учнів у класі, які відвідують спортивні секції, є випадковою величиною. За даними спостережень дістали такий інтервальний ряд розподілу статистичних ймовірностей (табл. 2.2):

Табл. 2.2

I_i	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
$P_n^*(I_i)$	0,01	0,04	0,12	0,28	0,30	0,16	0,08	0,01

Знайти значення функції розподілу статистичних ймовірностей $F_n^*(x)$ у кінцях інтервалів x_i і побудувати графік функції $y = F_n^*(x)$, вважаючи її неперервною.

Враховуючи означення функції $F_n^*(x)$, маємо

$$F_n^*(0) = 0{,}00;\ F_n^*(5) = 0{,}01;\ F_n^*(10) = 0{,}05;$$

$$F_n^*(15) = 0{,}17;\ F_n^*(20) = 0{,}45;\ F_n^*(25) = 0{,}75;$$

$$F_n^*(30) = 0{,}91;\ F_n^*(35) = 0{,}99;\ F_n^*(40) = 1{,}00.$$

Побудувавши точки $(x_i, F_n^*(x_i))$ на площині xOy і сполучивши їх ламаною, дістанемо графік $y = F_n^*(x)$ (Рис. 1.9).

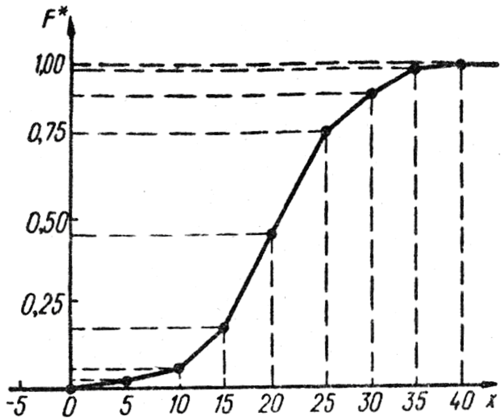


Рис. 1.9

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Елементи вибірки (спостережені значення відповідної випадкової величини) можуть бути однаковими.
2. Об’єм вибірки дорівнює кількості різних спостережених значень.
3. Варіанти – це елементи вибірки.
4. Варіаційний ряд – це будь-яка сукупність спостережених значень.

5. Для кожної вибірки можна скласти ряд дискретного розподілу статистичних ймовірностей.

6. Полігон відносних частот існує для будь-якого розподілу відносних частот.

7. Для кожної вибірки можна скласти інтервальний розподіл статистичних ймовірностей.

8. Кожний розподіл статистичних ймовірностей графічно можна подати за допомогою гістограми.

9. Гістограма – це графік щільності розподілу статистичних ймовірностей.

10. Для кожної вибірки існують усі середні значення: арифметичне, гармонійне, геометричне і квадратичне.

11. Завжди $\bar{x}_{гарм} \le \bar{x}_{геом} \le \bar{x}_{арифм} \le \bar{x}_{\sigma}$.

12. Для кожної вибірки існує: а) мода; б) медіана;

13. Для кожної вибірки можна побудувати функцію розподілу статистичних ймовірностей $F^*_{nX}(x)$ на множині значень відповідної випадкової величини X.

14. Завжди $F^*_{nX}(x) = \dfrac{1}{n} k_n((-\infty,\ x))$.

15. Для дискретного розподілу статистичних ймовірностей відповідна функція розподілу кусково-стала.

16. Для інтервального розподілу статистичних ймовірностей відповідна функція розподілу неперервна.

17. Графік функції розподілу статистичних ймовірностей завжди є ламаною.

2. Для заданої вибірки спостережених значень випадкової величини X знайти: 1) об'єм вибірки; 2) варіаційний ряд; 3) середні арифметичне, гармонійне, геометричне та квадратичне; 4) моду і медіану; 5) розмах вибірки; 6) ряд дискретного розподілу відносних частот та відповідний полігон відносних частот; 7) функцію дискретного розподілу статистичних ймовірностей та її графік, якщо досліджується дискретна випадкова величина; 8) неперервний розподіл статистичних ймовірностей та відповідну гістограму; 9) функцію і щільність неперервного розподілу статистичних ймовірностей та їх графіки, якщо досліджується неперервна випадкова величина.

1. $1,3,5,7,9,1,3,5,7,9,\ 3,5,7,9,3,5,7,9,\ 3,5,7,3,5,7,\ 5,7,5,7,\ 7,7,7;$
$1,3,5,7,9,1,3,5,7,9,\ 3,5,7,9,3,5,7,9,\ 3,5,7,3,5,7,\ 5,7,5,7,\ 7,7,7;$
$1,3,5,7,9,1,3,5,7,9,\ 3,5,7,9,3,5,7,9,\ 3,5,7,3,5,7,\ 5,7,5,7,\ 7,7,7;$
$1,3,5,7,9,1,3,5,7,9,\ 3,5,7,9,3,5,7,9,\ 3,5,7,3,5,7,\ 5,7,5,7,\ 7,7,7.$

2. $2,5,7,5,7,5,7,7,7,7.$

3. $4,7,8,12,4,7,8,12,4,8,12,4,12,4,12,12,12,12,12,12.$

4. $1,4,5,7,1,4,5,7,\ 1,4,5,1,4,5,\ 1,5,1,5,\ 1,1,\ 1,1,1,1;$
$1,4,5,7,1,4,5,7,\ 1,4,5,1,4,5,\ 1,5,1,5,\ 1,1,\ 1,1,1,1;$

$1,4,5,7,1,4,5,7$, $1,4,5,1,4,5$, $1,5,1,5$, $1,1$, $1,1,1,1$;
$1,4,5,7,1,4,5,7$, $1,4,5,1,4,5$, $1,5,1,5$, $1,1$, $1,1,1,1$.

5. $2,3,5,6,2,3,5,6$, $2,3,6,2,3,6$, $3,6,3,6$, $6,6,6,6,6$;
$2,3,5,6,2,3,5,6$, $2,3,6,2,3,6$, $3,6,3,6$, $6,6,6,6,6$;
$2,3,5,6,2,3,5,6$, $2,3,6,2,3,6$, $3,6,3,6$, $6,6,6,6,6$;
$2,3,5,6,2,3,5,6$, $2,3,6,2,3,6$, $3,6,3,6$, $6,6,6,6,6$;
$2,3,5,6,2,3,5,6$, $2,3,6,2,3,6$, $3,6,3,6$, $6,6,6,6,6$.

6. $2,4,5,7,10,2,4,5,7,10$, $2,4,10,2,4,10$, $4,10,4,10$, $10,10$;
$2,4,5,7,10,2,4,5,7,10$, $2,4,10,2,4,10$, $4,10,4,10$, $10,10$;
$2,4,5,7,10,2,4,5,7,10$, $2,4,10,2,4,10$, $4,10,4,10$, $10,10$;
$2,4,5,7,10,2,4,5,7,10$, $2,4,10,2,4,10$, $4,10,4,10$, $10,10$;
$2,4,5,7,10,2,4,5,7,10$, $2,4,10,2,4,10$, $4,10,4,10$, $10,10$.

7.
$1,4,5,8,9,1,4,5,8,9$, $1,4,5,8,1,4,5,8$, $4,5,8,4,5,8$, $4,5,4,5$, $5,5,5,5,5$;
$1,4,5,8,9,1,4,5,8,9$, $1,4,5,8,1,4,5,8$, $4,5,8,4,5,8$, $4,5,4,5$, $5,5,5,5,5$;
$1,4,5,8,9,1,4,5,8,9$, $1,4,5,8,1,4,5,8$, $4,5,8,4,5,8$, $4,5,4,5$, $5,5,5,5,5$;
$1,4,5,8,9,1,4,5,8,9$, $1,4,5,8,1,4,5,8$, $4,5,8,4,5,8$, $4,5,4,5$, $5,5,5,5,5$;
$1,4,5,8,9,1,4,5,8,9$, $1,4,5,8,1,4,5,8$, $4,5,8,4,5,8$, $4,5,4,5$, $5,5,5,5,5$.

8. 10 спостережених значень з проміжку $[1;5)$, 20 – з проміжку $[5;9)$, 50 – з проміжку $[9;13)$, 12 – проміжку $[13;17)$ і 8 – з проміжку $[17;21)$.

9. 20 – з проміжку $[0;2)$, 20 – з проміжку $[2;3)$, 30 – з проміжку $[3;4)$ і 50 спостережених значень з проміжку $[4;6)$.

10. Результати 70 вимірювань діаметру певної деталі у процесі її виготовлення:
79,95; 80,14; 80,14; 80,18; 80,20; 80,24; 80,24; 80,28; 80,28; 80,29;
80,30; 80,31; 80,32; 80,33; 80,33; 80,35; 80,36; 80,36; 80,37; 80,37;
80,38; 80,38; 80,38; 80,38; 80,41; 80,42; 80,42; 80,43; 80,43; 80,46;
80,46; 80,47; 80,47; 80,48; 80,48; 80,48; 80,49; 80,50; 80,50; 80,51;
80,54; 80,54; 80,55; 80,56; 80,56; 80,56; 80,58; 80,58; 80,60; 80,64;
80,64; 80,66; 80,66; 80,69; 80,70; 80,72; 80,72; 80,72; 80,73; 80,73.

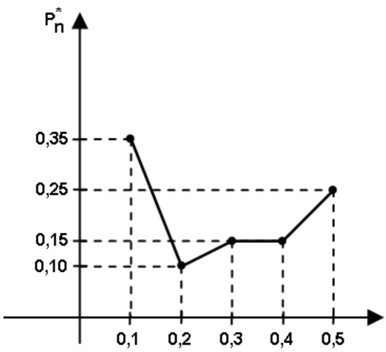
11. Результати вимірювання напруги в електромережі протягом доби кожної години:
222, 219, 224, 220, 218, 217, 221, 220, 215, 218, 223, 225,
220, 226, 221, 216, 211, 219, 220, 221, 222, 218, 221, 219.

12. Результати вимірювання зросту навмання відібраних 100 студентів (у см):
від 154 до 158 – 10 студентів, від 158 до 162 – 14,
від 162 до 166 – 26, від 166 до 170 – 28,
від 170 до 174 – 12, від 174 до 178 – 8, від 178 до 182 – 2.

3. За даним полігоном відносних частот вибіркових значень випадкової величини X і даним об'ємом вибірки знайти: 1) варіаційний ряд; 2) ряд дискретного розподілу відносних частот;

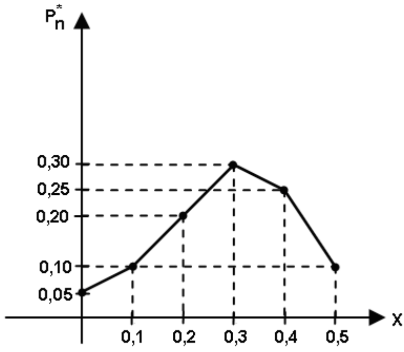
3) середні арифметичне, гармонійне, геометричне та квадратичне; 4) моду, медіану і розмах вибірки; 5) функцію дискретного розподілу статистичних ймовірностей.

1.



$n = 10$

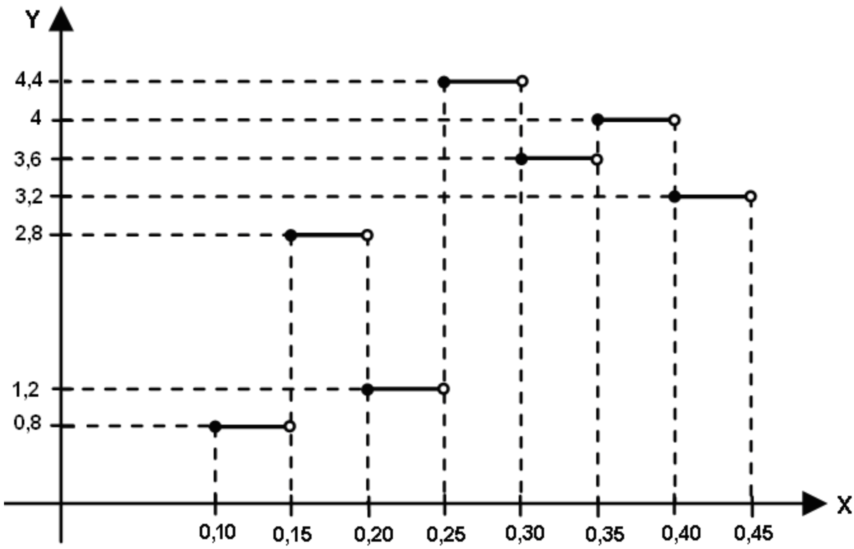
2.



$n = 20$

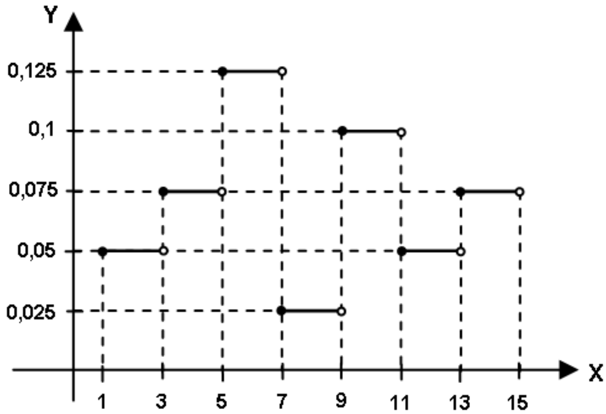
4. Для випадкової величини X за даною гістограмою і об’ємом вибірки знайти: 1) ряд неперервного розподілу статистичних ймовірностей; 2) середні арифметичне, гармонійне, геометричне та квадратичне; 3) моду, медіану і розмах вибірки; 4) функцію і щільність розподілу статистичних ймовірностей та побудувати їх графіки.

1.



$n = 50$

2.



$n = 20$

5.2. Статистичні оцінки параметрів розподілу ймовірностей

Нехай проведено n спостережень за випадковою величиною X, в яких дістали значення $x_{cn1}, x_{cn2}, ..., x_{cnn}$ (не обов'язково різні), і треба оцінити параметр Θ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X, причому характер цього розподілу відомий. Нехай θ_0^* є спостережене значення статистичної оцінки θ^* шуканого параметра, знайдене за результатами n спостережень. Зрозуміло, що оцінка θ^* залежить від результатів спостережень, тобто є функцією цих результатів. Оскільки значення $x_{cn1}, x_{cn2}, ..., x_{cnn}$ наперед передбачити неможливо, то й значення θ_0^* оцінки θ^* наперед передбачити неможливо, θ^* є випадковою величиною, яка незалежно від спостерігача може набувати різних значень у різних серіях спостережень.

Статистична оцінка θ^* параметра Θ називається *незміщеною*, якщо $M[\theta^*] = \theta$, тобто якщо математичне сподівання випадкової величини θ^* дорівнює значенню параметра, яке оцінюється. Якщо $M[\theta^*] < \theta$, то оцінка для Θ буде систематично занижуватись; якщо $M[\theta^*] > \theta$, то оцінка для Θ буде систематично завищуватись. В обох випадках *оцінка зміщена*.

Оцінка θ^* називається *несуперечливою*, якщо при $n \to \infty$ вона збігається за ймовірністю до значення параметра Θ, яке оцінюється.

Оцінка θ^* значення параметра Θ називається *ефективною*, якщо вона має найменшу дисперсію порівняно з іншими оцінками цього параметра, знайденими на основі тих самих результатів спостережень.

Нехай спостерігається випадкова величина X, математичне сподівання якої m, а дисперсія D. Як статистичну оцінку математичного сподівання спостережуваної випадкової величини X за даними проведених n спостережень природно взяти середнє арифметичне спостережених значень

$$\bar{x}_n = \frac{x_{cn1} + x_{cn2} + \ldots + x_{cnn}}{n}, \tag{2.1}$$

де x_{cni} – значення спостережуваної випадкової величини, одержане при i-му спостереженні.

Величину $\bar{x}_n$ часто називають *вибірковим середнім або статистичним середнім.*

Формулу для обчислення $\bar{x}_n$ можна подати у вигляді

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(\{x_i\}), \tag{2.2}$$

де x_i – різні можливі значення випадкової величини X, $P_n^*(\{x_i\})$ – відповідні їм статистичні ймовірності (відносні частоти), одержані за результатами n спостережень. При цьому не виключається, що якесь із можливих значень x_i не було спостережене і відповідна йому статистична ймовірність $P_n^*(\{x_i\})$ дорівнює нулеві.

За оцінку для дисперсії беруть не величину $\overline{D}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$, яку називають *статистичною або вибірковою дисперсією*, а величину

$$\tilde{D}_n = \frac{n}{n-1}\overline{D}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Ця оцінка є незміщеною. Величину $\tilde{D}_n$ називають «*виправленою*» *статистичною дисперсією*. Формулу для обчислення спостереженого значення величини $\overline{D}_n$ можна подати у вигляді

$$\overline{D}_n = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_n)^2 P_n^*(\{x_i\}), \tag{2.3}$$

де x_i – можливі значення випадкової величини X, $P_n^*(\{x_i\})$ – відповідні їм статистичні ймовірності.

Аналогічно розглядають статистичну оцінку для середнього квадратичного відхилення $\bar{\sigma}_n$, $\tilde{\sigma}_n$, які називають *вибірковим середнім квадратичним відхиленням* і *«виправленим» середнім квадратичним відхиленням* відповідно та обчислюють як корінь квадратний із вибіркової дисперсії та виправленої статистичної дисперсії:

$$\bar{\sigma}_n = \sqrt{\bar{D}_n}\ ,\ \tilde{\sigma}_n = \sqrt{\tilde{D}_n}\ .$$

На основі статистичних даних досліджують також системи випадкових величин (випадкові вектори), вивчають розподіли ймовірностей систем випадкових величин та їх числові характеристики, зв'язок між випадковими величинами, що входять до системи і т.д.

Розрахунок прямих регресії. Нехай проведено n випробувань, в результаті яких спостережені пари значень системи двох випадкових величин $(X;Y):(x_{cn\,i}, y_{cn\,i}),\ i=1,2,\ldots,n$. На практиці за наближені значення $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$ і $D(Y)$ беруть їх статистичні оцінки:

$$\tilde{m}_X = \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{cn\,i}\ ;\ \tilde{m}_Y = \bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{cn\,i}\ ;$$

$$\tilde{D}_n[X] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{cn\,i} - \bar{x}_n)^2\ ; \qquad \tilde{D}_n[Y] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_{cn\,i} - \bar{y}_n)^2\ .$$

Оцінкою для $K[X,Y]$ є величина

$$\tilde{K}[X,Y] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{cn\,i} - \bar{x}_n)(y_{cn\,i} - \bar{y}_n)\ .$$

Замінюючи величини $K[X,Y],\ \sigma_X,\ \sigma_Y$ їх статистичними оцінками $\tilde{K}[X,Y],\ \tilde{\sigma}_X = \sqrt{\tilde{D}_n[X]},\ \tilde{\sigma}_Y = \sqrt{\tilde{D}_n[Y]}$, отримаємо наближені значення коефіцієнта кореляції і коефіцієнтів регресії:

$$r \approx \frac{\tilde{K}[X,Y]}{\tilde{\sigma}_X \tilde{\sigma}_Y}\ ;\ \rho(Y/X) \approx \frac{\tilde{K}[X,Y]}{\tilde{\sigma}_X^2}\ ;\ \rho(X/Y) \approx \frac{\tilde{K}[X,Y]}{\tilde{\sigma}_Y^2}\ ,$$

де $\dfrac{\tilde{K}[X,Y]}{\tilde{\sigma}_X \tilde{\sigma}_Y}$ і $\dfrac{\tilde{K}[X,Y]}{\tilde{\sigma}_X^2}$, $\dfrac{\tilde{K}[X,Y]}{\tilde{\sigma}_Y^2}$ – статистичні оцінки коефіцієнтів відповідно кореляції і регресії.

Підставляючи в рівняння регресії Y на X, тобто $y = \rho(Y/X)(x - m_X) + m_Y$, та рівняння регресії X на Y, тобто $x = \rho(X/Y)(y - m_Y) + m_X$ (див. Розділ 3, п. 3.10), замість $m_X, m_Y,\ \rho(Y/X)$ і $\rho(X/Y)$ їх статистичні оцінки, отримаємо *вибіркові рівняння прямих регресії*:

$$y-\tilde{m}_Y=\frac{\tilde{K}[X,Y]}{\tilde{\sigma}_X^2}(x-\tilde{m}_X\,); \qquad x-\tilde{m}_X=\frac{\tilde{K}[X,Y]}{\tilde{\sigma}_Y^2}(y-\tilde{m}_Y\,). \tag{2.4}$$

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. На 100 однакових за розмірами навмання вибраних ділянках землі з однаковою кількістю внесених добрив зібрано різний урожай зерна. Результати проведених спостережень подано в табл. 2.1. На основі поданого статистичного матеріалу треба визначити статистичні оцінки для математичного сподівання та дисперсії досліджуваної випадкової величини (урожай).

Табл. 2.1

Урожай, ц/га	14	15	16	17	18	19	20
Кількість ділянок	6	10	18	28	20	12	6

За формулою (2.2) маємо

$$\bar{x}_{100}=14\cdot\frac{6}{100}+15\cdot\frac{10}{100}+16\cdot\frac{18}{100}+17\cdot\frac{28}{100}+18\cdot\frac{20}{100}+$$

$$+19\cdot\frac{12}{100}+20\cdot\frac{6}{100}=\frac{84+150+228+476+360+228+120}{100}=17{,}06\,.$$

Застосовуючи формулу (2.3), для спостереженого значення випадкової величини $\overline{D}_n$ знаходимо

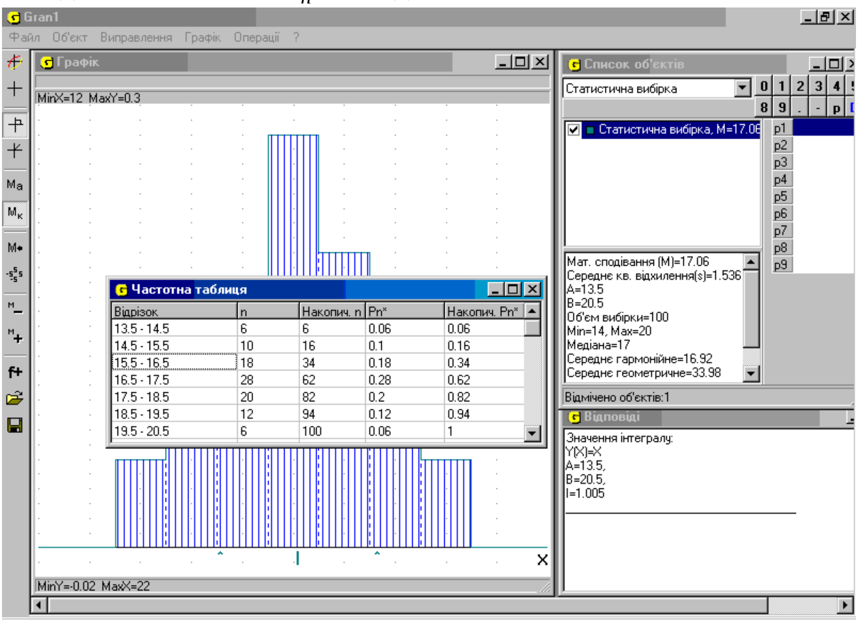


Рис. 2.1

$$\overline{D}_{100}=(-3{,}06)^2\cdot\frac{6}{10}+(-2{,}06)^2\cdot\frac{10}{100}+(-1{,}06)^2\cdot\frac{18}{100}+$$
$$+(-0{,}06)^2\cdot\frac{28}{100}+(0{,}94)^2\cdot\frac{20}{100}+(1{,}94)^2\cdot\frac{12}{100}+(2{,}94)^2\cdot\frac{6}{100}=$$
$$=9{,}36\cdot 0{,}06+4{,}24\cdot 0{,}10+1{,}12\cdot 0{,}18+0\cdot 0{,}28+0{,}88\cdot 0{,}20+$$
$$+3{,}76\cdot 0{,}12+8{,}64\cdot 0{,}06=2{,}33\,.$$

Далі дістаємо

$$\widetilde{D}_{100}=\frac{n}{n-1}\overline{D}_{100}=\frac{100}{99}\cdot 2{,}33=1{,}01\cdot 2{,}33=2{,}35\,.$$

Для виконання обчислень розглянутого типу зручно скористатися послугами програми GRAN1 чи DERIVE (Рис. 2.1).

Вправа 2. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії Y на X за даними $n=10$ спостережень.

Результати спостережень і необхідні обчислення подані в таблиці 2.2.

Табл. 2.2

$x_{cn\,i}$	$y_{cn\,i}$	$x_{cn\,i}-\widetilde{m}_X$	$(x_{cn\,i}-\widetilde{m}_X)^2$	$y_{cn\,i}-\widetilde{m}_Y$	$(x_{cn\,i}-\widetilde{m}_X)\cdot$ $\cdot(y_{cn\,i}-\widetilde{m}_Y)$
71	8,6	-4,5	20,25	-0,48	2,16
72	8,9	-3,5	12,25	-0,18	0,63
73	8,9	-2,5	6,25	-0,18	0,45
74	9,0	-1,5	2,25	0,08	-0,12
75	9,1	-0,5	0,25	0,02	-0,01
76	9,2	0,5	0,25	0,12	0,06
77	9,2	1,5	2,25	0,12	0,18
78	9,2	2,5	6,25	0,12	0,30
79	9,3	3,58	12,25	0,22	0,77
80	9,4	4,5	20,25	0,32	1,44
$\overline{x}_n=75{,}5$	$\overline{y}_n=9{,}08$		$\widetilde{\sigma}_X^2=9{,}17$		$\widetilde{K}[X,Y]=0{,}65$

Обчислюємо:

$$\frac{\widetilde{K}[X,Y]}{\widetilde{\sigma}_X^2}=\frac{0{,}65}{9{,}17}\approx 0{,}071\,.$$

Рівняння шуканої прямої має вигляд

$$y-9{,}08=0{,}071(x-75{,}5)\,,$$

або

$$y=0{,}071x+3{,}72\,.$$

Вправа 3. ***Метод найменших квадратів для побудови регресійної моделі.***

Під регресією будемо розуміти статистичний зв’язок між випадковими величинами. Прості лінійні регресійні моделі встановлюють лінійну залежність між двома змінними: витратами на рекламу та обсягом продукції; витратами на відпустку та складом родини; витратами на споживання та валовим національним продуктом (ВНП); ціною і попитом тощо. При цьому одна із змінних вважається залежною (y) та розглядається як функція незалежної змінної (x – фактор).

У загальному вигляді лінійна регресійна модель записується так:

$$Y = aX + b\,. \tag{2.5}$$

Нехай є набір спостережених значень змінної $y:(y_1, \ldots, y_n)$; набір спостережених значень змінні $x:\{x_1, \ldots, x_n\}$; a, b – невідомі коефіцієнти регресійної моделі.

Найчастіше коефіцієнти залежності $Y = aX + b$ добирають так, щоб сума квадратів відхилень $y_i - (ax_i + b)$ була найменшою, тобто щоб досягався

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2\,. \tag{2.6}$$

Прирівнюючи до нуля частинні похідні квадратичної функції $f(a,b)$ за змінними a та b, отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0$$

або

$$a(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + b(\sum_{i=1}^{n} x_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0\,,$$

$$a(\sum_{i=1}^{n} x_i) + b \cdot n - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0\,.$$

Помноживши перше рівняння на n, друге на $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ і віднявши друге від першого, одержимо

$$a(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum x_i)^2) = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\,,$$

звідки

$$a = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\frac{1}{n}\sum x_i)^2} =$$

$$= \frac{\overline{M}[XY] - \overline{M}[X]\overline{M}[Y]}{\overline{M}[X^2] - (\overline{M}[X])^2} = \frac{\overline{K}[X,Y]}{\overline{D}[X]} = \frac{\tilde{K}[X,Y]}{(\tilde{\sigma}[X])^2}, \qquad (2.7)$$

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{\overline{K}[X,Y]}{(\overline{\sigma}[X])^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{M}[Y] - \frac{\overline{K}[X,Y]}{(\overline{\sigma}[X])^2}\overline{M}[X]. \qquad (2.8)$$

Оскільки квадратична функція $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ опукла донизу, то в знайденій точці (a, b) досягається її мінімум.

Таким чином, параметри a і b лінійнійної регресії Y на X (2.5), визначені за методом найменших квадратів, повністю відповідають вказаним раніше формулам (2.4). Аналогічно за методом найменших квадратів можна отримати рівняння прямої регресії X на Y.

Вправа 4. Розглянемо конкретну економічну модель. Бюро економічного аналізу фірми X оцінює ефективність відділу маркетингу з продажу цукерок. Для такої оцінки вони мають досвід роботи у 5 географічних зонах з майже однаковими умовами (потенційні клієнти, ставлення до товарного знаку та ін.). У цих зонах фіксували x_i – обсяги продажу протягом деякого періоду (млн. коробок) і y_i – витрати на рекламу (млн. грн.) для просування товару на ринку:

i (№зони)	Xi(млн.кор)	Yi(млн.грн)
1	5	25
2	6	30
3	9	35
4	12	45
5	18	65

За допомогою програмного засобу Excel можна проаналізувати реальні спостереження у числовій і графічній інтерпретації (Рис. 2.2):

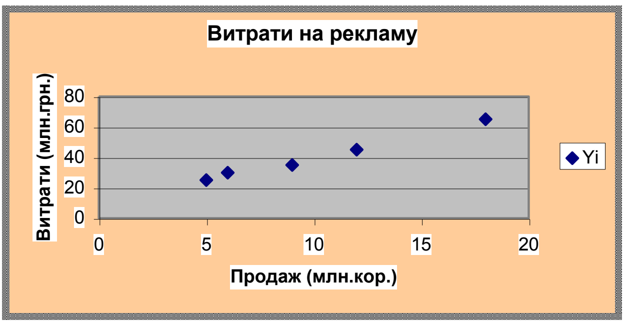


Рис. 2.2

Візуально за Рис. 2.2 можна припустити, що між двома змінними є лінійна залежність, тобто їх можна апроксимувати прямою лінією.

Необхідно побудувати лінійну модель $y = ax + b$, яка найкращим чином описує спостережені значення, тобто визначити невідомі коефіцієнти a і b.

1-й спосіб. Скористаємось методом найменших квадратів, відтворивши необхідні розрахунки за формулами (2.7), (2.8) у програмному засобі Excel і отримаємо шуканий результат (Рис. 2.3).

2-й спосіб. Використаємо спеціальні вбудовані статистичні функції Excel для отримання значень коваріації (КОВАР) і дисперсії (ДИСП) та порівняємо отримані результати.

3-й спосіб. Описану вище задачу розглянемо як задачу нелінійної оптимізації відносно невідомих a, b, де функція мети являє собою квадратичну форму (2.6), для знаходження мінімуму якої використаємо вбудовану математичну функцію СУММКВРАЗН. За допомогою спеціального пакету Solver («Поиск решения») знайдемо відповідні розв'язки, проаналізуємо їх за допомогою певних звітів (Рис. 2.3).

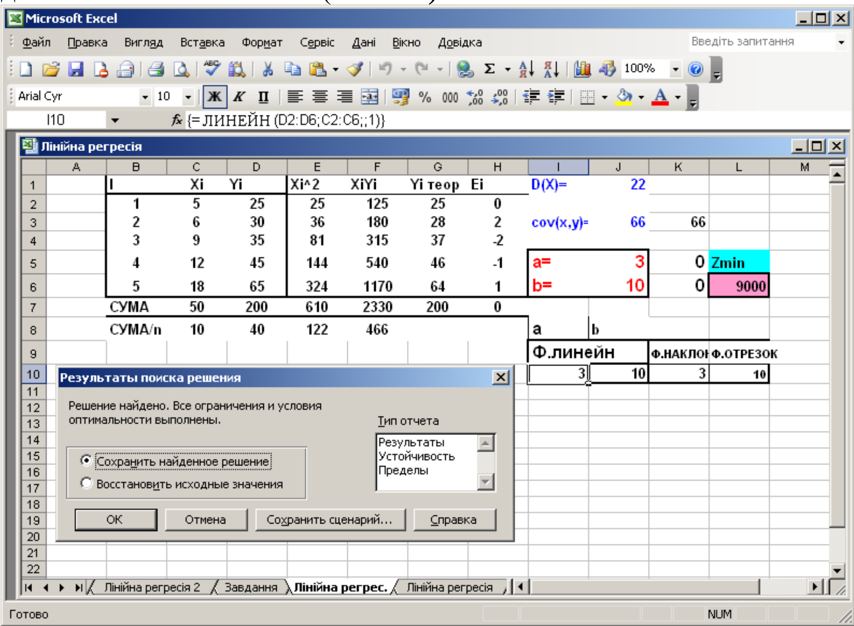


Рис. 2.3

4-й спосіб. Використаємо так звані лінії трендів, які крім геометричного розв'язування даної задачі, дають рівняння лінійної регресії, а також значення коефіцієнта кореляції, який вказує на адекватність вибраної моделі, в даному разі лінійної, реальним спостереженням (Рис. 2.4).

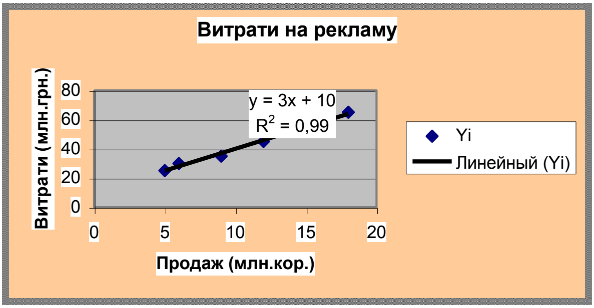


Рис. 2.4

5-й спосіб. Використаємо вбудовані статистичні функції ЛИНЕЙН, НАКЛОН, ОТРЕЗОК, що дозволяє визначити або всю лінійну регресійну модель, або окремі її параметри (Рис. 2.3).

6-й спосіб. Для таблично заданої функції

x_i	5	6	9	12	18
y_i	25	30	35	45	65

побудувати поліном 1-го степеня виду $y = P(x) = ax + b$, що найкраще наближає задану функцію в розумінні середнього квадратичного (за методом найменших квадратів, скориставшись програмою Gran1. В результаті одержимо Рис. 2.5)

$$y = P(x) = ax + b\,.$$

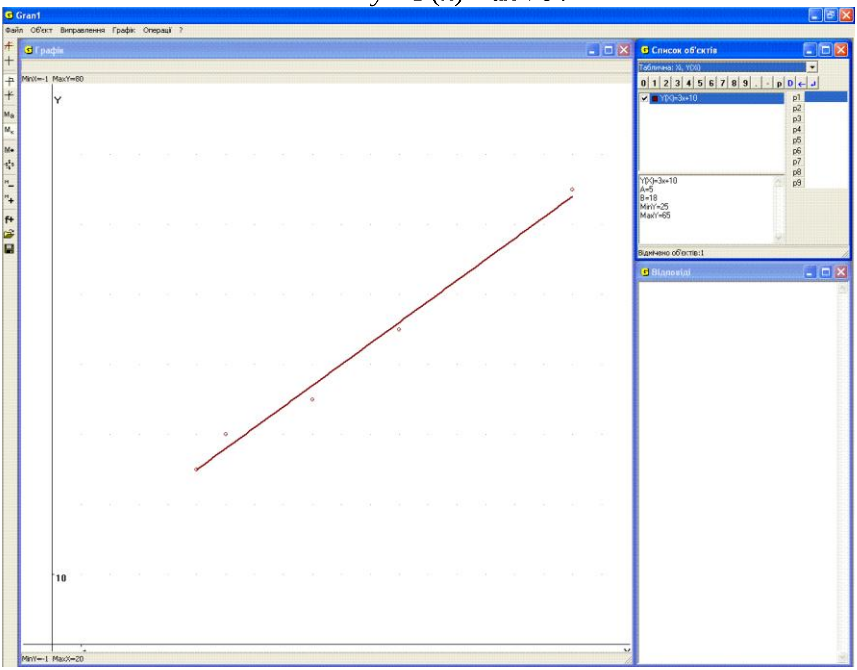


Рис. 2.5

Всі наведені 6 способів розв`язування даної задачі дають рівняння шуканої прямої, яка описує лінійну залежність між продажем продукції і витратами на рекламу у вигляді

$$y = 3x + 10 .$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Коли кажуть, що характер розподілу ймовірностей відомий, то це означає, що відомі:

а) дискретний цей розподіл, чи неперервний; абсолютно неперервний чи сингулярний;

б) функція розподілу чи щільність розподілу ймовірностей;

в) клас, до якого належить функція чи щільність розподілу ймовірностей;

г) усі параметри (числові характеристики) розподілу ймовірностей: математичне сподівання, дисперсія, центральні моменти m-го порядку тощо;

д) деякі параметри розподілу ймовірностей.

2. Для кожного параметра θ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X можна дістати статистичну оцінку θ^* за спостереженими значеннями випадкової величини X .

3. Оцінка θ^* є випадковою величиною, визначеною на сукупності всіляких вибірок $(x_{cn\,1}, x_{cn\,2},\ldots, x_{cn\,n})$ спостережених значень випадкової величини X , а тому $\theta^*(x_{1\,cn}, x_{2\,cn},\ldots, x_{n\,cn}) = \theta_n^*$ є послідовністю випадкових величин (послідовністю значень випадкової величини θ^*).

4. Кожна статистична оцінка θ^* параметра θ є незміщеною.

5. Для одного і того самого параметра за одними і тими самими спостереженими значеннями можна діставати різні статистичні оцінки, одні з яких систематично занижуються, а інші – систематично завищуються.

6. Кожна статистична оцінка θ^* є несуперечливою.

7. Ефективність статистичної оцінки θ^* тим вища, чим більшою є її дисперсія.

8. Вибіркове середнє – це те саме, що й статистичне середнє.

9. Вибіркове середнє є статистичною оцінкою математичного сподівання досліджуваної випадкової величини.

10. Якщо випадкова величина X спостерігається у серії з n незалежних спостережень (випробувань), то слова: “X_i – це випадкова величина X при i-му спостереженні” означають, що X_i визначена на

$$\Omega_1^n = \left\{ (E_1, E_2, \ldots, E_n),\ E_i \in \Omega,\ i \in \overline{1,n} \right\},$$

причому $X_i(E_1, E_2, \ldots, E_n) = X(E)$, коли $E = E_i$, а інші координати $E_k, k \neq i$, можуть бути якими завгодно, аби тільки $E_k \in \Omega$.

11. Якщо X_i – випадкова величина, визначена у твердженні 10, то

а) $X_i = X$ для всіх $i \in \overline{1, n}$;

б) $X_i = X$ принаймні для одного $i \in \overline{1, n}$;

в) $X_i \neq X$ для всіх $i \in \overline{1, n}$.

12. Статистичне середнє значень випадкової величини X є значенням випадкової величини $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i з твердження 10.

13. Кожне значення $\overline{X}_n$ є значенням X.

14. Випадкова величина $\overline{X}_n$ є статистичною оцінкою математичного сподівання величини X.

15. Оцінка $\overline{X}_n$ є:

а) зміщеною; б) несуперечливою; в) ефективною.

16. Якщо $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, то $\overline{D}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X}_n)^2$ є:

а) фіксованим числом; б) випадковою величиною на Ω, тобто там де визначена X; в) випадковою величиною, визначеною на Ω^n.

17. Випадкова величина $\overline{D}_n$ є статистичною оцінкою дисперсії випадкової величини X.

18. Оцінка $\overline{D}_n$ є:

а) незміщеною; б) несуперечливою; в) ефективною.

19. Для будь-якої випадкової величини X її статистична дисперсія $\overline{D}_n$ відрізняється від виправленої статистичної дисперсії $\tilde{D}_n$.

20. Статистична оцінка $\tilde{D}_n$ незміщена, а $\overline{D}_n$ – зміщена.

21. Статистична оцінка $\tilde{D}_n$ несуперечлива, а $\overline{D}_n$ – суперечлива.

22. Можна стверджувати, що коли n досить велике, то

$$\bar{x}_n = \tilde{m}_X \approx M[X], \quad \tilde{D}_n(X) \approx D(X), \quad \tilde{K}[X,Y] \approx K[X,Y]$$

у тому розумінні, що:

а) будь-яке значення в лівій частині обов’язково досить мало відрізняється від значення в правій частині відповідної рівності;

б) окремі значення в лівій частині можуть досить сильно відрізнятися від значень в правій частині відповідної рівності, проте ймовірність цього:

1) дорівнює нулю; 2) як завгодно близька до нуля, коли n досить велике.

23. Вибіркове рівняння регресії є наближеним рівнянням регресії.

2. Нехай через X_1 позначено випадкову величину X при першому спостереженні, через X_2 – при другому спостереженні і т.д. Довести:

1) оцінка $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ для математичного сподівання випадкової величини X незміщена;

2) оцінка $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ для математичного сподівання випадкової величини X *несуперечлива*;

3) навести приклади, коли оцінка $\overline{X}_n$ є: а) ефективною; б) неефективною.

3. Довести, що статистична оцінка дисперсії випадкової величини X

$$\overline{D}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \ .$$

є заниженою і дає систематичну похибку.

4. Довести, що оцінка $\overline{D}_n$ *несуперечлива*.

5. Для заданої вибірки спостережених значень випадкової величини X знайти: 1) вибіркове середнє; 2) вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення; 3) виправлену дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

1.

x_i	1000	1200	1400
n_i	1000	6000	3000

2.

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5

3.

x_i	1	2	5	8	9
n_i	3	4	6	4	3

4.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

5.

x_i	0,1	0,4	0,6
n_i	3	2	5

6.

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

7.

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

8.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

9.

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

10.

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

11.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

12.

x_i	0,1	0,5	0,07	0,9
n_i	6	12	1	1

13. Результати вимірювання довжини хоботка у 30 бджіл (в мм):

6,54; 6,69; 6,61; 6,58; 6,68; 6,55; 6,72; 6,59; 6,71; 6,70;
6,71; 6,70; 6,59; 6,54; 6,60; 6,59; 6,70; 6,56; 6,57; 6,71;
6,70; 6,62; 6,54; 6,63; 6,69; 6,71; 6,61; 6,62; 6,70; 6,68.

14. Результати оцінювання врожайності жита у господарстві:

Площа ділянки у гектарах	10	20	20
Врожайність, ц/га	18	20	21

15. Результати вимірювання деякої фізичної величини одним приладом (без систематичних похибок):

8, 9, 11, 12, 10, 8, 9, 11, 12, 10, 8, 9, 10, 8, 11, 12, 11, 12, 9, 10,
8, 12, 10, 8, 9, 11, 12, 10, 9, 11, 8, 9, 11, 12, 10, 8, 9, 11, 10, 12,
11, 8, 12, 10, 8, 9, 9, 11, 12, 10, 12, 8, 9, 11, 10, 8, 9, 12, 11, 10,
9, 11, 8, 9, 11, 12, 10, 8, 10, 12, 10, 8, 8, 9, 11, 12, 9, 11, 12, 10,
10, 8, 9, 11, 12, 8, 9, 11, 12, 10, 10, 9, 8, 11, 12, 10, 8, 9, 11, 12.

16. Результати вимірювань: а) довжини крила у 6 бджілок (у мм): 9,68; 9,81; 9,77; 9,60; 9,61; 9,55; б) довжини листя садової суниці (в см): 5,2; 5,6; 7,1; 6,6; 8,6; 8,2; 7 7;7 8.

17. Результати вимірювань довжини стержня одним приладом (без систематичних похибок) (у мм):

92, 94, 103, 105, 106, 103, 105, 92, 94, 106, 105, 106, 92, 94, 103,
105, 106, 92, 92, 94, 103, 94, 103, 106, 105, 92, 103, 94, 105, 106,
92, 103, 94, 105, 94, 106, 92, 103, 105, 92, 106, 94, 105, 103, 106;
93, 96, 100, 95, 93, 95, 96, 100, 93, 95, 96, 100, 93, 95, 96, 100,
95, 96, 93, 100, 95, 96, 100, 93, 95, 96, 100, 93, 95, 100, 93, 96,
96, 100, 93, 95, 93, 100, 95, 96, 93, 96, 95,100, 93, 100, 95, 96.

18. Результати вимірювань зросту випадково відібраних 100 чоловіків.

Зріст, см	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
Число чоловіків	10	14	26	28	12	8	2

6. За даною вибірковою дисперсією $\overline{D}_n$ і об’ємом вибірки n знайти виправлену дисперсію:

1. $\overline{D}_n = 5$, $n = 51$;
2. $\overline{D}_n = 3$, $n = 41$.

7. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії Y на X та X на Y за даними спостережень випадкової величини X.

1.

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

2.

x_i	23,0	24,0	24,5	24,5	25,0	25,5	26,0	26,0	26,5	26,5	27,0	27,0	28,0
y_i	0,48,	0,50	0,49	0,50	0,51	0,52	0,51	0,53	0,50	0,52	0,54	0,52	0,53

3.

x_i	92	91	90	86	85	85	85	83	80	78	80	83
y_i	84	85	84	81	76	77	75	79	78	78	76	76

Задачі **7** (1-3) розв`язати за допомогою програмного засобу Excel, використовуючи метод найменших квадратів, статистичні функції, Пошук розв'язку, а також за допомогою програми Gran1. Порівняти отримані результати.

8. Електричний опір молібдена ρ в залежності від температури T характеризується даними таблиці:

T	2289	2132	1988	1830	1489	1286	1178
ρ, мком*см	61,97	57,32	52,70	47,92	37,72	32,09	28,94

Вважаючи, що має місце лінійна залежність вигляду $\rho = a + bT$, визначити коефіцієнти a, b.

9. У таблиці наведені спостережені рівні x_i та y_i води у річці у пунктах A і B відповідно (пункт B знаходиться нижче за течією від пункту A). Заміри робилися о 12.00 в перші 15 днів квітня:

x_i, м	12,1	11,2	9,8	10,4	9,2	8,5	8,8	7,4	6,6	7,0	6,4	6,0	6,5	5,8	5,4
y_i, м	10,5	9,3	8,3	9,6	8,6	7,1	6,9	5,8	5,2	5,0	5,1	4,6	5,0	4,4	3,9

Вважаючи, що має місце залежність $y = a + bx$, визначити коефіцієнти a, b.

Визначивши за допомогою програми Gran1 коефіцієнти a, b, та $\overline{M}_X$, $\overline{\sigma}_X$, обчислити $\overline{K}[X,Y]$, $\overline{M}[Y]$, скориставшись формулами 2.7, 2.8.

5.3. Надійні інтервали. Надійна ймовірність

Нехай θ^* – статистична оцінка параметра θ. Природно постає питання, яка похибка може виникати при заміні значення θ спостереженим значенням θ_0^* його статистичної оцінки θ^*, наскільки може відхилятися значення θ^* від істинного значення θ, чому дорівнює $P(|\theta^* - \theta| \le \alpha)$ – ймовірність того, що значення θ^* відхиляються від θ не більше ніж на α. Якщо α досить мале, а ймовірність $P(|\theta^* - \theta| \le \alpha) = \beta$, то з імовірністю β можна вважати, що при заміні невідомого значення параметра θ спостереженим значенням θ_0^* випадкової величини θ^* похибка не перевищуватиме α. Задача саме й полягає у знаходженні такого числа α, для якого з наперед заданою ймовірністю β виконувалась би нерівність $|\theta^* - \theta| \le \alpha$, тобто справджувалась рівність

$$P(|\theta^* - \theta| \le \alpha) = P(\theta - \alpha \le \theta^* \le \theta + \alpha) = P(\theta^* - \alpha \le \theta \le \theta^* + \alpha) = \beta. \quad (3.1)$$

Або ж навпаки – за заданою точністю α потрібно знайти, з якою ймовірністю буде виконуватися нерівність $|\theta^* - \theta| \le \alpha$.

Рівність (3.1) означає, що з імовірністю β невідоме значення параметра θ повинно знаходитися в інтервалі $(\theta_0^* - \alpha; \theta_0^* + \alpha)$.

Оскільки величина θ^* випадкова, то й інтервал $(\theta^* - \alpha, \theta^* + \alpha)$ є випадковим завдовжки 2α. Таким чином, якщо знайдено α, то тим самим визначено випадковий інтервал $(\theta^* - \alpha, \theta^* + \alpha)$, який з імовірністю β накриває невідоме значення параметра θ.

Ймовірність β називають *надійною ймовірністю* (*надійністю*) оцінки θ^*, інтервал $(\theta^* - \alpha, \theta^* + \alpha)$ – *надійним інтервалом*, а його межі – *надійними межами*.

Задача знаходження надійного інтервалу для оцінки параметра θ з даною надійною ймовірністю β у загальному випадку є досить складною.

Проте іноді для знаходження ймовірності $P(|\theta^* - \theta| \le \alpha)$ можна вивести формулу, до якої параметр θ явно не входить.

Так, якщо розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний з параметрами m та σ і параметр σ відомий, то оскільки формула для обчислення ймовірності попадання значень випадкової величини X на інтервал $(m-\alpha;\ m+\alpha)$

$$P((m-\alpha;\ m+\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{m-\alpha}^{m+\alpha} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \Phi(\frac{\alpha}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\alpha}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\alpha}{\sigma}) = \beta,$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа, не містить параметра m, для невідомого параметра m можна встановити надійний інтервал $(\bar{X}_n - \alpha,\ \bar{X}_n + \alpha)$, який з надійністю β накриває невідоме m. Визначивши t так, щоб виконувалася рівність

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\beta}{2},$$

значення α визначають з рівності $\alpha = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, оскільки розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ при досить великому n можна вважати нормальним з параметрами $M[\overline{X}_n] = m$, $D[\overline{X}_n] = \frac{D[X]}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma[\overline{X}_n] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, а тому

$$P(m-\alpha < \overline{X}_n < m+\alpha) = P(\overline{X}_n - \alpha < m < \overline{X}_n + \alpha) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma[\overline{X}_n]}\int_{m-\alpha}^{m+\alpha} e^{-\frac{(x-m)^2}{2[\sigma(\overline{X}_n)]^2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha}{\sigma[\overline{X}_n]}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

де $t = \frac{\alpha}{\sigma[\overline{X}_n]} = \frac{\alpha}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, звідки $\alpha = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Наближений розв'язок рівняння $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\beta}{2}$ може бути знайдений за допомогою програм типу GRAN1, DERIVE або за допомогою таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x)$.

Якщо на множині значень випадкової величини X розподіл ймовірностей нормальний, а величина σ невідома, проте число спостережень досить велике, то замість σ можна використати його статистичну оцінку $\overline{\sigma}_n$. Однак при невеликій кількості спостережень така заміна може привести до значних похибок.

Аналогічно може бути побудований надійний інтервал і для дисперсії.

Нехай виконано n незалежних спостережень за випадковою величиною X з невідомими параметрами $M[X] = m$, $D[X] = \sigma^2 = D$ і для дисперсії знайдено незміщену оцінку

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2,$$

де $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Величини $(X_i - \overline{X}_n)$ не є незалежними, оскільки $\overline{X}_n$

залежить від X_i. Проте відомо, що із збільшенням n розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини $\tilde{D}_n$ прямує до нормального. На практиці можна цей розподіл вважати нормальним вже при n порядку 20-30.

Параметри цього розподілу є

$$M[\tilde{D}_n] = D, \; D[\tilde{D}_n] = \frac{1}{n}\mu_4 - \frac{n-3}{n(n-1)}D^2,$$

де $\mu_4 = M[(X - M[X])^4]$ – четвертий центральний момент випадкової величини X.

При досить великих n замість D можна використати оцінку $\tilde{D}_n$, а замість μ_4 – оцінку

$$\mu_{4,n}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^4 .$$

Слід мати на увазі, що при невеликих n така заміна може призвести до значних похибок, оскільки при обмеженому числі спостережень моменти високих порядків визначаються досить неточно.

З надійністю β можна стверджувати, що надійний інтервал $(\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_n q; \tilde{\sigma}_n + \tilde{\sigma}_n q)$ накриває невідомий параметр σ; точність оцінки $\delta = \tilde{\sigma}_n q$.

В додатку 7 наведена таблиця значень $q = q(\beta, n)$ для різних значень n і надійності β.

Якщо орієнтовне значення $\sigma[\tilde{D}_n] = \sqrt{D[\tilde{D}_n]}$ тим або іншим способом знайдено, то надійний інтервал для дисперсії будується так само, як для математичного сподівання

$$I_\beta = (\tilde{D}_n - t_\beta\sigma[\tilde{D}_n], \tilde{D}_n + t_\beta\sigma[\tilde{D}_n]),$$

де t_β знаходиться з рівності

$$P(|\tilde{D}_n - D| \le t_\beta\sigma[\tilde{D}_n]) = \beta,$$

тобто з рівності

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \beta,$$

де β – надійна ймовірність оцінки $\tilde{D}_n$.

Розглянуті методи побудови надійних інтервалів для математичного сподівання, дисперсії й середнього квадратичного відхилення досить неточні. Для точного визначення надійних інтервалів треба заздалегідь знати вид розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X, тоді як для розглянутих наближених методів це необов'язково.

Точні методи використовують для оцінки шуканих параметрів, які є функціями випадкових величин X_1, X_2, …, X_n, проте розподіл ймовірностей на множинах значень яких не залежить від невідомих параметрів, а залежить від числа n спостережень і виду розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X. Такі оцінки відіграють важливу роль у математичній статистиці. Найбільш ґрунтовно вони вивчені для випадку, коли на множині значень випадкової величини X розподіл ймовірностей нормальний.

Відомо, що коли на множині значень випадкової величини X розподіл ймовірностей нормальний, то на множині значень випадкової величини

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\tilde{D}_n}} \tag{3.2}$$

має місце *розподіл ймовірностей Стьюдента* з $r = n-1$ ступенем вільності. Щільність цього розподілу ймовірностей має вигляд

$$s_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \tag{3.3}$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt .$$

Відомо також, що на множині значень випадкової величини

$$V_n = \frac{(n-1)\tilde{D}_n}{D}$$

має місце *розподіл ймовірностей* χ^2 (хі-квадрат) з $n-1$ ступенями вільності, щільність якого має вигляд

$$k_{n-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, t^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}, & \text{якщо } t \ge 0; \\ 0, & \text{якщо } t < 0. \end{cases}$$

Графік щільності $k_{n-1}(t)$ подано на Рис. 3.1

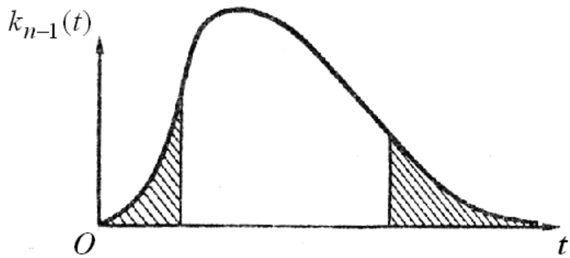


Рис. 3.1

Нехай треба знайти надійний інтервал, в якому з імовірністю β знаходиться невідоме математичне сподівання, тобто для якого виконується умова

$$P(|\,\overline{X}_n - m| \le \alpha) = P\left(\frac{\sqrt{n}\,|\,\overline{X}_n - m|}{\sqrt{\widetilde{D}_n}} \le \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\widetilde{D}_n}{n}}} \right) = P\left(|\,T_n| \le \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\widetilde{D}_n}{n}}} \right) = \beta .$$

Число t_β, для якого $P(|\,T_n| \le t_\beta) = \beta$, знаходять з умови

$$P(|\,T_n| \le t_\beta) = 2\int_0^{t_\beta} s_{n-1}(t)dt = \beta .$$

Значення функції

$$\Psi(x) = 2\int_0^{x} s_{n-1}(t)dt ,$$

обчислені для різних значень $n-1$ і x, зведені в таблицю (див. додаток 5).

Визначивши t_β за даними β і $n-1$, знайдемо $\alpha = t_\beta \sqrt{\frac{\widetilde{D}_n}{n}}$ і надійний інтервал $(\overline{X}_n - \alpha,\ \overline{X}_n + \alpha)$ для невідомого m.

Щоб побудувати надійний інтервал для дисперсії, подамо випадкову величину $\widetilde{D}_n$ у вигляді

$$\widetilde{D}_n = V_n \frac{D}{n-1} ,$$

де випадкова величина V_n має χ^2-розподіл ймовірностей.

Щоб вибрати інтервал I_β, до якого значення випадкової величини V_n належить з імовірністю β, інтервал I_β добирають так, щоб імовірності попадання за його межі зліва і справа були однакові і дорівнювали

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2} .$$

Використовуючи таблицю значень χ^2 (див. додаток 4) залежно від $r = n-1$ і α, знайдемо два значення χ_1^2 і χ_2^2, для яких

$$P(V_n < \chi_1^2) = \frac{\alpha}{2},\ P(V_n > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2},$$

де χ_1^2 і χ_2^2 – межі інтервалу I_β, тобто $P(\chi_1^2 \le V_n \le \chi_2^2) = 1-\alpha = \beta$.

Оскільки

$$P(\chi_1^2 \le V_n \le \chi_2^2) = P(\chi_1^2 \le \frac{\tilde{D}_n(n-1)}{D} \le \chi_2^2) = P(\frac{\tilde{D}_n(n-1)}{\chi_2^2} \le D \le \frac{\tilde{D}_n(n-1)}{\chi_1^2}),$$

то інтервал

$$\left(\frac{\tilde{D}_n(n-1)}{\chi_2^2}, \frac{\tilde{D}_n(n-1)}{\chi_1^2} \right)$$

є шуканим надійним інтервалом для дисперсії D з надійністю β.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Учні виконують стрибки у висоту. Висота стрибка навмання взятого учня є випадковою величиною з нормальним розподілом ймовірностей, причому середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5см$. За даними 100 спостережень здобута статистична оцінка для математичного сподівання досліджуваної випадкової величини $\overline{X}_n = 135\,см$. Знайти інтервал, в якому з ймовірністю 0,9 знаходиться математичне сподівання висоти стрибка учня (необхідно знайти таке t, щоб виконувалася рівність $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0,9$).

Скориставшись програмою GRAN1, дістанемо, що така рівність виконується при $t = 1,65$. Отже $\frac{\alpha \cdot \sqrt{100}}{5} = 1,65$, звідки $\alpha = 0,82$. Той самий результат одержимо, використовуючи таблицю значень функції Лапласа. Таким чином, з ймовірністю 0,9 невідоме математичне сподівання розглядуваної випадкової величини лежить у межах від 134,18 до 135,82 см.

Зауваження. Якщо для випадкової величини з нормальним розподілом ймовірностей треба знайти кількість спостережень, які необхідно виконати, щоб дістати оцінку математичного сподівання, яка з надійністю β відхиляється від невідомого математичного сподівання не більше, ніж на α, то таке число спостережень визначається за формулою

$$t = \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma},\ \text{тобто}\ n = \frac{t^2\sigma^2}{\alpha^2},$$

де t знаходимо так, щоб виконувалась рівність $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \beta$,

або за таблицею значень функції Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ так,

щоб виконувалась рівність $\Phi(t) = \frac{\beta}{2}$.

Вправа 2. Відомо, що зріст дванадцятирічної дитини є випадковою величиною з нормальним розподілом ймовірностей, причому середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5\,\text{см}$. Скільки треба виконати спостережень, щоб знайти інтервал завширшки 4 см, який з імовірністю 0,95 накрив би невідоме математичне сподівання досліджуваної випадкової величини?

Скориставшись програмою GRAN1, дістанемо $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0{,}95$ при $t = 1{,}96$. За таблицею значень функції Лапласа для $\Phi(t) = 0{,}475$ матимемо той самий результат. Оскільки $\alpha = 2$, то $n = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 25}{4} \approx 24$.

Отже, за даних умов потрібно виконати 24 спостереження, щоб знайти інтервал завширшки 4 см, в якому з імовірністю 0,95 знаходиться невідоме математичне сподівання зросту навмання взятої дванадцятирічної дитини.

Вправа 3. На множині значень ознаки X розподіл ймовірностей нормальний. Знайти надійний інтервал для σ з надійністю $\beta = 0{,}95$, якщо $n = 20$; $\tilde{\sigma}_n = 0{,}40$.

Для надійності $\beta = 0{,}95$ і $n = 20$ знаходимо в таблиці (додаток 7) $q = 0{,}37$. Далі, $\tilde{\sigma}_n q = 0{,}40 \cdot 0{,}37 \approx 0{,}15$. Кінці надійного інтервалу $0{,}40 - 0{,}15 = 0{,}25$ і $0{,}40 + 0{,}15 = 0{,}55$. Отже, надійний інтервал $(0{,}25;\ 0{,}55)$ накриває σ з надійністю $0{,}95$.

Вправа 4. На фермі випробовувався вплив вітамінів на приріст маси телят. Для цієї мети було оглянуто 20 телят одного віку. Середня маса їх виявилася рівною 340 кг, а відповідне “виправлене” середнє квадратичне відхилення – 20 кг.

Визначити: 1) надійний інтервал для математичного сподівання m з надійністю 0,95; 2) надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення з тією ж надійністю.

При розв’язуванні задачі виходити з припущення, що розподіл ймовірностей на множині значень досліджуваної величини нормальний.

Розв’язування. 1) Згідно умов задачі $\bar{x}_n = 340$; $\tilde{\sigma}_n = 20$; $\beta = 0{,}95$; $n = 20$.

Користуючись розподілом Стьюдента, для надійності $\beta = 0{,}95$ і $n = 20$ знаходимо в таблиці (додаток 5) $t_\beta = 2{,}093$. Отже $\delta = 2.093\frac{20}{\sqrt{20}} \approx 9{,}4$. Кінці надійного інтервалу $340 - 9{,}4 = 330{,}6$ і $340 + 9{,}4 = 349{,}4$. Таким чином, надійний інтервал $(330{,}6;\ 349{,}4)$ накриває m з надійністю 0,95.

Можна вважати, що в даному випадку справжня маса виміряна досить точно (відхилення близько $\frac{9{,}4}{340} \approx 0{,}03$).

2) Для надійності $\beta = 0{,}95$ і $n = 20$ знаходимо в таблиці (додаток 7) $q = 0{,}37$. Далі $\tilde{\sigma}_n q = 20 \cdot 0{,}37 = 7{,}4$. Кінці надійного інтервалу $20 - 7{,}4 = 12{,}6$ і $20 + 7{,}4 = 27{,}4$. Таким чином, $12{,}6 < \sigma < 27{,}4$, звідки можна зробити висновок, що σ визначено незадовільно (відхилення близько $\frac{\tilde{\sigma}_n q}{\tilde{\sigma}_n} = q \approx 0{,}4$ – майже половина). Щоб звузити надійний інтервал з такою ж надійністю, необхідно збільшити число n випробувань.

Примітка. Вище передбачалося, що $q < 1$. Якщо $q > 1$, то, враховуючи, що $\sigma > 0$, одержуємо $0 < \sigma < \tilde{\sigma}_n + \tilde{\sigma}_n q$. Значення q і в цьому випадку визначаються за таблицею із додатку 7.

Вправа 5. На множині значень ознаки X розподіл ймовірностей нормальний. За вибіркою об'єму $n = 10$ знайдено “виправлене” середнє квадратичне відхилення $\tilde{\sigma}_n = 0{,}16$. Знайти надійний інтервал для σ з надійністю 0,999.

Для надійності $\beta = 0{,}999$ і $n = 10$ за таблицею із додатку 7 знаходимо $q = 1{,}80$.

Отже, шуканий надійний інтервал такий:

$$0 < \sigma < 0{,}16 + 0{,}16 \cdot 1{,}80,$$

або

$$0 < \sigma < 0{,}448.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для кожної оцінки параметра θ випадкової величини X і будь-якого числа β існує єдиний надійний інтервал, що накриває параметр θ з ймовірністю β.

2. Кінці надійного інтервалу є:

а) фіксованими числами; б) значеннями певної випадкової величини.

3. Надійність оцінки θ^* – це ймовірність попадання значень випадкової величини θ^* у фіксований окіл значення відповідного параметра θ.

4. Рівняння $P(\theta-\alpha \le \theta^* \le \theta+\alpha)=\beta$ відносно змінної α завжди має єдиний розв'язок.

5. Якщо X_k, $k \in N$, – випадкові величини з одним і тим самим нормальним розподілом ймовірностей і відомим параметром $\sigma=\sigma[X_k]=\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$, то за спостереженими значеннями випадкової величини X невідомий параметр $m=M[X_k]=M[X]$ (однаковий для всіх X_k) можна:

а) знайти з довільною точністю;

б) накрити надійним інтервалом як завгодно малої довжини з ймовірністю, як завгодно близькою до 1;

в) вважати таким, що лежить у фіксованому інтервалі $(\bar{x}_n-\alpha;\ \bar{x}_n+\alpha)$, де $\bar{x}_n$ – фіксоване спостережене значення величини $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$.

г) вважати таким, що з ймовірністю β лежить в інтервалі $(\bar{x}_n-\alpha;\ \bar{x}_n+\alpha)$, де $\bar{x}_n$ – навмання вибране спостережене значення величини $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$.

6. Точність оцінки α і надійність β завжди пов'язані рівністю

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{n}/\sigma} e^{-t^2}dt=\beta.$$

7. Завжди $M[\tilde{D}_n]=D=D[X]$, а $D[\tilde{D}_n]=\frac{1}{n}\mu_4-\frac{n-3}{n(n-1)}D^2$, де $\mu_4=M[(X-M[X])^4]$ – четвертий центральний момент випадкової величини X.

8. Для будь-якої випадкової величини X правильна рівність:

а) $\mu_4[X]=3D^2[X]$; б) $D[\tilde{D}_n]=\frac{2}{n-1}D^2$;

в) $\mu_4[X]=\frac{(b-a)^4}{80}$; г) $\mu_4[X]=1{,}8\cdot D^2[X]$;

д) $D[\tilde{D}_n]=\frac{0{,}8n+1{,}2}{n(n-1)}D^2$; е) $\sigma[\tilde{D}_n]=\sqrt{D[\tilde{D}_n]}$.

9. Надійний інтервал для невідомої дисперсії випадкової величини X з нормальним розподілом ймовірностей знаходять так само, як і для математичного сподівання.

10. Для невідомої дисперсії точність оцінки α і надійність β пов'язані рівністю

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha/\sigma[\overline{D}_n]} e^{-t^2/2} dt = \beta.$$

11. Якщо n досить велике, то щільність розподілу ймовірностей Стьюдента з $(n-1)$ ступенями вільності має вигляд:

$$S_{n-1}(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ .$$

12. Розподіл Стьюдента – це розподіл ймовірностей випадкової величини

$$T_n = \sqrt{n} \, \frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\widetilde{D}_n}} \ .$$

13. Розподіл χ^2 – це розподіл ймовірностей випадкової величини $V_n = \dfrac{(n-1)\widetilde{D}_n}{D}$.

14. Для невідомого математичного сподівання точність оцінки α і надійність β пов'язані рівністю

$$2 \int_0^{\sqrt{n}\alpha/\sqrt{\widetilde{D}_n}} S_{n-1}(t) dt = \beta \ .$$

15. Для невідомої дисперсії випадкової величини X з нормальним розподілом ймовірностей надійний інтервал має вигляд $\left(\dfrac{(n-1)\widetilde{D}_n}{\chi_2^2}, \dfrac{(n-1)\widetilde{D}_n}{\chi_1^2} \right)$, де χ_1^2 та χ_2^2 визначаються відповідно з умов:

$$\chi_1^2 < \chi_2^2 \, , \ \int_0^{\chi_1^2} K_{n-1}(t) dt = \frac{\alpha}{2} \, , \ \int_0^{\chi_2^2} K_{n-1}(t) dt = 1 - \frac{\alpha}{2} \ .$$

2. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний. Довести, що: 1) $\mu_4[X] = 3D^2[X] = 3D^2$; 2) $D[\widetilde{D}_n] = \dfrac{2}{n-1} D^2$; 3) $\sigma[\widetilde{D}_n] = \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \widetilde{D}_n$.

3. Нехай розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X рівномірний на відрізку $[a,b]$. Довести, що:

1) $\mu_4[X]=1{,}8D^2[X]$; 2) $D[\tilde{D}_n]=\dfrac{0{,}8n+1{,}2}{n(n-1)}D^2$ **;** 3) $\sigma[\tilde{D}_n]=\sqrt{\dfrac{0{,}8n+1{,}2}{n(n-1)}}D$.

4. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X нормальний і середнє квадратичне відхилення дорівнює σ. Спостережені значення цієї випадкової величини утворюють вибірку об'єму n з вибірковим середнім $\bar{x}_n$. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання $M[X]=m$ та середнього квадратичного відхилення σ з надійністю β, коли:

1) $\sigma=3$, $\bar{x}_n=4{,}1$, $n=36$, $\beta=0{,}95$;
2) $\sigma=2$, $\bar{x}_n=5{,}4$ $n=10$, $\beta=0{,}95$;
3) $\sigma=3$, $\bar{x}_n=20{,}12$; $n=25$, $\beta=0{,}99$;
4) $\sigma=5$, $\bar{x}_n=14$, $n=25$, $\beta=0{,}95$;
5) $\sigma=4$, $\bar{x}_n=10{,}2$; $n=16$, $\beta=0{,}99$;
6) $\sigma=5$, $\bar{x}_n=16{,}8$, $n=25$, $\beta=0{,}99$;
7) $\sigma=4$, $\bar{x}_n=15$, $n=25$, $\beta=0{,}95$.

5. Спостережені значення випадкової величини X з нормальним розподілом ймовірностей на множині її значень утворюють вибірку об'ємом n з вибірковим середнім $\bar{x}_n$ і виправленим середнім квадратичним відхиленням $\tilde{\sigma}_n$. Використовуючи розподіл Стьюдента, знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання $M[X]=m$ з надійністю β, коли:

1) $\tilde{\sigma}_n=0{,}8$, $\bar{x}_n=20{,}2$, $n=16$, $\beta=0{,}95$;
2) $\tilde{\sigma}_n=1{,}5$, $\bar{x}_n=16{,}8$, $n=12$, $\beta=0{,}95$;
3) $\tilde{\sigma}_n=2{,}4$, $\bar{x}_n=14{,}2$, $n=27$, $\beta=0{,}99$.

6. Спостережені значення випадкової величини X з нормальним розподілом ймовірностей на множині її значень утворюють вибірку об'ємом n і виправленим середнім квадратичним відхиленням $\tilde{\sigma}_n$. Знайти надійний інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення $\sigma=\sqrt{D[X]}$ з надійністю β, коли:

1) $\tilde{\sigma}_n=0{,}8$, $n=25$, $\beta=0{,}95$;
2) $\tilde{\sigma}_n=5{,}1$, $n=10$, $\beta=0{,}999$;
3) $\tilde{\sigma}_n=14$, $n=50$, $\beta=0{,}999$;
4) $\tilde{\sigma}_n=1$, $n=16$, $\beta=0{,}95$;
5) $\tilde{\sigma}_n=0{,}12$, $n=15$, $\beta=0{,}99$.

7. За даними n незалежними вимірюваннями фізичної величини знайдено середнє арифметичне $\bar{x}_n$ цих вимірювань та виправлене середнє квадратичне відхилення $\tilde{\sigma}_n$. Треба знайти інтервал, в якому знаходиться "справжнє" значення вимірюваної величини X, а також точність вимірювань $\varepsilon = \frac{t_\beta \tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}}$ з надійністю β, коли:

1) $\tilde{\sigma}_n = 5$, $\bar{x}_n = 42{,}319$, $n = 9$, $\beta = 0{,}95$;

2) $\tilde{\sigma}_n = 0{,}4$, $\bar{x}_n = 23{,}161$, $n = 16$, $\beta = 0{,}95$;

3) $\tilde{\sigma}_n = 8$, $\bar{x}_n = 42{,}8$, $n = 16$, $\beta = 0{,}999$.

8. Відомо, що розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X – тривалість горіння електричної лампи, нормальний із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$ години. Для контролю якості було вибрано n електричних ламп і дістали, що з надійністю $\beta = 0{,}99$ вибіркове середнє $\bar{x}_n$ наближає невідоме математичне сподівання $M[X] = m$ з точністю $\varepsilon = 1$ година. Знайти мінімально можливий об'єм n згаданої вибірки ламп.

9. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X – результату вимірювання довжини певної деталі – нормальний з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$ мм. Для контролю якості вибрано n деталей і дістали, що з надійністю $\beta = 0{,}95$ вибіркове середнє $\bar{x}_n$ наближає невідоме математичне сподівання $M[X] = m$ з точністю $\varepsilon = 3$ *мм*. Знайти мінімально можливий об'єм n згаданої вибірки деталей.

10. За даними n незалежними вимірюваннями одним приладом без систематичної похибки фізичної величини X знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $\tilde{\sigma}_n$. Знайти точність вимірювання (тобто $\varepsilon = \frac{t_\beta \tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}}$) величини X з надійністю β, коли:

1) $\tilde{\sigma}_n = 0{,}12$, $n = 15$, $\beta = 0{,}99$;

2) $\tilde{\sigma}_n = 0{,}6$, $n = 12$, $\beta = 0{,}99$;

3) $\tilde{\sigma}_n = 0{,}8$, $n = 10$, $\beta = 0{,}95$;

4) $\tilde{\sigma}_n = 2$, $n = 20$, $\beta = 0{,}95$.

11. Використовуючи розподіл Стьюдента та χ^2-розподіл, оцінити (за допомогою надійного інтервалу) з надійністю $\beta = 0{,}95$ математичне сподівання $M[X] = m$ і дисперсію $D = D[X]$ випадкової величини X з нормальним розподілом ймовірностей на множині її значень, спостережені значення якої утворюють вибірку, що задана таблицею:

1)

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

2)

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

3)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	1	3	4	6	5	4	2

4)

x_i	1	2	3	4	5
n_i	1	4	6	3	1

5)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_i	2	4	8	11	11	9	5

6)

x_i	-1	0	1	2
n_i	1	3	4	2

7. Результати вимірювань маси тіла (у кг) 1000 дорослих людей: від 45 кг до 55 кг – 57 осіб, від 55 кг до 65 кг –136 осіб, від 65 кг до 75 кг – 223 особи, від 75 кг до 85 кг – 249 осіб, від 85 кг до 95 кг – 191 особа, від 95 кг до 105 кг – 100 осіб, від 105 кг до 115 кг – 36 осіб, від 115 кг і вище – 8 осіб.

8. Результати вимірювань дальності польоту (у км) 1000 ракет:

Дальність польоту x_i	32	33	34	35	36	37	38
n_i	7	78	289	392	195	36	3

12. Для визначення невідомої ймовірності $p = P(A)$ проводиться серія з n незалежних випробувань. Знайти надійний інтервал для оцінки ймовірності p з надійністю β, якщо в n випробування подія A відбулася m разів:

1) $n = 100$, $m = 27$, $\beta = 0{,}95$;
2) $n = 200$, $m = 80$, $\beta = 0{,}97$;
3) $n = 1000$, $m = 980$, $\beta = 0{,}99$;
4) $n = 1000$, $m = 57$, $\beta = 0{,}999$.

5.4. Статистична перевірка гіпотез

Однією з основних задач математичної статистики є визначення розподілу ймовірностей або параметрів цього розподілу за статистичними даними. При цьому задача іноді ставиться так.

Розглядають деяку гіпотезу про те, що розподіл ймовірностей має той чи інший вигляд, або параметри розподілу мають ті або інші значення. Задача полягає в тому, щоб на основі вивчення статистичних даних підтвердити правильність висунутої гіпотези чи спростувати її.

На основі статистичних даних знаходять оцінку (норму) відхилення U статистичного розподілу ймовірностей від гіпотетичного розподілу чи статистичної оцінки шуканого параметра від його гіпотетичного значення. Іноді вдається встановити закон розподілу ймовірностей випадкової величини U (Рис. 4.1). У цьому разі можна визначити ймовірність $P(U \geq U_0)$ – ймовірність того, що випадкова величина U набуває значення, не меншого, ніж деяке значення U_0.

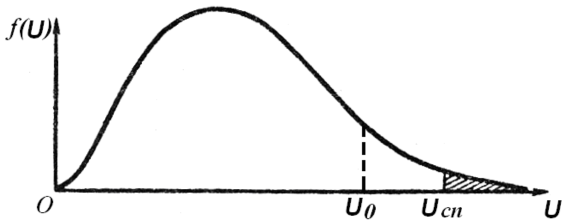


Рис. 4.1

Область S, при попаданні в яку спостереженого значення $U_{сп}$ величини U гіпотеза відхиляється, називається *критичною.*

Рівнем значущості критерію перевірки статистичної гіпотези називається ймовірність того, що критерій не приведе до відхилення гіпотези в разі її істинності. Іншими словами, рівень значущості – це ймовірність того, що при істинності гіпотези спостережене значення не належатиме критичній області.

Рівень значущості α часто задають наперед (досить близьким до 1), виходячи з особливостей задачі, і за рівнем значущості знаходять величину $U_{кр}$ так, щоб справджувалася рівність

$$P(U < U_{кр}) = \alpha .$$

Якщо при заданому α виконується нерівність $U_{сп} > U_{кр}$, то вважають, що статистичні дані суперечать розглядуваній гіпотезі про вигляд розподілу ймовірностей, оскільки ймовірність $P(U \geq U_{кр}) = 1 - \alpha$ досить мала, коли α близьке до 1, а події, ймовірності яких не перевищують значення $1 - \alpha$, вважаються практично неможливими. Імовірність того, що в цьому випадку буде відхилена правильна гіпотеза, дорівнює $1 - \alpha$. Якщо за статистичними даними дістанемо $U_{сп} < U_{кр}$, то немає підстав відхиляти гіпотезу, оскільки статистичні дані не суперечать гіпотезі про те, що розподіл ймовірностей має саме той вигляд, про який йдеться в розглядуваній гіпотезі.

Якщо спостережене значення $U_{сп}$ належить критичній області, то гіпотеза відхиляється і приймається альтернативна гіпотеза, яка є запереченням основної гіпотези.

Критерії, за якими перевіряють, узгоджуються чи ні статистичні дані з розглядуваними гіпотезами, називають *критеріями узгодження.*

Одним з найбільш поширених критеріїв узгодження, за допомогою яких перевіряють гіпотезу про вид розподілу ймовірностей, є так званий *«критерій χ^2» Пірсона*.

Для неперервного розподілу ймовірностей критерій Пірсона застосовується так:

1. За статистичними даними будують неперервний (інтервальний) розподіл статистичних ймовірностей (табл. 4.1) і крім того на основі гіпотетичного розподілу ймовірностей знаходять гіпотетичні ймовірності попадання значень досліджуваної неперервної випадкової величини в часткові інтервали I_i, $i=1,2,\dots,k$.

Табл. 4.1

I_i	$[x_0, x_0+h)$	$[x_0+h, x_0+2h)$	$\dots$	$[x_0+(k-1)h, x_0+kh)$
$P^*_{nX}(I_i)$	$P^*_{nX}([x_0,x_0+h))$	$P^*_{nX}([x_0+h,x_0+2h))$	$\cdots$	$P^*_{nX}([x_0+(k-1)h, x_0+kh))$

2. Відхилення U статистичного розподілу від гіпотетичного при цьому визначають за формулою (це відхилення позначають через χ^2):

$$U=\chi^2=n\sum_{i=1}^{k}\frac{(P^*_{nX}(I_i)-p_i)^2}{p_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}, \qquad (4.1)$$

де n_i – кількість спостережених значень досліджуваної випадкової величини X, що належать *i-му* частковому інтервалу I_i, $i=1,2,\dots,k$; n – кількість спостережень;

$$p_i=P_X(I_i)=P_X([x_0+(i-1)h, x_0+ih))$$

гіпотетичні ймовірності попадання в інтервали I_i. Випадкова величина U має χ^2-розподіл ймовірностей. Цей χ^2-розподіл не залежить від невідомого закону розподілу ймовірностей досліджуваної випадкової величини, а залежить лише від числа r ступенів вільності.

3. Число ступенів вільності r обчислюють за формулою $r=k-1-s$, де k – число часткових інтервалів I_i, s – число параметрів гіпотетичного розподілу, які оцінюються за статистичним матеріалом.

4. Для χ^2-розподілу складені спеціальні таблиці (див. додаток 4). За цими таблицями за підрахованим r і рівнем значущості α (який задають) знаходять $\chi^2_{кр}$, для якого $P(\chi^2<\chi^2_{кр})=\alpha$, де α досить близьке до 1, $0<\alpha<1$.

5. Коли $\chi^2_{сп}\ge\chi^2_{кр}$, то $P(\chi^2\ge\chi^2_{сп})\le 1-\alpha$ (Рис. 4.2), $\chi^2_{сп}$ належить критичній області, а тому розглядувану гіпотезу про вид розподілу ймовірностей слід відхилити, оскільки вона при даному рівні значущості не узгоджується із статистичними даними.

6. Якщо $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$, то вважають, що розглядувана гіпотеза не суперечить статистичним даним.

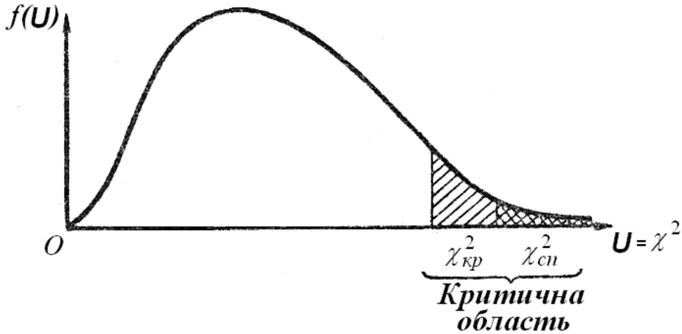


Рис. 4.2

Цілком аналогічно за критерієм Пірсона перевіряється і гіпотеза про дискретний розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X.

А саме, будується ряд розподілу статистичних ймовірностей

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P^*_{nX}(\{x_i\})$	$P^*_{nX}(\{x_1\})$	$P^*_{nX}(\{x_2\})$	...	$P^*_{nX}(\{x_k\})$

а також ряд гіпотетичного розподілу ймовірностей

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_X(\{x_i\})$	$P_X(\{x_1\})$	$P_X(\{x_2\})$	...	$P_X(\{x_k\})$

після чого обчислюється $\chi^2_{сп}$ за формулою

$$\chi^2_{сп} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(P^*_{nX}(\{x_i\}) - P_X(\{x_i\}))^2}{P_X(\{x_i\})} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

де m_i – абсолютні частоти значень x_i, $p_i = P_X(\{x_i\})$, $i = 1, 2, \ldots, k$ – гіпотетичні ймовірності значень x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Далі, як і раніше, виконують вказівки, подані в пунктах 3-6.

В програмі Gran1 передбачено автоматичну перевірку за критерієм Пірсона гіпотез як про неперервний, так і про дискретний розподіли ймовірностей.

Серед інших критеріїв узгодження розглянемо ще *критерій А.М. Колмогорова*. Відхилення статистичного розподілу ймовірностей від гіпотетичного при цьому обчислюють як

$$U = D = \max_x |F^*_{nX}(x) - F_X(x)|,$$

де $F_{nX}^{*}(x)$ – функція розподілу статистичних ймовірностей, $F_X(x)$ – гіпотетична функція розподілу ймовірностей.

За спеціальною таблицею (табл. 4.2) для різних λ можна знайти ймовірність $P(D\sqrt{n} \geq \lambda) = \beta$. Якщо ця ймовірність дуже мала, то подія $(D\sqrt{n} \geq \lambda)$ практично неможлива. При заданому рівні значущості $\alpha = 1 - \beta$ (досить близькому до одиниці) за таблицею Табл. 4.2 можна знайти таке $\lambda_{кр}$, для якого

$$P(D\sqrt{n} \geq \lambda_{кр}) = \beta .$$

Табл. 4.2

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,0	1,000		
0,1	1,000	1,1	0,178
0,2	1,000	1,2	0,112
0,3	1,000	1,3	0,068
0,4	0,997	1,4	0,040
0,5	0,964	1,5	0,022
0,6	0,864	1,6	0,012
0,7	0,711	1,7	0,006
0,8	0,544	1,8	0,003
0,9	0,393	1,9	0,002
1,0	0,270	2,0	0,001

Якщо за статистичними даними $D_{cn}\sqrt{n} \geq \lambda_{кр}$, то $P(D\sqrt{n} \geq D_{cn}\sqrt{n}) \leq \beta$, і таким чином гіпотезу про те, що функцією розподілу ймовірностей є $F_X(x)$, слід відхилити як таку, що не узгоджується із статистичними даними при заданому рівні значущості.

Якщо виявиться $D_{cn}\sqrt{n} < \lambda_{кр}$, то гіпотеза про розподіл ймовірностей при заданому рівні значущості не суперечить статистичним даним.

На відміну від критерію К. Пірсона, при застосуванні якого за статистичними даними можуть бути оцінені кілька невідомих параметрів гіпотетичного розподілу ймовірностей, що відповідним чином зменшує число ступенів вільності r, при застосуванні критерію Колмогорова гіпотетичний розподіл ймовірностей повинен бути повністю визначений разом з усіма його параметрами.

Розглянемо ще деякі підходи до перевірки гіпотез про числові характеристики розподілів.

Нехай є дві незалежні випадкові величини X і Y з нормальними розподілами ймовірностей, в результаті спостереження за якими дістали значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Треба перевірити, чи суперечить статистичним даним гіпотеза про те, що дисперсії $\sigma^2[X]$ і $\sigma^2[Y]$ рівні між собою (математичні сподівання тут невідомі).

Нехай $\tilde{D}_n[X] > \tilde{D}_m[Y]$. Розглянемо відношення дисперсій:

$$F_{n,m} = \frac{\tilde{D}_n[X]}{\tilde{D}_m[Y]} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(Y_k - \overline{Y}_m)^2}.$$

Ця величина не залежить від невідомих параметрів нормальних розподілів на множинах значень випадкових величин X_i і Y_k Розподіл ймовірностей на множині значень цієї випадкової величини називають *розподілом Фішера* з n і m ступенями вільності.

Для перевірки гіпотези, що $D[X] = D[Y]$ з рівнем значущості α, близьким до 1, знаходять $F_{кр} = F_{кр}(n,\ m,\ 1-\alpha)$ за спеціальними таблицями (див. додаток 6). Якщо виявиться, що $F_{n,\ m} < F_{кр}$, то гіпотеза при заданому рівні значущості не суперечить статистичним даним, в іншому разі – ця гіпотеза не узгоджується із статистичними даними.

Якщо математичні сподівання $M[X]$ і $M[Y]$ відомі, то гіпотеза про рівність дисперсій перевіряється аналогічно до попереднього, при цьому вважають, що

$$\tilde{D}_n[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M[X])^2,\ \tilde{D}_m[Y] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - M[Y])^2.$$

Приклад 1. Нехай $X(E)$ та $Y(E)$ – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей на множинах їх значень. В результаті спостережень дістали вибірки значень цих величин об'ємом $n_X = 12$ і $n_Y = 15$ та підраховано виправлені вибіркові дисперсії $\tilde{D}_{12}[X] = 11{,}41$ та $\tilde{D}_{15}[Y] = 6{,}52$. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}95$ перевірити гіпотезу про те, що $D[X] = D[Y]$.

Знайдемо $F_{12,15} = 11{,}41 / 6{,}52 = 1{,}75$.

Оскільки

$$n_1 = 12 - 1 = 11.\ n_2 = 15 - 1 = 14,$$

то за таблицею (додатку 6) знаходимо

$$F_{кр} = F_{кр}(11, 14, 0, 05) = 2{,}75.$$

Маємо: $F_{12,15} < F_{кр}$, а тому гіпотеза про рівність $D[X] = D[Y]$ не суперечить статистичним даним.

Розглянемо гіпотезу про рівність математичних сподівань $M[X]$ і $M[Y]$, якщо відомо, що на множинах значень випадкових величин X і Y розподіли ймовірностей нормальні з однаковими дисперсіями, проте параметри розподілів невідомі.

Випадкова величина

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{((n-1)\widetilde{D}_n[X] + (m-1)\widetilde{D}_m[Y])/(n+m-2)}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$$

не залежить від невідомих $M[X]$, $M[Y]$ та $\sigma^2[X]$, $\sigma^2[Y]$ і має розподіл ймовірностей Стьюдента з $k = n+m-2$ ступенями вільності.

За розподілом Стьюдента для перевірки гіпотези, що $M[X] = M[Y]$ з рівнем значущості α, близькому до 1, знаходять $t_{кр} = t_{кр}(1-\alpha,\ k)$ (див. додаток 5). Якщо $|T| < t_{кр}$, то гіпотеза про рівність математичних сподівань узгоджується з статистичними даними, а в іншому разі не узгоджується.

Приклад 2. $X(E)$ та $Y(E)$ – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей, з можливо однаковими дисперсіями, для яких в результаті спостережень дістали вибірки значень об'ємом відповідно $n_X = 5$ і $n_Y = 6$ і підраховано вибіркові середні $\bar{x}_5 = 3{,}3$, $\bar{y}_6 = 2{,}48$ та виправлені дисперсії $\widetilde{D}_5[X] = 0{,}25$, $\widetilde{D}_6[Y] = 0{,}108$. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}95$ перевірити гіпотезу, що $M[X] = M[Y]$.

Спочатку за критерієм Фішера перевіримо гіпотезу, що $D[X] = D[Y]$. Для цього знайдемо $F_{5,6} = \dfrac{0{,}25}{0{,}108} = 2{,}31$ і $F_{кр} = F(4, 5, 0{,}05) = 5{,}19$.

Оскільки $F_{5,6} < F_{кр}$, то гіпотеза про рівність $D[X] = D[Y]$ не суперечить статистичним даним.

Підрахуємо тепер

$$T = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m)}{\sqrt{(n-1)\widetilde{D}_n[X] + (m-1)D_m[Y]}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} =$$

$$= \frac{3{,}3 - 2{,}48}{\sqrt{4 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}108}} \sqrt{\frac{5 \cdot 6 \cdot 9}{11}} = 3{,}27.$$

За таблицею додатку 5 знаходимо $t_{кр} = t_{кр}(0{,}05, 5+6-2) = 2{,}26$.

Маємо $|T| < t_{кр}$, а тому гіпотеза про рівність $M[X] = M[Y]$ узгоджується з статистичними даними.

Якщо дисперсії $\sigma^2[X]$ і $\sigma^2[Y]$ відомі, то гіпотезу про рівність $M[X] = M[Y]$ досліджують за допомогою випадкової величини

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\frac{1}{n}\sigma^2[X] + \frac{1}{m}\sigma^2[Y]}},$$

розподіл ймовірностей на множині значень якої нормальний. Тому гіпотеза $M[X] = M[Y]$ відхиляється або не відхиляються, якщо при рівні значущості α відповідно виконується або не виконується нерівність

$$|T| = \frac{|\overline{X}_n - \overline{Y}_m|}{\sqrt{\frac{1}{n}\sigma^2[X] + \frac{1}{m}\sigma^2[Y]}} \geq t_{кр},$$

де $t_{кр}$ – критичне значення для нормального розподілу ймовірностей з параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$, знаходять за допомогою функції Лапласа:

$$\Phi(t_{кр}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Приклад 3. $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей, з дисперсіями $D[X] = 120$ і $D[Y] = 100$. В результаті спостережень дістали вибірки значень цих величин об'ємом $n_X = 60$ і $n_Y = 50$ та знайдено вибіркові середні $\bar{x}_{60} = 1250$ і $\bar{y}_{60} = 1275$. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}99$ перевірити гіпотезу про те, що $M[X] = M[Y]$.

Підрахуємо

$$T = \frac{(\bar{x}_n - \bar{y}_m)}{\sqrt{\frac{D[X]}{n} + \frac{D[Y]}{m}}} \frac{1250 - 1275}{\sqrt{\frac{120}{60} + \frac{100}{50}}} = -12{,}5$$

За допомогою функції Лапласа знайдемо $t_{кр}$: $\Phi(t_{кр}) = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}455 \Rightarrow t_{кр} = 2{,}58$.

Оскільки $|T| = 12{,}5 > 2{,}58$, то гіпотеза про рівність $M[X] = M[Y]$ не узгоджується із статистичними даними.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Середній урожай зерна з одного гектара є випадковою величиною. За даними 100 спостережень дістали такий інтервальний (неперервний) розподіл статистичних ймовірностей (табл. 4.3).

Табл. 4.3

Урожайність ц/га	13,5–14,5	14,5–15,5	15,5–16,5	16,5–17,5	17,5–18,5	18,5–19,5	19,5–20,5
Статистичні ймовірності	0,06	0,10	0,18	0,28	0,20	0,12	0,06

За допомогою критерію Пірсона перевірити, чи сумісні здобуті статистичні дані з гіпотезою про те, що на множині значень досліджуваної випадкової величини розподіл ймовірностей нормальний, щільність якого

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}5} e^{-\frac{(x-17)^2}{2\cdot(1{,}5)^2}} .$$

Рівень значущості α дорівнює 0,95.

Скориставшись програмою GRAN1 або таблицею значень функції Лапласа $\Phi(x)$, можна знайти гіпотетичні ймовірності того, що значення досліджуваної випадкової величини попадають в задані часткові інтервали:

$P_X([13{,}5;\ 14{,}5)) = 0{,}04$; $P_X([14{,}5;\ 15{,}5)) = 0{,}11$; $P_X(15{,}5;\ 16{,}5)) = 0{,}21$;

$P_X([16{,}5;\ 17{,}5)) = 0{,}28$; $P_X([17{,}5;\ 18{,}5)) = 0{,}21$; $P_X([18{,}5;\ 19{,}5)) = 0{,}11$;

$P_X([19{,}5;\ 20{,}5)) = 0{,}04$,

які зведемо в таблицю (Табл. 4.4)

Табл. 4.4

Урожайність ц/га	13,3–14,5	14,5–15,5	15,5–16,5	16,5–17,5	17,5–18,5	18,5–19,5	19,5–2-,5
Гіпотетичні ймовірності	0,04	0,11	0,21	0,28	0,21	0,11	0,04

Обчислюючи $\chi^2_{сп}$ за формулою (4.1), дістаємо $\chi^2_{сп} = 2{,}81$. Число ступенів вільності r при цьому дорівнює 6, оскільки число часткових інтервалів дорівнює 7, а за статистичним матеріалом не оцінюється жоден параметр.

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при $\alpha = 0{,}95$ і $r = 6$ знайдемо $\chi^2_{кр} = 12{,}6$ (див. додаток 4).

Оскільки $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$, то за критерієм Пірсона наведені статистичні дані не суперечать гіпотезі про те, що на множині значень досліджуваної випадкової величини розподіл ймовірностей нормальний зі щільністю ймовірності

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}5} e^{-\frac{(x-17)^2}{2\cdot(1{,}5)^2}} .$$

Вправа 2. Між нулем і одиницею навмання вибирають число. В результаті 100 спостережень дістали інтервальний розподіл статистичних ймовірностей для спостережених значень (табл. 4.5).

Табл. 4.5

Часткові інтервали	[0–0,1)	[0,1–0,2)	[0,2–0,03)	[0,3–0,4)	[0,4–0,5)	[0,5–0,6)	[0,6–0,7)	[0,7–0,8)	[0,8–0,9)	[0,9–1,0)
Статистичні ймовірності	0,08	0,12	0,07	0,10	0,15	0,09	0,06	0,13	0,09	0,11

Використовуючи критерій Колмогорова, перевірити, чи узгоджуються здобуті статистичні дані з гіпотезою про те, що розподіл ймовірностей на множині значень досліджуваної випадкової величини рівномірний (на проміжку $[0,1]$). Рівень значущості α вважати таким, що дорівнює 0,9.

За статистичними даними знайдемо (скориставшись програмою GRAN1) значення функції розподілу статистичних ймовірностей на кінцях заданих інтервалів I_i (Рис. 4.3, *а*, *б*). Маємо

$$F_n^*(0)=0;\ F_n^*(0{,}1)=0{,}08;\ F_n^*(0{,}2)=0{,}20;\ F_n^*(0{,}3)=0{,}27;$$
$$F_n^*(0{,}4)=0{,}37;\ F_n^*(0{,}5)=0{,}52;\ F_n^*(0{,}6)=0{,}61;\ F_n^*(0{,}7)=0{,}67;$$
$$F_n^*(0{,}8)=0{,}80;\ F_n^*(0{,}9)=0{,}89;\ F_n^*(1{,}0)=0{,}1.$$

На Рис. 4.3, б зображено графіки функцій $F_n^*(x)$ і $F_X(x)$ на відрізку $[0,1]$. Значення гіпотетичної функції розподілу

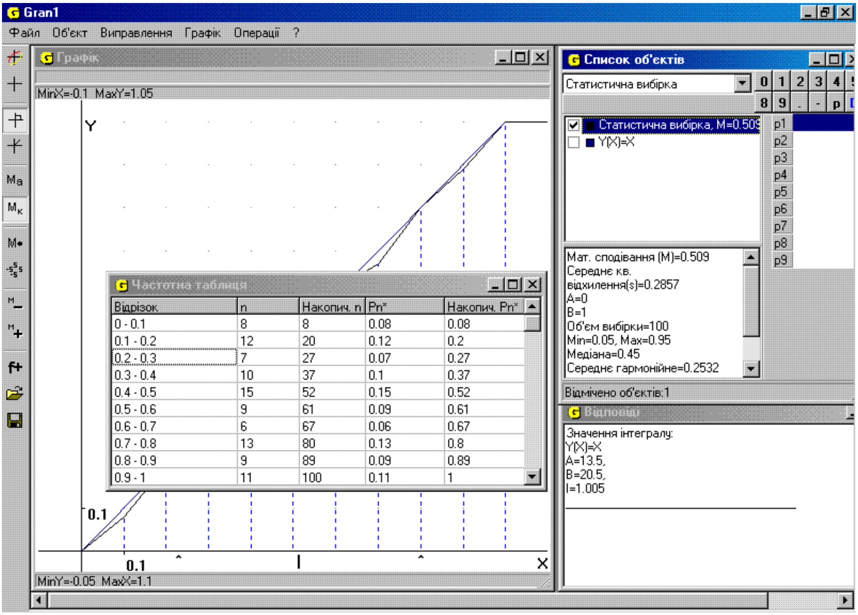
$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\ \ x\le 0;\\ x & \text{при}\ \ 0\le x\le 1;\\ 1 & \text{при}\ \ 1\le x.\end{cases}$$

на кінцях тих самих інтервалів I_i такі:

$$F_X(0)=0;\ F_X(0{,}1)=0{,}1;\ F_X(0{,}2)=0{,}2;\ F_X(0{,}3)=0{,}3;$$
$$F_X(0{,}4)=0{,}4;\ F_X(0{,}5)=0{,}5;\ F_X(0{,}6)=0{,}6;\ F_X(0{,}7)=0{,}7;$$
$$F_X(0{,}8)=0{,}8;\ F_X(0{,}9)=0{,}9;\ F_X(1{,}0)=1{,}0.$$

Знайдемо $D=\max\limits_{x\in[0,1]}|F_n^*(x)-F_X(x)|$. Зазначимо, що коли інтервали I_i досить малі, то замість $\max\limits_{x\in[0,1]}|F_n^*(x)-F_X(x)|$ можна наближено взяти найбільше значення різниці $|F_n^*(x)-F_X(x)|$ на кінцях інтервалів I_i. У розглядуваному прикладі

$$F_n^*(0)-F_X(0)=0;\ F_n^*(0{,}1)-F_X(0{,}1)=-0{,}02;$$
$$F_n^*(0{,}2)-F_X(0{,}2)=0{,}00;$$
$$F_n^*(0{,}3)-F_X(0{,}3)=-0{,}03;\ F_n^*(0{,}4)-F_X(0{,}4)=-0{,}03;$$
$$F_n^*(0{,}5)-F_X(0{,}5)=0{,}02;\ F_n^*(0{,}6)-F_X(0{,}6)=0{,}01;$$



Відрізок	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
0 - 0.1	8	8	0.08	0.08
0.1 - 0.2	12	20	0.12	0.2
0.2 - 0.3	7	27	0.07	0.27
0.3 - 0.4	10	37	0.1	0.37
0.4 - 0.5	15	52	0.15	0.52
0.5 - 0.6	9	61	0.09	0.61
0.6 - 0.7	6	67	0.06	0.67
0.7 - 0.8	13	80	0.13	0.8
0.8 - 0.9	9	89	0.09	0.89
0.9 - 1	11	100	0.11	1

Рис 4.3,а

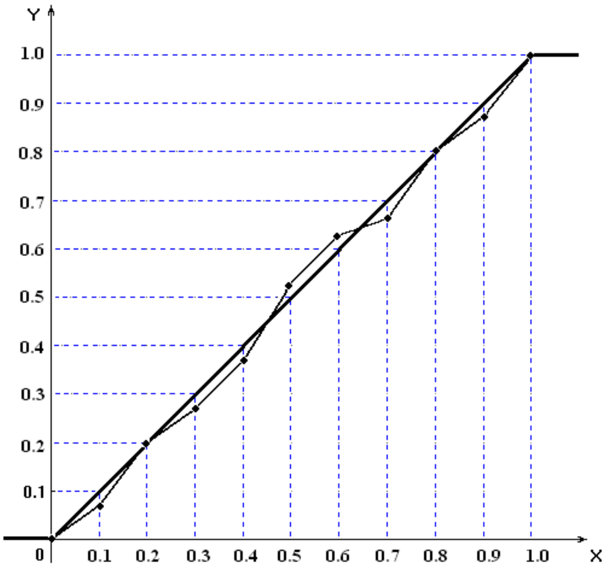


Рис. 4.3,б

$$F_n^*(0{,}7) - F_X(0{,}7) = -0{,}03; \; F_n^*(0{,}8) - F_X(0{,}8) = 0{,}00;$$
$$F_n^*(0{,}9) - F_X(0{,}9) = -0{,}01; \; F_n^*(1{,}0) - F_X(1{,}0) = 0$$

При всіх інших значеннях аргументу $x \in [0;1]$ значення різниці функцій $F_n^*(x)$ і $F_X(x)$ не перевищують знайдених. Тому

$$D_{cn} = \max_{x \in [0,1]} |F_n^*(x) - F_X(x)| = 0{,}03.$$

Таким чином, $D_{cn}\sqrt{n} = 0{,}03 \cdot \sqrt{100} = 0{,}3$. Оскільки для заданого рівня значущості $\alpha = 0.9$, ($\beta = 1 - \alpha = 1 - 0.9 = 0.1$), за табл. 5.4 $\lambda_{кр} \approx 1{,}2$ і $D_{cn}\sqrt{n} = 0{,}3 < 1{,}2$, то за критерієм Колмогорова наведені статистичні дані при заданому рівні значущості $\alpha = 0.9$ не суперечать гіпотезі про те, що розподіл ймовірностей на множині значень досліджуваної неперервної випадкової величини рівномірний (на відрізку $[0,1]$).

Зазначимо, що коли б число спостережень було набагато більшим, наприклад $n = 10000$, і при цьому дістали б той самий інтервальний ряд розподілу статистичних ймовірностей, то отримали б $D_{cn}\sqrt{n} = 0{,}03 \cdot \sqrt{10000} = 3$. У цьому разі, згідно з критерієм Колмогорова, гіпотеза про рівномірний розподіл ймовірностей суперечила б статистичним даним.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. За кожною вибіркою значень випадкової величини X можна сформулювати гіпотезу про близькість розподілу ймовірностей (чи окремих параметрів розподілу) на множині значень цієї величини до якогось стандартного розподілу.
2. Гіпотеза з твердження 1 завжди повинна бути пов’язаною з певною статистичною оцінкою (нормою, відхиленням) U.
3. Відхилення з твердження 2 є випадковою величиною з відомим розподілом ймовірностей.
4. Якщо розподіл ймовірностей на множині значень відхилення U відомий, то для нього можна знайти критичну область.
5. Критерій Пірсона ґрунтується на тому, що:

а) відхилення U статистичного розподілу від гіпотетичного визначається рівністю

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i};$$

б) відхилення U завжди має χ^2-розподіл;

в) χ^2-розподіл залежить від гіпотетичного розподілу;

г) χ^2-розподіл не залежить від числа ступенів вільності;

д) для χ^2-розподілу існують таблиці значень, за якими, знаючи r і χ^2_{cn}, можна знайти $\beta = P(\chi^2 \geq \chi^2_{cn})$, а знаючи r і β, можна знайти $\chi^2_{\kappa p}$ з рівняння $P(\chi^2 < \chi^2_{kp}) = \alpha$;

е) якщо $\chi^2_{cn} \geq \chi^2_{kp}$, то гіпотеза про вигляд розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X не узгоджується із наявними статистичними даними. В іншому разі ця гіпотеза не суперечить наявним статистичним даним.

6. Критерій Пірсона застосовний лише для неперервних випадкових величин.

7. Критерій Колмогорова ґрунтується на тому, що:

а) відхилення функції розподілу статистичних ймовірностей $F^*_{nX}(x)$ від гіпотетичної функції розподілу ймовірностей $F_X(x)$ визначається рівністю:

$$U = D = \max_x | F^*_{nX}(x) - F_X(x) | ;$$

б) існує таблиця, за якою, знаючи рівень значущості α (близький до одиниці), можна знайти λ_{kp} таке, що $P(D\sqrt{n} \geq \lambda_{\kappa p}) = 1 - \alpha$;

в) якщо за статистичними даними $D_{cn}\sqrt{n} \leq \lambda_{\kappa p}$, то гіпотезу, що функцією розподілу є $F_X(x)$, відхиляють, а в іншому разі вважають, що ця гіпотеза не суперечить статистичним даним.

8. Для перевірки гіпотези про рівність дисперсій двох випадкових величин X та Y з нормальними розподілами ймовірностей (з невідомими математичними сподіваннями та дисперсіями) можна використати розподіл Фішера.

9. Для перевірки гіпотези про рівність математичних сподівань випадкових величин X та Y з нормальними розподілами ймовірностей (з невідомими параметрами, проте однаковими дисперсіями) можна використовувати розподіл Стьюдента на множині значень випадкової величини

$$T = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m)\sqrt{mn/(m+n)}}{\sqrt{((n-1)\tilde{D}_n[X] + (m-1)\tilde{D}_m[Y]))/(n+m-2)}}.$$

2. Для заданої вибірки об'єму n спостережених значень випадкової величини X і заданого рівня значущості α за допомогою критерія: а) Пірсона та б) Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини є:

1) нормальним з параметрами $m = M[X] \approx \bar{x}_n$ і $\sigma = \sqrt{D[X]} \approx \bar{\sigma}_n$;

2) рівномірним з щільністю $f_X(x)=\dfrac{1}{b-a}, x\in[a;b]$, $f_X(x)=0, x\notin[a;b]$, де $a\approx\bar{x}_n-\sqrt{3}\,\bar{\sigma}_n, b=\bar{x}_n+\sqrt{3}\,\bar{\sigma}_n$;

3) показниковим з параметром $\lambda\approx\dfrac{1}{\bar{x}_n}$;

4) біноміальним, при цьому кожне значення x_i серед усіх попарно різних спостереженнях значень випадкової величини X, $i\in\overline{0,k}$, тлумачиться як кількість відбувань події A у серії з k незалежних випробувань, а $P=P(A)\approx\bar{x}_n/k$ або P задано додатково;

5) розподілом Пуассона з параметром $a\approx\bar{x}_n$;

6) геометричним розподілом з параметром $P=\dfrac{1}{\bar{x}_n+1}$:

1.

x_i	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
n_i	5	9	13	18	21	18	10	6

, $\alpha=0{,}95$;

2.

I_i	[3;5)	[7;11)	[11;15)	[15;19)	[19;23)	[23;27)	[27;31)
n_i	15	18	21	14	10	22	11

, $\alpha=0{,}97$;

3.

x_i	16	16	17	18	19	20	21	22
n_i	8	28	31	41	33	28	24	7

, $\alpha=0{,}99$;

4.

I_i	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)
n_i	15	25	45	51	34	22	8

, $\alpha=0{,}95$;

5.

I_i	[-4;-2)	[-2;0)	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
n_i	28	27	34	23	25	31	32

, $\alpha=0{,}97$;

6.

I_i	[0;6)	[6;12)	[12;18)	[18;24)	[24;30)	[30;36)	[36;42)
n_i	115	51	18	9	4	2	1

, $\alpha=0{,}99$;

7.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	4	23	31	23	11	5	2	1

, $\alpha=0{,}95$;

8.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	242	349	234	107	43	21	3	1

, $\alpha=0{,}97$;

9.

I_i	[4;7)	[7;10)	[10;13)	[13;16)	[16;19)	[19;22)	[22;25)
n_i	12	9	21	8	11	19	20

, $\alpha = 0{,}99$;

10.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	12	31	42	39	35	27	5	4	2

, $\alpha = 0{,}95$;

11.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	427	363	154	41	9	3	2	1

, $\alpha = 0{,}97$;

12.

I_i	[0;0,1)	[0,1;0,2)	[0,2;0,3)	[0,3;0,4)	[0,4;0,5)
n_i	3	5	4	6	5

, $\alpha = 0{,}99$;

3. Використовуючи критерій Пірсона при заданому рівні значущості α перевірити чи підтверджується гіпотеза про співпадання розподілів заданих емпіричних та теоретичних частот:

1.

Емпіричні частоти	6	12	16	40	13	8	5
Теоретичні частоти	4	11	15	43	15	6	6

$\alpha = 0{,}95$;

2.

Емпіричні частоти	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
Теоретичні частоти	4	7	12	29	48	35	34	18	7	6

$\alpha = 0{,}95$;

3.

Емпіричні частоти	5	13	12	44	8	12	6
Теоретичні частоти	2	20	12	35	15	10	6

$\alpha = 0{,}95$;

4.

Емпіричні частоти	8	16	40	72	36	18	10
Теоретичні частоти	6	18	36	76	39	18	7

$\alpha = 0{,}99$;

5.

Емпіричні частоти	5	10	40	8	7
Теоретичні частоти	6	14	18	7	5

$\alpha = 0{,}90$;

6.

Емпіричні частоти	6	8	13	15	20	16	10	7	5
Теоретичні частоти	5	9	14	16	18	16	9	6	7

$\alpha = 0{,}90$;

7.

Емпіричні частоти	14	18	32	70	20	36	10
Теоретичні частоти	10	24	34	80	18	22	12

$\alpha = 0{,}95$;

8.

Емпіричні частоти	5	7	15	14	21	16	9	7	6
Теоретичні частоти	6	7	14	15	22	15	9	8	6

$\alpha = 0{,}95$.

4. Нехай $X(E)$ та $Y(E),\ E \in \Omega$, – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей. В результаті спостережень дістали вибірки значень цих величин об'ємом n_X та n_Y і підраховано виправлені дисперсії $\tilde{D}_{n_X}[X]$ та $\tilde{D}_{n_Y}[Y]$. Для заданого рівня значущості α перевірити гіпотезу про те, що $D[X] = D[Y]$, якщо:

1) $n_X = 21,\ n_Y = 16,\ \tilde{D}_{21}[X] = 3{,}6,\ \tilde{D}_{16}[Y] = 2{,}4,\ \alpha = 0{,}95$;

2) $n_X = 13,\ n_Y = 18,\ \tilde{D}_{13}[X] = 0{,}72,\ \tilde{D}_{18}[Y] = 0{,}20,\ \alpha = 0{,}99$;

3) $n_X = 16,\ n_Y = 11,\ \tilde{D}_{16}[X] = 2{,}8,\ \tilde{D}_{11}[Y] = 24,\ \alpha = 0{,}95$.

5. Нехай $X(E)$ та $Y(E), E \in \Omega$, – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей з можливо однаковими дисперсіями. В результаті спостережень дістали вибірки значень цих величин об'ємом n_X та n_Y і підраховано вибіркові середні $\bar{x}_{n_X}$, $\bar{y}_{n_Y}$ та виправлені дисперсії $\tilde{D}_{n_X}[X]$ та $\tilde{D}_{n_Y}[Y]$.

Для заданого рівня значущості α перевірити гіпотезу про те, що $M[X] = M[Y]$, якщо:

1) $n_X = 5,\ n_Y = 6,\ \bar{x}_5 = 15{,}9,\ \bar{y}_6 = 14{,}1,$
$\tilde{D}_5[X] = 14{,}76,\ \tilde{D}_6[Y] = 4{,}92,\ \alpha = 0{,}95$;

2) $n_X = 7,\ n_Y = 8,\ \bar{x}_7 = 0{,}25,\ \bar{y}_8 = 0{,}30,$
$\tilde{D}_7[X] = 2{,}35,\ \tilde{D}_8[Y] = 3{,}48,\ \alpha = 0{,}95$;

3) $n_X = 8,\ n_Y = 6,\ \bar{x}_8 = 17,\ \bar{y}_6 = 22,$
$\tilde{D}_8[X] = 21,\ \tilde{D}_6[Y] = 15,\ \alpha = 0{,}99$.

6. Нехай $X(E)$ та $Y(E), E \in \Omega$, – незалежні випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей з даними дисперсіями $D[X]$ та $D[Y]$. В результаті спостережень дістали вибірки значень цих величин об'ємом n_X та n_Y і підраховано вибіркові середні $\bar{x}_{n_X}$ та $\bar{y}_{n_Y}$.

Для заданого рівня значущості α перевірити гіпотезу про те, що $M[X] = M[Y]$, якщо:

1) $n_X = 30,\ n_Y = 20,\ D[X] = 120,\ D[Y] = 100,$
$\bar{x}_{30} = 16,\ \bar{y}_{20} = 15,\ \alpha = 0{,}95$;

2) $n_X = 50,\ n_Y = 40,\ D[X] = 50,\ D[Y] = 120,$
$\bar{x}_{50} = 20,\ \bar{y}_{40} = 15,\ \alpha = 0{,}99$;

3) $n_X = 80,\ n_Y = 60,\ D[X] = 8,\ D[Y] = 10,$
$\bar{x}_{80} = 16{,}1,\ \bar{y}_{60} = 14{,}9,\ \alpha = 0{,}95$.

7.1. Вважаючи, що $\overline{Y}_m = M[X] = m$ є сталою випадковою величиною, використовуючи критерій перевірки гіпотези $M[X] = M[Y]$ при заданих дисперсіях $D[X]$ та $D[Y]$, дістати критерій про рівність $M[X] = m$ для випадкової величини X з нормальним розподілом ймовірностей з даною дисперсією $D[X]$ і даною вибіркою значень об'ємом n, за якою підраховано вибіркове середнє $\bar{x}_n$.

2. Застосувати знайдений критерій для перевірки гіпотези $M[X] = m$, коли:

1) $n = 36,\ \bar{x}_{36} = 21{,}6,\ m = 21,\ \sigma = \sqrt{D[X]} = 0{,}36,\ \alpha = 0{,}95$;

2) $n = 49,\ \bar{x}_{49} = 4{,}5,\ m = 3,\ \sigma = \sqrt{D[X]} = 2{,}1,\ \alpha = 0{,}95$;

3) $n = 28,\ \bar{x}_{28} = 0{,}52,\ m = 0{,}4,\ \sigma = \sqrt{D[X]} = 1{,}5,\ \alpha = 0{,}99$.

5.5. Поняття про метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло)

Досить часто виникають задачі про визначення характеристик деяких процесів, перебіг яких не є детермінованим і залежить від випадкових факторів. Для таких задач розробляють спеціальні *імітаційні моделі* і імітуючи (як правило з використанням комп'ютера) більш чи менш точно перебіг реальних процесів, виконують спостереження за функціонуванням таких моделей. Усереднені результати спостережень використовують для наближеного визначення шуканих характеристик досліджуваних процесів. У цьому й полягає суть методу статистичних випробувань, який називають також *методом Монте-Карло.* Імітацію перебігу недетермінованих реальних процесів за допомогою імітаційних моделей називають *статистичним моделюванням*.

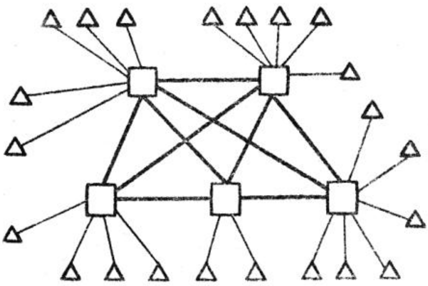


Рис. 5.1

У деяких випадках метод Монте-Карло є єдиним, за яким можна дістати наближені розв'язки задач, які не можна проаналізувати іншими аналітичними чи чисельними методами. Якщо, наприклад, треба спроектувати мережу зв'язку (Рис. 5.1) так, щоб відсоток відмов запитам на обслуговування не перевищував заданого, коефіцієнт використання каналів зв'язку був не меншим заданого, час чекання в черзі на обслуговування не перевищував заданого тощо, коли відомі розподіли ймовірностей випадкових моментів часу, в які надходять запити на обслуговування у кінцеві пункти, розподіли ймовірностей випадкових проміжків часу обслуговування запитів, то метод Монте-Карло, коли б не єдиний, який цілком можна застосувати для розв'язування такої задачі. Метод Монте-Карло можна використати й для розв'язування багатьох задач, які детерміновані і для розв'язування яких відомі інші чисельні або аналітичні методи.

Приклад 5.1. Нехай потрібно обчислити площу деякої досить складної плоскої фігури G (Рис. 5.2,а). Вибравши відповідний масштаб, побудуємо квадрат

$$W = \{(x, y) : 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\},$$

який повністю містить розглядувану фігуру. У множині W навмання вибиратимемо точки (x, y) так, щоб будь-які з них були рівноможливі, тобто щоб розподіл ймовірностей на множині W був рівномірним, причому $P_{(X,Y)}(W) = 1$. При цьому ймовірність попадання випадкової точки (x, y) в область G дорівнюватиме площі області G, оскільки площа квадрата W дорівнює 1 (див. геометричне задання ймовірності).

Щоб наближено знайти невідому ймовірність $P_{(X,Y)}(G)$, проведемо досить велику серію випробувань, щоразу навмання вибираючи випадкову точку (X,Y) з множини W. Статистична ймовірність $P^*_{n(X,Y)}(G)$ попадання точки (X,Y) в область G, що дорівнює відношенню числа випробувань, в яких точка (X,Y) виявилась в області G, до числа всіх випробувань, є наближеним значенням невідомої ймовірності $P_{(X,Y)}(G)$. За теоремою Бернуллі $P^*_{n(X,Y)}(G)$ при $n \to \infty$ збігається за ймовірністю до ймовірності $P_{(X,Y)}(G)$. Отже, при досить великому n площу області G можна визначити досить точно з певним рівнем вірогідності.

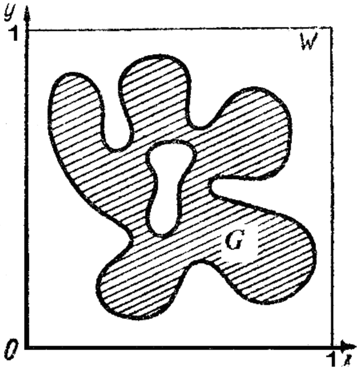


Рис. 5.2, а)

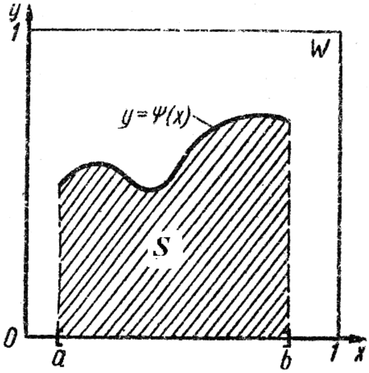


Рис. 5.2, б)

Внаслідок статистичних випробувань неможливо перебрати всі точки множини W, проте для досить великої вибірки можна скласти майже точне уявлення про те, яку частину відносно множини W становить підмножина G.

Розглянутий метод обчислення площі фігури можна застосовувати до обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b \psi(x)dx$ (Рис. 5.2, б).

Застосовуючи метод статистичних випробувань на практиці, треба мати можливість діставати випадкову точку (X,Y) із заданим розподілом ймовірностей на деякій множині W. Цей розподіл може бути дискретним чи неперервним залежно від того, який реальний процес вивчається. Розглянемо деякі найпростіші розподіли ймовірностей.

Засіб, за допомогою якого дістають значення випадкової величини X із заданим одновимірним розподілом ймовірностей, називають *генератором* (датчиком) випадкових чисел. При кожному використанні такого датчика дістають деяке значення випадкової величини X. Кожне звернення до датчика можна тлумачити як випробування, а результати всіх цих випробувань – як статистичний матеріал. Датчики випадкових чисел можуть бути реалізовані у вигляді деяких фізичних приладів, а також у вигляді деяких алгоритмів для знаходження значень випадкової величини, що вивчається.

Приклад 5.2. Нехай задано випадкову величину X з дискретним розподілом ймовірностей (табл. 5.1).

Табл. 5.1

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P_X(\{x_i\})$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

причому усі p_i записано у вигляді звичайних дробів.

Один з найпростіших датчиків випадкових чисел з цим розподілом ймовірностей реалізують так. Вибирають досить велике число N таке, щоб числа Np_i, $i=1, 2, ..., n$, були цілими, і на $m_1 = Np_1$ картках пишуть число x_1, на

$m_2 = Np_2$ картках пишуть число x_2 і т.д., на $m_n = Np_n$ картках пишуть число x_n. Потім змішують усі картки і навмання вибирають будь-яку з них, повертаючи щоразу вийняту картку. Якщо елементарні події, що відповідають кожній окремій картці, рівноймовірні між собою, то число x_1 з'являється з імовірністю p_1, x_2 – з імовірністю p_2 і т. д., x_n – з імовірністю p_n. Таким чином дістають деякий датчик значень випадкової величини із заданим дискретним розподілом ймовірностей (табл. 5.1).

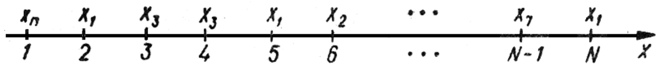


Рис. 5.3

Цей самий датчик можна реалізувати і так. Вибирають N точок на осі Ox (Рис. 5.3) і будь-які $m_1 = Np_1$ з цих точок позначають мітками x_1, $m_2 = Np_2$ точок – мітками x_2 і т. д., $m_n = Np_n$ точок – мітками x_n.

Якщо є можливість реалізувати вибір одного з чисел $1,2,...,N$ так, щоб відповідні їм елементарні події були рівноймовірні, то маючи певне число з множини $\{1,2,..., N\}$ і знаючи відповідну йому мітку, дістають відповідне значення випадкової величини X. При цьому значення x_1 з'являється з імовірністю p_1; x_2 – з імовірністю p_2 і т. д.; x_n – з імовірністю p_n.

Оскільки розміщення міток $x_1, x_2,...,x_n$ не відіграє ніякої ролі, важливо тільки, щоб кожна з них повторювалась необхідну кількість разів, то мітки x_i доцільно розміщувати в порядку зростання індекса *i*. У цьому разі якщо навмання вибирається значення γ з множини $\{1,2,\ldots,N\}$ і значення $1,2,\ldots,N$ рівноймовірні між собою, то значенням γ, які задовольняють умову $\gamma \le p_1 N$, відповідає число x_1; значенням γ, які задовольняють умову $p_1 N < \gamma \le p_1 N + p_2 N$, відповідає число x_2 і т.д.; значенням γ, які задовольняють умову

$$N\sum_{k=1}^{i-1} p_k < \gamma \le N\sum_{k=1}^{i} p_k \,, \qquad (5.1)$$

відповідає число x_i. Отже, треба мати можливість діставати в результаті випробування одну з N рівноможливих елементарних подій, тобто треба мати датчик рівноймовірних між собою чисел з множини $\{1,2,\ldots,N\}$. Маючи такий датчик, легко реалізувати датчик з будь-яким дискретним розподілом ймовірностей.

Датчик з дискретним розподілом ймовірностей легко реалізувати також, маючи датчик випадкових чисел з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0,1]$.

Приклад 6.3. Нехай відрізок $[0,1]$ довільним чином поділено на деякі підмножини $\Delta_1, \Delta_2,..., \Delta_n$ так, що довжина всіх відрізків, що утворюють підмножину Δ_i, $i = 1,2,..., n$, відноситься до довжини всього відрізка $[0,1]$ як p_i (Рис. 5.4). Визначимо на відрізку $[0,1]$ функцію $y = \varphi(x) = x_i$, якщо $x \in \Delta_i$. Тоді при рівномірному розподілі ймовірностей на відрізку $[0,1]$

$$P_Y(\{x_i\}) = P_X(\varphi^{-1}(x_i)) = P_X(\Delta_i) = p_i .$$

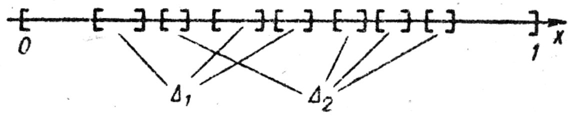


Рис. 5.4

Тобто значення x_i з'являтимуться з імовірністю p_i, $i = 1,2,..., n$. Оскільки при рівномірному розподілі ймовірностей на відрізку $[0,1]$ ймовірність попадання в деяку вимірну підмножину Δ_i залежить тільки від міри цієї підмножини і не залежить від її структури та розміщення щодо відрізка $[0,1]$, то доцільно, як і в дискретному випадку, розміщувати спочатку всі проміжки множини Δ_1, потім усі проміжки множини Δ_2 і т.д. Тоді значенню $\gamma^* \in [0,1]$, яке дістають за допомогою датчика випадкових чисел з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0,1]$, що задовольняє умову

$$\sum_{k=1}^{i-1} p_k < \gamma^* \le \sum_{k=1}^{i} p_k \ , \tag{5.2}$$

відповідає число x_i.

Розглянемо тепер датчик випадкових чисел з наперед заданим *неперервним розподілом ймовірностей*, вважаючи, що датчик випадкових чисел з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0,1]$ вже побудований.

Оскільки за даною щільністю розподілу ймовірностей $f_X(x)$ завжди можна знайти функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$, то вважатимемо, що з самого початку задано функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$. Виберемо числа a і b так, щоб із заданою точністю обчислень $\varepsilon > 0$ можна було вважати, що

$$F_X(a) = P_X(-\infty, a) = 0 \text{ при } F_X(a) < \varepsilon ,$$

$$F_X(b) = P_X(-\infty,\ b) = 1 \text{ при } F_X(b) > 1 - \varepsilon .$$

Тоді можна вважати, що вся одинична ймовірність (з точністю до 2ε) розподілена на відрізку $[a,b]$. Поділимо відрізок $[a,b]$ на кілька інтервалів завдовжки Δx точками поділу $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$.

Кожному з таких проміжків $[x_i, x_{i+1})$ поставимо у відповідність значення x_i (лівий кінець проміжка), вважаючи, що в результаті випробування дістанемо значення x_i, якщо навмання вибрана точка $x \in [a,b]$ належатиме інтервалу $[x_i, x_{i+1})$ (Рис. 5.5) (тут Δx може бути допустимою точністю обчислення значень x). Отже, кожне число x_i дістаємо з імовірністю $F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i)$, що дорівнює ймовірності належати інтервалу $[x_i, x_{i+1})$ одержуваного в результаті експерименту випадкового значення $x \in [a,b]$.

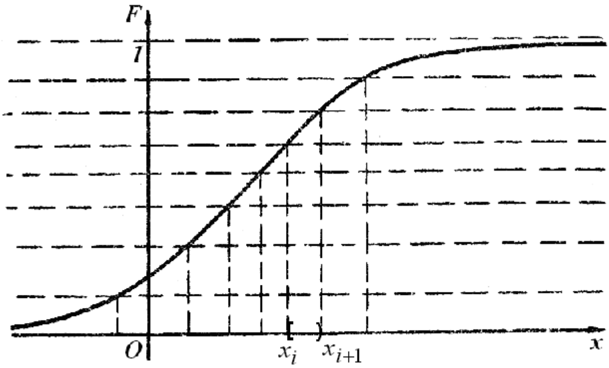


Рис. 5.5

Таким чином дістанемо датчик випадкових чисел з дискретним розподілом ймовірностей (табл. 5.2):

Табл. 5.2

x_i	x_0	x_1	…	x_{n-1}
$P_X(\{x_i\})$	$F_X(x_1)-F_X(x_0)$	$F_X(x_2)-F_X(x_1)$	…	$F_X(x_n)-F_X(x_{n-1})$

При цьому числу $\gamma^* \in [0,1]$, здобутому за допомогою датчика випадкових чисел з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0,1]$, слід поставити у відповідність таке число x, для якого

$$F_X(x) = \gamma^* . \tag{5.3}$$

Розв'язуючи це рівняння щодо x, дістанемо значення випадкової величини X з неперервним розподілом ймовірностей, що описується функцією розподілу ймовірностей

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx .$$

Оскільки функція $F_X(x)$ неперервна, то рівняння (5.3) завжди має розв'язок.

Розглянутий метод знаходження значення випадкової величини X називають *методом обернення функції розподілу ймовірностей.*

Крім розглянутих вище існують і деякі інші способи знаходження випадкових чисел. Наприклад, дістаючи досить велику кількість випадкових чисел і беручи їх середнє арифметичне, дістають значення випадкової величини, розподіл ймовірностей якої, згідно з центральною граничною теоремою, можна вважати нормальним.

На практиці при обчисленнях за допомогою комп'ютера випадкові числа дістають за спеціальними досить швидкодіючими алгоритмами (такі числа називають *псевдовипадковими).* Одним з таких алгоритмів є відомий *алгоритм Дж. Неймана*, який називають *методом середини квадратів.* Згідно з цим алгоритмом, навмання вибирають деяке число γ_0, наприклад чотирицифрове. Підносячи його до квадрата, дістають восьмицифрове число. Взявши чотири середні розряди, дістають нове число γ_1. Так само, за числом γ_1 знаходять γ_2 і т. д.

Приклад 5.4. $\gamma_0 = 0{,}9876$. Тоді $\gamma_0^2 = 0{,}97535376$, $\gamma_1 = 0{,}5353$, $\gamma_1^2 = 0{,}28654609$, $\gamma_2 = 0{,}6546$ і т.д. Гіпотезу про те, що знайдені числа мають рівномірний розподіл ймовірностей на відрізку $[0,1]$, можна перевірити за розглянутими раніше критеріями. Як виявилося, числа, знайдені за методом Неймана, мають дещо відмінний від рівномірного розподіл ймовірностей, однак іноді його можна використовувати, якщо не потрібна висока точність в обчисленнях.

Щоб дістати випадкове «значення» двовимірної випадкової величини (системи двох незалежних випадкових величин), наприклад з рівномірним розподілом ймовірностей на множині

$$W = \{(x, y) : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$$

знаходять послідовно два випадкові значення за допомогою датчика випадкових чисел з одновимірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0,1]$.

Є багато методів для знаходження псевдовипадкових чисел з різними розподілами ймовірностей (особливо з рівномірним розподілом). Сьогодні у всі мови програмування високого рівня поряд з іншими стандартними функціями ($\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, $\exp(x)$ і т. д.) включається і датчик випадкових чисел (функція $rnd(x)$), що є одним із свідчень про те, наскільки важливими є для практики і які широкі застосування мають методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

Зразки розв’язування вправ

Вправа 1. Обчислити за методом Монте-Карло інтеграл.

$$\int_a^b \psi(x)dx$$

Розглянемо випадкову величину $Y = \psi(X)$, де аргумент X має на проміжку $[a,b]$ рівномірний розподіл ймовірностей, щільність якого

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a,b]; \\ 0 \quad \text{при} & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Тоді

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)f_X(x)dx=\int_a^b\psi(x)\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\psi(x)dx\,.$$

Звідси

$$\int_a^b\psi(x)dx=(b-a)M[Y]\,.$$

Наближене значення $M[Y]$ можна дістати так: виконати серію n випробувань, в результаті яких дістати спостережені значення $y_i=\psi(x^{(i)})$ випадкової величини Y, де $x^{(i)}$ – спостережені значення випадкової величини X з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[a,b]$, за якими здобуто значення $y_i=\psi(x^{(i)})$. Тоді $M[Y]\approx\overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum y_i$, причому, згідно із законом великих чисел (див. нерівність і теорему Чебишова),

$$\lim_{n\to\infty}P(|\overline{Y}_n-M[Y]|<\varepsilon)=1\text{, тобто } \overline{Y}_n\xrightarrow{\text{ймов}}M[Y].$$

Оскільки

$$\overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x^{(i)})\,,$$

то

$$\int_a^b\psi(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x^{(i)})$$

(порівняйте з формулою прямокутників для наближеного обчислення визначеного інтеграла

$$\int_a^b\psi(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n}\psi(\tilde{x}^{(i)})h=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(\tilde{x}_i)\,,$$

де $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x^{(i+1)}=x^{(i)}+h$, $i=0,1,2,\ldots,n$; $x^{(0)}=a$, $x^{(0)}+nh=b$, $\tilde{x}^{(i)}$ – деяка точка з часткового відрізка $[x^{(i)},x^{(i+1)}]=[x^{(i)},x^{(i)}+h]$).

Розглянутий метод можна майже без змін перенести на обчислення інтеграла будь-якої кратності

$$\int_G\psi(x)dx=\frac{m(G)}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x^{(i)})\,,$$

де $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$, $dx=dx_1dx_2..dx_n$,

$$\int_G \psi(x)dx = \iint_G \ldots \int \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n ,$$

$m(G)$ – міра Лебега множини G.

Вправа 2. (задача Бюффона).

На дощату підлогу навмання кидається голка завдовжки l. Знайти ймовірність того, що голка впаде на щілину між двома сусідніми дошками, якщо ширина дошки t.

Позначимо через x відхилення центра голки від найближчої щілини (прямої *MN*), а через φ – кут, утворений голкою з цією щілиною (Рис. 5.6, а), причому вважатимемо, що кут відлічується від додатного напрямку прямої *MN*. Тоді положення голки щодо прямої *MN* можна охарактеризувати парою чисел (x, φ).

Множиною всіх можливих пар (x, φ) є множина

$$W = \left\{ (x, \varphi) : -\frac{t}{2} \le x \le \frac{t}{2}, 0 \le \varphi \le \pi \right\}.$$

Отже, є система (пара) випадкових величин (X, Φ). Голка перетне щілину (пряму *MN*), якщо $|x| < \frac{l}{2}\sin\varphi$, тобто $-\frac{l}{2}\sin\varphi \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi$.

Нехай G – подія, яка полягає в тому, що голка перетне пряму *MN*. Множина *W* всіх можливих пар (x, φ) та множина пар (x, φ), що сприяють події G, зображені на Рис. 5.6, *б*. Очевидно, немає підстав віддавати перевагу будь-яким парам (x, φ), і тому розподіл ймовірностей на множині *W* слід вважати рівномірним.

Площа фігури G дорівнює

$$2\int_0^{\pi} \frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2l ,$$

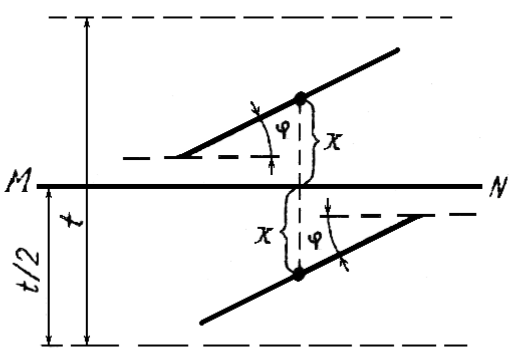


Рис. 5.6, а

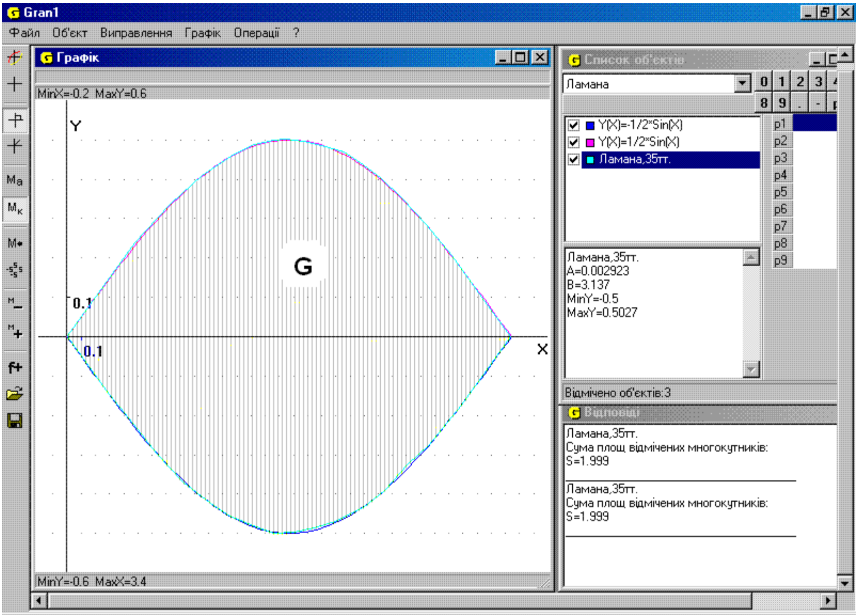


Рис. 5.6,б

а площа фігури W дорівнює $t\pi$. Тоді (за геометричним заданням імовірності) дістаємо $P_{(X,\Phi)}(G)=\dfrac{2l}{t\pi}$.

Якщо провести досить велику серію випробувань, у кожному з яких фіксувати, перетинає чи ні голка щілину MN, то відношення числа m випробувань, в яких голка перетинає щілину, до числа n усіх випробувань, є статистична ймовірність події G, яка з великою ймовірністю мало відхиляється від числа $\dfrac{2l}{t\pi}$, і тому при досить великому числі випробувань наближено можна вважати $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2l}{t\pi}$, звідки $\pi=\dfrac{2nl}{mt}$.

Отже, використовуючи метод Монте-Карло, можна наближено знайти число π. Надійність оцінки $\dfrac{m}{n}$ для числа $\dfrac{2l}{t\pi}$ при заданих надійних межах і, навпаки, надійні межі при заданій надійності можна визначити, виходячи з міркувань пп.4.3, 4.4. Слід зазначити, що на практиці метод Монте-Карло застосовують тоді, коли не вимагається висока точність результату, оскільки в протилежному разі доведеться виконати занадто великі серії випробувань, що іноді здійснити дуже важко. Відомо, наприклад, що для того щоб збільшити точність у 10 разів, тобто дістати ще одну правильну цифру в результаті, треба збільшити кількість випробувань приблизно в 100 разів (це випливає з властивостей числових характеристик функцій випадкових аргументів). Зрозуміло, що дуже великої точності досягти нелегко навіть за допомогою комп'ютера. Проте багато практично важливих задач можна розв'язати з достатньою точністю, застосовуючи метод статистичних випробувань.

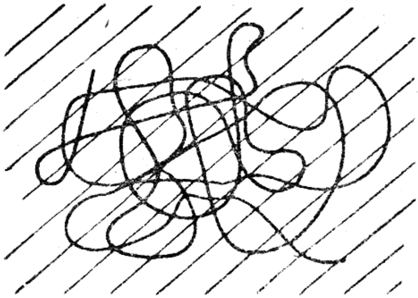


Рис. 5.7, а

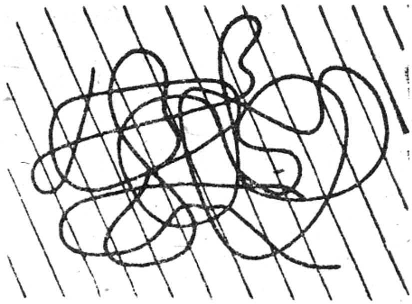


Рис. 5.7, б

Вправа 3.Обчислити довжину кривої, зображеної на Рис. 5.7, *а.* Звичайними методами знайти довжину цієї кривої досить важко. Скористаємося методом Монте-Карло і задачею Бюффона. Якщо уявити, що пофарбована голка падала на підлогу багато разів, залишаючи щоразу на підлозі слід, то зрештою ці сліди зіллються в деяку лінію досить складної конфігурації. Якщо кидати голку n разів і вона перетне щілину m разів, то можна вважати $\frac{m}{n}=\frac{2l}{t\pi}$. Крім того, довжина L лінії, що утворилась із слідів голки при n випробуваннях, дорівнює nl. Звідси

$$L=\frac{mt\pi}{2} \tag{5.4}$$

Цю формулу використовують так. На задану лінію накладають розлінований прозорий папір з нанесеними на нього паралельними лініями, відстань між якими t, і підраховують кількість перетинів із заданою лінією. За формулою (5.4) знаходять величину L. По-різному розміщуючи набір паралельних ліній (Рис. 5.7, б), кілька разів визначають довжину L, а за остаточний результат беруть середнє арифметичне із здобутих щоразу значень.

Вправа 4. Побудувати датчик випадкових чисел з дискретним розподілом ймовірностей Пуассона

$$P(\mu=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Оскільки $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}e^{-a}=1$, то $\frac{a^m}{m!}e^{-a}\to 0$ і $\sum_{k=0}^{m}\frac{a^k}{k!}e^{-a}\to 1$ при

$m \to \infty$. Тому при досить великому $m = N$ з певною точністю можна вважати, що

$$\frac{a^N}{N!} e^{-a} = 0 \,, \quad \sum_{m=0}^{N} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = 1 \,.$$

Таким чином, за скінченну кількість кроків (не більше від N) буде знайдено найменше число i, при якому виконується умова

$$\gamma^* \le \sum_{s=0}^{i} \frac{a^s}{s!} e^{-a} \,.$$

Отже, датчик випадкових чисел 0,1,2,... з розподілом ймовірностей Пуассона може бути реалізований так. Спочатку за допомогою датчика випадкових чисел з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку [0,1] дістають число $\gamma^* \in [0,1]$. Потім поступово (по одному) обчислюють доданки $\frac{a^s}{s!} e^{-a}$ (починаючи з $s = 0$ і збільшуючи s щоразу на 1) і додають їх до суми попередніх доданків $\sum_{k=0}^{s-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$. При цьому після кожного додавання до попереднього значення суми нового доданка $\frac{a^s}{s!} e^{-a}$ перевіряють, чи виконується умова

$$\gamma^* \le \sum_{k=0}^{s} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad .$$

Якщо умова не виконується, то обчислюють наступний доданок і знову повторюють попередні дії. Якщо ця умова виконується (вперше), то здобуте при цьому значення s і є шуканим. Оскільки $\gamma^* \in [0,1]$, а $\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = 1$ (для досить великого N при заданій точності обчислень), то через скінченне число кроків умова буде виконуватись. Розглянутий обчислювальний процес легко здійснити за допомогою комп'ютера.

Вправа 5. Побудувати датчик випадкових чисел з експоненціальним розподілом ймовірностей $f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$.

Знайдемо функцію експоненціального розподілу ймовірностей

$$F_\tau(t) = \int_0^t f_\tau(t) dt = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = (-e^{-\lambda t}) \Big|_o^t = 1 - e^{-\lambda t} \,.$$

Згідно з рівністю (5.3),

$$1 - e^{-\lambda t} = \gamma^*,$$

звідки

$$e^{-\lambda t} = 1 - \gamma^*,\ -\lambda t = \ln(1 - \gamma^*),\ t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - \gamma^*). \qquad (5.5)$$

Отже, щоб дістати значення випадкової величини з експоненціальним розподілом ймовірностей, досить знайти значення γ^* випадкової величини з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0,1]$, а потім обчислити число *t* за формулою (5.5).

Розглянутий датчик випадкових чисел широко використовується при імітації (за допомогою комп'ютера) функціонування деяких систем масового обслуговування. Так, проміжок часу між двома послідовними запитами на обслуговування є випадковою величиною з експоненціальним розподілом ймовірностей. Математичне сподівання цієї величини є $\frac{1}{\lambda}$, а тому λ можна тлумачити як середню інтенсивність, з якою надходять запити (кількість запитів за одиницю часу). Використовуючи датчик випадкових чисел (5.5), можна дістати моменти часу, в які надходять запити на обслуговування, а саме, вважаючи, що попередній запит надійшов в момент $t = t_i$ і звертаючись до датчика випадкових чисел (5.5), дістанемо, що наступний запит надійде в момент $t_{i+1} = t_i + \tau$, де τ – щойно знайдене за (5.5) випадкове значення. Після звернення до датчика випадкових чисел дістають новий проміжок часу до наступного запиту, а отже, і момент його появи, оскільки момент появи попереднього запиту вже визначено.

Час обслуговування запиту на обслуговуючому пристрої також може бути випадковим (можливо, з розподілом ймовірностей того ж типу). Знаходячи за допомогою відповідного датчика випадкових чисел час обслуговування чергового запиту, можна на розглянутій математичній моделі імітувати функціонування обслуговуючої системи, обчислити її пропускні характеристики, процент запитів, які дістають відмову в обслуговуванні, час простоювання обслуговуючих пристроїв тощо. Імітація функціонування такої обслуговуючої системи може бути здійснена за допомогою комп'ютера. Отже, за короткий час, не будуючи реальної обслуговуючої системи, можна до деякої міри охарактеризувати таку систему, імітуючи її функціонування відповідно до розглянутої математичної моделі.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. За допомогою імітаційної моделі можна отримати точні характеристики відповідного реального процесу.

2. Метод Монте-Карло – це метод дослідження реальних процесів за допомогою імітаційних моделей.

3. Статистичне моделювання – це те саме, що й метод Монте-Карло.

4. Метод Монте-Карло застосовний лише для недетермінованих задач.

5. Метод Монте-Карло для обчислення визначеного інтеграла дає таку саму точність, що й формула прямокутників.

6. За методом Монте-Карло можна обчислити число π з будь-якою точністю.

7. Генератор випадкових чисел – це засіб одержання значень, що:

а) є довільними і ні від чого незалежними;

б) є значеннями фіксованої випадкової величини із заданим одновимірним розподілом ймовірностей.

8. Для будь-якої дискретної випадкової величини можна побудувати генератор її значень.

9. За допомогою будь-якого генератора випадкових чисел можна отримати лише скінченну кількість чисел.

10. Генератор випадкових чисел можна побудувати лише для дискретної випадкової величини.

11. Генератор значень неперервної випадкової величини можна побудувати за методом обернення відповідної функції розподілу ймовірностей.

12. Псевдовипадкові числа є результатом звернення до генератора випадкових чисел.

2.1. Скласти алгоритм побудови генератора значень випадкової величини X з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0;1]$.

2. Здійснити програмну реалізацію складеного алгоритму.

3. Скласти алгоритм і створити програму, використання якої дозволяє за допомогою побудованого генератора:

1) знаходити значення заданої функції $f(x)$;

2) утворювати точки (x,y) з кожних двох послідовних значень, отриманих за допомогою генератора;

3) наближено обчислювати інтеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ для заданої функції $f(x)$;

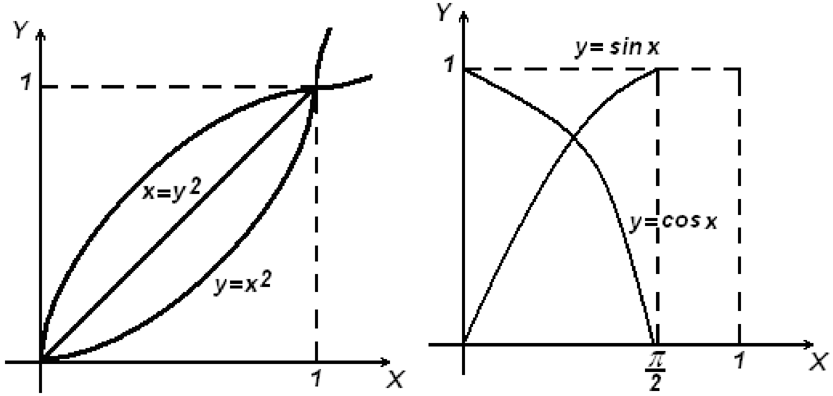
4) наближено знаходити площу заданої фігури, що є підмножиною квадрата $[0;1]\times[0;1]$.

4*. З`ясувати, якою є похибка результату обчислення площі фігури за згаданим у попередньому завданні алгоритмом, коли фігура складається з точок, координати яких є раціональними числами.

5. Обчислити за побудованим алгоритмом задані інтеграли і порівняти знайдені значення з точними:

1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$;3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

6. Обчислити за побудованим алгоритмом площу заданих фігур і порівняти знайдені значення з точними:



а) б)

Рис. 5.8

3.1. Скласти алгоритм побудови генератора значень випадкової величини X із заданою функцією $F_X(x)$ розподілу ймовірностей за допомогою датчика випадкових чисел з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0;1]$.

2. Здійснити програмну реалізацію складеного алгоритму.

3. Побудувати генератор значень випадкової величини, коли

1) $F_X(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{2}, \text{коли } 0<x\le\frac{1}{2},\\ \frac{3}{4}, \text{коли } \frac{1}{2}<x\le\frac{3}{4},\\ \frac{7}{8}, \text{коли } \frac{3}{4}<x\le 1,\\ 1, \text{коли } x>1;\end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{4}, \text{коли } 0<x\le\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}, \text{коли } \frac{1}{2}<x\le 1,\\ 1, \text{коли } x>1;\end{cases}$

3) $F_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, \text{коли } x>0,\\ 0, \text{коли } x\le 0;\end{cases}$ 4) $F(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 0,\\ \frac{2}{\pi}\,arctg\,x, \text{коли } x\ge 0.\end{cases}$

4. 1) За допомогою побудованого генератора знайти наближено ймовірність попадання значення випадкової величини X у

проміжок $(\frac{1}{2};\frac{3}{4})$ для кожної функції $F_X(x)$ з попереднього завдання. 2) Порівняти знайдений результат з точним. 3) З'ясувати, яку мінімальну кількість випробувань треба здійснити, щоб із заданою надійністю $\beta = 0{,}95$ можна було стверджувати, що наближене значення ймовірності наближає справжнє значення з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

4. Нехай голка у задачі Бюффона має довжину $l = 5\text{см}$, а ширина дошки підлоги $t = 15\text{см}$. Визначити скільки випробувань – кидань голки на підлогу, слід зробити, щоб з надійністю $\alpha = 0{,}95$ можна було стверджувати, що $|\frac{m}{n} - \frac{2l}{t\pi}| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0{,}1$, а m – кількість перетинів голкою щілини.

Визначити звідси абсолютну похибку наближення $\pi \approx \frac{2\text{ln}}{mt}$.

Додаток 1. Таблиця значень функції Лапласа: $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46582	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49986									
3,5	49977									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	49996									

Додаток 2. Значення функції $\varphi\,(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0068	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	2058	0,0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0005	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 3. Значення $\dfrac{a_n^m e^{-a_n}}{m!}$

m \ a_n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	904084	163746	222245	268128	303265	329287
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786
3	000151	001091	003334	007150	012636	019757
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964
5		000002	000015	000057	000158	000356
6			000001	000004	000013	000035
7					000001	000003
m \ a_n	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	347610	359463	365913	367879	270671	149361
2	121663	143785	164661	183940	270671	224042
3	028388	038343	049398	061313	180447	224042
4	004968	007669	011115	015328	090224	168031
5	000695	001227	002001	003066	036089	100819
6	000081	000164	000300	000511	012030	050409
7	000008	000019	000039	000073	003437	021604
8		000002	000004	000009	000859	008101
9				000001	000191	002701
10					000038	000810
11					000007	000221
12					000001	000055
13						000013
14						000002
15						000001

Додаток 4. Значення $\chi^2_{кр}$, які задовольняють рівність $P(\chi^2_r \le \chi^2_{кр}) = \alpha$, залежно від r і α

r \ α	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	0.148	0.455	1.074	1.642	2.71	3.84	5.41	6.64	10.83
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.41	3.22	4.60	5.99	7.82	9.21	13.82
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	9.84	11.34	16.27
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28	18.46
5	0.554	0.752	1.145	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09	20.05
6	0.872	1.134	1.635	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	15.03	16.81	22.5
7	1.239	1.564	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.62	18.48	24.3
8	1.646	2.03	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	18.17	20.1	26.1
9	2.09	2.53	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.68	21.7	27.9
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	21.2	23.2	29.6
11	3.05	3.61	4.58	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	22.6	24.7	31.3
12	3.57	4.18	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.0	24.1	26.2	32.9
13	4.11	4.76	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.4	22.5	27.7	34.6
14	4.66	5.37	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.1	23.7	26.9	29.1	36.1
15	5.23	5.98	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.3	25.0	28.3	30.6	37.7
16	5.81	6.61	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.5	23.5	26.3	29.6	32.0	39.3
17	6.41	7.26	8.67	10.08	12.00	13.53	16.34	19.51	21.6	24.8	27.6	31.0	33.4	40.8
18	7.02	7.91	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.6	22.8	26.0	28.9	32.3	34.8	42.3
19	7.63	8.57	10.11	11.65	13.62	15.35	18.34	21.7	23.9	27.2	30.1	33.7	36.2	43.8
20	8.26	9.24	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.8	25.0	28.4	31.4	35.0	37.6	45.3
21	8.90	9.92	11.59	13.24	15.44	17.18	20.3	23.9	26.2	29.6	32.7	36.3	38.9	46.8
22	9.54	10.60	12.34	14.04	16.31	18.10	21.3	24.9	27.3	30.8	33.9	37.7	40.3	78.3
23	10.20	11.29	13.09	14.85	17.19	19.02	22.3	26.0	28.4	32.0	35.2	39.0	41.6	49.7
24	10.86	11.99	13.86	15.66	18.06	19.94	23.3	27.1	29.6	33.2	36.4	40.3	43.0	51.2
25	11.62	12.70	14.61	16.47	18.94	20.9	24.3	28.2	30.7	34.4	37.7	41.7	44.3	52.6
26	12.20	13.41	15.38	17.29	19.82	21.8	25.3	29.2	31.8	35.6	38.9	42.9	45.6	54.1
27	12.88	14.12	16.15	18.11	20.07	22.7	26.3	30.3	32.9	36.7	40.1	44.1	47.0	55.5
28	13.56	14.85	16.93	18.94	21.6	23.6	27.3	31.4	34.0	37.9	41.3	45.4	48.3	56.9
29	14.26	15.57	17.71	19.77	22.5	24.6	28.3	32.5	35.1	39.1	42.6	46.7	49.6	58.3
30	14.95	16.31	18.49	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5	36.2	40.3	43.8	48.0	50.9	59.7

Додаток 5. Значення t_β, які задовольняють рівність $P(\,|T_n| < t_\beta\,) = 2\int\limits_0^{t_\beta} s_{n-1}(t)\,dt = \beta$, залежно від β і $n-1$

$n-1$ \ β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,08	6,31	12,71	31,80	63,70	636,6
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,60
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	134	271	414	569	741	941	1,190	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	132	267	408	559	727	920	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	131	265	404	553	718	906	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
7	130	263	402	549	711	896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	130	262	399	546	706	889	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	129	261	398	543	703	883	1,100	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	129	260	397	542	700	879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	129	260	396	540	697	876	1,088	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	128	259	395	539	695	873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	128	259	394	538	694	870	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	128	258	393	537	692	868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	128	258	393	536	691	866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	128	258	392	535	690	865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	128	257	392	534	689	863	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	127	257	392	534	689	862	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	127	257	391	533	688	861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	127	257	391	533	687	860	1,064	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	127	257	391	532	686	859	1,063	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	127	256	390	532	686	858	1,061	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	127	256	390	532	685	858	1,060	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	127	256	390	531	685	857	1,059	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	127	256	390	531	684	856	1,058	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	127	256	390	531	684	856	1,058	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	127	256	389	531	684	855	1,057	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	127	256	389	530	683	855	1,056	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	127	256	389	530	683	854	1,055	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	127	256	389	530	683	854	1,055	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	126	255	388	529	681	851	1,050	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
60	126	254	387	527	679	848	1,046	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	126	254	386	526	677	845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,36	2,62	3,37

Додаток 6. Значення $F_{n_1,n_2,p}$, які відповідають ймовірності $p = P\{F_{n_1,n_2} > F_{n_1,n_2,p}\}$, де випадкова величина F_{n_1,n_2} має F-розподіл з n_1 і n_2 ступенями вільності

$p = 0{,}05$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,21	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,56	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Додаток 7. Таблиця значень $q = q(\beta, n)$

n \ β	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,221
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

Відповіді і вказівки

1.1

1.1. Ні, оскільки, якщо результат експерименту однозначний і заздалегідь відомий, то такий експеримент не вважається випадковим.

2. Так. 3. Ні, $\Omega \neq \varnothing$. 4. Так. 5. Ні. 6. Ні. 7. Ні.

2.1. $\Omega=\{(x,y): x \text{ і } y \in \{\text{Г},\text{Ц}\}\}$. 2. $\Omega=\{(x,y,z): x,y \text{ і } z \in\}\text{Г},\text{Ц}\}\}$.

3. $\Omega=\{(x,y): x \text{ і } y \in \overline{1,6}\}$. 4. $\Omega=\{(x,y,z): x,y \text{ і } z \in \overline{1,6}\}$.

5. $\Omega=\{(x_1,\ldots,x_m): x_i \in \overline{1,6}$ для кожного $i \in \overline{1,6}\}$.

6. Якщо скриньки розрізняються, то $\Omega=\{(x,y): x \in \overline{1,3},\ y \in \overline{0,3}\}$, x – номер скриньки, y – кількість предметів у скриньці. Якщо скриньки не розрізняються, то $\Omega=\{0,1,2,3\}=\{y: y\in\overline{0,3}\}=\overline{0,3}$, y – кількість елементів у скриньці.

7. $\Omega=[0;+\infty)$. 8. $\Omega=\{(x,y): x_i\ y \in [t_1;t_2]\}$.

3. 6 . **4.** Ні. **5.** $\Omega=\overline{10,99}$. **6.** 1) $\Omega_1=\{11,22,33,44,55,66,77,88,99\}$;

2) $\Omega=\overline{10,99}\setminus\Omega_1$.

7. $\Omega=\{(1,\text{чер}),\ (2,\text{чер}),\ (3,\text{чор}),\ (4,\text{чор}),\ (5,\text{біл}),\ (6,\text{біл}),\ (7,\text{біл})\}$ або $\Omega=\{\text{"чер"},\text{"чор"},\text{"біл"}\}$.

8. $\Omega=\{(k_1,k_3),(k_1,k_4),(k_2,k_3),(k_2,k_4)\}$.

9. $\Omega=\{(k_1,k_2),\ (k_1,k_3),\ (k_1,k_4),\ (k_2,k_3),\ (k_2,k_4),\ (k_3,k_4)\}$ причому вважають, що $(k_i,k_j)=(k_j,k_i),\ i\neq j$.

10. 1) так; 2) так; 3) так.

11. $\Omega=\{0,1,2,\ldots\}$ або $\Omega=\{(\delta,k),(c,k): k\in\{0,1,2,\ldots\}\}$.

12. $\Omega=\{(x,y): x_i\ y\in[18;120]\}$.

13. 1) $\Omega=\{x_1x_2x_3x_4 : x_i \in \overline{0,9}\}$; 2) $\Omega=\{x_1x_2x_3x_4 : x_i \in \overline{0,9} \text{ і } x_i \neq x_j$ для $i\neq j\}$.

14. Ω утворюють усілякі комбінації з 10 претендентів по 3.

15. Ω утворюють усілякі комбінації з 1000 виробів по 5.

16. $\Omega=\{(x,y): x$ – якась комбінація з 100 теоретичних питань по 2, а y – якась комбінація із 100 задач по 3$\}$.

17. 1) $\Omega_1=\{(2,3),\ldots,(2,19),(3,5),\ldots,(3,19),\ldots,(17,19)\}$;

2) $\Omega=\Omega_1\bigcup\{(2,2),\ldots,(3,3),\ldots,(19,19)\}$.

18. 1. $\Omega_1=\{(x,y)\in R^2 : x<1,$ а $y>-1\}$.

2. $\Omega=\Omega_1\bigcup\{(x,y)\in R^2 : x>1,$ а $y<-1\}$.

19. Ω утворюють усілякі комбінації з 16 команд по 4.

20. 1) $\Omega=\{1,01,\ldots,\underbrace{0\ldots0}_{n}1\}$ – скінченний простір;

2) $\Omega=\{1, 01, \ldots, \underbrace{0\ldots0}_{k}1, \ldots\}$ – нескінченний простір.

1.2

1.1. Ні, $\Omega\neq\varnothing$. 2. Взагалі кажучи, ні. 3. Ні. 4. Так. 5. Ні. 6. Так. 7. Ні. 8. Так. 9. Так. 10. Ні.

2.1.1) а) $\Omega_1=\{(1Г,2Г),(1Г,2Ц),(1Ц,2Г),(1Ц,2Ц)\}$;

б) $\Omega=\Omega_1\bigcup\{(2Г,1Г),(2Ц,1Г),(2Г,1Ц),(2Ц,1Ц\}$; 2) $\Omega=\{0,1,2\}$.

2. $\Omega=\{0,1\}$, де 0 відповідає кількості очок менша за 3, а 1 – кількість очок не менша за 3.

3. 1) а) $\Omega=\{(ri,\delta j),(\delta i,rj): i$ та $j\in\overline{1,6}\}$; б) $\Omega=\{(i,j): i$ та $j\in\overline{1,6}\}$;

2) $\Omega=\{2,3,\ldots,12\}$.

3. Скористатися відповідними означеннями.

4. 1) $\{1,2\}\subset\{1,2,3\}\not\subset\{1,2\}$; 2) $\{1,2\}\subset\{1,2\}$; 3) $\{1,2\}\not\subset\{1,3\}\not\subset\{1,2\}$.

5. Такими є Ω та $\varnothing$.

6. Результат експерименту однозначний.

7. Придумати самостійно.

8. 1) так; 2) так. **9.** Ні. **10.** Один. **11.** Або події A, або жодній.

12. Події B. **13.** 1. $\Omega=\{Г, ЦГ, \ldots, \underbrace{Ц\ldots Ц}_{k\text{-}1}Г, \ldots\}$. 2. $B=\overline{A}, C=A$.

14. Зобразити відповідні точки на площині XOY.

1.3

1. 1. Так. 2. Ні. 3. Так. 4. Ні. 5. Так. 6. Ні. 7. Ні. 8. Ні. 9. Ні. 10. Так. 11. Так. 12. Так. 13. Так. 14. Так. 15. Так.

2. 1. Влучення в круг радіуса r_6. 2. Влучення в круг радіуса r_1.

3. Влучення в кільце, визначене радіусами r_k і r_{k+1}.

4. Неможлива подія. 5. Не влучення в круг радіуса r_k.

3-5. Скористатися відповідними означеннями.

Скористатися тим, що $\overline{\bigcup_k A_k}=\prod_k\overline{A_k}$ і $\overline{\prod_k A_k}=\bigcup_k\overline{A}_k$.

6. Скористатися тим, що $AB=\varnothing$ і тому $E\in A\Rightarrow E\notin B$.

7. Ні. **8.** $A\overline{B}=A-B$. **9.** $A=B$.

10. Скористатися відповідними означеннями.

11. 1) $A\overline{B}\overline{C}$; 2) $A+B+C$; 3) $AB\overline{C}$; 4) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$; 5) $(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)\setminus ABC$; 6) $((A+B+C)\setminus(ABC))\bigcup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$; 7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

12. 1. 1) $\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\{Г, ЦЦГ, \ldots, \underbrace{Ц\ldots Ц}_{2k\text{-}2}Г, \ldots\}$; 2) $\prod_{i=1}^{\infty}A_i=\{Г\}$;

3) $\overline{A}_{2k}=\overline{A}_{2k-1}=\{ЦГ, \ldots, \underbrace{Ц\ldots Ц}_{2k\text{-}1}Г, \underbrace{Ц\ldots Ц}_{2k}Г, \underbrace{Ц\ldots Ц}_{2k+1}Г, \ldots\}$;

4) і 5) $A_1 \setminus A_2 = A_2 \setminus A_1 = \varnothing$; 6) і 7) $A_* = A^* = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

2. 1) Ні; 2) так.

13. 1. $\Omega = \{б, яб, \ldots, \underbrace{я \ldots я}_{m-n}б\}$.

2. $A = \{\underbrace{я \ldots я}_{m-n}б\}$, $B = \{\underbrace{я \ldots я}_{m-n-1}б, \underbrace{я \ldots я}_{m-n}б\}$, $C = \varnothing$.

3. 1) $\overline{A} = \{б, яб, \ldots, \underbrace{я \ldots я}_{m-n-1}б\}$; $\overline{B} = \{я, яб, \ldots, \underbrace{я \ldots я}_{m-n-2}б\}$; $\overline{C} = \Omega$;

2) $A + B = B$, $A + C = A$, $B + C = B$, $A + B + C = B$;

3) $AB = A$, $AC = BC = ABC = \varnothing$;

4) $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{\underbrace{я \ldots я}_{m-n-1}б\}$, $A \setminus C = A$, $C \setminus A = \varnothing$;

$B \setminus C = B, C \setminus B = \varnothing$;

5) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \Omega$; 6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B}$; 7) $\overline{A + B + C} = \overline{B}$;

8) $\overline{ABC} = \overline{\varnothing} = \Omega$; 9) $A \setminus (B + C) = A \setminus B = \varnothing$,

$B \setminus (A + C) = B \setminus A = \{\underbrace{я \ldots я}_{m-n-1}б\}$, $C \setminus (A + B) = \varnothing$;

10) $A \setminus (BC) = A$, $B \setminus (AC) = B$, $C \setminus (AB) = \varnothing$.

14. $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $AB = \{6\}$.

15. $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{B} = \{3, 4, 5, 6\}$, $AB = \{2\}$, $A + B = \{1, 2, 4, 6\}$,

$\overline{A}\,\overline{B} = \{3, 5\}$, $\overline{A} + \overline{B} = \{1, 3, 4, 5, 6\} = \overline{AB}$, $\overline{A}B = \{1\}$, $A\overline{B} = \{4,6\}$.

16. $A = \{яяб, ябя, бяя, ябб, бяб, ббя, ббб\}$; $B = \{яяя\}$; $A + B = \Omega$; $AB = \varnothing$.

17. $\overline{A}$ – серед 4-х перевірених виробів бракованих немає.

$\overline{B}$ – серед 4-х перевірених виробів бракованих менше двох.

Вважати $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} : x_i \in \{я, б\}, i \in \overline{1, 4}$.

18. 1. 1) Коли $A = \varnothing$, а $B = \Omega$. 2) Коли $A = \Omega$, а $B = \varnothing$. 3) Коли $A = B$. 2. 1) і 2) $X = \overline{B}$.

19. $D = A \cdot \sum_{k=1}^{4} B_k \cdot (C_1 + C_2)$, $\overline{D} = \overline{A} + \prod_{k=1}^{4} \overline{B}_k + \overline{C}_1 \overline{C}_2$.

20. 1. Ω складається з впорядкованих пар (x, y), x і $y \in \overline{1,6}$.

2. Ω складається з невпорядкованих пар $\{x, y\}$, x і $y \in \overline{1,6}$.

3. $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$ складається із сум очок, що випали.

21. 1) $A \setminus (B + C)$, коли $A \not\subset (B + C)$; 2) $(AB) \setminus C$, коли $AB \not\subset C$; 3) ABC, коли $ABC \neq \varnothing$; 4) $A + B + C$; 5) $AB + AC + BC$, коли принаймні один доданок непорожній; 6) $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$, коли принаймні один доданок непорожній; 7) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, коли принаймні один доданок непорожній; 8) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; 9) $(A+B+C)\setminus(ABC)$.

22. Скористатися відповідними означеннями.

23. 1) C; 2) C; 3) $AB+C$; 4) A; 5) AB; 6) AB; 7) $A+B+C$.

24 – 25. Скористатися відповідними означеннями.

26. 1) A; 2) B; 3) AC; 4) $B+C$.

27 – 28. Спростити відповідні вирази, розкривши дужки.

29. 1. Ні. 2. Так. 3. Ні. 4. Так, відповідна кількість дорівнює подвоєній кількості відповідей “Ні”.

1.4

1. 1. Ні. 2. Ні. 3. Ні. 4. Так. 5. Ні. 6. Ні. 7. Так. 8. Ні. 9. Так. 10. Ні. 11. Ні.

2. 1.1) $\Omega=\{+,-\}$, $S=S_*$ або $S=S^*$; 2) $\Omega=\{0,1,2\}$, $S=S_*$ або $S=S^*$, або $S=S_k=\{\varnothing,\Omega,\{k\},\Omega\setminus\{k\}\}, k\in\overline{0,2}$.

3) $\Omega=\{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$, простір S утворити самостійно.

2. 1) $\Omega=\{б,ч,з\}$; 2) $\Omega=\{+,-\}$; S утворити самостійно.

3. 1) $\Omega=\overline{2,12}$; 2) $\Omega=\{+,-\}$; S утворити самостійно.

3. 1) 2; 2) 2 або 4; 3) 2 або 4, або 8.

4. 1. Скористатися властивостями подій $1_S - 3_S$.

2. Твердження неправильне, коли S складається з вимірних (за Лебегом) підмножин $A\subset[a;b]$.

5. 1. 1) – 3) Так. 2. 1) – 5) – Ні.

6. Наприклад, $\{\varnothing,\Omega,\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

7. Наприклад, $S=\{\varnothing,\Omega,\{1\},\{2,3,4,5,6\}\}$.

8. Наприклад, $S=\{\varnothing,\Omega,[0,a),(a,1]\}$, де $a\in(0;1)$. Кількість таких просторів континуальна.

9 – 10. Скористатися відповідними означеннями.

11. 2^n. **12.** 1. Ні. 2. Так. 3. Ні.

13.* 1). $S=S_*=\{\varnothing,\Omega\}$, коли $A=\varnothing$ або $A=\Omega$, а $B=A$ або $B=\overline{A}$; 2) $S=\{\varnothing,\Omega,A,\overline{A}\}$, коли $A=B$ або $A=\overline{B}$; 3) $S=\{\varnothing,\Omega,A,B,\overline{A},\overline{B},A+B,\overline{A+B}\}$, коли не виконується умова 1) і 2), причому $AB=\varnothing$; 4) якщо не виконуються умови 1) – 3), то S складається з $\varnothing$, Ω, AB, $A\setminus AB$, $B\setminus AB$ та усіляких операцій над цими множинами.

14. 1. $\Omega=\{ГГ, ЦЦ, ЦГГ, ГЦЦ, \ldots, \underbrace{ГЦ,\ldots,ГЦ}_{(k-1)\,пар\,ГЦ}ГГ, \underbrace{ЦГ,\ldots,ЦГ}_{(k-1)\,пар\,ЦГ}ЦЦ,$

$\underbrace{ЦГ,\ldots,ЦГ}_{k\,пар\,ЦГ}Г, \underbrace{ГЦ,\ldots,ГЦ}_{k\,пар\,ГЦ}Ц, \ldots\}.$

2\. 1) $A = \{ГГ, ЦЦ, ГЦЦ, ЦГГ, ГЦГГ, ЦГЦЦ,$
$ГЦГЦЦ, ЦГЦГГ, ГЦГЦГГ, ЦГЦГЦЦ\}$;

2) $A = \{ГГ, ЦЦ, ГЦГГ, ЦГЦЦ, \ldots, \underbrace{ГЦ\ldots,ГЦ}_{(k-1)\,ГЦ}ГГ, \underbrace{ЦГ,\ldots,ЦГ}_{(k-1)\,ЦГ}ЦЦ, \ldots\}$;

3) $A = \{ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦГГ, ГЦГЦЦ, \ldots, \underbrace{ЦГ\ldots,ЦГ}_{k\ пар\ ЦГ}Г, \underbrace{ГЦ,\ldots,ГЦ}_{k\ пар\ ГЦ}Ц, \ldots\}$.

15. 1) – 3) – властивість 3_S; 4) довести, що $A_1 \cap A_2 = \overline{(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)}$; 5) скористатися методом математичної індукції; 6) довести, що $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{(\sum_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k)}$; 7) довести, що $A_i \setminus A_j = A_i \cdot \overline{A}_j$.

16.* Не є. Розглянути $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = S^*$.

17.* 1. Ні. 2. Ні.

18.* 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) тільки, якщо $n = 2^k$; 5) ні; 6) так.

1.5

1. 1. Ні. 2. Ні. 3. Ні. 4. Ні. 5. Ні. 6. Ні. 7. Так. 8. Ні. 9. Ні. 10. Так. 11. Так.

2. $m \in \overline{0,10}$, $P_n^* \in \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1\}$. **3.** $m \in \overline{0,5}$, $P_n^* \in \{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$.

4. $\Omega = \{б, ч, з\}$; $P_{1000}^*(\{б\}) = \frac{1}{2}$; $P_{1000}^*(\{ч\}) = \frac{3}{10}$; $P_{1000}^*(\{з\}) = \frac{2}{10}$, коли $S = S^*$; $P_{1000}^*(\{ч, з\}) = \frac{1}{2}$, $P_{1000}^*(\{б\}) = \frac{1}{2}$, коли $S = \{\varnothing, \Omega, \{б\}, \{ч, з\}\}$, а $P_{1000}^*(\{ч\})$ і $P_{1000}^*(\{з\})$ у даному випадку не визначено.

Аналогічно для інших просторів S.

5. $P_n^*(\{6\}) = \frac{6}{10}$; $P_n^*(\{5\}) = \frac{3}{10}$; $P_n^*(\{4\}) = \frac{5}{10}$; $P_n^*(\{1, 2, 3\}) = \frac{5}{100}$. Ці статистичні ймовірності й визначають відповідні простори S.

6. Скористатися відповідним означенням.

7. Скористатися відповідними означеннями або основними властивостями статистичної ймовірності.

8. 1. $P_{4040}^*(Г) = \frac{2048}{4040}$; $P_{12000}^*(Г) = \frac{6019}{12000}$; $P_{24000}^*(Г) = \frac{12012}{24000}$. 2. $\frac{73157}{145440}$.

3\. $P_{4040}^*(Г) = \frac{20079}{40040}$. 4. Зробить висновок самостійно.

9–10. Зробити висновок самостійно. **11.** 138.

12 – 13. Скористатися відповідним означенням. **14.** Самостійно.

15. $0 \le P_n^*(AB) \le P_n^*(A) \le P_n^*(A + B) \le 1$ або $0 \le P_n^*(A - B) \le P_n^*(A) \le$
$\le P_n^*(A + B) \le 1$ тощо.

16. 1. $\Omega=\{(10,1),\ldots,(10,m),(2,1),\ldots,(2,3m)\}$; $P_n^*(A)=\dfrac{1}{4}$.

2. $\Omega=\{(25_1,25_2),(25_1,25_3),(25_2,25_1),(25_2,25_3),(25_3,25_1),(25_3,25_2)$,

$(5_1,25_1),\ldots,(5_1,25_3),\ldots,(5_7,25_1),\ldots,(5_7,25_3)\}$, $P_n^*(A)=\dfrac{6}{27}$.

3. Ω складається із комбінацій з 52 карт по 26. $P_n^*(A)=\dfrac{(C_{26}^{13})^2}{C_{52}^{26}}$.

4. Ω складається із комбінацій з 32 карт по 10. $P_n^*(A)=\dfrac{C_{24}^2\cdot 4}{C_{32}^{10}}$.

5. Ω складається із комбінацій з 32 карт по 4.

$$P_n^*(A)=\frac{C_{28}^3\cdot C_4^1+C_{28}^2\cdot C_4^2\cdot C_{28}^1\cdot C_4^3+C_{28}^0\cdot C_4^4}{C_{32}^4}.$$

6. Ω складається з 5-значних десяткових чисел від 10000 до 99999, а також з наборів від 00000 до 09999. $P_n^*(A)=0{,}6976$.

7. Ω складається з усіляких перестановок 10 кубиків. $P_n^*(A)=\dfrac{24}{10!}$.

8. Ω складається з усіляких перестановок 5 карток. $P_n^*(A)=\dfrac{1}{5!}$.

9. Ω складається з усіляких перестановок 4 книг. $P_n^*(A)=\dfrac{2}{4!}$.

10. Ω складається з усіляких перестановок 10 книг. $P_n^*(A)=\dfrac{7!\cdot 3!\cdot 8}{10!}$.

11. Ω складається з усіляких наборів букв: $x_1x_2x_3x_4x_5$, де кожна буква x_i може бути вибраною 6-ма способами. $P_n^*(A)=\dfrac{1}{6^5}$.

12. Ω складається з 365 днів року. $P_n^*(A)=\dfrac{53}{365}$.

13. Ω складається з розміщень з 5 цифр по 3. $P_n^*(A)=\dfrac{1}{5}$.

14. 1) Ω складається з розміщень з 10 цифр по 2, не враховуючи ті, що починаються з 0. $P_n^*(A)=\dfrac{5}{81}$. 2) Ω складається з розміщень з 10 цифр по 3, не враховуючи ті, що починаються з 0. $P_n^*(A)=\dfrac{1}{24}$.

15. Ω складається з усіляких комбінацій з 15 чисел по 2. $P_n^*(A)=\frac{1}{21}$.

16. Ω складається з прізвищ учасників зборів. $P_n^*(A)=\frac{7}{72}$.

17. Ω складається з усіляких перестановок 6 кульок. $P_n^*(A)=\frac{5!\cdot 4}{6!}$.

18. $\Omega=\{(x,y): x\in\overline{1,6},\ y\in\overline{1,6}\}$; 1) $P_n^*(A)=\frac{1}{6}$; 2) $P_n^*(A)=\frac{5}{6}$.

19. $\Omega=\{((x,y,z),\ x+y+z): x,y \text{ і } z\in\overline{1,6}\}$.

1) $P_n^*(A)=\frac{27}{216}$; 2) $P_n^*(A)=\frac{25}{216}$; 3) $P_n^*(A)=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$.

20. Ω складається з усіляких комбінацій з 20 гравців по 10.

1) $P_n^*(A)=\frac{2\cdot C_{18}^{9}}{C_{20}^{10}}$; 2) $P_n^*(A)=\frac{C_{16}^{8}\cdot C_4^2}{C_{20}^{10}}$.

21. Ω складається з усіляких розміщень m осіб за круглим столом, коли важливим є тільки сусіди зліва та справа. $P_n^*(A)=\frac{2}{m-1}$, коли $m\ge 3$. Якщо $m=2$, то $P_n^*(A)=1$.

22. Ω складається із 100 лотерейних білетів.

1) $P_n^*(A)=\frac{4}{100}$; 2) $P_n^*(A)=\frac{99}{100}$.

23. Простір Ω складається з усіляких комбінацій із 100 білетів по 3. $P_n^*(A)=\frac{C_{100}^3-C_{75}^3}{C_{100}^3}$.

24. Ω складається зі комбінацій з 10 білетів по 3.

1) $P_n^*(A)=\frac{8(C_5^2+C_3^2+C_2^2)}{C_{10}^3}$; 2) $P_n^*(A)=\frac{5\cdot C_3^2+2+C_5^2}{C_{10}^3}$.

25. Ω складається з $\frac{n}{r}$ білетів. $P_n^*(A)=\frac{mr}{n}$.

26. Ω складається зі комбінацій з 10 білетів по 5.

1) $P_n^*(A)=\frac{C_8^4\cdot 2}{C_{10}^5}$; 2) $P_n^*(A)=\frac{C_8^3}{C_{10}^5}$; 3) $P_n^*(A)=\frac{C_{10}^5-C_8^5}{C_{10}^5}$.

27. Ω складається зі комбінацій з $(n+m)$ білетів по k, де $k\le n+m$.

$$P_n^*(A)=\begin{cases}0, \text{ коли } S>n \text{ або } S>k \text{ або } k-S>m,\\ \dfrac{C_m^{k-S}C_n^S}{C_{n+m}^k} \text{ в іншому разі.}\end{cases}$$

28. Ω складається з усіляких комбінацій з 25 осіб по 4. $P_n^*(A)=\dfrac{C_5^2\cdot C_4^2}{C_{25}^4}$.

29. Ω складається з комбінацій з $n+k$ місць по n. $P_n^*(A)=\dfrac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n}$.

1.6

1. 1, 3, 5, 7, 17, 18, 19 – так, інші – ні. **2.** 1), 2) – так; інші – ні.
3 – 4. Скористатися відповідними означеннями та основними властивостями ймовірності.

5. 1. $\Omega=\overline{1,6}$, $P(\{i\})=\dfrac{1}{6}$, $A=\{2,3,5\}$, $P(A)=\dfrac{1}{2}$;

2. $\Omega=\{(x,y): x \text{ і } y\in[-a;a]\}$; S складається з вимірних (за Лебегом) фігур, що є частинами Ω, $P(B)=\dfrac{m(B)}{m(\Omega)}=\dfrac{m(B)}{4a^2}$, $B\in S$; $A=\{(x,y)\in\Omega: x^2+y^2\le r^2\}$.

$$P(A)=\begin{cases}\pi r^2/4a^2, \text{коли } r\le a,\\ 1, \text{коли } r\ge a\sqrt{2},\\ \dfrac{\pi r^2-8\int\limits_0^{\sqrt{r^2-a^2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx}{4a^2}, \text{коли } a<r<a\sqrt{2}.\end{cases}$$

3. Ω складається з усіляких комбінацій з 16 монет по 5; $S=S^*$, $P(\{E\})=\dfrac{1}{C_{16}^5}$, $E\in\Omega$. Подія A складається з тих комбінацій, для яких відповідна грошова сума має вигляд $1\cdot 50+4\cdot 10$, або $2\cdot 25+3\cdot 10$, або $1\cdot 25+4\cdot 10$, або $3\cdot 25+2\cdot 10$; $P(A)=\dfrac{4}{C_{16}^5}$.

4. $\Omega=\{10,11,\ldots,99\}$, $A=\{11,22,\ldots,88,99\}$, $P(A)=\dfrac{1}{10}$.

5. $\Omega=\{(k_1,k_2),(k_1,k_3),(k_1,k_4),(k_2,k_3),(k_2,k_4),(k_3,k_4)\}$,

1) $A=\{(k_1,k_2)\}$, $P(A)=\dfrac{1}{6}$;

2) $A=\{(k_1,k_2),(k_1,k_3),(k_1,k_4)\}$, $P(A)=\dfrac{1}{2}$;

3) $A=\{(k_1,k_2),(k_2,k_3),(k_2,k_4)\}$, $P(A)=\dfrac{1}{2}$;

4) і 5) $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

6. Ω складається з перестановок 4-х команд (літер).

1) A складається з тих перестановок, де на першому місці стоїть літера K_1. $P(A)=\dfrac{1}{4}$;

2) A складається з тих перестановок, де на першому місці стоїть літера K_2, а на другому – K_1. $P(A)=\dfrac{1}{12}$;

3) A складається з однієї перестановки: $K_3\,K_2\,K_4\,K_1$. $P(A)=\dfrac{1}{24}$;

4) $P(A)=\dfrac{1}{24}$.

6. 1. Ω складається з трійок (x_i,k_i,t_i), $i\in\overline{1{,}500}$, де x_i – ідентифікація позичальника, k_i – сума кредиту, t_i – термін кредиту; $S=S^*$, $P_n^*(\{E\})=\dfrac{1}{500}$.

2. 1) $P_n^*(A)=\dfrac{196}{250}$; 2) $P_n^*(A)=\dfrac{61}{500}$; 3) $P_n^*(A)=\dfrac{14}{125}$.

7. 1. Ω складається з трійок (x_i,S_i,P_i), $i\in\overline{1,m}$, де x_i – ідентифікація вкладника, S_i – сума вкладу, P_i – вік вкладника (у роках); $S=S^*$, $P_n^*(\{E\})=\dfrac{1}{n}$, $E\in\Omega$.

2. 1) $P_n^*(A)=0{,}30$; 2) $P_n^*(B)=0{,}72$; 3) $P_n^*(A+B)=0{,}80$; 4) $P_n^*(AB)=0{,}22$.

3. $A=\{(x_i,S_i,P_i)\in\Omega: S_i\geq 5\}$, $B=\{(x_i,S_i,P_i)\in\Omega: P_i\geq 30\}$,

$A\bigcup B=\{(x_i,S_i,P_i)\in\Omega: B_i\geq 5 \text{ або } P_i\geq 30\}$ і т.д.

8. 1. Ω складається з четвірок (x_i,p_i,c_i,o_i), $i\in\overline{1{,}200}$, де x_i – ідентифікація робітника, p_i – його вік, c_i – стаж роботи, o_i – освіта; простір подій – S^*, $P_n^*(\{E\})=\dfrac{1}{200}$, $E\in\Omega$.

2. 1) $A=\{(x_i,p_i,c_i,o_i)\in\Omega: p_i\geq 30\}$;

2) $B = \{(x_i, p_i, c_i, o_i) \in \Omega : o_i = \text{"вища"}\}$;
3) $C = \{(x_i, p_i, c_i, o_i) \in \Omega : c_i > 5\}$.

3. 1) $P_n^*(A) = \frac{2}{5}$; 2) $P_n^*(B) = \frac{31}{40}$; 3) $P_n^*(C) = \frac{3}{8}$;
4) $P_n^*(A+B) = \frac{17}{20}$; 5) $P_n^*(AC) = \frac{1}{10}$; 6) $P_n^*(\overline{A}) = \frac{3}{5}$;
7) $P_n^*(\overline{B}) = \frac{9}{40}$; 8) $P_n^*(\overline{C}) = \frac{5}{8}$; 9) $P_n^*(\overline{A+B}) = \frac{3}{20}$.

9. 1. Ω складається з комбінацій з 10 по 7; простір подій $-$ S^*, $P(\{E\}) = \frac{1}{C_{10}^7}$, $E \in \Omega$.

2. Події A сприяють $C_6^4 \cdot C_4^3$ елементарні події.

3. $P_n^*(A) = \frac{C_6^4 C_4^3}{C_{10}^7} = \frac{1}{2} = P_n^*(\overline{A})$.

10. Ні. **11.** Ні. **12.** Скористатися формулою
$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB)$.

1.7

1. 1, 3, 4, 8, 10 – ні; 2, 5, 6, 7, 9 – так.
2. 1) – 3) $P_n^*(A/B) = 0$; 4) – 6) $P_n^*(A/B) = 1$.
3. 1. Так. 2. Так. 3. Так.
4. Скористатися відповідним означенням.
5. Скористатися відповідним означенням і формулою (7.2).
6. Скористатися відповідними означеннями.
7. $\frac{1}{6}$. **8.** 1. 0 або $\frac{1}{6}$. 2. Ні.
9. A_1 і A_2 незалежні $\Leftrightarrow$ 1) $\exists i \in \overline{1,2} : A_i = \varnothing$ або $A_i = \Omega$; або 2) A_1 містить 2 елементи, A_2 $-$ 3, а $A_1 A_2$ – один елемент; або 3) A_1 містить 4 елементи, A_2 – 3, а $A_1 A_2$ – два елементи.
10. Скористатися відповідними означеннями.
11. Знайти $P_n^*(A_1 \overline{A}_2)$ і $P_n^*(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3)$.
12. 1. Ω складається з усіляких комбінацій з 25 білетів по 3.
2. A складається із комбінацій з 20 білетів по 3.
3. $P_n^*(A) = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = P_n^*(A_1 A_2 A_3) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23}$.

13. 1. $\Omega = \{п, нп, \ldots, \underbrace{н \ldots н}_{9}п\}$; $S = S^*$, $P_n^*(\{E\}) = \frac{1}{10}$; 2. $\frac{3}{10}$; 3. $\frac{1}{2}$.

14. Ω складається з наборів $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, де x_1 – комбінації з 15 осіб по 3, x_2 – комбінації з 12 осіб по 3, x_3 – комбінації з 9 осіб по 3, x_4 – комбінації з 6 по 3 і x_5 – комбінації з 3 осіб по 3:

$$P_n^*(A) = \frac{C_{10}^2 \cdot 5 \cdot C_8^2 \cdot 4 \cdot C_6^2 \cdot 3 \cdot C_4^2 \cdot 2}{C_{15}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3}.$$

15. 1. $P_n^*(A/(A+B)) = \dfrac{P_n^*(A)}{P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB)}$.

2. $P_n^*(A/(A+B)) = \dfrac{P_n^*(A)}{P_n^*(A) + P_n^*(B)}$.

3. A і $(A+B)$ незалежні, коли $P_n^*(A+B) = 1$ або $P_n^*(A) = 0$.

16. A і B незалежні. **17.** 1. Ні. 2. Зміниться.

18. 1. $\Omega = \{(b,n), (b,b), (n,b), (n,n)\}$.

2. $A_1 = \{(b,n), (b,b)\}$, $A_2 = \{(b,b), (n,b)\}$.

3. Скористатися тим, що $\{E\} = B_1 \cap B_2$, де $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$.

4. 1) $p_1 + p_2 - p_1 p_2$; 2) $P_n^*((b,n)) = p_1(1 - p_2)$, $P_n^*((b,b)) = p_1 p_2$, $P_n^*((n,b)) = p_2(1 - p_1)$, $P_n^*((n,n)) = (1 - p_1)(1 - p_2)$.

5. Лише коли $p_2 = p_1 = \dfrac{1}{2}$.

19. 1. $0{,}7^2 \cdot 0{,}8^3$. 2. $\Omega = \{(x_1 x_2 y_1 y_2 y_3) : \text{кожне } x_i \text{ та } y_i \in \{1, 0\}\}$.

3. $A = \{(1,1,1,1,1)\}$. 4. Ні.

20. $0{,}72$. **21.** 1. Так. 2. Ні. **22.** $\dfrac{1}{360}$. **23.** 1) $\dfrac{1}{22}$; 2) $\dfrac{7}{44}$; 3) $\dfrac{37}{44}$; 4) $\dfrac{21}{22}$.

1.8

1. 1, 2, 4 – ні; 3, 5, 6, 7 – так. **2.** 1) $\dfrac{2}{5}$; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) $\dfrac{1}{3}$.

3. Від супротивного. **4.** 1) $\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{8}{30}$. **5.** $0{,}328$. **6.** $0{,}168$.

7. $1 - \prod_{k=1}^{10} (1 - p_k)$. **8.** $0{,}9496$. **9.** $0{,}625$ і $0{,}3125$.

10. 1) $0{,}95 \cdot 0{,}98 + 0{,}003$; 2) а) $\dfrac{0{,}95 \cdot 0{,}98}{0{,}95 \cdot 0{,}98 + 0{,}003}$; б) $\dfrac{0{,}95 \cdot 0{,}02}{1 - (0{,}95 \cdot 0{,}98 + 0{,}003)}$.

11. $1 - \dfrac{95^5}{96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}$. **12.** 1) $0{,}126$; 2) $0{,}004$.

13. 1) $0{,}003$; 2) $1 - \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{17}{20} \cdot \dfrac{49}{50}$; 3) $0{,}0191$; 4) $0{,}997$.

14. $0{,}5$. **15.** В обох випадках $P_n^*(A)=\frac{15}{20}$.

16. 1. 1) $\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^{51}$; 2) $\frac{1}{8}-(\frac{1}{2})^{52}$; 3) $\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^{51}$. 2. $(\frac{1}{2})^{50}$.

1.9

1. 1, 5, 7, 9, 11 – ні; 2, 3, 4, 6, 8, 10 – так.
2 – 8. Скористатися комп'ютерними програмами, наприклад GRAN1.
9. 1. 1) ні; 2) так. 2. Скористатися програмою GRAN1;
3. $P_n^*(\{0,2\})=0{,}4$; $P_n^*(\{4,6\})=0{,}6$.
10. 1.

x_i	1	2	3	4
p_i	$0{,}3$	$0{,}7\cdot 0{,}3$	$0{,}7^2\cdot 0{,}3$	$0{,}7^3$

2. Скористатися комп'ютерними програмами.

3. 1) $P_n^*(\{2,3,4\})=0{,}7$; 2) $P_n^*(\{1,2,3\})=0{,}657$.

11. 1.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Скористатися комп'ютерними програмами.

3. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$.

12. 1.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

2. Скористатися комп'ютерними програмами.

3. 1) $\frac{15}{16}$; 2) $\frac{1}{4}$.

1.10

1. 1, 4 – ні; 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 – так.
2 – 5. Скористатися комп'ютерними програмами.

6. 1. $f_n^*(x)=\begin{cases}5, \text{коли } 0\le x<0{,}1,\\ 2, \text{коли } 0{,}1\le x<0{,}2,\\ 1, \text{коли } 0{,}2\le x<0{,}4,\\ 0{,}4, \text{коли } 0{,}4\le x<0{,}5,\\ 0, \text{коли } 0{,}5\le x<0{,}6,\\ 0{,}2, \text{коли } 0{,}6\le x<0{,}7, \text{або } 0{,}8\le x<0{,}9,\\ 0{,}1, \text{коли } 0{,}7\le x<0{,}8, \text{або } 0{,}9\le x<1.\end{cases}$

2.

$[a_{i-1};a_i)$	$[0;\frac{1}{10})$	$[\frac{1}{10};\frac{2}{10})$	$[\frac{2}{10};\frac{3}{10})$	$[\frac{3}{10};\frac{4}{10})$	$[\frac{4}{10};\frac{5}{10})$
n_i	50	20	10	10	4
p_i	0,5	0,2	0,1	0,1	0,04

$[\frac{5}{10};\frac{6}{10})$	$[\frac{6}{10};\frac{7}{10})$	$[\frac{7}{10};\frac{8}{10})$	$[\frac{8}{10};\frac{9}{10})$	$[\frac{9}{10};1)$
0	2	1	2	1
0	0,02	0,01	0,02	0,01

3. $0{,}32$.

7. 1. 1) ні; 2) так.

2. $f_n^*(x)=\begin{cases}0{,}05, \text{коли } 0\le x<2,\\ 0{,}2, \text{коли } 2\le x<3,\\ 0{,}3, \text{коли } 3\le x<4,\\ 0{,}4, \text{коли } 4\le x<5.\end{cases}$

3. Скористатися комп'ютерними програмами. $f_n^*(x)$ неперервна і диференційована на $[0;5)$ за виключенням точок $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$; $\frac{d\,f_n^*(x)}{dx}=0$, коли $x\in[0;5)\setminus\{2,3,4\}$.

1.11

1. 1, 2, 5, 7, 8 – так; 3, 4, 6 – ні.

2. 1) $F_n^*(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le -1,\\ 0{,}25, \text{коли } -1<x\le 0,\\ 0{,}75, \text{коли } 0<x\le 1,\\ 1, \text{коли } x>1;\end{cases}$

2) скористатися комп'ютерними програмами.

3. і **4.** Скористатися відповідними означеннями.

5. Скористатися комп'ютерними програмами.

6. 1)

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

1. $F_n^*(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 2,\\ \frac{1}{15}, \text{коли } 2<x\le 3,\\ \frac{4}{15}, \text{коли } 3<x\le 4,\\ \frac{6}{15}, \text{коли } 4<x\le 5,\\ \frac{10}{15}, \text{коли } 5<x\le 6,\\ 1, \text{коли } x>6.\end{cases}$

2. Скористатися комп'ютерними програмами.
3. Скрізь, крім точок 2, 3, 4, 5, 6, в яких $F_n^*(x)$ має розрив першого роду.

2)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	$\frac{1}{80}$	$\frac{2}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{7}{80}$	$\frac{15}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{15}{80}$	$\frac{10}{80}$	$\frac{7}{80}$

1. $F_n^*(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 1,\\ \frac{1}{80}, \text{коли } 1<x\le 2,\\ \frac{3}{80}, \text{коли } 2<x\le 3,\\ \frac{6}{80}, \text{коли } 3<x\le 4,\\ \frac{13}{80}, \text{коли } 4<x\le 5,\\ \frac{28}{80}, \text{коли } 5<x\le 6,\\ \frac{48}{80}, \text{коли } 6<x\le 7,\\ \frac{63}{80}, \text{коли } 7<x\le 8,\\ \frac{73}{80}, \text{коли } 8<x\le 9,\\ 1, \text{коли } x>9.\end{cases}$

2. Скористатися комп'ютерними програмами.

3. $F_n^*(x)$ неперервна скрізь, крім точок $x \in \overline{1,9}$, в яких вона має розрив першого роду.

8. 1. $C = \dfrac{5}{24}$.

2. $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли}\, x \le 1, \\ \dfrac{1}{2}, \text{коли}\, 1 < x \le 2, \\ \dfrac{5}{8}, \text{коли}\, 2 < x \le 3, \\ \dfrac{20}{24}, \text{коли}\, 3 < x \le 4, \\ 1, \text{коли}\, x > 4. \end{cases}$$

3. $F_n^*(x)$ скрізь неперервна і диференційована, крім точок $x \in \overline{1,4}$, в яких вона має розрив першого роду; $\dfrac{d\,F_n^*(x)}{dx} = 0$, коли $x \notin \overline{1,4}$.

9. 1. $C_1 + C_2 = \dfrac{5}{9}$, $C_1 \ge 0, C_2 \ge 0$. Наприклад, $C_1 = \dfrac{2}{9}$, $C_2 = \dfrac{3}{9}$.

2. $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли}\, x \le 1, \\ \dfrac{1}{3}, \text{коли}\, 1 < x \le 2, \\ \dfrac{5}{9}, \text{коли}\, 2 < x \le 3, \\ \dfrac{8}{9}, \text{коли}\, 3 < x \le 4, \\ 1, \text{коли}\, x > 4. \end{cases}$$

3. $F_n^*(x)$ скрізь неперервна і диференційована, крім точок $x \in \overline{1,4}$, в яких вона має розрив першого роду; $\dfrac{d\,F_n^*(x)}{dx} = 0$, коли $x \notin \overline{1,4}$.

10. 1. $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли}\, x \le 0, \\ \dfrac{1}{5}, \text{коли}\, 0 < x \le 1, \\ \dfrac{2}{5}, \text{коли}\, 1 < x \le 3, \\ \dfrac{3}{5}, \text{коли}\, 3 < x \le 4, \\ \dfrac{4}{5}, \text{коли}\, 4 < x \le 5, \\ 1, \text{коли}\, x > 6. \end{cases}$$

2.

x_i	0	1	3	4	6
n_i	6	6	6	6	6
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

11 – 15. Скористатися комп'ютерними програмами.

1.12

1. 1, 3, 7 – так; 2, 4, 5, 6 – ні.

2. Скористатися комп'ютерними програмами.

3. Скористатися відповідними означеннями.

4. Оскільки $F_n^*(x) = b_i + C_i(x - a_{i-1}), a_{i-1} \le x < a_i$, то $\dfrac{d\,F_n^*(x)}{dx} = C_i$, коли $a_{i-1} < x < a_i$ і тому ця похідна може не існувати лише у точках $a_i, i \in \overline{0,k}$.

5. Скористатися комп'ютерними програмами.

6. 1. $C = \dfrac{4}{5}$.

2. $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли } x \le 0, \\ x, \text{коли } 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3} + \frac{4}{5}(x - \frac{1}{3}), \text{коли } \frac{1}{3} < x \le \frac{8}{9}, \\ \frac{7}{9} + 2(x - \frac{8}{9}), \text{коли } \frac{8}{9} < x \le 1, \\ 1, \text{коли } x > 1. \end{cases}$$

3. Скористатися комп'ютерними програмами.

4. $f_n^*(x) = \dfrac{d\,F_n^*(x)}{dx}$, коли $x \notin \{0, \frac{1}{3}, \frac{8}{9}, 1\}$.

7. 1. $C_1 = \dfrac{1}{3}$, $C_2 = \dfrac{4}{3}$.

2. Скористатися комп'ютерними програмами.

3. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \text{коли } x<0, \\ 2, \text{коли } 0<x<\frac{1}{4}, \\ \frac{2}{3}, \text{коли } \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3}, \text{коли } \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}, \\ 0, \text{коли } x>\frac{3}{4}. \end{cases}$

У точках $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ і 1 функція $f_n^*(x)$ не визначена, проте ці значення не впливають на $F_n^*(x)$, тому їх можна визначити довільно.

8. 1. Так.

2. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, \text{коли } x\le\frac{1}{4}, \\ 2(x-\frac{1}{4}), \text{коли } \frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}), \text{коли } \frac{1}{2}<x\le\frac{3}{4}, \\ \frac{2}{3}+\frac{4}{3}(x-\frac{3}{4}), \text{коли } \frac{3}{4}<x\le 1, \\ 1, \text{коли } x>1. \end{cases}$

3. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \text{коли } x<\frac{1}{4}, \\ 2, \text{коли } \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3}, \text{коли } \frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}, \\ \frac{4}{3}, \text{коли } \frac{3}{4}<x<1, \\ 0, \text{коли } x>1. \end{cases}$

4. $F_n^*(x)$ скрізь неперервна, $f_n^*(x)$ розривна лише у точках $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ і 1. Обидві функції недиференційовані лише у вказаних точках.

5. $\frac{d\,F_n^*(x)}{dx} = f_n^*(x)$, коли $x \notin \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

9. 1. $\Omega = \{(г, е), (г, м), (г, з), (\bar{г}, е), (\bar{г}, м), (\bar{г}, з)\}$.

2. Якщо вставити відповідність $(г, е) \leftrightarrow 1$, $(г, м) \leftrightarrow 2$, $(г, з) \leftrightarrow 3$, $(\bar{г}, е) \leftrightarrow 4$, $(\bar{г}, м) \leftrightarrow 5$, $(\bar{г}, з) \leftrightarrow 6$, то спостереженні значення можна тлумачити як числа.

3. 1) так; 2) ні.

4.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,25	0,17	0,15	0,30	0,03

Далі скористатися комп'ютерними програмами.

6. 1) $P_n^*(A) = P_n^*(\{1,2,3\}) = 0{,}52$;

2) $P_n^*(B) = P_n^*(\{2,5\}) = 0{,}55$;

3) $P_n^*(\bar{A}) = 0{,}48 = P_n^*(C)$;

7. нема. 8. 1) ні; 2) ні.

10. 1. 1) $k = \frac{1}{4}$ і розподіл неперервний; 2) $k = 2$ і розподіл неперервний.

2. Скористатися комп'ютерними програмами.

3. 1) $f_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли}\, x < 0, \\ \frac{1}{4}, \text{коли}\, 0 < x < 3, \\ 0, \text{коли}\, x > 3, \end{cases}$ 2) $f_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{коли}\, x < 0, \\ 2, \text{коли}\, 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, \text{коли}\, x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

4. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0.

11. Ні.

12 – 14. Скористатися комп'ютерними програмами.

1.13

1. 1, 2, 4 – так; 3, 5 – ні. **2 – 3.** Скористатися комп'ютерними програмами.

4. $m_n^* = \sum_{i=1}^{k} x_i (F_n^*(x_{i+1}) - F_n^*(x_i))$, де x_{k+1} – будь-яке число, що є більшим за x_k; $D_n^* = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m_n^*)^2 (F_n^*(x_{i+1}) - F_n^*(x_i))$; $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

5. 1) $m_n^* = \frac{39}{15}$; $D_n^* = \frac{39^2}{15^3} + \frac{9^2 \cdot 2}{15^3} + \frac{6^2 \cdot 4}{15^3} + \frac{21^2 \cdot 5}{15^3}$; $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

2) $m_n^* = 3{,}8$; $D_n^* = 4{,}8^2 \cdot 0{,}1 + 2{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 3{,}2^2 \cdot 0{,}3$.

3) $m_n^* = \frac{14}{5}$; $D_n^* = \frac{14^2}{5^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{6^2}{5^3} + \frac{16^2}{5^3}$.

6. Скористатися відповідними означеннями.

7. 1. $m_n^* = 1 - p$; $D_n^* = p(1-p)$; $\sigma_n^* = \sqrt{p(1-p)}$.

2. $m_n^* = 2 - p$; $D_n^* = p(1-p)$; $\sigma_n^* = \sqrt{p(1-p)}$.

8. 1.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. $m_n^* = 3$; $D_n^* = 2$; $\sigma_n^* = \sqrt{2}$.

9*.

x_i	1	2	…	r
p_i	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$	…	$\frac{1}{r}$

$m_n^* = \frac{r+1}{2}$; $D_n^* = \frac{1}{r}((\frac{r-1}{2})^2 + (\frac{r-3}{2})^2 + \ldots + (\frac{r-(2r-1)}{2})^2)$, $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

1.14

1. 1, 2, 4 – так; 3, 5 – ні. **2 – 3.** Скористатися комп'ютерними програмами.

4. $m_n^* = b - \int_a^b F_n^*(x)\,dx$; $D_n^* = 2\int_a^b (b-x) F_n^*(x)\,dx - (\int_a^b F_n^*(x)\,dx)^2$.

5. 1. $m_n^* = \frac{1}{3}$, $D_n^* = \frac{1}{81} - \frac{1}{9 \cdot 12^3} + \frac{4}{9}\frac{125}{12^3} - \frac{16}{9}\frac{1}{12^3}$, $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

2. $m_n^* = \frac{1}{2}$, $D_n^* = \frac{1}{12}$, $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

3. $m_n^* = \frac{3}{2}$; $D_n^* = \frac{3}{4}$, $\sigma_n^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $m_n^* = \frac{1}{4}$, $D_n^* = \frac{1}{48}$, $\sigma_n^* = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

6. Скористатися відповідним означенням.

7. 1. Скористатися відповідними означеннями.

2. $m_n^* = \frac{1}{2}$, $D_n^* = \frac{1}{12}$; $\sigma_n^* = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

1.15

1. 1, 3, 5, 6 – ні; 2, 4, 7, 8 – так.

2. $1-(1-p)^m$. **3.** 1. 1) $P_n^*(B_{9,5}) = C_9^5 (\frac{1}{2})^9$; 2) $P_n^*(B_{9,4}) = C_9^4 (\frac{1}{2})^9$.

2. $P_n^*(B_{9,4}) = P_n^*(B_{9,5})$. 3. $P_n^*(B_{9,s}) = C_9^s (\frac{1}{2})^9, s \in \overline{0,9}$.

3. $P_n^*(B_{20,s}) = C_{20}^s (\frac{1}{2})^{20}$; $P_n^*(B_{20,5}) > P_n^*(B_{20,4})$.

4. Використати метод математичної індукції.

5. $\Omega_1^4 = \{(A, A, A, A), (A, A, A, \bar{A}), (A, A, \bar{A}, A), (A, \bar{A}, A, A), (\bar{A}, A, A, A),$

$(A, A, \bar{A}, \bar{A}), (A, \bar{A}, \bar{A}, A), (\bar{A}, \bar{A}, A, A), (A, \bar{A}, A, \bar{A}), (\bar{A}, A, A, \bar{A})(\bar{A}, A, \bar{A}, A),$

$(A, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A}), (\bar{A}, A \bar{A}, \bar{A}), (\bar{A}, \bar{A}, A, \bar{A}), (\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, A), (\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A})\}$;

$A_1 = \{(A, A, A, A), (A, A, A, \bar{A}), (A, A, \bar{A}, A), (A, \bar{A}, A, A),$

$(A, A, \bar{A}, \bar{A}), (A, \bar{A}, \bar{A}, A), (A, \bar{A}, A, \bar{A}), (A, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A})\}$;

$A_2 = \{(A, A, A, A), (A, A, A, \bar{A}), (A, A, \bar{A}, A), (\bar{A}, A, A, A),$

$(A, A, \bar{A}, \bar{A}), (\bar{A}, A A, \bar{A}), (\bar{A}, A, \bar{A}, A), (\bar{A}, A, \bar{A}, \bar{A})\}$;

$A_3 = \{(A, A, A, A), (A, A, A, \bar{A}), (A, \bar{A}, A, A), (\bar{A}, A, A, A),$

$(\bar{A}, \bar{A}, A, A), (A, \bar{A} A, \bar{A}), (\bar{A}, A, A, \bar{A}), (\bar{A}, \bar{A}, A, \bar{A})\}$;

$A_4 = \{(A, A, A, A), (A, A, \bar{A}, A), (A, \bar{A}, A, A), (\bar{A}, A, A, A),$

$(A, \bar{A}, \bar{A}, A), (\bar{A}, \bar{A} A, A), (\bar{A}, A, \bar{A}, A), (\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, A)\}$.

6. 1) $A_k=\{(E_1,\dots,E_m)\in\Omega_1^m : E_k=A\}$, k – фіксоване, $k\in\overline{1,m}$;

2) $\overline{A}_k=\{(E_1,\dots,E_m)\in\Omega_1^m : E_k=\overline{A}\}$;

3) $A_1+\dots+A_m=\{E=(E_1,\dots,E_m)\in\Omega_1^m : E\neq(\overline{A},\dots,\overline{A})\}$;

4) $B_{m,s}$ складається з тих $E=(E_1,\dots,E_m)\in\Omega_1^m$, у яких рівно s координат – це A, а інші $(m-s)$ координат – це $\overline{A}$.

5) $B_{m,s}=\sum\limits_{\{i_1,\dots,i_s\}}\prod\limits_{k=1}^{s}A_{i_k}\cdot\prod\limits_{k=1}^{m-s}\overline{A}_{j_k}$, де сума береться по усіляким $\{i_1,\dots,i_s\}\subset\overline{1,m}$, а $\{j_1,\dots,j_{m-s}\}=\overline{1,m}\setminus\{i_1,\dots,i_s\}$;

6) $\tilde{P}_m^*(A_1+\dots+A_m)=1-(1-p)^m$; 7) $\tilde{P}_m^*(B_{m,s})=C_m^s p^s(1-p)^{m-s}$.

7. Див. задачу **6**.3.

8. $1-(\frac{5}{6})^4$. **9.** $1-(\frac{35}{36})^{24}$; $1-(\frac{5}{6})^4>1-(\frac{35}{36})^{24}$.

10. 1) $\frac{1002}{1024}$; 2) $\frac{252}{1024}$.

11. 1. $C_{10}^i(\frac{1}{5})^i(\frac{4}{5})^{10-i}, i\in\overline{0,10}$. 2. $i_0=[(10+1)\frac{1}{5}]=2$.

3. $C_{10}^1\frac{1}{5}\cdot(\frac{4}{5})^9+C_{10}^2(\frac{1}{5})^2\cdot(\frac{4}{5})^8+C_{10}^3(\frac{1}{5})^3\cdot(\frac{4}{5})^7$.

12. 1. $1-(0{,}99)^{200}-200(0{,}99)^{199}\cdot 0{,}01-\frac{200\cdot 199}{2}(0{,}99)^{198}\cdot(0{,}01)^2-$
$-\frac{200\cdot 199\cdot 198}{3!}(0{,}99)^{197}\cdot(0{,}01)^3$.

2. $s_0=2$. 3. Полігон відносних частот близький до графіка функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\cdot 0{,}99}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4\cdot 0{,}99}}$.

13. 1. $C_{10}^2(\frac{1}{5})^2\cdot(\frac{4}{5})^3$. 2. 1) $s_0=2$; 2) $s_0=20$.

3. $\tilde{P}_{10}(i)=C_{10}^i(\frac{1}{5})^i(\frac{4}{5})^{10-i}, i\in\overline{0,10}$.

1) i; 2) скористатися комп'ютерними програмами;

3) $m_{10}^*=2$; $D_{10}^*=\frac{8}{5}$; $\sigma_{10}^*=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

14.* $P_m^*(i)=C_m^i p^i(1-p)^{m-i}$. 2. $s_0=[(m+1)p]$.

3. 3) $m_m^*=mp$. $D_{m^*}=mp(1-p)$, $\sigma_{m^*}=\sqrt{mp(1-p)}$

15. 1) $(\frac{1}{12})^6$; 2) $C_6^3(\frac{1}{12})^3\cdot(\frac{11}{12})^3$; 3) $\frac{1}{12}C_6^2(\frac{1}{12})^i\cdot(\frac{11}{12})^{6-i}, i\in\overline{0,6}$.

16. 1. $1-(\frac{499}{500})^{500}-\frac{3}{2}-(\frac{499}{500})^{499}$.

2. $s_0=1$.

17. $n\geq\frac{2-\lg 5}{2-\lg 99}$.

18. 1) $C_5^3(0{,}51)^3\cdot(0{,}49)^2$; 2) $(0{,}49)^5+5(0{,}51)\cdot(0{,}49)^4+10(0{,}51)^2(0{,}49)^3$;

3) $C_5^3(0{,}51)^3\cdot(0{,}49)^2+C_5^4(0{,}51)^4\cdot 0{,}49+(0{,}51)^5$.

19. 1) $5\cdot(0{,}2)(0{,}8)^4$; 2) $1-(0{,}8)^5$; 3) $(0{,}8)^5$; 4) $(0{,}2)^5$.

20. 1) $C_{100}^{10}\cdot(0{,}1)^{10}\cdot(0{,}9)^{90}$; 2) $\sum_{i=5}^{9}C_{100}^{i}\cdot(0{,}1)^i\cdot(0{,}9)^{100-i}$;

3) $\sum_{i=0}^{20}C_{100}^{i}\cdot(0{,}1)^i\cdot(0{,}9)^{100-i}$.

21. 1) – 2) $p(1-p)^3$; 3) $p(1-p)^3-p(1-p)^3$.

22. 1. 1) $C_9^i(0{,}2)^i(0{,}8)^{9-i}, i\in\overline{0{,}9}$; 2) $1-(0{,}8)^9-9(0{,}2)\cdot(0{,}8)^8$;

3) $\sum_{i=0}^{3}C_9^i\cdot(0{,}2)^i\cdot(0{,}8)^{9-i}$; 4) $1-(0{,}8)^9$.

2. $s_0=1$ або $s_0-1=1$; $\widetilde{P}_9^*(\{1,2\})=3{,}6\cdot(0{,}8)^8$.

23. 1. 1) $1-(0{,}99)^{1000}$; 2) $C_{1000}^3\cdot(0{,}01)^3\cdot(0{,}99)^{997}$;

3) $\sum_{i=0}^{3}C_{1000}^i\cdot(0{,}01)^i\cdot(0{,}99)^{1000-i}$.

2. $s_0=10$; $\widetilde{P}_{1000}^*(10)=C_{1000}^{10}(0{,}01)^{10}\cdot(0{,}99)^{990}$.

24. 1 1) $C_5^i(0{,}5)^5, i\in\overline{0{,}5}$; 2) $1-(0{,}5)^5$; 3) $\sum_{i=3}^{5}C_5^i\cdot(0{,}5)^5$.

2. $s_0=3$ або $s_0-1=2$; $P_5^*(\{2,3\})=20\cdot(0{,}5)^5$;

3. $m\geq\frac{2-\lg 5}{1-\lg 5}$.

25. 1. 1) $C_{10}^i(0{,}8)^i(0{,}2)^{10-i}, i\in\overline{0{,}10}$;

2) $10\cdot(0{,}8)^9\cdot 0{,}2+(0{,}8)^{10}$; 3) $1-(0{,}8)^{10}$.

2. $s_0=80$; $\widetilde{P}_{10}^*(8)=C_{10}^8(0{,}8)^8\cdot(0{,}2)^2$.

26. $s_0=6$; $S_{\text{вип}}=72000$.

27. 1. $s_0=2$. 2. $\widetilde{P}_{20000}^*(2)=C_{20000}^2(0{,}0001)^2\cdot(0{,}9999)^{19999}$.

3. За 2 дні.

1.16

1. 1, 3, 5, 6, 7 – так, 2, 4 – ні.

2. 1) $S = S^*$, $X(\textit{Г}) = 0$, $X(\textit{Ц}) = 1$ є випадковою величиною.

2) $S \neq S^*$, $S_X = S_X^*$, $X(\textit{Г}) = 0$, $X(\textit{Ц}) = 1$ – не є випадковою величиною.

3. 1. $S = S^*$ і тому будь-яка функція $X(E)$, $E \in \Omega$ є випадковою величиною.

2. Ні.

4. Так. **5.** Так. **6.** Див. задачі **2-5.**

7. Якщо $S = S^*$, то $X^{-1}(B) \in S$ для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$.

8. Якщо $S \neq S^*$, то існує $B \subset \Omega : B \notin S$, а тому функція $X(E) = \begin{cases} 1, \text{коли } E \in B, \\ 0, \text{коли } E \notin B, \end{cases}$ не є випадковою величиною, коли $S_X \neq \{\varnothing, \Omega_X\}$.

9. $S_X = \{\varnothing, \{-1,1\}, \{-1\}, \{1\}\}$. 1), 2) Якщо $A \in S$, то $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, а якщо $A \notin S$, то не є; 3) $P_{nX}^*(\{1\}) = P_n^*(A)$, $P_{nX}^*(\{-1\}) = 1 - P_n^*(A)$.

10. 1. Так, вона є S-вимірною.

2. $P_{nX}^*(\{a\}) = 0$, коли $a < 0$,

$P_{nX}^*(\{a\}) = \lim\limits_{k\to\infty}(P_n^*((-\sqrt{a+\frac{1}{k}}; \sqrt{a+\frac{1}{k}})) - P_n^*((-\sqrt{a}; \sqrt{a}))$, коли $a \geq 0$.

11. Скористатися тим, що коли $f(x)$ неперервна на $\Omega = (a;b)$, то множина $(f < c)$ є відкритою для будь-якого числа c, а тому є об'єднанням своїх складових інтервалів.

12. 1. Див. задачу **2.** 2. Якщо $X(E) = \begin{cases} 1, \text{коли } E = \textit{Г}, \\ 0, \text{коли } E = \textit{Ц}, \end{cases}$ то $P_{nX}^*(1) = P_n^*(\textit{Г})$, $P_{nX}^*(0) = P_n^*(\textit{Ц})$.

13. 1. 1) $\Omega = \{(x,x,x), (x,x,\partial), (x,\partial,\partial), (\partial,\partial,\partial)\}$;

2) $\Omega_X = \{0,1,2,3\}$; 3) $S = S^*$; 4) $S \neq S^*$, а $S_X = S_X^*$.

2. Якщо $S = S^*$ і $S_X = S_X^*$ та $P_n^*(E) = \frac{1}{4}$, $E \in \Omega$, то $P_{nX}^*(i) = \frac{1}{4}$, $i \in \overline{0,3}$.

14. 1. 1) $\Omega = \{c, нc, ннc, \ldots, \underbrace{н\ldots н}_{k-1}c, \ldots\}$.

2) $X(\underbrace{н\ldots н}_{k-1}c) = k$, тобто $\Omega_X = \{1, 2, \ldots\}$.

3) $S = S^*$; 4) $S \neq S^*$, а $S_X = S_X^*$.

2. Якщо $S = S^*$ і $S_X = S_X^*$, то $P_{nX}^*(k) = (0{,}03)^{k-1} \cdot 0{,}97$.

15. Скористатися рівністю $(X = x_0) = \prod_{i=1}^{\infty}(x_0 \leq X < x_0 + \frac{1}{i})$.

16. Скористатися задачею **15** і тим, що $(X < C) = \sum_k (X = x_{i_k})$, де x_{i_k} – ті значення X, що є меншими за C.

17. 1. Якщо $\Omega_1^m = \{E = (E_1, \ldots, E_m) : E_i = A$ або $E_i = \overline{A}, i \in \overline{1, m}\}$, то $X(E) = k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, де k – кількість координат $E_i = A$.

2. $S_m = S_m^*$, $\tilde{P}_m^*(\{E\}) = p^i (1-p)^{m-i}$, де i – кількість координат $E_i = A$, а $p = P_n^*(A)$.

3. $X^{-1}(x_0) = (X = x_0) = B_{m, x_0}, x_0 \in \overline{0, m}$;
$\tilde{P}_m^*(X^{-1}(x_0)) = C_m^{x_0} p^{x_0} (1-p)^{m-x_0}$.

4. Якщо змінити S так, щоб $S_m \neq S_m^*$, а $S_{mX} = S_{mX}^*$, то $X(E)$ вже не буде випадковою величиною.

1.17

1. 1, 3, 6, 8, 10, 11, 14 – ні; 2, 5, 7, 9, 12, 13 – так.
2. Розглянути випадки: 1) $A = B \neq \Omega$; 2) $A = B = \Omega$; 3) $A \neq B = \Omega$; 4) $\Omega \neq A \neq B \neq \Omega$, $AB \neq \varnothing$; 5) $B \neq \Omega \neq A$, $A \bigcap B = \varnothing$.

3. $X(E) = E$, $E \in [0;1)$. **4.** $X(E) = \begin{cases} 1, \text{коли } E \in A, \\ 0, \text{коли } E \notin A, A \notin S. \end{cases}$

5. Довести, що $(|X| < C) = \begin{cases} \varnothing, \text{коли } C \leq 0, \\ (X < C) \cdot (X > -C), \text{коли } C > 0, \end{cases}$

6. 1. Скористатися відповідними означеннями. 2. Ні. 3. Так. **7.** Ні.
8. 1. $\Omega_1^3 = \{E = (E_1, E_2, E_3) : E_i = A$ або $E_i = \overline{A}, i \in \overline{1, 3}\}$,

$$X_k((E_1, E_2, E_3)) = \begin{cases} 1, \text{коли } E_k = A, \\ 0, \text{коли } E_k \neq A. \end{cases}.$$

2. $\Omega_Y = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $P_{nY}^*(0) = (1-p)^3$, $P_{nY}^*(\frac{1}{3}) = 3p(1-p)^2$,
$P_{nY}^*(\frac{2}{3}) = 3p^2(1-p)$, $P_{nY}^*(1) = p^3$.

3. $Y(E)$ задає усі можливі значення $P_3^*(A)$.
9. 1. 1) – так; 4) і 7) – так або ні в залежності від простору S.
2), 3), 5), 6) – ні.

2. 1)

x_k	-1	1
p_k	$P_n^*(\overline{A})$	$P_n^*(A)$

4)

x_k	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

7)

x_k	0	1	$\dots$	k	$\dots$	m
p_k	$(1-p)^m$	$mp(1-p)^{m-1}$	$\cdots$	$C_m^k(1-p)^{m-k}$	$\cdots$	p^m

10. Довести, що $(X = x_0) = \prod_{i=1}^{\infty}(\Omega - (X < x_0) - (X < x_0 + \frac{1}{i}))$, обернене твердження не є правильним.

11. Скористатися твердженням 1 задачі **6***.

12. 1) ні; 2) так; 3) так, коли $C = 0{,}4$, ні, коли $C \neq 0{,}4$.

13. 1)

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2)

x_i	0	1	2	3
p_i	$0{,}49 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}5$	$0{,}51 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}5 + 0{,}49 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}5 + 0{,}49 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}5$	$0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}5 + 0{,}49 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}5 + 0{,}51 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}5$	$0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}5$

14. 1) $P_n^*(A_i) = p \in (0;1)$; $X(E) = X(E_1, E_2, E_3, E_4) = C_4^i p^i (1-p)^{4-i}$, де $E_k \in \{A, \overline{A}\}$ і серед E_k рівно i дорівнює A, а інші – $\overline{A}$.

x_i	$0/4$	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$
p_i	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

2)

x_i	$0/4$	$1/4$
p_i	$(1-p_1)(1-p_2)\cdot(1-p_3)(1-p_n)$	$p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_n) + (1-p_1)p_2(1-p_3)(1-p_4) + (1-p_1)(1-p_2)p_3(1-p_4) + (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_4$

$4/4$	$2/4$	$3/4$
$p_1p_2p_3p_4$	$p_1p_2(1-p_3)(1-p_4) + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4) + (1-p_1)(1-p_2)p_3p_4 + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4 + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4) + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4$	$p_1p_2p_3(1-p_4) + (1-p_1)p_2p_3p_4 + p_1(1-p_2)p_3p_4 + p_1p_2(1-p_3)p_4$

15. а) 1)

$x_i + y_n$	-1	0	1	2	3
P_m	0,02	0,09	0,26	0,33	0,3

2)

$x_i y_n$	-2	-1	0	1	2
P_m	0,12	0,06	0,37	0,15	0,3

б) вказати розподіли не можна.

1.18

1. 1. Має, проте обчислити їх можна не єдиним способом.
2, 3, 4, 6 – так; 5, 7, 8, 9 – ні.

2. 1. $M_n^*[X] = \frac{7}{2}$; $D_n^*[X] = \frac{1}{6}(\frac{50}{4} + \frac{18}{4} + \frac{2}{4}) = \frac{35}{12}$.

2. $M_n^*[X] = \frac{5}{2}$; $D_n^*[X] = \frac{5}{4}$.

3. $M_n^*[X] \approx a \approx D_n^*[X]$.

3. Скористатися відповідними означеннями.

4. Скористатися тим, що $m = \min x_i \le x_i \le M = \max x_i$, а $\left| x - M_n^*[X] \right| \le (M - m)$.

5. $3:1$. **6.** $3:1$. **7.** $11:5$. **8.** $M_n^*[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $D_n^*[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_n^*[X])^2$.

9. 1) $M_m^*[X] = mp$; $D_m^*[X] = mp(1-p)$; 2) $M_m^*[X] = 20$; $D_m^*[X] = 19{,}8$;

3) $M_m^*[X] = \frac{1-(1-p)^5}{p}$;

$$D_n^*[X] = \sum_{i=1}^{4}(i - M_n^*[X])^2 p(1-p)^{i-1} + (5 - M_n^*[X])^2 (1-p)^4.$$

10. $M_n^*[X] = 1{,}5$; $D_n^*[X] = 2{,}25 \cdot 0{,}06 + 0{,}25 \cdot 0{,}38 + 0{,}25 \cdot 0{,}56$.

11. 1. $\Omega = \{(i, j) : i \in \overline{1{,}6},\ j \in \overline{1{,}6}\}$, $S = S^*$, $P_n^*(E) = \frac{1}{36}, E \in \Omega$.

1)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2) $M_n^*[X] = 7$; $D_n^*[X] = \dfrac{35}{6}$.

3) $A_2 = \Omega_X = \{2, 3, \ldots, 12\}$; $A_6 = \{6, 7, \ldots, 12\}$, $A_{12} = \{12\}$.

2. Якщо $S = \{\varnothing, \Omega, \{(1,1)\}, \Omega - \{(1,1)\}\}$, а $S_X = S_X^*$, то $X(E), E \in \Omega$, не є випадковою величиною.

12. 1) Наприклад, $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$ – індикатори подій A і $\overline{A}$ відповідно;

2) $(X+Y)(E) \equiv 1$, $(X \cdot Y)(E) \equiv 0$;

3) величини X та Y залежні.

4. Лише перша рівність виконується.

13.* Скористатися тим, що $(M_n^*[XY])^2 - M_n^*[X^2] \cdot M_n^*[Y^2]$ може бути дискримінантом квадратного тричлена $M_n[X^2] \cdot t^2 - 2t\, M_n[XY] + {}$ $+ M_n[Y^2] = f(t)$.

14.*Розкрити дужки і скористатися властивістю

$$M_n^*[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i\, M_n^*[X_i].$$

1.19

1. 1, 2, 3, 4, 5, 7 – так; 6 – ні.
2. 1. $m > 250$. 2. $m > 5000$. 3. $m > 25000000$.
3. Скористатися відповідними означеннями.

1.20

1. 1, 2, 3, 4, 5, 7 – так, 6 – ні.
2-5. Скористатися комп'ютерними програмами.
6. 1. Ω складається з усіляких сполучень з N кульок по n, $S = S^*$, $P_n^*(E) = \dfrac{1}{C_N^n}, E \in \Omega$.

2. Скористатися формулою $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$.

3. $M_n^*[X] = \dfrac{N_1 n}{N}$; $D_n^*[X] = \dfrac{nN_1(N-N_1)}{N^2}(1 - \dfrac{n-1}{N-1})$.

7–9. Для самостійної роботи.

2.1

1. Так – 1.2), 2.2), 4, 6, 7.1), 10, 11, 14; усі інші – ні.

2. $\Omega=\{Г, ЦГ, \ldots, \underbrace{Ц..Ц}_{k-1}Г, \ldots\}$, $S=S^*$, $P(\underbrace{Ц..Ц}_{k-1}Г)=p(1-p)^{k-1}$.

3. Скористатися рівностями $\bigcap_i A_i=\overline{\bigcup_i \overline{A}_i}$, $A\setminus B=A\bigcap \overline{B}$.

4. Перевірити властивості $1_S - 3_S$.

5. Скористатися тим, що переріз $\sigma-$алгебр є $\sigma-$алгеброю.

6. Скористатися вправою 5.

7. Скористатися тим, що кожна подія $A=\bigcup_i \{E_{i_k}\}$.

8. 1. Див. задачу **2**. 2. S_1 складається з усіляких скінченних підмножин простору Ω та їх доповнень. 3. Скористатися вправою 3.5. 4. S_2 та S_3 – різні скінченні алгебри, що завжди є $\sigma-$алгебра-ми. 5. Скористатися задачею 2 чи вправою 8.

9. 1.

$\Omega=\{ГГ, ЦЦ, ЦГГ, ГЦЦ, \ldots, \underbrace{ГЦ..ГЦ}_{k-1}ГГ, \underbrace{ЦГ..ЦГ}_{k-1}ЦЦ, \underbrace{ЦГ..ЦГ}_{k}Г, \underbrace{ГЦ..ГЦ}_{k}Ц, \ldots\}$.

2. Може. 3. 1) $1-p^3(1-p)^3$; 2) $p^3(1-p)^3$; 3) $\dfrac{p^2+(1-p)^2}{1-p+p^2}$;

4) $\dfrac{(1-p)p}{1-p+p^2}$.

10. 1. Див. вправу 3.5. 2. $S=S^*$. 3 і 4. $P(\{k\})=p_k\geq 0$, де $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$. 5. Див. вправу 3.5.

11. 1. $\Omega=\{Г_1Г_2, Г_1Ц_2, Ц_1Г_2, Ц_1Ц_2, Г_2Г_1, Г_2Ц_1, Ц_2Г_1, Ц_2Ц_1\}=$ $=\{E_i : i\in\overline{1,8}\}$. 2. $V=\{\varnothing,\Omega,\{E_1\},\{E_2,\ldots,E_8\}\}$. 3. Не може. 4. $S=S^*$.

5. $P_V(\{E_1\})=p_0\in(0;1)$, $P_V(\{\overline{E}_1\})=1-p_0$; $P_S(\{E_k\})=\dfrac{1}{8}$, $k\in\overline{1,8}$.

6. Якщо $p_0\neq\dfrac{1}{8}$, то P_S не є продовженням P_V.

12. 1. $\Omega=\{я1, б1, я2, б2\}$. 2. $S=S^*$. 3. $P(\{я1\})=0{,}27$, $P(\{б1\})=0{,}03$; $P(\{я2\})=0{,}56$, $P(\{б2\})=0{,}14$. 4. $P(A)=0{,}83$; $P(B)=0{,}3$; $P(AB)=0{,}27$; $P(\overline{A})=0{,}17$; $P(\overline{B})=0{,}7$, $P(\overline{AB})=0{,}73$, $P(\overline{A}B)=0{,}03$, $P(A\overline{B})=0{,}56$.

13. 1. $\Omega=\{(i_1,i_2,i_3): i_k\in\overline{1,3}, k\in\overline{1,3}\}$, де кожна координата вказує номер проміжка, з якого вибрано точку.

2. $S=\{\varnothing,\Omega,A,\overline{A}\}$ або $S=S^*$.

3. $P(\{E\})=\dfrac{1}{27}$, $E\in\Omega$. 4. $P(A)=\dfrac{2}{9}$.

14. 1. $\Omega=\{x_i : i\in\overline{1,365}\}$, $S=S^*$, $P(\{E\})=\dfrac{1}{365}$, $P(A)=\dfrac{53}{365}$.

2. $\Omega=\{2_1,\ldots,2_{3m},10_1,\ldots,10_m\}$, $P(A)=\dfrac{1}{4}$.

3. Ω складається з усіляких комбінацій з 52 карт по 3, $P(A)=\dfrac{12\cdot C_{40}^2+40\cdot C_{12}^2+C_{12}^3}{C_{52}^3}$.

4. Ω складається з усіляких перестановок 4-х томів, $P(A)=\dfrac{1}{4!}$.

5. Ω складається з усіляких розміщень з 5 карток по 3, $P(A)=\dfrac{1}{5}$.

6. Див. §1.5, задача 15.3.

7. Див. §1.5, задача 15.16.

8. Див. §1.5, задача 15.8.

9. Ω складається з усіляких розміщень з 6 карток по 4, $P(A)=\dfrac{1}{360}$.

10. Ω складається з усіляких розміщень з повтореннями з 10 цифр по 5, $P(A)=\dfrac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{10^5}$.

11. Див. §1.5, задача 15.11.

12. Ω складається з усіляких перестановок 6 кульок, $P(A)=\dfrac{2}{3}$.

13. Див. §1.5, задача 15.11.

14. $\Omega=\{(x,y): x\in\overline{1,6}, y\in\overline{1,6}\}$; 1) $P(A)=\dfrac{1}{6}$; 2) $P(\overline{A})=\dfrac{5}{6}$.

15. Див. §1.5, задача 15.19.

16. Див. §1.5, задача 15.20.

17. Див. §1.5, задача 15.5.

18. Див. §1.5, задача 15.4.

19. Див. §1.5, задача 15.21.

20. Див. §1.5, задача 15.22.

21. Див. §1.5, задача 15.23.

22. Див. §1.5, задача 15.29.

23. Див. §1.5, задача 15.24.

24. Див. §1.5, задача 15.25.

25. Див. §1.5, задача 15.2.
26. Див. §1.5, задача 15.14.
27. Див. §1.5, задача 15.28.
28. Див. §1.5, задача 15.15.
29. Див. §1.5, задача 15.10.
30. Див. §1.5, задача 15.26.
31. Див. §1.5, задача 15.27.
32. Ω складається з усіляких комбінацій з 10 цифр по 2; $P(A)=\frac{1}{45}$.
33. Див. §1.7, задача 9.
34. Ω складається з усіляких комбінацій з 100 карток по 10; $P(A)=\frac{1}{10}$.
35. Ω складається з усіляких прізвищ комбінацій з 12 студентів по 9; $P(A)=\frac{14}{55}$.

15*. 1.1) є півалгеброю; 2) не є алгеброю.
2. Перевірити властивості $1_s - 3_s$ для алгебри.

16*. 1. Скористатися задачею **15***. 2.2. Не є σ -алгеброю.

17*. 1. Перевірити визначальні властивості півалгебри.
2. Скористатися задачею **15*.**2.
3. $\mu(\sum\limits_{k=1}^{n}<\alpha_k;\beta_k>)=\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)$.
4. Не є $\sigma-$адитивною мірою.

18*. 1. $\mu^*(A)=m(A)$, коли $A\in H$.
2. Роль B відіграє A.
3 - 4. Перевірити умови $1_s - 3_s$.

19*. Скористатися задачею **18***.

2.2

1. Так – 1, 3, 4 – 6, 9 – 11; усі інші – ні.

2. 1) $F(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{2}, \text{коли } 0<x\le 1,\\ 1, \text{коли } x>1.\end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x\le 0,\\ \frac{1}{2}x^2, \text{коли } 0<x\le \sqrt{2},\\ 1, \text{коли } x>\sqrt{2}.\end{cases}$

3) Див. 2).

3. $a=1$, $b=0$.

4. $f(x)=0$, коли $x<0$ або $x>1$, $f(x)=1$, коли $x\in(0;1)$, $F'(x)$ існує, коли $x\notin\{0,1\}$.

5. 1. Графіки $F(x)$ та $f(x)$ побудувати за допомогою комп'ютерних програм.

2.1) абсолютно неперервний;

2) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\pi}$ і див. 1);

3) – 5) не є функцією розподілу;

6) дискретний розподіл на множині $\Omega = \{1\}$;

7) абсолютно неперервній;

8) не є функцією розподілу;

9) F є функцією розподілу, коли $b - 2a \geq \frac{1}{4}$, $a \geq 0$, $2a + b \leq 1$, причому абсолютно неперервною, коли $a = \frac{1}{16}$, $b = \frac{3}{8}$;

10) абсолютно неперервній;

11) не є функцією розподілу;

12) дискретний; 13) дискретний;

14) абсолютно неперервний; 15) не є функцією розподілу;

16) є функцією розподілу, коли $a \geq 0$, $a + b \geq 0$, $2a + b \leq 1$, причому абсолютно неперервною, коли $a = 1$, $b = 1$;

17) абсолютно неперервний; 18) не є функцією розподілу;

19) – 20) абсолютно неперервний;

21) є функцією розподілу, коли $a \geq 0$, $4a \leq 1$, причому абсолютно неперервною, коли $a = \frac{1}{4}$.

22) – 23) абсолютно неперервний;

24) є функцією розподілу, коли $a \geq 0$, $\frac{4a}{16} \leq 1$, причому абсолютно неперервною, коли $a = 4$;

25) див. 21);

26) є функцією розподілу, коли $2\pi k \leq a < b \leq 2\pi k + \frac{\pi}{2}$ для деякого $k \in Z$, причому абсолютно неперервною, коли $a = 2\pi k$, $b = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$;

27) є функцією розподілу, коли $\pi k \leq a < b \leq \pi k + \frac{\pi}{4}$ для деякого $k \in Z$, причому абсолютно неперервною, коли $a = \pi k$, $b = \pi k + \frac{\pi}{4}$;

28) дискретний; 29) – 30) абсолютно неперервний.

Якщо $G = (a;b) \cup (c;d)$, то $P(G) = P((a;b)) + P((c;d))$, причому $P((\alpha;\beta)) = F(\beta) - F(\alpha + 0)$.

Якщо $F = R^{-1} \setminus ((a;b) \cup (c;d)) = \overline{G}$, то $P(F) = 1 - P(G)$.

3. $f(x) = F'(x)$ майже скрізь на R^1.

6. 1. 1) є; 2) є; 3) є, коли $a=4$; 4) є, коли $a=e$; 5) є, коли $a=\frac{1}{2}$; 6) є, коли; $2\pi k \le a < b \le 2\pi k+\pi$ і $\cos a = 1+\cos b$; 7) є, коли $\pi k < a < b < \pi k + \frac{\pi}{2}$ і $\cos a = e\cdot \cos b$; 8) є, коли $a=\frac{1}{3}$; 9) є, коли $-\infty < a < b < +\infty$; 10) є, коли $a=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; 11) є; 12) не є; 13) є; 14) є, коли $a \ge 0$, $b \ge 0$ і $a+b=1$.

2. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Для обчислення $P(G_0)$ і $P(F_0)$ див. задачу **5**.2.

7. 1. $\Omega=\{0,1,2\}$. 2. $P(\{0\})=(1-p)^2$; $P(\{1\})=2p(1-p)$; $P(\{2\})=p^2$. 3. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли}\, x \le 0, \\ (1-p)^2, & \text{коли}\, 0 < x \le 1, \\ 1-p^2, & \text{коли}\, 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{коли}\, x > 2 \end{cases}$

8. 1. 1) $c=\frac{1}{3}$; 2) $c=\frac{1}{8}$; 3) $c=\frac{1}{4}$; 4) $c=\frac{1}{3}$; 5) $c=\frac{1}{6}$; 6) $c=\frac{1}{10}$; 7) $c=1$; 8) $c=\frac{1}{4}$; 9) $c=\frac{1}{6}$; 10) $c=\frac{1}{2}$.

2. Скористатися комп'ютерних програм.

3. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$; 4. $P((\alpha;\beta))=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$.

9. 1. 1) не є щільністю розподілу для будь-якого c. 2) $c=-3$; 3) $c=\frac{1}{2}$; 4) $c=3$; 5) $c=\frac{1}{2\pi}$; 6) $c=1$; 7) $c=-1$; 8) $c=\frac{3}{2}$; 9) $c=-\frac{1}{2}$; 10) $c=1$; 11) $c=\frac{3}{2}$; 12) $c=\frac{1}{2}$; 13) $c=\frac{1}{2}$; 14) $c=2$.

2. Скористатися комп'ютерних програм.

3. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$. 4. $P((\alpha;\beta))=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$.

10*. 1. Перевірити властивості міри.
2. – 7. Скористатися задачею **18*** §2.1

2.3

1. Так – 2, 3, 5, 8, 9, 10, 15 – 18; усі інші – ні.

2. $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ xy, \text{коли } 0\le x\le 1 \text{ і } 0\le y\le 1,\\ x, \text{ коли } 0\le x\le 1, \text{а } y>1,\\ y, \text{ коли } 0\le y\le 1, \text{а } x>1,\\ 1, \text{ коли } x>1 \text{ і } y>1.\end{cases}$

3. Є, перевірити характеристичні властивості.

4. 1. Так – 1), 2), 4), 6), 7); усі інші – ні. 2. Так – 1), 2), 4), 6). Для них $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$, а $P(\{(x,y): x^2+y^2\le 1\})=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy$.

5. 1. 1) $a=4$; 2) $a\ge 0$, $b\ge 0$, $a+b=\dfrac{2}{3}$; 3) $|a|=\dfrac{1}{\pi}$; 4) $a=1$; 5) $ab=1$, $a>0$, $b>0$; 6) $a=\dfrac{2}{\pi-2}$; 7) $a=4$; 8) при будь-якому a $f(x)$ не є щільністю розподілу ймовірностей; 9) $a=\dfrac{1}{\pi}$; 10) $a=\dfrac{1}{2}$; 11) $a=\dfrac{1}{\pi}$; 12) $a=\dfrac{1}{2}$.

2. 1) $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x} du\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dv$;

2) $P([a;b)\times[c;d))=\iint\limits_{[a;b)\times[c;d)} f(x,y)dxdy$. Скористатися комп'ютерних програм.

6. 1. 1) $F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2)$;

2) $F(b_1+0,b_2+0)-F(b_1+0,a_2)-F(a_1,b_2+0)+F(a_1,a_2)$;

3) – 9) Скористатися 1) – 2) і тим, що $P(\{(a_1,a_2)\})=$ $=F(a_1+0,a_2+0)-F(a_1+0,a_2)-F(a_1,a_2+0)+F(a_1,a_2)$

2. Взагалі кажучи, ні.

7*. Див. задачу **10*** §2.2 і задачу **17*** §2.1.

8*. Скористатися тим, що

$$\Delta_{a_1b_1}\Delta_{a_2b_2}F(x,y)=F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2),$$

а також задачею **10** §2.2.

9*. Використати задачу **18*** §2.1.

2.4

1. Так – 1, 3, 5, інші – ні.

2. $\dfrac{2l}{a\pi}$. **3.** $1-\dfrac{r}{a}$. **4.** $\dfrac{1}{2}$. **5.** $\dfrac{1}{2}$. **6.** 1) $\dfrac{111}{400}$; 2) $1-(\dfrac{17}{20})^3$. **7.** $\dfrac{49}{121}$.

8. $\frac{1}{8}$. **9.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$. **10.** 1) $0{,}4-0{,}09\ln 9$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\ln 2$.

11. 1) a^2; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$, коли $0<a\le 1$; $1-\int\limits_{\sqrt{a^2-1}}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})dx$, коли $1<a\le\sqrt{2}$; 1, коли $a>1$. 3) $\frac{1}{3}$.

12. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 4$. **13.** 1) $1-(1-k)^2$; 2) $\frac{1}{4}$. **14.** $1-(1-\frac{t}{T})^2$. **15.** $\frac{5}{9}$.

16. 1) а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; 2) а) $1-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; 3) 0.

17. 1. 1) $\frac{1}{8}$; 2) 0; 3) 0. 2. $\Omega=\{(x;y):0<x<y<2\pi R\}$, S складається з вимірних за лебегом підмножин простору Ω, $P(B)=\frac{m(B)}{m(\Omega)}$, $B\in S$. 3) 1) Ω і S залежать від R; 2) ймовірність не залежить від R.

18. 1) $\frac{4}{25}$; 2) $\frac{3}{5}$. **19.** $1-\frac{\pi}{4}$. **20.** 1) $0{,}01849\pi$; 2) $\frac{160+25\pi}{1000\pi}$.

21. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 0. **22.** $\frac{1}{e}$. **23.** $\frac{2arctg\frac{1}{2}}{\pi}$. **24.** $\frac{\alpha}{R}$. **25.** $\frac{1}{4}$.

26. $(1-(1-\frac{\tau}{T})^2)$. **27.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{7}{12}$.

28. 1. Ω складається з точок великого прямокутника. 2. S – сукупність вимірних підмножин Ω. $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$ $\forall A\in S$. 3. $P(A)=\frac{d_1+d_2+d_3-2d}{d_1+d_2+d_3}$, $P(B)=\frac{2d}{d_1+d_2+d_3}$, $P(C)=1-\frac{3d}{d_1+d_2+d_3}-$ $-\frac{(d_1+d_3-d)d}{(d_1+d_2+d_3)h}$, коли $d\le d_1<d_2<d_3$.

2.5

1. Так – 7, 9; усі інші – ні.

2. $P(AB)=1-P(\overline{AB})$, а $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

3. $P(A+B)=1-P(\overline{A+B})$, а $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

4. 1) 0,85; 2) 0,05; 3) 1.

5. 1. $\Omega=\{(x,y,z):x,y \text{ і } z\in\{в,п\}\}$. 2. $A_1=\{(в,y,z):y \text{ і } z\in\{в,п\}\}$, $A_2=\{(x,в,z):x \text{ і } z\in\{в,п\}\}$, $A_3=\{(x,y,в):x \text{ і } y\in\{в,п\}\}$. 3. $\{E\}$ – подія,

$E\in\Omega$. 4. $S=S^*$. 5. $P(\{(в,в,в)\})=p_1p_2p_3$, $P(\{(в,в,n)\})=p_1p_2(1-p_3)$ і т.д. 6. 1) $P(B_1)=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$; 2) $p_1p_2p_3+(1-p_1)p_2p_3+$ $+p_1(1-p_2)p_3+p_1p_2(1-p_3)$; 3) $p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+$ $+(1-p_1)(1-p_2)p_3$.

6. 1. $\Omega=\{(c,n),(\bar{c},n),(c,\bar{n}),(\bar{c},\bar{n})\}$.

2. $A=\{(c,n),(c,\bar{n})\}$, $B=\{(c,n),(\bar{c},n)\}$.

3. $P(\{(c,n)\})=p_1p_2$, $P(\{(\bar{c},n)\})=(1-p_1)p_2$,

$P(\{(c,\bar{n})\})=p_1(1-p_2)$, $P(\{(\bar{c},\bar{n})\})=(1-p_1)(1-p_2)$.

4. 1) $P(C)=p_1p_2$; 2) $P(D)=1-p_1$; 3) $P(H)=(1-p_1)(1-p_2)$

7. 1. $\Omega=\{(ж,в),(ж,н),(ч,в),(ч,н)\}$.

2. 1) $A=\{(ж,в),(ж,н)\}$; 2) $B=\{(ж,в),(ч,в)\}$.

3. Якщо $P(A)=p_1=0{,}4$, $P(B)=p_2=0{,}2$, то $P(\{ж,в\})=p_1p_2$, $P(\{ж,н\})=p_1(1-p_2)$, $P(\{ч,в\})=(1-p_1)p_2$, $P(\{ч,н\})=(1-p_1)(1-p_2)$.

4. 1) $P(C)=p_1p_2$; 2) $P(D)=(1-p_1)(1-p_2)$;

3) $P(H)=1-(1-p_1)(1-p_2)$.

8. 1. Ω складається з усіляких комбінацій з 16 монет по 5.

2. Доцільно вважати $P(\{E\})=\dfrac{1}{C_{16}^5}$, $E\in\Omega$.

3. 1) A складається із комбінацій , що дають суму:

$1\cdot 50+4\cdot 10$ – таких $2\cdot C_{10}^4$ штук;

$3\cdot 25+2\cdot 10$ – таких $C_4^3\cdot C_{10}^2$ штук;

$2\cdot 25+3\cdot 10$ – таких $C_4^2\cdot C_{10}^3$ штук;

$1\cdot 25+4\cdot 10$ – таких $4\cdot C_{10}^4$ штук;

$5\cdot 10$ – таких C_{10}^5 штук.

2) $B=\varnothing$; 3) C складається із комбінацій , що містять непарну кількість монет по 25 копійок. Кількість таких комбінацій $4\cdot C_{12}^4+C_4^3\cdot C_{12}^2$.

4. 1) $P(A)=\dfrac{2\cdot C_{10}^4+C_4^3\cdot C_{10}^2+C_4^2\cdot C_{10}^3+4\cdot C_{10}^4+C_{10}^5}{C_{16}^5}$; 2) $P(B)=0$;

3) $P(C)=\dfrac{4\cdot C_{12}^4+C_4^3\cdot C_{12}^2}{C_{16}^5}$; 4) AC складається з $C_4^3\cdot C_{10}^2$ комбінацій , що дають суму ($3\cdot 25+2\cdot 10$) та з $4\cdot C_{10}^4$ комбінацій , що дають суму ($1\cdot 25+4\cdot 10$); $P(AC)=\dfrac{C_4^3\cdot C_{10}^2+4\cdot C_{10}^4}{C_{16}^5}$;

5) $P(A+C)=P(A)+P(C)-P(AC)$.

9. 1. $\Omega=\{(\partial,г),(\partial,н),(x,г),(x,н)\}$. Далі див. задачу **7**, тільки $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}3$.

10. 1. $\Omega=\{(x_1,\ldots,x_n):x_i\in\{0,1\}\}$, де $x_i=1$ – влучення, а $x_i=0$ – промах при i-му пострілі.

2. $P(\{(x_1,\ldots,x_n)\})=p^s(1-p)^{n-s}$, $s\in\overline{0,n}$ – кількість влучень при n пострілах.

3. 1) $A_i=\{(x_1,\ldots,x_n):x_i=1\}$, $i\in\overline{1,n}$; 2) $B=\{(0,\ldots,0)\}$; 3) $C=\overline{B}$.

4. 1) $P(A_i)=p$; 2) $P(B)=(1-p)^n$; 3) $P(C)=1-(1-p)^n$.

5. $n\geq 2$.

11. $\dfrac{11}{26}$. **12.** $1-(1-p)^2$.

13. A – виграє той, хто починає гру, а B – виграє інший гравець;

1. $P(A)=\dfrac{1}{2-p}$; $P(B)=\dfrac{1-p}{2-p}$.

2. $P(A)>P(B)$.

14. $\dfrac{2}{5}$.

2.6

1. Так – 3, 5, 6, 7, 9, 10; усі інші – ні.
2. Для несумісних подій A і B $P(AB)=0$.

3. $P(\sum\limits_k A_k)=1-P(\overline{\sum\limits_k A_k})=1-P(\prod\limits_k \overline{A}_k)$

4. $\dfrac{2P_2}{3-2P_2}$.

5. 1. $\Omega=\{(\partial,ж),(\partial,ч),(н,ж),(н,ч)\}$. 2. $S=S^*$. 3. Так. 4. $\dfrac{2}{3}\dfrac{n}{N}$.

6. Див. приклад 6.2.

7. 1. 1) $P(A)=\dfrac{1}{n}$; 2) $P(B)=\dfrac{1}{n}$; 3) $P(AB)=\begin{cases}0, & \text{коли}\, i=j,\\ \dfrac{1}{n(n-1)}, & \text{коли}\, i\neq j\end{cases}$

4) $P(A/B)=\begin{cases}0, & \text{коли}\, i=j,\\ \dfrac{1}{n-1}, & \text{коли}\, i\neq j;\end{cases}$ 5) $P(A\overline{B})=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{коли}\, i=j,\\ \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n(n-1)}, & \text{коли}\, i\neq j;\end{cases}$

6) $P(A/\overline{B}) = \begin{cases} 1, & \text{коли}\, i = j, \\ 1 - \dfrac{1}{n-1}, & \text{коли}\, i \neq j; \end{cases}$

7) $P(\overline{AB}) = \begin{cases} 1, & \text{коли}\, i = j, \\ 1 - \dfrac{1}{n(n-1)}, & \text{коли}\, i \neq j; \end{cases}$

8) $P(\overline{A}B) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{коли}\, i = j, \\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n(n-1)}, & \text{коли}\, i \neq j. \end{cases}$

2. A і B залежні події.

8. 1. $\Omega = \{(x,\partial),(x,x),(\partial,x),(\partial,\partial)\}$

2. 1) а) $P(A) = \dfrac{3}{4}$; б) $P(B) = \dfrac{3}{4}$;

2) а) $P(C/A) = \dfrac{1}{3}$; б) $P(A/) = \dfrac{2}{3}$.

9. 1. $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i$. 2. $\dfrac{p_i q_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k}$.

10. 1. Так. 2. Так. 3. Ні. 4. 1) Ні; 2) Так; 3) Ні.

11. 1. $P(\{E\}) = \dfrac{1}{9}$, $E \in \Omega$.

2. 1) $P(A_k) = \dfrac{1}{3}$, $k \in \overline{1,3}$; 2) $P(A_i A_j) = \dfrac{1}{9}$, $i \neq j$; 3) $P(A_1 A_2 A_3) = \dfrac{1}{9}$.

3. 1) є; 2) не є.

4. B_k утворюється з A_k, коли у кожній трійці поміняти місцями літери a і b, а у трійці (a,a,a) замінити кожне a на b. Аналогічний зв'язок C_k з A_k.

5. 1) $P(B_k) = P(A_k) = P(C_k) = \dfrac{1}{3}$, $k \in \overline{1,3}$;

2) $P(A_i B_j) = P(A_i C_j) = P(B_i C_j) = \dfrac{1}{9}$, коли $i \neq j$.

6. Знайти ймовірність добутку події.

7. $C_3 \cdot A_1 A_2 = \varnothing$.

8. Можна.

9*. Міркування аналогічні, тільки простір Ω інший.

12. Скористатися відповідними означеннями.

13. Скористатися відповідними означеннями.

14. Скористатися відповідними означеннями.

15. 1. A і B – незалежні події.
2. A і B не обов’язково незалежні.
16. Не обов’язково.

17. $\frac{1}{2}$.

18*. 1. Скористатися тим, що серед n дітей буде k – хлопчиків з ймовірністю $P(A_k / H_n) = C_n^k (\frac{1}{2})^n$.

2. $\frac{p}{2-p}$.

19. 1. $\Omega = \{(x, y) : x \in \overline{1,6}, y \in \overline{1,6}\}$, $P(\{E\}) = \frac{1}{36}$, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{2}$.
2. Випливає з означення подій A, B і C.
3. Не є.
20. 1. 1) Ні; 2) так. 2. 1) Так; 2) ні.
3. Можна, якщо, наприклад, $P(\{E_1\}) = 1$, $P(\{E_i\}) = 0$, $i > 1$.

2.7

1. Так – 3, 7; усі інші – ні.
2. Скористатися відповідними означеннями.
3. 1) $H_1 = \{Г\}$, $H_2 = \{Ц\}$ або $H_1 = \Omega$; 2) усілякі підмножини простору Ω, що не перетинаються і в сумі дають Ω.
4. 1) 0,944; 2) на третьому.
5. 1. 0,136. 2. До фізичних осіб.
6. 1. 1) 0,45; 2) 0,55. 2. 1) $\frac{7}{15}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{4}{45}$.
7. 1. 0,03. 2. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{8}{15}$.
8. 1. 1) 0,002; 2) 0,998. 2. $\frac{4}{20}$; $\frac{6}{20}$; $\frac{5}{20}$; $\frac{5}{20}$.
3. $\frac{3996}{9980}$; $\frac{2994}{9980}$; $\frac{1985}{9980}$; $\frac{995}{9980}$.
9. 1. 1) $\frac{739}{820}$; 2) $\frac{81}{820}$. 2. $\frac{20}{27}$, $\frac{2}{27}$, $\frac{5}{27}$.
10. $\frac{20}{29}$. **11.** 1. $\frac{7}{40}$. 2. $\frac{3}{20}$. **12.** 1. $\frac{2}{15}$. 2. $\frac{5}{8}$.
13. 1. $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{0,1\}, i \in \overline{1,3}\}$.
2. $A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_k = 1\}$, $k \in \overline{1,3}$.

3. $P(\{(x_1, x_2, x_3)\}) = a_1 a_2 a_3$, де $a_i = p_i$, коли $x_i = 1$, і $a_i = (1 - p_i)$, коли $x_i = 0$, $i \in \overline{1,3}$.

4. $P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$.

5. $p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3$.

6. $P(B/A_1) = (1 - p_2)(1 - p_3)$, $P(B/A_2) = (1 - p_1)(1 - p_3)$, $P(B/A_3) = (1 - p_1)(1 - p_2)$.

7. $P(A_i / A) = \dfrac{p_i}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)}$.

8. Ні.

14. 1. $\Omega = \{(б_1, (б_1, б_2)), (б_2, (б_1, б_2)), (б_1, (б_1, ч_2)), (ч_2, (б_1, ч_2)), (б_2, (ч_1, б_2)), (ч_1, (ч_1, б_2)), (ч_1, (ч_1, ч_2)), (ч_2, (ч_1, ч_2))\}$.

2. $P(\{(x_i, (x_1, x_2))\}) = \dfrac{1}{2} a_1 a_2$, де $a_i = p_i$, коли $x_i = б$, і $a_i = (1 - p_i)$, коли $x_i = ч$.

3. $P(A) = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$. 4. Так, $P(A_k) = \dfrac{1}{2}$, $k \in \overline{1,2}$.

5. $P(A/A_k) = p_k$, $k \in \overline{1,2}$. 6. $P(A_k / A) = \dfrac{p_k}{p_1 + p_2}$, $k \in \overline{1,2}$.

15. 1. $\Omega = \{б_1, ч_1, б_2, ч_2\}$.

2. $P(\{б_1\}) = \dfrac{3}{20}$; $P(\{ч_1\}) = \dfrac{7}{20}$; $P(\{б_2\}) = \dfrac{7}{20}$; $P(\{ч_2\}) = \dfrac{3}{20}$.

3. $A = \{б_1, б_2\}$, $P(A) = \dfrac{1}{2}$. 4. Так, $P(A_k) = \dfrac{1}{2}$, $k \in \overline{1,2}$.

5. $P(A/A_1) = \dfrac{3}{10}$; $P(A/A_2) = \dfrac{7}{10}$. 6. $P(A_1 / A) = \dfrac{3}{10}$; $P(A_2 / A) = \dfrac{7}{10}$.

16. $\dfrac{3}{7}$.

17. 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$, $i \in \overline{1,2}$; 4) $\dfrac{n - 15}{n}$; 5) $\dfrac{n - 15}{n}$.

18. $\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} p_i$.

19. 1. $\Omega = \{б_1, c_1, б_2, c_2\}$. 2. $\dfrac{n}{n+1}$. 3. $\dfrac{(m+1)b_2}{N}$, де N – загальна кількість автомобілів. 4. $\dfrac{m}{m+1}$.

2.8

1. Так – 1, 2, 4, 5, 8, а інші – ні.

2. $n \geq \dfrac{\lg 2}{2-\lg 99}$. **3.** $\dfrac{1}{5^{10}}\sum\limits_{k=7}^{10} C_{10}^k 4^{-k}$.

4. $C_{500}^k p^k (1-p)^{500-k} \approx \dfrac{a_n^k}{k!} e^{-a_n}$, де $a_n = \dfrac{500}{365}$, $k \in \overline{0,6}$.

5. 1. 1) $(1-0{,}015)^{100} \approx e^{-1{,}5}$;

2) $(1-0{,}015)^{100} + 1{,}5(1-0{,}015)^{99} \approx 2{,}5e^{-1{,}5}$

2. n визначається з нерівності $(1+n\cdot 0{,}015) \leq 0{,}2e^{0{,}015n}$.

3. $0 \leq p \leq 1 - \sqrt[100]{0{,}9}$.

6. $C_{10}^5 (\dfrac{28}{128})^5$.

7. 1) $\varPhi(\dfrac{105}{\sqrt{0{,}85\cdot 315}}) - \varPhi(\dfrac{80}{\sqrt{0{,}85\cdot 315}}) \approx$

2) $\varPhi(\dfrac{440}{\sqrt{0{,}85\cdot 315}}) - \varPhi(\dfrac{405}{\sqrt{0{,}85\cdot 315}}) \approx$

Скористатися комп'ютерними програмами.

8. $n > \dfrac{(a(1-p)+400) + \sqrt{a(1-p)(a(1-p)+800)}}{2p}$, де $p = 0{,}85$, $a = 1{,}89^2$.

9. 0,8882. **10.** 0,9628. **11.** 0,6826.

12. $P(B_{10,i}) = C_{10}^i (0{,}1)^i (0{,}9)^{10-i}$, $i \in \overline{0,10}$.

13. 1. $\dfrac{1}{14}$. 2. $\dfrac{1}{14}$. **14.** 1) 0,243; 2) 0,972; 3) 0,271.

15. $P(B_{100,i}) = C_{100}^i (0{,}0005)^i (0{,}9995)^{100-i}$, $i \in \overline{0,100}$.

16. $C_{25}^5 (0{,}2)^5 (0{,}8)^{20}$. **17.** 1) 0,8944; 2) 80. **18.** 1) 0,0004; 2) 10.

19. $\dfrac{40}{161} \leq p \leq \dfrac{41}{161}$. **20.** $499 \leq n \leq 509$.

21. 1. 30 і 28. 2. 1) $\dfrac{29}{45}$; 2) 58. **22.** $C_8^2 (0{,}6)^2 (0{,}4)^6$.

23. Ймовірність позитивної оцінки $\tilde{p} = 0{,}13$.

24. $n \geq \dfrac{2-\lg 5}{2-\lg 75}$. **25.** 0,9974. **26.** $\dfrac{4^4}{4!}e^{-4}$.

27*. 1. Результатом експерименту $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ є пара (x, y), $x \in \varepsilon_1$, $y \in \varepsilon_2$.

2. Перевірити властивості півалгебри (задача **15*** §2.1).

3. Не обов'язково. Розглянути $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0,1\}$.

4. Скористатися відповідними означеннями.

5.6. Див. задачу **15*** §2.1.

7. $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$, $S=S^*$, а $P(A)=\sum\limits_{(x_i,y_k)\in A} P_1(\{x_i\})P_2(\{y_k\})$.

28*. ε_1 – вибір навмання одного елемента з n даних; ε_2 – вибір навмання одного елемента з $(n-1)$ даних; ...; ε_{n-1} – вибір навмання одного елемента з 2-х даних; ε_n – вибір навмання одного елемента з одного даного; $P_k(\{x_k\})=\dfrac{1}{n-k+1}$; $A=\{(x_1,\ldots,x_n)\}=A_1\times\ldots\times A_n$, де $A_k=\{x_k\}$; $P_n=n!$

29*. ε_k, $k\in\overline{1,r}$, такі самі як у **28***. Теж саме і для подій A_k, $A=A_1\times\ldots\times A_r$, $P_k(A_k)$ і $P(A)$. $A_n^r=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$.

30*. ε_k – вибір навмання одного елемента з n даних, $k\in\overline{1,r}$; $A_k=\{x_k\}$, причому x_k для різних k можуть бути однаковими; $P_k(A_k)=\dfrac{1}{n}$, $A=A_1\times\ldots\times A_r$; $P(A)=\prod\limits_{k=1}^{r}P_k(A_k)=\dfrac{1}{n^r}\Rightarrow \overline{A}_n^r=n^r$.

31*. ε_1 – вибір навмання одного елемента з n даних; A_1 – цей елемент – один з r мічених; $P(A_1)=\dfrac{r}{n}$.

ε_2 – вибір навмання одного елемента з $(n-1)$ даних; A_2 – цей елемент – один з $(r-1)$ мічених; $P(A_2)=\dfrac{r-1}{n-1}$ ...

ε_r – вибір навмання одного елемента з $(n-r+1)$ даних; A_r – цей елемент – один з є міченим; $P(A_r)=\dfrac{1}{n-r+1}$.

$$A=A_1\times\ldots\times A_r,\quad P(A)=\prod_{k=1}^{r}P(A_k)=\frac{r!}{n(n-1)!\ldots(n-r+1)}=\frac{r!(n-r)!}{n!}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

32*. Див. задачі **31*** і **29***.

2.9

1. Так – 2, 3, 7, 8, 9, 11, 12.1), 13 14 – 17, 20.1); усі інші – ні.

2. 1) $\Omega=\{1\}$, $P(\{1\})=1$;

2) $\Omega=\{1,2\}$, $P(\{1\})=P(\{2\})=\dfrac{1}{2}$;

3) $\Omega = Q = \{x_1, x_2, \dots\}$ – множина раціональних чисел; $P(\{x_k\}) = p_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$;

4) див. 3).

3. 1. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \sim \{Г, ЦГ, \dots, \underbrace{Ц \dots Ц}_{n-1} Г, \dots\}$.

2. $P(\{n\}) = (1-p)^{n-1} p$.

3. Див. вправу 5 табл. 9.6.

4. Скористатися комп'ютерними програмами.

5. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1}, & \text{коли } n < x \le n+1 \end{cases}$

4. 1.
$\Omega = \{b_1b_2b_3, b_1b_2n_3, b_1n_2b_3, n_1b_2b_3, b_1n_2n_3, n_1b_2n_3, n_1n_2b_3, n_1n_2n_3\} \sim \overline{1,8}$.

2. $P(\{1\}) = P(\{b_1b_2b_3\}) = p_1p_2p_3$,
$P(\{2\}) = P(\{b_1b_2n_3\}) = p_1p_2(1-p_3)$;
$P(\{3\}) = P(\{b_1n_2b_3\}) = p_1(1-p_2)p_3$;
$P(\{4\}) = P(\{n_1b_2b_3\}) = (1-p_1)p_2p_3$;
$P(\{5\}) = P(\{b_1n_2n_3\}) = p_1(1-p_2)(1-p_3)$;
$P(\{6\}) = P(\{n_1b_2n_3\}) = (1-p_1)p_2(1-p_3)$;
$P(\{7\}) = P(\{n_1n_2b_3\}) = (1-p_1)(1-p_2)p_3$;
$P(\{8\}) = P(\{n_1n_2n_3\}) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$.

3. – 5. Скористатися комп'ютерними програмами.

6. 1) p_1; 2) p_2p_3; 3) $p_1p_2 + p_3(p_1 + p_2 - 2p_1p_2)$.

5. 1. $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3 : x_i \in \{1, 2, 3\}, i \in \overline{1,3}\} \sim \overline{1,27}$.

2. – 3. $P(\{i\}) = \frac{1}{27}$, $i \in \overline{1,27}$.

4. Скористатися комп'ютерними програмами.

5. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ \frac{i}{27}, & \text{коли } i < x \le i+1, i \in \overline{1,26}, \\ 1, & \text{коли } x > 27 \end{cases}$

6. 1) $\frac{6}{27}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{18}{27}$; 4) $\frac{21}{27}$; 5) $\frac{2}{9}$.

6. 1. $\Omega = \overline{0,5}$. 2. $P(\{i\}) = C_5^i (\frac{1}{2})^5$, $i \in \overline{0,5}$.

3. і 4. Скористатися комп'ютерними програмами.

$$5.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ (\frac{1}{2})^5, & \text{коли } 0<x\le 1,\\ 6\cdot(\frac{1}{2})^5, & \text{коли } 1<x\le 2,\\ 16\cdot(\frac{1}{2})^5, & \text{коли } 2<x\le 3,\\ 26\cdot(\frac{1}{2})^5, & \text{коли } 3<x\le 4,\\ 31\cdot(\frac{1}{2})^5, & \text{коли } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{коли } x>5.\end{cases}$$

6. 1) $1-(\frac{1}{2})^5$; 2) $6\cdot(\frac{1}{2})^5$; 3) $20(\frac{1}{2})^5$.

7. 2 або 3.

7. 1. $\Omega=\overline{0,5}$.

2. $P(\{0\})=\frac{C_7^5}{C_{12}^5}$; $P(\{1\})=\frac{5C_7^4}{C_{12}^5}$; $P(\{2\})=\frac{C_5^2\cdot C_7^3}{C_{12}^5}$; $P(\{3\})=\frac{C_5^3\cdot C_7^2}{C_{12}^5}$; $P(\{4\})=\frac{5\cdot 7}{C_{12}^5}$; $P(\{5\})=\frac{1}{C_{12}^5}$.

3. і 4. Скористатися комп’ютерними програмами.

5. 1) $\frac{257}{264}$; 2) $\frac{49}{198}$; 3) $\frac{70}{99}$.

8. 1. Функції дискретного розподілу ймовірностей – це 2), 5), 6) і 9).

2. $P(\{x_k\})=F(x_k+0)-F(x_k)$ і скористатися комп’ютерними програмами.

3. Скористатися КЗМ.

9. а) так; 1) і 2) – скористатися комп’ютерними програмами; 3) $P(A)=0{,}6$.

б) так; 1) і 2) – скористатися комп’ютерними програмами; 3) $P(A)=0{,}47$.

в) ні.

10. а) ні; б) так; 1) і 2) – скористатися комп’ютерними програмами; 3) $P(A)=0{,}45$.

11. а) ні; б) так; 1) і 2) – скористатися комп’ютерними програмами; 3) $P(A)=0{,}8$.

12. 1.

$\Omega=\{(k1,k1,k1),(k2,k2,k2),(k2,k1,k1,k1),(k1,k2,k1,k1),$
$(k1,k1,k2,k1),(k2,k2,k1,k2),(k2,k1,k2,k2),(k1,k2,k2,k2),(k2,k2,k1,k1,k1),$

$(k2,k1,k2,k1,k1),(k2,k1,k1,k2,k1),(k1,k2,k1,k2,k1),(k1,k1,k2,k2,k1),$
$(k1,k2,k2,k1,k1),(k1,k1,k2,k2,k2),(k1,k2,k1,k2,k2),(k1,k2,k2,k1,k2),$
$(k2,k1,k2,k1,k2),(k2,k2,k1,k1,k2),(k2,k1,k1,k2,k2)\}$.

2. $P(E)=p^3$, коли E містить 3 координати і всі вони $k1$; $P(E)=(1-p)^3$, коли E містить 3 координати і всі вони $k2$; $P(E)=p^3(1-p)$, коли E містить 4 координати, 3 з яких $k1$; $P(E)=p(1-p)^3$, коли E містить 4 координати, 3 з яких $k2$; $P(E)=p^3(1-p)^2$, коли E містить 5 координат, 3 з яких $k1$; $P(E)=p^2(1-p)^3$, коли E містить 5 координат, 3 з яких $k2$.

3. Скористатися комп'ютерними програмами.

4. A – перемога команди $k1$; 1) $\dfrac{P(A)}{P(\overline{A})}\approx 2{,}15:1$.

2) а) A_1 – у першій зустрічі перемогла $k1$;
$$\frac{P(A/A_1)}{P(\overline{A}/A_1)}=\frac{p^2(6-8p+3p^2)}{1-p^2(6-8p+3p^2)}\Big|\,p=0{,}6;$$

б) A_2 – у першій зустрічі перемогла $k2$;
$$\frac{P(A/A_2)}{P(\overline{A}/A_2)}=\frac{p^3(2-p)}{1-p^3(2-p)}\Big|\,p=0{,}6;$$

3) а) $A_{k1,k2}$ – у першій зустрічі перемогла $k1$, а потім $k2$;
$$\frac{P(A/A_{k1,k2})}{P(\overline{A}/A_{k1,k2})}=\frac{p^2(3-2p)}{1-p^2(3-2p)}\Big|\,p=0{,}6;$$

б) $A_{k2,k1}$ – у першій зустрічі перемогла $k2$, а потім $k1$; результат такий, як і у а);

в) $A_{k1,k1}$ – двічі перемогла $k1$;
$$\frac{P(A/A_{k1,k1})}{P(\overline{A}/A_{k1,k1})}=\frac{p(p^2-3p+3)}{1-p(p^2-3p+3)}\Big|\,p=0{,}6;$$

г) $A_{k2,k2}$ – двічі перемогла $k2$; $\dfrac{P(A/A_{k2,k2})}{P(\overline{A}/A_{k2,k2})}=\dfrac{p^3}{1-p^3}$.

4) B – зіграно 5 ігор; $\dfrac{P(A/B)}{P(\overline{A}/B)}=\dfrac{p}{1-p}$.

13. 1.
$$\Omega=\{в_1, n_1в_2, n_1n_2в_3, n_1n_2n_3в_1, n_1n_2n_3n_1в_2, n_1n_2n_3n_1n_2в_3, n_1n_2n_3n_1n_2n_3в_1,$$
$$n_1n_2n_3n_1n_2n_3n_1в_2, n_1n_2n_3n_1n_2n_3n_1n_2в_3, n_1n_2n_3n_1n_2n_3n_1n_2n_3\}\sim\overline{1,10}.$$

2. $P(\{1\}) = p_1$; $P(\{2\}) = (1-p_1)p_2$; $P(\{3\}) = (1-p_1)(1-p_2)p_3$; $P(\{4\}) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_1$; $P(\{5\}) = (1-p_1)^2(1-p_2)(1-p_3)p_2$; $P(\{6\}) = (1-p_1)^2(1-p_2)^2(1-p_3)p_3$; $P(\{7\}) = (1-p_1)^2(1-p_2)^2(1-p_3)^2 p_1$; $P(\{8\}) = (1-p_1)^3(1-p_2)^2(1-p_3)^2 p_2$; $P(\{9\}) = (1-p_1)^3(1-p_2)^3(1-p_3)^2 p_3$; $P(\{10\}) = (1-p_1)^3(1-p_2)^3(1-p_3)^3$.

3. Скористатися комп'ютерними програмами.

4. 1) $A_{i,j}$ – влучення в ціль i-го стрільця при j-му пострілі; $P(A_{1,1}) = p_1$; $P(A_{1,2}) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_1$; $P(A_{1,3}) = (1-p_1)^2(1-p_2)^2(1-p_3)^2 p_1$; $P(A_{2,1}) = (1-p_1)p_2$; $P(A_{2,2}) = (1-p_1)^2(1-p_2)(1-p_3)p_2$; $P(A_{3,1}) = (1-p_1)(1-p_2)p_3$; $P(A_{3,2}) = (1-p_1)^2(1-p_2)^2(1-p_3)p_3$;
$P(A_{3,3}) = (1-p_1)^3(1-p_2)^3(1-p_3)^2 p_3$.

2) $P(A_1) = p_1 + (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_1 + (1-p_1)^2(1-p_2)^2(1-p_3)^2 p_1$. Аналогічно $P(A_2)$ і $P(A_3)$.

14. 1. скористатися методом: 1) від супротивного; 2) математичної індукції.

2. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} p_0(1-p_0)^k, & \text{коли } x > 0. \end{cases}$$

15. 1. Довести, що $P(m) \ge 0$ і $\sum\limits_{m=0}^{\infty} P(m) = 1$.

2. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ e^{-\lambda} \sum\limits_{k<x} \dfrac{\lambda^k}{k!}, & \text{коли } x > 0. \end{cases}$$

16. Скористатися тим, що $C_{x+y}^k = \sum\limits_{m=0}^{k} C_x^{k-m} C_y^m$, а $C_n^m = 0$, коли $m > n$.

17. 1. 1) Для кожного x існують $x_k < x$, а тому $F(x) = \sum\limits_{xk<x} p_k > 0$.

2) Скористатися означенням границі.

3) Скористатися означенням зростаючої функції.

4) Скористатися означенням лівої і правої границі.

2. Довести, що $F(x_0+0) - F(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \notin Q, \\ P(\{x_0\}), & \text{коли } x \in Q. \end{cases}$

3. Не існує жодного відрізка $[a,b]$, $a<b$, на якому $F(x)$ була б сталою.

2.10

1. Так – 1, 2, 8; усі інші – ні.

2. 1) $F(x;y)=\begin{cases}0, \text{якщо } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ 1, \text{якщо } x>0 \text{ і } y>0.\end{cases}$

2) $F(x;y)=\begin{cases}0, \quad \text{якщо } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ \frac{1}{2}, \text{якщо} (0<x\le 1 \text{ і } y>0) \text{ або } (0<y\le 1 \text{ і } x>0),\\ 1, \quad \text{якщо } x>1 \text{ і } y>1.\end{cases}$

3. 1. $\Omega=\{((n,n),(n,n)),((n,n),(n,в)),((n,n),(в,n)),((n,n),(в,в)),$
$((n,в),(n,n)),((n,в),(n,в)),((n,в),(в,n)),((n,в),(в,в)),((в,n),(n,n)),$
$((в,n),(n,в)),((в,n),(в,n)),((в,n),(в,в)),((в,в),(n,n)),((в,в),(n,в)),$
$((в,в),(в,n)),((в,в),(в,в))\}\sim\{(x_i,y_j):x_i\in\overline{1,4}, y_i\in\overline{1,4}\}$, де $1\leftrightarrow(n,n)$,
$2\leftrightarrow(n,в)$, $3\leftrightarrow(в,n)$, $4\leftrightarrow(в,в)$.

2. $P(1,1)=(1-p_1)^2(1-p_2)^2$; $P(1,2)=(1-p_1)^2(1-p_2)p_2$;
$P(1,3)=(1-p_1)p_1(1-p_2)^2$; $P(1,4)=(1-p_1)p_1(1-p_2)p_2$;
$P(2,1)=(1-p_1)^2 p_2(1-p_2)$; $P(2,2)=(1-p_1)^2 p_2{}^2$;
$P(2,3)=(1-p_1)p_2p_1(1-p_2)$; $P(2,4)=(1-p_1)p_1p_2^2$;
$P(3,1)=p_1(1-p_1)(1-p_2)^2$; $P(3,2)=p_1(1-p_2)(1-p_1)p_2$;
$P(3,3)=p_1^2(1-p_2)^2$; $P(3,4)=p_1^2(1-p_2)p_2$; $P(4,1)=p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)$;
$P(4,2)=p_1p_2(1-p_1)p_2$; $P(4,3)=p_1^2p_2(1-p_2)$; $P(4,4)=p_1^2p_2^2$.

3. Підставити $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}7$, скориставшись комп'ютерними програмами.

4. $P(x=1)=(1-p_1)(1-p_2)$; $P(x=2)=(1-p_1)p_2$;
$P(x=3)=p_1(1-p_2)$; $P(x=4)=p_1p_2$. $P(y=i)=P(x=i)$, $i\in\overline{1,4}$.

5. Так, є.

6. Якщо в елементарній події $E\in\Omega$ з пункту 1 є дві літери "$в$", то всі літери після другої "$в$" помітити рисками і вважати що ймовірність $\bar{n}$ – промаху після влучень дорівнює 1, а ймовірність $\bar{в}$ – влучення після двох влучень – дорівнює нулю.

Далі міркування аналогічні, причому одновимірні розподіли є залежними.

7. Ω таке саме як у 6, тільки вважати, що ймовірність $\bar{n}$ дорівнює нулю, а ймовірність $\bar{в}$ – одиниці.

4. а) Ні;

б) так; 1) $P(x=0)=0{,}4$; $P(x=1)=0{,}6$; $P(y=0)=0{,}3$; $P(y=1)=0{,}7$; 2) одновимірні розподіли залежні;

3) $$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ 0{,}1, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1,\\ 0{,}4, & \text{коли } 0<x\le 1 \text{ і } y>1,\\ 0{,}3, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>1,\\ 1, & \text{коли } x>1 \text{ і } y>1.\end{cases}$$

4) Скористатися комп'ютерними програмами.

5) Ні

в) Так; 1) $P(x=0)=0{,}3$; $P(x=1)=0{,}3$; $P(x=2)=0{,}4$; $P(y=0)=0{,}4$; $P(y=1)=0{,}3$; $P(y=2)=0{,}3$; 2) одновимірні розподіли незалежні; 3) і 4) скористатися комп'ютерними програмами; 5) так.

г) Так; 1) $P(x=0)=0{,}4$; $P(x=1)=0{,}3$; $P(x=2)=0{,}3$; $P(y=0)=0{,}34$; $P(y=1)=0{,}3$; $P(y=2)=0{,}36$; 2) одновимірні розподіли залежні; 3) і 4) скористатися комп'ютерними програмами; 5) ні.

5. 1. Так – 1), 2), 4); ні – 5); 3) – так за умови $c_1=0$, $c_2=1$; 6) – так за умови $p_{00}\ge 0$, $p_{01}\ge 0$, $p_{00}+p_{01}\le 1$; 7) – так за умови $c_1=0$, $c_2=1$;

2 і 3 – скористатися комп'ютерними програмами;

4. $P([a_1;b_1)\times[a_2;b_2))=F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2)$.

6. 1. $p_i=P(x_i)=\widetilde{P}(x_i,y_1)$, $i\in\overline{1,n}$, де y_1 – фіксована, наприклад, $y_1=0$.

2. Вважати, що $x_1<x_2<\ldots<x_n$,

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le x_1 \text{ або } y\le y_1,\\ \sum\limits_{i=0}^{k}P(x_i), & \text{коли } x_k<x\le x_{k+1} \text{ і } y>y_1, k\in\overline{1,(n-1)},\\ 1, & \text{коли } x>x_n \text{ і } y>y_1.\end{cases}$$

2.11

1. Так – 3.2), 7, 9, 10.2), 10.3), 11.2), 12, 15 – 17, 18.2) – 6), 21.1), 23.2), 23.4), 25; усі інші – ні.

2. 1) щільність нормального розподілу;

2) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & \text{коли } x>0;\end{cases}$ 3) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } \ge 1,\\ 1, & \text{коли } 0<x<1.\end{cases}$

3. 1. 1) $[a;b)=[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{5}}{2})$; 2) $[a;b)=[-1;1)$; 3) $[a;b)=[1;2)$;

4) якщо $c > \frac{1}{\pi}$, то $[a;b)$ такий, що $c(arctgb - arctga) = 1$; якщо $c \le \frac{1}{\pi}$, то $[a;b)$ не існує;

5) якщо $c > \frac{1}{2}$, то $[a;b) \subset [2\pi k; \pi + 2\pi k)$ такий, що $c(\cos a - \cos b) = 1$; якщо $c \le \frac{1}{2}$, то $[a;b)$ не існує;

6) $[a;b) = [1;b)$, де $b \ln b = 1$;

7) $[a;b) = [0; tg2)$;

8) $[a;b)$ такий, що $c(b-a) = 1$, коли $c > 0$, і $c(a-b) = 1$, коли $c < 0$;

9) якщо $c > \frac{1}{\pi}$, то $[a;b) \subset (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ такий, що $c(b-a) = 1$;

10) $[a;b)$ не існує; 11) $[a;b)$ не існує; 12) $[a;b) = [0;2)$;

13) якщо $\alpha \ne 1$, то $[a;b) \subset [0;+\infty)$ такий, що $\frac{1}{\alpha - 1}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = 1$; якщо $\alpha = 1$, то $[a;b) \subset [0;+\infty)$ такий, що $b = ae$;

14) $[a;b)$ не існує; 15) $[a;b)$ не існує;

16) $[a;b)$ такий, що $c(b-a) = 1$; 17) $[a;b) = [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha)$;

18) $[a;b)$ не існує; 19) $[a;b)$ не існує;

20) якщо $c < 20$, то $[a;b)$ не існує, а якщо $c \ge 20$, то існує, наприклад, для $c = 20$ $[a;b) = [0;1)$.

2. 1) $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; 2) а) $P(G) = \sum_k (F(\beta_k) - F(\alpha_k))$, де $(\alpha_k; \beta_k)$ – складові інтервали відкритої множини G; б) $P(F) = 1 - \sum_k (F(\beta_k) - F(\alpha_k))$, де $(\alpha_k; \beta_k)$ – доповняльні інтервали замкненої множини F; 3) в усіх точках, де $f(x)$ неперервна.

4. 1. 1) Не є; 2) $[a;b) = [3; 1+\sqrt{5})$; 3) не є; 4) не є; 5) не є; 6) не є; 7) $[a;b) = [-\frac{\beta}{\alpha}; \frac{1-\beta}{\alpha})$; 8) $[a;b) = [0; tg1)$; 9) $[a;b) = [-2; -\frac{3}{2})$; 10) $[a;b) = [1;b)$, де $b \ln b = 1$; 11) не є; 12) не є; 13) $[a;b) = [x_0; b)$, де $(b - x_0)e^b = 1$; 14) не є; 15) $[a;b) = [\pi; \frac{3}{2}\pi)$; 16) $[a;b) = [-\frac{\pi}{2}; 0)$; 17) $[a;b) = [0; \frac{\pi}{2})$; 18) $[a;b) = [0; \frac{\pi}{4})$.

2. 1) $f(x) = F'(x)$, скористатися комп'ютерними програмами.

2) Скористатися тим, що $P([\alpha;\beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$ $P(\{x_0\}) = F(x_0 + 0) - F(x_0) = 0$, оскільки F – неперервна на R^1;

3) скрізь на $[a;b)$, де $f(x)$ неперервна;

4) а) так; б) ні.

5. $f(x)$ завжди можна переозначити у будь-якій множині точок міри Лебега нуль. На $F(x)$ це не впливає.

6. 1. Перевірити умови $f(x) \geq 0$ і $\int\limits_a^{2a} f(x)dx = 1$.

2. За виглядом графіка $f(x)$.

3. $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$.

4. Розглянути випадки $x < 0$, $0 < x < a$ і $a < x < 2a$.

7. 1. Перевірити умови $f(x) \geq 0$ і $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = 1$, проте $\int\limits_0^b f(x)dx \neq 1$, коли $0 < b < +\infty$.

2. Якщо $c(1 - e^{-\lambda b}) = 1$, то $[a;b) = [0;b)$, де $c = (1 - e^{-\lambda b})^{-1}$.

8. – 10. Аналогічно до **7**.

2.12

1. Так – 3, 4.1), 6.2), 6.3), 7; усі інші – ні.

2. 1) Див. вправу 2;

2) $f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } (x,y) \notin [0;1) \times [0;1), \\ 1, \text{ коли } (x,y) \in [0;1) \times [0;1); \end{cases}$

$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$;

3) $F(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } x \leq 0 \text{ або } y \leq 0, \\ 1, \text{ коли } x > 0 \text{ і } y > 1; \end{cases}$

3. 1. 1) $[a;b) = [0;1) \times [0;2)$; 2) $[a;b) = [0;2) \times [0;1)$; 3) $[a;b) = [0;1) \times [0;1)$; 4) $[a;b) = [0;\sqrt{2}) \times [0;\sqrt{2})$; 5) $[a;b) = [1;\sqrt{2}) \times [0;1)$; 6) $[a;b) = [-\sqrt{2};1) \times [0;1)$; 7) $[a;b) = [0;1) \times [0;1)$; 8) $[a;b)$ не існує; 9) якщо $c = \dfrac{1}{2}$, то $[a;b) = [0;1) \times [0;2)$; 10) $[a;b) = [0;\ln 2) \times [0;\ln 2)$;

11) $[a;b)=[0;b_1)\times[0;1)$, де $e^{b_1}=2+b_1$; 12) $[a;b)=[1;2)\times[1;2)$; 13) $[a;b)=[0;2)\times[0;2)$; 14) $[a;b)=[0;1)\times[0;\frac{1}{2})$; 15) $[a;b)$ не існує; 16) $[a;b)=[1;e)\times[1;e)$; 17) якщо $\alpha>-1$, $\beta>-1$, то $[a;b)=[0;b_1)\times[0;b_2)$, де $b_1=(1+\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}}$, $b_2=(1+\beta)^{\frac{1}{1+\beta}}$; 18) $[a;b)=[0;1)\times[0;1)$; 19) $[a;b)=[0;1)\times[-1;0)$; 20) якщо $\alpha>0$, $\beta>0$, то $[a;b)=[x_0-\alpha;x_0+\alpha)\times[y_0-\beta;y_0+\beta)$; 21) якщо $c>0$, то $[a;b)=[0;b_1)\times[0;b_2)$, де $c\,arctgb_1\,arctgb_2=1$.

2. 1) $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$;

2) $P([a_1;b_1)\times[a_2;b_2))=F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2)$;

3) у точках, де $f(x,y)$ неперервна;

4) не завжди, лише коли $f(x,y)$ задає міру Лебега;

5) $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$, $f_2(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$.

4. Скористатися властивостями функції $f(x,y)$ і властивостями подвійного інтеграла.

5. 1. 1) не є; 2) не є; 3) не є; 4) не є; 5) $[a;b)=[0;1)\times[0;1)$; 6) не є; 7) не є; 8) не є; 9) не є; 10) $[a;b)=[0;1)\times[0;1)$, причому $c(1-e^{-1})^2=1$; 11) не є; 12)не є; 13) $[a;b)=[0;1)\times[0;1)$, коли $c\frac{\pi^2}{16}=1$; 14) не є.

2. 1) $f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$, де ця похідна існує;

2) $F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$;

3) Подати $[a_1;b_1)\times[a_2;b_2)-[\alpha;\beta)\times[\gamma;\beta)$ як суму прямокутників вигляду $[a_1^{(k)};b_1^{(k)})\times[a_2^{(k)};b_2^{(k)})$, що попарно не перетинаються і скористатися формулою

$$P([a_1;b_1)\times[a_2;b_2))=F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2).$$

6. 1. $f(x,y)=f(x)\geq 0$ на $[a;b)\times[0;1)$ і $\int\limits_{-\infty}^{b}dx\int\limits_{0}^{1}f_1(x,y)dy=1$.

$$2.\ F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le a \text{ або } y\le 0,\\ y\int\limits_a^x f(t)dt, & \text{коли } a<x\le b \text{ і } 0<y\le 1,\\ \int\limits_a^x f(t)dt, & \text{коли } a<x\le b \text{ і } y>1,\\ y, & \text{коли } 0<y\le 1 \text{ і } x>b,\\ 1, & \text{коли } x>b \text{ і } y>1.\end{cases}$$

7. 1. 1) Ні; 2) ні; 3) так.

2. 1) $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}0, & \text{коли}\,(x,y)\notin[a;b)\times[0;1),\\ F'(x), & \text{коли}\,(x,y)\in[a;b)\times[0;1).\end{cases}$

8. 1. Перевірити умови $f(x,y)\ge 0$ і $\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)dxdy=1.$

2. $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$.

9. 1. Перевірити властивості функції розподілу.

2. $f(x,y)=F_1'(x)\cdot F_2'(y)$ майже скрізь на R^2.

2.13

1. Так – 2, 4, 5.1), 6.1); усі інші –ні.

2. 1) $P(\{0\})=1\Rightarrow x_c=D=0$;

2) $P(\{-1\})=P(\{1\})=\dfrac{1}{2}$;

3) якщо x_c не існує, то не існує й D;

4) $P(\{i\})=\dfrac{1}{i^2}-\dfrac{1}{(i+1)^2}=\dfrac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$, $\quad i\in N\Rightarrow x_c=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{i(2i+1)}{i^2(i+1)^2}<+\infty$,

проте $D=+\infty$.

3. 1) $x_c=\dfrac{1-p_0}{p_0}$; 2) $x_c=\lambda$; 3) $x_c=np$; 4) $x_c=\dfrac{nk}{N}$.

4. 1) $D=\dfrac{1-p_0}{p_0^2}$; 2) $D=\lambda$; 3) $D=np(1-p)$;

4) $D=\dfrac{nk(N-n)}{N^2}(1-\dfrac{k-1}{N-1})$.

5. $x_c = \sum_i x_i (F(x_i + 0) - F(x_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$;

$$D = \sum_i (x_i - x_c)^2 (F(x_i + 0) - F(x_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_c)^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) - x_c^2 .$$

6. 1) $x_c = 1,\ D = \sigma = 0$; 2) $x_c = 1,\ D = \sigma = 0$; 3) $x_c = \frac{\pi}{8}$, $D = \frac{7\pi^2}{64}$, $\sigma = \frac{\pi}{8}\sqrt{7}$; 4) $x_c = \frac{9}{4}$, $D = \frac{11}{16}$, $\sigma = \frac{\sqrt{11}}{4}$; 5) $x_c = \frac{n}{2}$, $D = \frac{1}{4(n+1)} \sum_{i=0}^{n} (n - 2i)^2$; 6) $x_c = \frac{1 - p_0}{p_0}$, $D = \frac{1 - p_0}{p_0^2}$; 7) $x_c = \frac{a+b}{2}$, $D = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (\frac{b-a}{n} i + \frac{a-b}{2})^2$.

7. 1. $p_{i,j} \geq 0$ і $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$.

2. $x_c = \lambda_1,\ y_c = \lambda_2;\ D_1 = D_x = \lambda_1;\ D_2 = D_y = \lambda_2$.

8. 1. $p_{ij} \geq 0$ і $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$.

2. $x_c = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i^{(1)}$, $y_c = \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_j^{(2)}$; $D_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_c)^2 p_i^{(1)}$, $D_2 = \sum_{j=1}^{\infty} (y_j - y_c)^2 p_j^{(2)}$.

9. Скористатися задачами **8**, **3** та **4**.

10. Скористатися комп'ютерними програмами, знайшовши при необхідності розподіли ймовірностей.

2.14

1. Так – 2, 4.1), 4.2, 6.1), 10; усі інші – ні.

2. 1) – 3) – нормальний розподіл з відповідними параметрами $a = x_c$ і $\sigma = \sqrt{D}$;

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{коли } x \in [-1;1], \\ \frac{1}{3|x|^3}, & \text{коли } x \notin [-1;1]; \end{cases}$

5) таке неможливе.

3. 1) $x_c = a$, $D = \dfrac{a^2}{6}$ (див. задачу 6 §2.11);

2) $x_c = \dfrac{1}{\lambda}$, $D = \dfrac{1}{\lambda^2}$; 3) $x_c = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $D = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$; 4) $x_c = a$, $D = \beta^2$; 5) x_c не існує, тому не існують D та σ; 6) $x_c = x_0$, $D = \dfrac{a^2}{3}$.

4. $x_c = \int\limits_a^b x dF(x) = b - \int\limits_a^b F(x)dx$;

$D = \int\limits_a^b (x - x_c)^2 dF(x) = b^2 - x_c^2 - 2\int\limits_a^b xF(x)dx = 2\int\limits_a^b (b - x)F(x)dx - (\int\limits_a^b F(x)dx)^2$.

5. 1) x_c та D не існують;

2) $x_c = 1 + \sqrt{5} - \int\limits_3^{1+\sqrt{5}} (x^2 - 2x - 3)dx$,

$D = 2\int\limits_3^{1+\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5} - x)(x^2 - 2x - 3)dx - (\int\limits_3^{1+\sqrt{5}} (x^2 - 2x - 3)dx)^2$ – скористатися комп'ютерними програмами;

3) – 5) $F(x)$ не є функцією розподілу ймовірностей;

6) – 18) скористатися відповідями до задачі 4 §2.11 та комп'ютерними програмами.

6. Так.

7. 1. Скористатися формулами задач 6 та 4 і властивостями інтеграла;

2. Скористатися методом від супротивного.

8. $x_c = \int\limits_{a_1}^{b_1} x\, f_1(x)dx$, $y_c = \int\limits_{a_2}^{b_2} y\, f_2(y)dy$, $D = \int\limits_{a_1}^{b_1} (x - x_c)^2 f_1(x)dx$,

$D = \int\limits_{a_2}^{b_2} (y - y_c)^2 f_2(y)dy$.

9. Скористатися задачами **8** та **3**.

10. Скористатися відповідями до задачі 5 §2.12 і комп'ютерними програмами.

11. Скористатися задачами **7** та **8**.

3.1

1. Так – 1, 2. 1), 4,6,7 і усі інші – ні.

2. 1. Скористатися означенням або критерієм випадкової величини.

2. $\{1,2,3,4,5,6\}=\sum_k A_k$, де $A_i \cap A_j = \varnothing$, $A_k \neq \varnothing$, $\Leftrightarrow$ кількість множин A_k не перевищує 6.

3. Розглянути $X(E)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\in B,\\ 1, & \text{коли } x\notin B,\end{cases}$ де $B\notin S$, тобто не є подією.

3. Скористатися означенням випадкової величини.

4. 1. Скористатися рівністю

$$\{E: X(E)=x_0\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{E: x_0\le X(E)<x_0+\frac{1}{n}\}.$$

2. Обернене твердження не є правильним.

5. Див. задачі 15 і 16 §1.16.

6. Скористатися зв'язком між кожною наступною множиною і попередньою.

7. Скористатися означенням випадкової події.

8. Розв'язати відповідні нерівності.

9. 1) Скористатися тим, що коли $Q=\{r_1,r_2,....\}$ – множина раціональних чисел, то $\{E: X(E)<Y(E)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}(X<r_k)\cdot(Y>r_k)$.

2)-6) Знайти зв'язок з попередніми множинами.

10. Скористатися означенням випадкової події.

11. Див. задачу 6 §1.17.

12. Скористатися означенням випадкової величини.

13. Скористатися означенням випадкової події і властивостями подій.

14. Скористатися тим, що множина є борелівською, коли вона є результатом не більше ніж зчисленної кількості операцій об'єднання та перерізу над відкритими та замкненими множинами.

15. Скористатися відповідними означеннями.

16. Скористатися методом математичної індукції і задачею **15**.

17. 1. Вилучити з S^* дані множини, а також усілякі їх об'єднання та відповідні доповнення.

2. Так.

3.1) Так для S_1 і ні для S; 2) Ні для S_1 і S; 3) Так для S і S_1.

18. 1.1) $X(E)=\begin{cases}1, \text{ коли } E\in[0;1),\\ 2, \text{ коли } E\in[1;2),\\ 3, \text{ коли } E\in[2;3),\end{cases}$ $Y(E)=\begin{cases}3, \text{ коли } E\in[0;1),\\ 2, \text{ коли } E\in[1;2),\\ 1, \text{ коли } E\in[2;3).\end{cases}$

Схожі величини і для випадків 2)-4).

2. Можуть були лише такі підмножини, у яких є принаймні один елемент з кожної з множин $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$, $\{4,5,6\}$.

19. 1. Так для 1), 2), 4), 5), 6).

3.2

1. Так – 1, 2, 11, а для інших – ні.

2. Дискретні 1), 3) і 6), а 2), 4) і 5) в залежності від імовірнісного простору можуть не бути дискретними.

3. Скористатися рівністю $P_X(\{x_0\})=F_X(x_0+0)-F_X(x_0)=0$.

4. Скористатися тим, що $P_X([a;b))=P_X((a;b))+P_X(\{a\})$ і задачею **3**.

5. 1. а) $c_1=0{,}4$; б) $c_2=0$.

2. $x_i+y_j=c_{ij}\in\{0,1,2,3,4\}$, а $P_{X+Y}(\{c_{ij}\})=p_{ij}\ge 0$ і $\sum p_{ij}=1$.

3-4. – скористатися комп’ютерними програмами.

5. $P_X([-\frac{1}{2};\frac{3}{2}))=\sum\limits_{x_i\in[-\frac{1}{2};\frac{3}{2})}P_X(x_i)=0{,}1+0{,}5=0{,}6$ і аналогічно для інших випадків.

6. Скористатися відповідними означеннями.

7. Не можна, оскільки $P(A)=P(X\le 1)P(Y>\frac{1}{2}/X\le 1)$, а про другий співмножник нічого не відомо.

6. 1 і 2 випливає з властивостей подій та ймовірностей.

8. 1. $\Omega=\{(i,j):i\in\overline{1,6},\ j\in\overline{1,6}\}$, $P(i,j)=\frac{1}{36}$.

2. 1) $p_{i,k}=0$, коли $1<k\le i-1$; $p_{i,k}=\frac{i}{36}$, коли $i\le k\le 6$.

2) $P(X^{-1}(i))=\frac{1}{6}$; $P(Y^{-1}(1))=\frac{1}{36}$; $P(Y^{-1}(2))=\frac{3}{36}$; $P(Y^{-1}(3))=\frac{5}{36}$; $P(Y^{-1}(4))=\frac{7}{36}$; $P(Y^{-1}(5))=\frac{9}{36}$; $P(Y^{-1}(6))=\frac{11}{36}$.

3) Розподіли ймовірностей для $(X\pm Y)$, $X-Y$, XY та X/Y цілком визначаються розподілами ймовірностей для X та Y.

3. Скористатися комп’ютерними програмами.

9. 1. $\Omega=\{(i_1,\dots,i_5\}:i_k\in\{0,1\},k\in\overline{1,5}\}$, $P(E)=(\frac{1}{2})^5$, $E\in\Omega$.

2. $\Omega_X=\Omega_Z=\{0,1,2,3,4,5\}$, $\Omega_Y=\{0,1,2,3\}$.

3. $P(X^{-1}(i)) = C_5^i (\frac{1}{2})^5$, $i \in \overline{0,5}$;

$P(Y^{-1}(0)) = (\frac{1}{2})^5$; $P(Y^{-1}(1)) = \frac{15}{2^5}$; $P(Y^{-1}(2)) = \frac{15}{2^5}$; $P(Y^{-1}(3)) = (\frac{1}{2})^5$;

$P(Z^{-1}(0)) = (\frac{1}{2})^5 = P(Z^{-1}(5))$, $P(Z^{-1}(1)) = \frac{12}{2^5}$; $P(Z^{-1}(2)) = \frac{11}{2^5}$;

$P(Z^{-1}(3)) = \frac{5}{2^5}$; $P(Z^{-1}(4)) = \frac{2}{2^5}$.

4. 1) Спільний розподіл ймовірностей для X та Y:

$p_{0,0} = \frac{1}{2^5}$, $p_{0,k} = 0$, $k \in \overline{1,3}$;

$p_{1,1} = \frac{5}{2^5}$, $p_{1,k} = 0$, $k \in \{0,2,3\}$;

$p_{2,1} = \frac{4}{2^5}$, $p_{2,k} = 0$, $k \in \{0,3\}$, $p_{2,2} = \frac{6}{2^5}$;

$p_{3,0} = 0$, $p_{3,1} = \frac{3}{2^5}$, $p_{3,2} = \frac{6}{2^5}$; $p_{3,3} = \frac{1}{2^5}$;

$p_{4,0} = p_{4,3} = 0$, $p_{4,1} = \frac{2}{2^5}$, $p_{4,2} = \frac{3}{2^5}$;

$p_{5,1} = \frac{1}{2^5}$, $p_{5,k} = 0$, $k \in \{0,2,3\}$.

5. Спільний розподіл ймовірностей випадкових величин X та Y визначає розподіл ймовірностей суми, різниці, добутку та частки цих величин.

6. Скористатися комп'ютерними програмами.

10. 1. Ω складається з усіляких розміщень з повторенням з N кульок по n, $P)\{E\}) = \frac{1}{N^n}$, $E \in \Omega$.

2. 1) $P(\{E : X(E) \le k\}) = (\frac{k}{N})^n$, $k \in \overline{1,N}$;

2) $P(\{E : X(E) = k\}) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$, $k \in \overline{1,N}$;

3. 1) $P(\{E : Y(E) \ge j\}) = (\frac{N-j+1}{N})^n$, $j \in \overline{1,N}$;

2) $P(\{E : Y(E) = j\}) = \frac{(N-j+1)^n - (N-j)^n}{N^n}$, $j \in \overline{1,N}$;

4. $P(X^{-1}(k)\cdot Y^{-1}(j))=\dfrac{(k-j+1)^n-2(k-j)^n+(k-j-1)^n}{N^n}$, $k\in\overline{1,N}$, $j\in\overline{1,(k-1)}$.

11. 1. $1-(1-p)^k$.

2. 1) $\Omega=\overline{0,n}$; 2) $P(\{i\})=C_n^i p_1^i(1-p_1)^{n-i}$, $i\in\Omega$;

3) $P(\{E:X(E)=n+ik\})=P(\{i\})=C_n^i p_1^i(1-p_1)^{n-i}$, $i\in\overline{0,n}$.

12. 1)

$$\Omega_1=\{\underbrace{(A,\ldots,A)}_{r},\underbrace{(\overline{A},A,\ldots,A)}_{r+1},\ldots,\underbrace{(A,\ldots,A,\overline{A},A)}_{r+1},\ldots,(\underbrace{\overline{A},\ldots,\overline{A}}_{r},\underbrace{A,\ldots,A}_{k}),\ldots$$

$$\ldots,(\underbrace{A,\ldots,A}_{r-1},\underbrace{\overline{A},\ldots,\overline{A}}_{k},A),\ldots\}.$$

2) $P(E)=p^r(1-p)^k$, коли E містить $r+k$ координат, $k\in\{0,1,2,\ldots\}$;

3) $P(\{E:X(E)=r+k\})=C_{r+k-1}^k p^r(1-p)^k$, $k\in\{0,1,2,\ldots\}$.

13. 1) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{коли } x\in(0;2),\\ 0, & \text{коли } x\notin(0;2);\end{cases}$

2) $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & \text{коли } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{коли } x>2;\end{cases}$

3) а) $\dfrac{5}{8}$; б) $\dfrac{1}{4}$.

14. Визначити ймовірнісну міру P на сукупності проміжків $[a;b)$: $P([a;b))=F(b)-F(a)$, а потім здійснити лебегове продовження P на σ-алгебру вимірних підмножин простору $\Omega=(-\infty;+\infty)$ і покласти $X(E)=E\in\Omega$.

15. 1. Скористатися комп'ютерними програмами.

2. Знайти $F'_X(x)=f_X(x)$ і побудувати її графік.

3. 1)-3) Скористатися рівністю

$$P(\{E:X(E)\in<a;b>\})=F(b)-F(a).$$

4) $P(A/B)=P(\{E:X(E)<x_2-x_1\}=1-e^{\lambda(x_1-x_2)})$.

4. Скористатися знайденою умовною ймовірністю $P(A/B)$.

5.* Скористатися характеристичною властивістю показникової функції: якщо $a>0$, $a\ne 1$, то $\varphi(x)=a^x \Leftrightarrow \varphi$ – неперервна, $\varphi(1)=a$ і $\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)$.

16*. 1. Скористатися рівністю $\{E:X(E)<t\}=\Omega-\{E:X(E)\ge t\}$.

2. Скористатися умовою задачі.

3. Скористатися рівністю

$$P((X \geq t+\Delta t)/(X \geq t)) = P(\overline{(X < t+\Delta t)}/(X \geq t)).$$

4. Скористатися означенням $Q(t)$ і 3.

5. Довести, що $Q'(t) = \lambda Q(t)$ і розв'язати це диференціальне рівняння.

6. Це наслідок 5.

17. 1. $E \in [-\pi; \pi) = \Omega$, S – простір вимірних за Лебегом підмножин Ω, а $P(A) = \dfrac{m(A)}{2\pi}$ – нормована міра Лебега.

2. Розв'язати нерівність $|tgE| < x$.

18. 1) $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 0$; 2) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{коли } 0 < x < 2, \\ 0, & \text{коли } x \leq 0 \text{ або } x \geq 2; \end{cases}$

3) $P_X([2;3]) = 0$.

19. 1. $(a;b] \subset [\pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi k]$ для якогось цілого k.

2. $a = \pi k$, $b = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, k – ціле число.

3. Якщо $a = \pi k$, $b = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, k – ціле число, то X є абсолютно неперервною випадковою величиною і

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \notin (a;b), \\ 2\cos 2x, & \text{коли } x \in (a;b). \end{cases}$$

4. Вважаючи $k = 1$, одержимо

$$F_X(x) = (1 - \sin 2b + \sin 2a) F_{X_1}(x) + (\sin 2b - \sin 2a) F_{X_2}(b),$$

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq a \\ \dfrac{\sin 2a}{1 - \sin 2b + \sin 2a}, & \text{коли } a < x \leq b, \\ 1, & \text{коли } x > b; \end{cases}$$

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq a \\ \dfrac{\sin 2x - \sin 2a}{\sin 2b - \sin 2a}, & \text{коли } a < x \leq b, \\ 1, & \text{коли } x > b. \end{cases}$$

20. 1. $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le a\\ tg\dfrac{x}{2}, & \text{коли } a<x\le b,\\ 1, & \text{коли } x>b;\end{cases}$ $\quad 2\pi k\le a<b\le\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$,

k – ціле.

2. $a=2\pi k$, $b=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, k – ціле.

3. $f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\notin(a;b),\\ \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}, & \text{коли } x\in(a;b).\end{cases}$

4. Скористатися аналогією до 19.4.

21. 1) 1. $a=\dfrac{2}{3}$; 2. $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le -2,\\ \dfrac{(x+1)^2}{6}, & \text{коли } -2<x\le 0,\\ 1-\dfrac{1}{3}(x-1)^2, & \text{коли } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1.\end{cases}$

3. $P_X((-1;\frac{1}{2}))=\dfrac{3}{4}$.

2) 1. $a=\sqrt{2}$. 2. $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le -0,\\ \sqrt{2}x-\dfrac{x^2}{2}, & \text{коли } 0<x\le\sqrt{2},\\ 1, & \text{коли } x>\sqrt{2}.\end{cases}$

3. $P_X((-1;\frac{1}{2}))=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{8}$.

22. 1. $c_1=0{,}2$; 2. $c_1=0{,}3$, $c_2=0{,}1$; 3. $c=0$; 4. $c=0$; 5. $c=0{,}1$; 6. $c_1=c_2=0$; 7. $\alpha=\dfrac{1}{8}$; 8. $\alpha=0{,}9$; 9. $\alpha=\dfrac{1}{15}$; 10. $\alpha=-0{,}9$; 11. $\beta=\dfrac{1}{2}$, $0\le\alpha\le\dfrac{1}{2}$, $0\le\gamma\le\dfrac{1}{2}$; 12. $\alpha=0$ або $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Усі інші завдання виконати за допомогою комп’ютерними програмами.

23. 1. 1) а) $\dfrac{9}{10}$; б) 1; в) $\dfrac{1}{4}$.

2) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \notin (-1; \frac{1}{3}), \\ \frac{3}{4}, & \text{коли} \quad x \in (-1; \frac{1}{3}). \end{cases}$

2. 1) а) 0; б) 1; в) 0.

2) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \notin (2; 4), \\ 0{,}5, & \text{коли} \quad x \in (2; 4). \end{cases}$

3. 1) а) $\sin 0{,}2$; б) 1; в) $\sin \frac{1}{3}$.

2) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \notin (0; \frac{\pi}{2}), \\ \cos x, & \text{коли} \quad x \in (0; \frac{\pi}{2}). \end{cases}$

24. 1. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le 0, \\ \sin x, & \text{коли} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{коли} \quad x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $P_X((\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4})) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

2. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos 3x), & \text{коли} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{коли} \quad x > \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ $P_X((\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le 1, \\ \dfrac{(x - \frac{1}{2})^2}{2} - \frac{1}{8}, & \text{коли} \quad 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{коли} \quad x > 2; \end{cases}$ $P_X([\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]) = \frac{3}{8}$.

4. $c = 1$; $P_X((\frac{\pi}{4}; +\infty)) = \frac{1}{2}$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), & \text{коли} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{коли} \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

5. $\alpha = 2$; $P_X((1;4)) = \dfrac{3}{4}$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{коли } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{коли } x > 2. \end{cases}$

6. $A = \dfrac{1}{2}$; $P_X\left(\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{коли } 0 < x \le \pi, \\ 1, & \text{коли } x > \pi. \end{cases}$

7. $A = \dfrac{1}{\pi}$; $P_X([-1;1]) = \dfrac{1}{2}$; $F_X(x) = \dfrac{1}{\pi} arctgx + \dfrac{1}{2}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

8. $A = \dfrac{1}{\pi}$; $P_X\left(\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin x + \dfrac{\pi}{2}\right), & \text{коли } -1 < x \le 1, \\ 1, & \text{коли } x > 1. \end{cases}$

9. $A = \lambda$; $P_X((1;2)) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{коли } x > 0. \end{cases}$

10. $A = 3$; $P_X\left(\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)\right) = \dfrac{7}{8}$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ x^3, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{коли } x > 1. \end{cases}$

11. $a = 4$; $\sigma = 3$; $A = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}$; $P_X([4;+\infty)) = \dfrac{1}{2}$;

$$F_X(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-4)^2}{18}} dt.$$

12. $\alpha = \dfrac{\lambda}{2}$; $P_X([-1;1]) = 1 - e^{-\lambda}$; $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{\lambda x}, & \text{коли } x \le 0, \\ 1 - \dfrac{1}{2} e^{-\lambda x}, & \text{коли } x > 0. \end{cases}$

25. 1) $P_X((1;3)) = 0{,}5$; 2)

x_i	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,5

26. 0,16.

27. 1) $\dfrac{C_n^m}{2^n}$; 2) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} C_n^i \frac{1}{2^n}$; 3) $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} C_n^i \frac{1}{2^n}$.

28. $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}995^{1000}$; $P(X > 4) \approx 0{,}6736$.

29.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Скористатися комп'ютерними програмами.

30. $f_X(x) = \frac{1}{2\pi \cdot 0{,}1} e^{-\frac{(x-3)^2}{0{,}02}}$, $x \in (-\infty; +\infty)$; $(2{,}97; 3{,}03)$.

31. $\sqrt{2}\Phi(\frac{\sqrt{2}}{15}) = \sqrt{2} \cdot 0{,}036 \approx 0{,}051$.

3.3

1. Так – 2, 3, 4; усі інші – ні.

2. 1. Скористатися тим, що $Y = \psi(X(E))$ майже напевно набуває скінченну кількість значень, кожне з яких є одним з чисел $\psi(x_i)$, $i \in \overline{1,n}$.

2. Ні.

3. Скористатися комп'ютерними програмами.

4. 1. Скористатися рівністю

$$\{E : \psi(X()) < c\} = \bigcup_{y_i < c} \psi^{-1}(y_i) = \bigcup_{k} \psi^{-1}(y_{i_k}).$$

2. Скористатися прикладом функції $\psi(x) = \begin{cases} 1, \text{ коли } x \in A, \\ 0, \text{ коли } x \notin A, \end{cases}$ де A – невимірна множина, а $X(E) = E \in [0;1) = \Omega$.

5. Знайти множину розв'язків нерівності $\psi(x) < y$ і скористатися тим, що $F_Y(y) = P(\{x : \psi(x) < y\})$.

1. $F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } y \leq 1, \\ 1, \text{ коли } y > 1. \end{cases}$

2. $F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } y \leq 1, \\ 1 - e^{-\lambda n}, \text{ коли } n < y \leq n+1, \ n \in \{1, 2, \ldots\}. \end{cases}$

3. $F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } y \leq -1, \\ e^{-2\lambda} - e^{-3\lambda}, \text{ коли } -1 < y \leq -1, \\ 1, \text{ коли } y > 1. \end{cases}$

4. $F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ коли } y \leq -1, \\ 1 - e^{-\lambda}, \text{ коли } -1 < y \leq -1, \\ 1, \text{ коли } y > 1. \end{cases}$

5. $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 1,\\ 1, \text{ коли } y>1.\end{cases}$

6. 1. 1) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 1,\\ \dfrac{1}{9}, \text{ коли } 1<y\le 2,\\ \dfrac{2}{9}, \text{ коли } 2<y\le 3,\\ 1, \text{ коли } y>3;\end{cases}$

2) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ \dfrac{y^3}{9}, \text{ коли } 0<y\le \sqrt[3]{9},\\ 1, \text{ коли } y>\sqrt[3]{9};\end{cases}$

3) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ \dfrac{\sqrt{y}}{9}, \text{ коли } 0<y\le 4,\\ \dfrac{2+y}{9}, \text{ коли } 4<y\le 7,\\ 1, \text{ коли } y>7;\end{cases}$

4) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ \dfrac{1}{4}, \text{ коли } 0<y\le 1,\\ \dfrac{1}{2}, \text{ коли } 1<y\le 2,\\ \dfrac{3}{4}, \text{ коли } 2<y\le 3,\\ 1, \text{ коли } y>3;\end{cases}$

5) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ \dfrac{y^2}{9}, \text{ коли } 0<y\le 3,\\ 1, \text{ коли } y>3;\end{cases}$

6) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ \dfrac{y+12}{20}, \text{ коли } 0<y\le 7,\\ 1, \text{ коли } y>7;\end{cases}$

7) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 3,\\ 1, \text{ коли } y>3;\end{cases}$

8) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ 1-e^{-y}, \text{ коли } y>0;\end{cases}$

9) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ \dfrac{\pi-2\arccos y}{\pi}, \text{ коли } 0<y\le 1,\\ 1, \text{ коли } y>1;\end{cases}$

10) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le \psi(a),\\ \dfrac{\psi^{-1}(y)}{b-a}, \text{ коли } \psi(y)<y<\psi(b).\end{cases}$

2\. 1) $F_Y(y)=\begin{cases}2\Phi(y), \text{ коли } y>0,\\ 0, \text{ коли } y\le 0;\end{cases}$

2) $F_Y(y)=\begin{cases}2\Phi\sqrt{y}, \text{ коли } y>0,\\ 0, \text{ коли } y\le 0;\end{cases}$

3) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{1-y}^{1+y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \text{ коли } y>0;\end{cases}$

4) $F_Y(y)=\dfrac{1}{2}+\Phi\sqrt[3]{y}$.

3\. 1) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}+0), \text{ коли } y>0;\end{cases}$

2) $F_Y(y)=F_X(\sqrt[3]{y})$;

3) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ F_X(\ln y), \text{ коли } y>0;\end{cases}$

4) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le -1,\\ F_X(\arcsin y)-F_X(-\dfrac{\pi}{2}), \text{ коли } -1<y\le 1,\\ 1, \text{ коли } y>1;\end{cases}$

5) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ 1-F_X(\ln\dfrac{1}{y}+0), \text{ коли } y>0;\end{cases}$

6) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le -1,\\ F_X(\pi+0)-F_X(\arccos y+0), \text{ коли } -1<y\le 1,\\ 1, \text{ коли } y>1;\end{cases}$

7) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ y, \text{ коли } 0<y\le 1,\\ 1, \text{ коли } y>1;\end{cases}$

8) Якщо $k=0$, то $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le b,\\ 1, \text{ коли } y>b;\end{cases}$

Якщо $k>0$, то $F_Y(y)=F_X(\dfrac{y-b}{k})$.

Якщо $k<0$, то $F_Y(y)=1-F_X(\dfrac{y-b}{k}+0)$.

4. 1) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 1,\\ 0{,}55+0{,}05y, \text{ коли } 1<y\le 8,\\ 1, \text{ коли } y>8;\end{cases}$

2) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le \dfrac{1}{2},\\ 0{,}4-0{,}05\log_2\dfrac{1}{2}, \text{ коли } \dfrac{1}{2}<y\le 1,\\ 1, \text{ коли } y>1;\end{cases}$

3) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 3,\\ 0{,}525+0{,}025y, \text{ коли } 3<y\le 17,\\ 1, \text{ коли } y>1;\end{cases}$

4) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le -48,\\ 0{,}4-0{,}05\sqrt{1-y}, \text{ коли } -48<y\le 1,\\ 1, \text{ коли } y>1;\end{cases}$

5) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 1,\\ 0{,}6+0{,}05\sqrt{y^2-1}, \text{ коли } -1<y\le\sqrt{50},\\ 1, \text{ коли } y>\sqrt{50};\end{cases}$

6) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ 0{,}6+0{,}05(e^y-1), \text{ коли } 0<y\le\ln 8,\\ 1, \text{ коли } y>\ln 8.\end{cases}$

5. 1) $F_Y(y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}arctg\,\dfrac{1}{y}, \text{ коли } y<0,\\ \dfrac{1}{2}, \text{ коли } y=0,\\ 1-\dfrac{1}{\pi}arctg\,\dfrac{1}{y}, \text{ коли } y>0;\end{cases}$ $f_Y(y)=f_X(y)$.

2) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ \sqrt{y}, \text{ коли } 0<y\le 1,\\ 1, \text{ коли } y>1;\end{cases}$

3) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le 0,\\ 1-\cos\sqrt[4]{y}, \text{ коли } 0<y\le\dfrac{\pi^4}{16},\\ 1, \text{ коли } y>\dfrac{\pi^4}{16};\end{cases}$

4) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le -\dfrac{\pi^3}{8},\\ \dfrac{1}{2}(1+\sin\sqrt[3]{y}), \text{ коли } -\dfrac{\pi^3}{8}<y\le\dfrac{\pi^3}{8},\\ 1, \text{ коли } y>\dfrac{\pi^3}{8};\end{cases}$

5) $F_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } y\le -1,\\ 1-y^2, \text{ коли } -1<y\le 0,\\ 1, \text{ коли } y>0.\end{cases}$

7. $k=\dfrac{1}{\sigma}$, $b=-\dfrac{a}{\sigma}$.

3.4

1. Так – 2-5, 7-10, 13; усі інші – ні.

2. 1. Скористатися тим, що
$\{E:(X_1(E),X_2(E))<x=(x_1,x_2)\}=\{E:X_1(E)<x_1\}\bigcap\{E:X_2(E)<x_2\}$
і властивостями подій.

2. Скористатися властивостями ймовірностей.

3*-6*. $P_X([a;b])=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)$.

Скористатися міркуваннями до задачі **6** §2.3.

7. $P_X(\{a\})=P_X([a;a+0))$, $P((a;b))=P([a+0;b))$,

$P([a;b])=P([a;b+0))$, $P((a;b])=P([a+0;b+0))$,

а для $P([a;b))$ скористатися наведеною вище формулою.

3. 1. Вважаючи, що $P_X(\{a\})=p_1$, а $P_X(\{b\})=p_2$:

1) $F_X(x)=F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=$

$$=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le a_1 \text{ або } x_2\le a_2,\\ p_1, \text{ коли } (a_1<x_1\le b_1 \text{ і } x_2>a_2) \text{ або } (a_2<x_2\le b_2 \text{ і } x_1>a_1),\\ 1, \text{ коли } x_1>b_1 \text{ і } x_2>b_2;\end{cases}$$

2) $$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le a_1 \text{ або } x_2\le b_2,\\ 0, \text{ коли } a_1<x_1\le b_1 \text{ і } b_2<x_2\le a_2,\\ p_1, \text{ коли } a_1<x_1\le b_1 \text{ і } x_2>a_2,\\ p_2, \text{ коли } b_2<x_2\le a_2 \text{ і } x_1>b_1,\\ 1, \text{ коли } x_1>b_1 \text{ і } x_2>a_2;\end{cases}$$

3) $$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le a_1 \text{ або } x_2\le a_2,\\ p_1, \text{ коли } a_1<x_1\le b_1 \text{ і } x_2>a_2,\\ 1, \text{ коли } x_1>b_1 \text{ і } x_2>a_2;\end{cases}$$

4) $$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le a_1 \text{ або } x_2\le a_2,\\ p_1, \text{ коли } a_2<x_2\le b_2 \text{ і } x_1>a_1,\\ 1, \text{ коли } x_1>a_1 \text{ і } x_2>b_2.\end{cases}$$

2. $P_X(\{(a_1,a_2)\})=P_X([a_1;a_1+0)\times[a_2;a_2+0))=$
$=F_X(a_1+0,a_2+0)-F_X(a_1,a_2+0)-F_X(a_1+0,a_2)+F_X(a_1,a_2)$.

3. Підставити в результати завдань 1-2 конкретні значення, що визначають a, b, $p1$ та p_2.

4. Скористатися тим, що

$$p(\{E:(X_1(E),X_2(E))\in D\})=\sum_{(x_1,x_2)\in D}P(\{E:X_1(E)=x_1,X_2(E)=x_2\}).$$

4. 1. 1)

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le 0 \text{ або } x_2\le 0,\\ \dfrac{1}{3}, \text{ коли } (0<x_1\le 1 \text{ і } x_2>0) \text{ або } (0<x_2\le 1 \text{ і } x_1>0),\\ \dfrac{2}{3}, \text{ коли } (1<x_1\le 2 \text{ і } x_2>1) \text{ або } (1<x_2\le 2 \text{ і } x_1>1),\\ 1, \text{ коли } x_1>2 \text{ і } x_2>2;\end{cases}$$

2) $$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le 0 \text{ або } x_2\le 0,\\ \dfrac{1}{3}, \text{ коли } 0<x_2\le 1 \text{ і } x_1>0,\\ \dfrac{2}{3}, \text{ коли } 0<x_1\le 1 \text{ і } x_2>1,\\ 1, \text{ коли } x_1>1 \text{ і } x_2>1;\end{cases}$$

3) $$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le 0 \text{ або } x_2\le 0,\\ \dfrac{1}{3}, \text{ коли } 0<x_1\le 1 \text{ і } x_2>0,\\ \dfrac{2}{3}, \text{ коли } 0<x_2\le 1 \text{ і } x_1>1,\\ 1, \text{ коли } x_1>1 \text{ і } x_2>1;\end{cases}$$

4) $$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le 0 \text{ або } x_2\le 0,\\ \dfrac{1}{3}, \text{ коли } 0<x_2\le 1 \text{ і } x_1>0,\\ \dfrac{2}{3}, \text{ коли } 1<x_2\le 2 \text{ і } x_1>0,\\ 1, \text{ коли } x_1>0 \text{ і } x_2>2;\end{cases}$$

5) $$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le 0 \text{ або } x_2\le 0,\\ \dfrac{1}{3}, \text{ коли } 0<x_1\le 1 \text{ і } x_2>0,\\ \dfrac{2}{3}, \text{ коли } 1<x_1\le 2 \text{ і } x_2>0,\\ 1, \text{ коли } x_1>2 \text{ і } x_2>0;\end{cases}$$

6)

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le 0 \text{ або } x_2\le 0,\\ \frac{1}{3}, \text{ коли } (0<x_1\le 1 \text{ і } x_2>0) \text{ або } (0<x_2\le 2 \text{ і } x_1>0),\\ \frac{2}{3}, \text{ коли } 1<x_1\le 2 \text{ і } x_2>2,\\ 1, \text{ коли } x_1>2 \text{ і } x_2>2;\end{cases}$$

7)

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, \text{ коли } x_1\le 0 \text{ або } x_2\le 0,\\ \frac{1}{3}, \text{ коли } (0<x_1\le 2 \text{ і } x_2>0) \text{ або } (0<x_2\le 1 \text{ і } x_1>0),\\ \frac{2}{3}, \text{ коли } 1<x_2\le 2 \text{ і } x_1>2,\\ 1, \text{ коли } x_1>2 \text{ і } x_2>2.\end{cases}$$

2. Зобразити D, визначити які точки з даних точок a, b і c попадають в D і сума ймовірностей цих точок дає шукану ймовірність.

5. Зобразити точки (x_i, y_j), виділити найменший прямокутник, що містить їх, та скористатися означенням функції $F_{(X,Y)}(x,y)$.

1) $$F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}0, \text{ коли } x\le 1 \text{ або } y\le -1,\\ 0{,}2, \text{ коли } 1<x\le 2 \text{ і } -1<y\le 0,\\ 0{,}35, \text{ коли } 1<x\le 2 \text{ і } y>0,\\ 0{,}3, \text{ коли } 2<x\le 3 \text{ і } -1<y\le 0,\\ 0{,}6, \text{ коли } 2<x\le 3 \text{ і } y>0,\\ 0{,}9 \text{ коли } -1<y\le 0 \text{ і } x>3,\\ 1, \text{ коли } x>3 \text{ і } y>0;\end{cases}$$

2) $c=0{,}25$; 3) $c=0{,}25$; 4) $c=0{,}1$; 5) $c=\frac{1}{2}$;

6) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $e^c=\frac{1}{2}$; 8) $\sin^2\alpha=\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$;

9) не існує α такого, щоб $0\le\frac{1}{2}-\sin\alpha\le 1$ і $0\le\frac{1}{2}-\cos\alpha\le 1$, $0\le\sin\alpha\le 1$ і $0\le\cos\alpha\le 1$.

10) не існує такого c, щоб $0\le\frac{1}{2}-e^c\le 1$ і $0\le\frac{1}{2}-e^{-c}\le 1$.

2. Див. відповідь на завдання **4.**2.

6.1. $\Omega = \{бч, ббч, чбч, чббч, ччбч, ччббч, чччббб\}$, $S = S^*$,

$P(\{бч\}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{20}$; $P(\{ббч\}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{2}{20}$, $P(\{чбч\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{6}{30}$,

$P(\{чббч\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{30}$, $P(\{ччбч\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{6}{60}$,

$P(\{ччббч\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{6}{60}$, $P(\{чччбб\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{30}$.

$X(бч) = 0$, $Y(бч) = 1$; $X(ббч) = 0$, $Y(ббч) = 2$; $X(чбч) = 1$, $Y(чбч) = 1$; $X(чббч) = 1$, $Y(чббч) = 2$; $X(ччбч) = 2$, $Y(ччбч) = 1$; $X(ччббч) = 2$, $Y(ччббч) = 2$; $X(чччбб) = 3$, $Y(чччбб) = 1$.

2.

x_i	0	1	2	3
$p_i^{(1)}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{3}{30}$

y_j	1	2
$p_j^{(2)}$	$\frac{42}{60}$	$\frac{18}{60}$

y_j \ x_i	0	1	2	3
1	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{3}{30}$
2	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{60}$	0

3. Скористатися комп’ютерними програмами.

7. $\Omega = \{вв, вп, пв, пп\}$; $P(\{вв\}) = p^2$, $P(\{вп\}) = p(1-p)$, $P(\{пв\}) = (1-p)p$, $P(\{пп\}) = (1-p)^2$; $S = S^*$.

$X(вв) = 2$, $X(вп) = 1 = X(пв)$, $X(пп) = 0$;

$Y(вв) = 0$, $Y(вп) = Y(пв) = 1$, $Y(пп) = 2$.

2.

x_i	0	1	2
$p_i^{(1)}$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

y_j	0	1	2
$p_j^{(2)}$	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$

y_j \ x_i	0	1	2
0	0	0	p^2
1	0	$2p(1-p)$	0
2	$(1-p)^2$	0	0

$$F_X(x)=\begin{cases}0, \text{ коли } x\le 0,\\ (1-p)^2, \text{ коли } 0<x\le 1,\\ (1-p)^2+2p(1-p), \text{ коли } 1<x\le 2,\\ 1, \text{ коли } x>2.\end{cases}$$

8. Зобразити G, записати G у вигляді: $G=[a_1\ b_1]\times[a_2\ b_2]$ і скористатися рівністю

$$P_{(X,Y)}(G)=F(b_1+0,b_2+0)-F(a_1,b_2+0)-F(b_1+0,a_2)+F(a_1,a_2).$$

9. 1. $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\text{пл.}D}, \text{ коли } (x,y)\in D,\\ 0, \text{ коли } (x,y)\notin D;\end{cases}$

$P_{(X,Y)}(B)=\iint\limits_B f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$, $F_{(X,Y)}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy$ і підрахувати відповідні інтеграли.

2. Невідомі параметри визначаються умовою $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy=1$. Для обчислення інтегралів можна скористатися комп'ютерними програмами.

1) $k=10$; 2) скористатися двовимірним нормальним розподілом ймовірностей, де $m_1=m_2=0$, $\sigma_1^2=\dfrac{2}{7}$, $\sigma_2^2=\dfrac{4}{7}$, $\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $k=\dfrac{1}{2\pi}$; 3) $k=1$; 4) $k=(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{i\,i!})^{-1}$; 5) $k=20$; 6) $k=\dfrac{3}{\pi R^3}$.

10. $F(a_5,b_5)-F(a_5,b_1)-F(a_1,b_5)-F(a_2,b_3)+F(a_2,b_1)+$
$+F(a_1,b_3)-F(a_4,b_4)+F(a_4,b_2)+F(a_3,b_4)$.

11. $k=\dfrac{1}{4a^2}$; $P_{(X,Y)}(B)=\dfrac{\pi}{4}$.

12. 1) $c=\dfrac{1}{2}$; $P_{(X,Y)}(D_1)=\dfrac{\pi}{8}$;

2) $c=\dfrac{1}{4\pi}$; $P_{(X,Y)}(D_1)=\dfrac{1}{\pi}$;

3) $c=1$; $P_{(X,Y)}(D_1)=0$.

3.5

1. Так – 1, 2, 5,6; усі інші – ні.
2. Скористатися відповідними означеннями.

3. Скористатися означенням абсолютно неперервного розподілу ймовірностей.

4. Скористатися відповідними означеннями.

5. 1) X і Y незалежні; 2) X і Y залежні;
3) X і Y незалежні; 4) X і Y залежні;
5) X і Y незалежні; 6) X і Y залежні.

6. 1) Скористатися комп'ютерними програмами і тим, що $p_{ki} = p_k^{(1)} \cdot p_i^{(2)}$.

2) $c_1 = 0{,}35$, $c_2 = 0{,}6$; 3) $c = \frac{1}{6}$; $d = \frac{1}{2}$; 4) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; 5) $a = 1$; 6) $a = \frac{1}{3}$.

7. $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$, $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$, $F_{(X,Y)}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} du \int\limits_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv$, $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$;

1) $k = 1$; X і Y незалежні; 2) $k = \frac{1}{2a^2}$; X і Y залежні; 3) $k = \frac{1}{\pi r^2}$; X і Y залежні; 4) Див. 2); 5) $k = 4$; X і Y незалежні; 6) $k = \frac{1}{a^2}$; X і Y залежні; 7) $k = \frac{1}{(e-1)^2}$; X і Y незалежні; 8) $k = 4$; X і Y незалежні; 9) $k = \frac{1}{\pi^2}$; X і Y незалежні; 10) $k = \frac{1}{4}$; X і Y незалежні.

8. $F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, +\infty)$, $F_Y(y) = F_{(X,Y)}(+\infty, y)$.

1) незалежні, абсолютно неперервні.

2) X і Y залежні, абсолютно неперервні, а $F_{(X,Y)}(x,y)$ не є неперервною.

3) $k = \frac{1}{(b-a)^2}$; незалежні, абсолютно неперервні.

4) незалежні, абсолютно неперервні.

9. $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ і знайти відповідні добутки для усіх можливих x та y.

1. Усі розподіли дискретні.

2. X – дискретна, Y – абсолютно неперервна, (X,Y) – розривна.

3. Якщо $k \in [0;1]$, розподіли розривні, причому при $k = 0$ – дискретні; якщо $k = 1$, розподіли абсолютно неперервні.

4. X – дискретна, Y – абсолютно неперервна, (X,Y) – розривна.

5-6. Усі розподіли абсолютно неперервні.

7. $a = b = \dfrac{1}{\pi}$; усі розподіли абсолютно неперервні.

10. 1) ні; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) ні; 6) так; 7) так; 8) ні; 9) так.

11. X і Y незалежні у кожному випадку 1)-7).

12. 1) $F_Z(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$;

2) $F_Z(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z)$;

3) $F_Z(z) = F_X(\frac{z}{2})F_Y(z)$.

13. 1) $F_{ZX+(1-Z)Y}(v) = pF_X(v) + (1-p)F_Y(v)$;

2) $F_{ZX+(1-Z)W^*}(v) = pF_X(v) + (1-p)F_X(v)F_Y(v)$;

3) $F_{ZX+(1-Z)W_*}(v) = pF_X(v) + (1-p)(F_X(v) + F_Y(v) - F_X(v)F_Y(v)) =$

$$= F_X(v) + (1-p)(F_Y(v) - F_X(v)F_Y(v)).$$

14. 1. Скласти інтегральні суми Лебега-Стілтьєса і знайти їх границі:

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} F_X(ih)(F_X((i+1)h) - F_X(ih)).$$

2. Зробити заміну $F_X^n(x) = F_1(x)$ і використати міркування попереднього завдання.

15. 1) Перевірити характеристичні властивості функції розподілу ймовірностей.

2) Скористатися означенням абсолютної неперервності і зв’язком $F_X(x) = F(x,+\infty)$, $F_Y(y) = (+\infty, y)$.

16. Залежні.

3.6

1. Так – 2, 5, 6, 11, 12, 14, 18, 19, 20; усі інші – ні.

2-4. Скористатися відповідними означеннями.

5. Кожна функція з 1)-12) є неперервною, а тому й борелівською.

Зобразити множину A і множину $B_Z = \{(x,y) \in A : \psi(x,y) < z\}$. Тоді $F_Z(z) = \iint\limits_B f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy = \text{пл.}\,B_Z$. Обчисливши цю площу для кожного z, дістанемо $F_Z(z)$. Наприклад, для завдання 1, маємо:

$$F_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0, \ \text{коли} \ z \le 0, \\ \frac{z^2}{2}, \ \text{коли} \ 0 < z \le 1, \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2}, \ \text{коли} \ 1 < z \le 2, \\ 1, \ \text{коли} \ z > 2. \end{cases}$$

6*. Скористатися відповідними означеннями.

7. Скористатися тим, що

$$F_{X+Y}(z) = P_{(X,Y)}(\{(x,y) : x + y < z\}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,dy.$$

8. Скористатися аналогією до 7.

9*. Скористатися тим, що $F_{\frac{X}{Y}}(z) = P_{(X,Y)}(\{(x,y) : \frac{x}{y} < z\}) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} f_Y(y)\,dy \int\limits_{yz}^{+\infty} f_X(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f_Y(y)\,dy \int\limits_{-\infty}^{yz} f_X(x)\,dx.$$

10*. Скористатися тим, що

$$F_{X+Y}(x) = P(X+Y<z) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X < z - y_k) \cdot P(Y = y_k).$$

11*. Скористатися тим, що

$$F_{X+Y}(x) = P(X+Y<z) = P(\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (X+Y<z) \bigcap (kh \le Y < (k+1)h))$$

для будь-якого $h > 0$, а також означенням інтеграла Лебега-Стілтьєса.

12*. Скористатися тим, що $F_Y(y)$ завжди можна подати у вигляді суми дискретної та абсолютно неперервної складових:

$$F_Y(y) = \alpha\Phi_1(y) + (1-\alpha)\Phi_2(y), \text{ де } \alpha \in [0;1].$$

13*. Скористатися рівністю:

$$F_{\frac{X}{Y}}(z) = P(\frac{X}{Y} < z) = \sum_{k:y_k>0} P(X < zy_k)\cdot(Y = y_k) + \sum_{k:y_k<0} P(X > zy_k)\cdot(Y = y_k)$$

14*. Міркування аналогічні до задачі **11*.**

15*. Міркування аналогічні до задачі **12*.**

16. Знайти усі можливі $z_j = \psi(x_k, y_i)$ та їх ймовірності. Можна скористатися комп'ютерними програмами.

1)

z_j	0	1	2	3
p_j	0,02	0,12	0,30	0,56

2)

z_j	-2	-1	0	1	2
p_j	0,2	0,12	0,38	0,18	0,12

3)

z_j	1	2	3	4	6
p_j	0,24	0,38	0,24	0,08	0,06

4)

z_j	1/2	1	3/2	2	3
p_j	0,25	0,45	0,05	0,2	0,05

5) $c=\frac{1}{6}$;

z_j	3	4	5	6	7	8	9
p_j	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{12}{36}$

6) $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, або $\beta=(2n+1)\pi$.

7) $c=1$, $a=-1$;

z_j	0	1/2	1/4
p_j	1/2	1/4	1/4

17. 1) $k_1=k_2=\frac{1}{2}$;

$$F_{X+Y}(z)=\frac{1}{4}\,\text{пл.}(\{x,y): x+y<z\}\cap([0;2]\times[0;2]))$$

і знайти площу для кожного z.

2. $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=2$; $F_{X-Y}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx\int\limits_{x-z}^{+\infty} f_Y(y)\,dy$ і обчислити інтеграл для кожного z.

3. $k_1=2$, $k_2=3$; $F_{2X+Y}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{z-2x} f_Y(y)\,dy$ і обчислити інтеграл для кожного z.

4. $k_1=1$, $k_2=\frac{2}{\pi}$; $F_{X+2Y}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{\frac{z-x}{2}} f_Y(y)\,dy$ і обчислити інтеграл для кожного z.

5. $k_1 = k_2 = \dfrac{2}{\pi}$; $F_{X-2Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \int\limits_{\frac{-x-z}{2}}^{+\infty} f_Y(y)\,dy$ і обчислити інтеграл для кожного z.

18. 1) $a = \dfrac{1}{2}$, $b\dfrac{1}{\pi}$, $k = \dfrac{1}{2}$; $F_{X-Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \int\limits_{x-z}^{+\infty} f_Y(y)\,dy$ і обчислити інтеграл для кожного z.

2) $a = \dfrac{1}{2}$, $b\dfrac{1}{\pi}$; $F_{X+Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,dy$ і обчислити інтеграл для кожного z.

3) $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, $k = \dfrac{1}{2}$; $F_{XY}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_Y(y)\,dy$ і обчислити інтеграл для кожного z.

4) $0 \neq \lambda$ – довільне; $F_{X+Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,dy$ і обчислити інтеграл для кожного z.

5) $k_1 = k_2 = \dfrac{1}{2}$;

$$F_{\frac{X}{Y}}(z) = \begin{cases} 0, \text{ коли } z \le -3, \\ \dfrac{-(3+z)^2}{8z}, \text{ коли } -3 < z \le -1, \\ 1 + \dfrac{(1+3z)^2}{8z}, \text{ коли } -1 < z \le -\dfrac{1}{3}, \\ 1, \text{ коли } z \ge -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

3.7

1. Так – 1, 3-5, 7, 8, 10-12, 14; усі інші – ні.

2. Скористатися властивістю інтеграла Лебега-Стілтьєса: $\int\limits_{\Omega} |X|\,dP = 0 \Leftrightarrow X = 0$ майже всюди.

3. Див. задачу 3 §2.13 і задачу 3 §2.14.

4. Скористатися комп’ютерними програмами, попередньо визначивши параметри.

3) $c_1 = 0{,}35$; 4) $c_2 = 0{,}6$; 5) $c = \frac{1}{6}$; 6) $d = \frac{1}{2}$; 7) α – довільне; 8) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, n – ціле; 9) a –довільне; 10) $a = 1$; 11) $0 < a < 1$; 12) $a = \frac{1}{3}$.

5. Скористатися тим, що $P_X(\{x_k\}) = p_k = F_X(x_k + 0) - F_X(x_k)$, та означенням $M[X]$.

6. Скористатися комп'ютерними програмами або задачею 5.

7. 1) 1; 2) $\frac{8}{3}$; 3) 0; 4) $\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2}\,dx$; 5) 0; 6) $\frac{1}{3}$; 7) $\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$; 8) 3; 9) не існує; 10) 4; 11) $\frac{2}{\pi}$; 12) 1; 13) не існує; 14) не існує; 15) $\frac{1}{|\lambda|}$; 16) 0; 17) $\frac{1}{|\lambda|}$; 18) $\frac{1}{|\lambda|}$; 19) $\frac{7}{3}$; 20) $-\frac{5}{3}$; 21) $\frac{17}{320}$.

8. 1. $\Omega = \{\underbrace{Г\ldots Г}_{m}, \underbrace{ЦГ\ldots Г}_{m+1}, \ldots, \underbrace{Г\ldots ГЦГ}_{m+1}, \ldots\}$.

2. Якщо $E_i^k \in \Omega$ складається з $(m+k)$ символів, серед яких лише k символів *Ц*, то $P(E_i^k) = (1-p)^k p^m$, $k \in \{0,1,2,\ldots\}$.

3. $P(X = k) = C_{m+k-1}^k (1-p)^k p^m$, $k \in \{0,1,2,\ldots\}$.

4. $M[X] = \frac{(1-p)m}{p}$.

5. Якщо $m = 1$, то $P(X = k) = C_k^k (1-p)^k p = (1-p)^k p$ – геометричний розподіл.

6. $\max\limits_k P(X = k) = P(X = [\frac{m(1-p)-1}{p}])$.

9. 1 і 2 скористатися комп'ютерними програмами. 3. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; 4. $(\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 2})$; 5. $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; 6. $(\frac{1}{e-1}, \frac{e-2}{e-1})$; 7. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

3.8

1. Так – 3, 4, 10, 14, 15, 19, 20; усі інші – ні.

2. Скористатися відповідними властивостями інтеграла Лебега-Стілтьєса або означенням $M[X]$.

3. 1. $\Omega^n = \{E = (E_1,\ldots,E_n) : E_i \in \{A, \overline{A}\}, i \in \overline{1,n}\}$,

$\tilde{P}_n(E) = \prod_{i=1}^{s} p_{i_k} \prod_{k=1}^{n-s}(1 - p_{j_k})$, де $E_{i_k} = A$, $k \in \overline{1,s}$, а $E_{j_k} = \overline{A}$, $k \in \overline{1,(n-s)}$, s –кількість відбувань події A в n випробуваннях.

2. $A_i = \{E = (E_1,\ldots,E_n) \in \Omega^n ; E_i = A\}$.

3. $M[X_i] = p_i$.

4. Скористатися означенням X_i і властивостями випадкових величин.

5. $M[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

4. 1. $p_i = P(\{E : \psi(X(E)) = y_{k_i}\}) = P(\bigcup_{\psi(x_{k_i}) = y_{k_i}} \{E : X(E) = x_{k_i}\})$, де y_{k_i} – попарно різні значення $y_k = \psi(x_k)$, $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, що утворюють множину усіх значень $\psi(x_k)$.

2. $M[\psi(X)] = \sum_k \psi(X_k) P(\{E : X(E) = x_k\})$.

5. 1) $\frac{1}{160}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 1.

6. 1. Довести, що $P(X = k) \geq 0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = 1$.

2. $M[X] < +\infty$. 3. $M[X^2] = +\infty$. Скористатися ознакою порівняння збіжності додатних рядів.

7. Скористатися теоремою про заміну змінної в інтегралі Лебега-Стілтьєса.

8. 1. $\frac{e^{-a}}{a}(e^{-a} - 1)$; 2. $\sum_{i=0}^{n} \psi(\frac{i}{n}) C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{1}{\pi} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}$.

9. Скористатися рівністю $M[\psi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dF_X(x)$ і властивостями інтеграла.

10. Для обчислення $M[\psi(x)]$ скористатися комп’ютерними програмами і перевірити зростання функції $\psi(x)$. Щодо невідомих параметрів, див. задачу 6 §3.5.

11. 1) 1. $M[X] = 0{,}8$; $M[Y] = 1{,}6$; $M[Z] = 2{,}4$.

2. $Mo[X] = 1$; $Mo[Y] = 2$; $Mo[Z] = 3$; медіани не існують.

2) 1. $M[X] = 0{,}2$; $M[Y] = 0{,}3$; $M[Z] = -0{,}1$.

2. $Mo[X]=1$; $Mo[Y]=1$; $Mo[Z]=0$; медіани не існують.

3) 1. $M[X]=1{,}2$; $M[Y]=2$; $M[Z]=2{,}4$.

2. $Mo[X]=1$; $Mo[Y]=Mo[Z]=2$; медіани не існують.

4) 1. $M[X]=1{,}6$; $M[Y]=1{,}5$; $M[Z]=1{,}2$; 2. $Mo[X]=1$; $Me[X]=2$; $Mo[Y]=1$ або $Mo[Y]=2$; $Me[Y]=2$; $Mo[Z]=1$, $Me[Z]$ не існує.

5) 1. $c=\frac{1}{6}$; $a=\frac{1}{2}$; $M[X]=\frac{7}{3}$; $M[Y]=\frac{9}{4}$; $M[Z]=\frac{83}{12}$.

2. $Mo[X]=3$; $Mo[Y]=3$; $Mo[Z]=7$; медіани не існують.

6) 1. $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ або $\beta=(2n+1)\pi$; $M[X]=M[Y]=1$; $M[Z]=-1$.

2. $Mo[X]=1$; $Mo[Y]=1$ або $Mo[Y]=2$; $Mo[Z]=1$ або $Mo[Z]=-3$; медіани не існують.

7) 1. $c=1$, $\alpha=-1$; $M[X]=M[Y]=\frac{3}{2}$; $M[Z]=\frac{3}{16}$.

2. $Mo[X]=1$ або $Mo[X]=2$; $Me[X]=2$; $Mo[Y]=0$ або $Mo[Y]=1$; $Me[Y]=1$; $Mo[Z]=0$, $Me[Z]=\frac{1}{4}$.

12. 1) 1. $M[X]$ не існує; $M[Y]=1$; $M[Z]$ – не існує.

2. $Mo[X]=0$; $Me[X]=0$; $Mo[Y]$ – будь-яка точка з проміжку $(0;2)$; $Me[Y]=1$.

2) 1. $M[X]$, $M[Y]$ і $M[Z]$ – не існують.

2. $Mo[X]=Mo[Y]=0=Me[X]=Me[Y]$.

3) 1. $M[X]=\frac{1}{|\lambda|}$; $M[Y]=0$; $M[Z]=0$.

2. $Mo[X]=0$; $Me[X]=\frac{1}{|\lambda|}\ln 2$; $Mo[Y]$ – будь-яка точка з проміжку $(-1;1)$.

4) 1. $M[X]=\frac{1}{|\lambda|}$; $M[Y]=-\frac{1}{|\lambda|}$; $M[Z]=\frac{2}{|\lambda|}$.

2. $Mo[X]=Mo[Y]=0$; $Me[X]=\frac{1}{|\lambda|}\ln 2$; $Me[Y]=-\frac{\ln 2}{|\lambda|}$.

5) 1. $M[X]=2$; $M[Y]=-2$; $M[Z]=-\ln 3$.

2. $Mo[X]$ – будь-яка точка з проміжка $(1;3)$; $Mo[Y]$ – будь-яка точка з проміжка $(-3;-1)$; $Me[X]=2$; $Me[Y]=-2$.

Для знаходження $Mo[Z]$ і $Me[Z]$ скористатися результатами задачі 18 §3.6 і комп’ютерними програмами.

13. 1) 1. $M[X]=1$, $M[Y]=0$; $M[Z]=\frac{17}{24}$.

2. $Mo[X]$ – будь-яка точка з проміжка $(0;2)$; $Mo[Y]$ – будь-яка точка з проміжка $(-1;1)$; $Me[X]=1$; $Me[Y]=0$.

2) 1. $M[X]=0$; $M[Y]=\frac{1}{2}$; $M[Z]=-\frac{1}{2}$.

2. $Mo[X]$ – будь-яка точка з проміжка $(-1;1)$; $Mo[Y]=0$; $Me[X]=0$; $Me[Y]=\frac{\ln 2}{2}$.

3) 1. $M[X]=\frac{1}{2}$; $M[Y]=\frac{1}{3}$; $M[Z]=\frac{4}{3}$.

2. $Mo[X]=0$; $Mo[Y]=0$; $Me[X]=\frac{\ln 2}{2}$; $Me[Y]=\frac{\ln 2}{2}$.

4) 1. $M[X]=\frac{3}{2}$; $M[Y]$ і $M[Z]$ – не існують.

2. $Mo[X]$ – будь-яка точка з проміжка $[1;2]$; $Mo[Y]=0$; $Me[X]=\frac{3}{2}$; $Me[Y]=1$.

5) Скористатися 4).

Для знаходження $Mo[Z]$ і $Me[Z]$ скористатися результатами задачі **17** §3.6 і комп'ютерними програмами.

14. 1) Якщо $P(X=x_k)=p_k=\frac{1}{n}$, $k\in\overline{1,n}$, то $Mo[X]$ – будь-яка точка x_k, $k\in\overline{1,n}$; $Me[X]=x_{m+1}$, коли $n=2m$ і $x_1<x_2<\ldots<x_{2m}$.

2) $Mo[X]=[(n+1)p]$, а якщо $(n+1)p$ – ціле число, то модою є і число $(n+1)p$. $Me[X]$ існує тоді і тільки тоді, коли існує число i_0, для якого $\sum_{i=0}^{i_0} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}=\frac{1}{2}$. При цьому $Me[X]=i_0+1$.

3) $Mo[X]=0$; $Me[X]$ існує тоді і тільки тоді, коли існує число i_0, для якого $\sum_{i=0}^{i_0} p(1-p)^i=\frac{1}{2}$. При цьому $Me[X]=i_0+1$. Наприклад, якщо $p=\frac{1}{2}$, то $Me[X]=1$.

4) $Mo[X]=[a-1]$; $Me[X]$ існує тоді і тільки тоді, коли існує число i_0, для якого $\sum_{i=0}^{i_0} e^{-a}\frac{a^i}{i!}=\frac{1}{2}$. При цьому $Me[X]=i_0+1$.

5) $Mo[X]$ – будь-яка точка з проміжка $(a;b)$, $Me[X]=\frac{a+b}{2}$.

6) $Mo[X]=x_0$; $Me[X]=x_0$.

7) $Mo[X]=Me[X]=x_0$.

8) $Mo[X]=0$, коли $\alpha \le 1$, і $Mo[X]=\frac{\alpha-1}{\beta}$, коли $\alpha>1$.
$Me[X]=x*$, коли $\int\limits_0^{x'} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, dx = \frac{1}{2}$.

3.9

1. Так – 2-6, 8, 9, 11, 12, 14-16, 18, 19; усі інші – ні.

2. 1. Скористатися тим, що кожна опукла функція є неперервною, а тому й борелівською.

2. Ні, див. задачу 6 §3.8.

3. 1. Скористатися відповідним означенням.

2. 1) 1; 2) a; 3) $a(1+a)$; 4) $a(a^2+3a+1)$; 5) $a(a^3+6a^2+7a+1)$; 6) $a(a^4+10a^3+25a^2+15a+1)$; 7) $a(a^5+15a^4+65a^3+90a^2+31a+1)$.

4. 1. $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)(b-a)}$. 2. 0, коли $m=2k-1$; $\frac{1}{m+1}(\frac{b-a}{2})^m$, коли $m=2k$. 3. $\frac{b^m}{m+1}$. 4. $\frac{1}{m+1}(\frac{b-a}{2})^m$.

5. 0, коли $m=2k-1$; $(m-1)!\sigma^m I_o$, коли $m=2k$, де $I_o=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$.

6. 1. Скористатися відповідним означенням і теоремою про заміну змінної в інтегралі.

2. а) 1) $M[X^m]=\sum\limits_k x_k^m p_k$; 2) $M[|X|^m]=\sum\limits_k |x_k|^m\, p_k$;

3) $M[(X-a)^m]=\sum\limits_k (x_k-a)^m p_k$;

б) 1) $M[X^m]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^m f_X(x)\,dx$; 2) $M[|X|^m]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^m\, f_X(x)\,dx$;

3) $M[(X-a)^m]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^m f_X(x)\,dx$.

7. 1. Це властивість інтеграла Лебега-Стілтьєса.

2 і 3. Це наслідок нерівності Ляпунова.

8. Це наслідок властивостей інтеграла Лебега-Стілтьєса.

9. 1. Застосувати нерівність Чебишова для $Y=|X-M[X]|^2$ і $\varepsilon=k^2 D[X]$.

2. В нерівності 1.2) покласти $k=3$.

3. $P(|X-a|<3\delta)=a\Phi(3)=0{,}9973>\dfrac{8}{9}$.

10. Скористатися методом математичної індукції.

11. 1. $\Omega_1^m=\{E=(E_1,\ldots,E_m):E_i\in\{A,\overline{A}\},i\in\overline{1,m}\}$.

2. $Y_i(E)=\begin{cases}0, & \text{коли } E\notin A_i,\\ 1, & \text{коли } E\in A_i.\end{cases}$

3. Скористатися відповідним означенням.

4. $D[Y_i]=p(1-p)$, $i\in\overline{1,m}$, $D[X]=mp(1-p)$.

12. 1. Скористатися тим, що $X(E)=X(\underbrace{\overline{A}\ldots\overline{A}}_{k-1}A)=k-1$, $E\in\Omega=\{A,\overline{A}A,\overline{A}\overline{A}A,\ldots,\underbrace{\overline{A}\ldots\overline{A}}_{k-1}A,\ldots\}$, а $P(\underbrace{\overline{A}\ldots\overline{A}}_{k-1}A)=p(1-p)^{k-1}$, $k\in N$.

2. Скористатися відповідним означенням.

3. 1) $\dfrac{1-p}{p}$; 2) $\dfrac{1-p}{p}\cdot\dfrac{2-p}{p}$ 3) $\dfrac{1-p}{p^2}$; 4) $\dfrac{1-p}{p}(1+\dfrac{6(1-p)}{p^2})$.

13. 1) $M[X]=m\dfrac{1-p}{p}$; $D[X]=m\dfrac{1-p}{p^2}$;

2) $M[X]=\dfrac{nN_1}{N}$; $D[X]=\dfrac{nN_1(N-N_1)}{N^2}(1-\dfrac{n-1}{N-1})$;

3) $M[X]=x_0$; $D[X]=\dfrac{\alpha^2}{3}$;

4) $M[X]$ і $D[X]$ не існують;

5) $M[X]=x_0$; $D[X]=2\beta^2$;

6) $M[X]=\dfrac{\alpha}{\beta}$; $D[X]=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$.

14. 1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\ln 2$; 2) $\dfrac{2}{\pi}$; 3) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\pi}\ln 2-\dfrac{\ln^2 2}{\pi^2}$; 4) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}(1-\ln 2)$.

15. 1) $\dfrac{2}{\pi}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}$; 4) $\dfrac{4}{3\pi}$.

16. 1. $P(X=i)=\dfrac{C_{33}^{6-i}C_6^i}{C_{39}^6}$, $i\in\overline{0,6}$.

$$M[X]=\frac{1}{C_{39}^6}\sum_{i=1}^{6}i^2C_{33}^{6-i}C_6^i;\ D[X]=\frac{1}{C_{39}^6}\sum_{i=1}^{6}i^2C_{33}^{6-i}C_6^i-M^2[X].$$

2. $P(X=0)=\dfrac{25}{36}$; $P(X=1)=\dfrac{10}{36}$; $P(X=2)=\dfrac{1}{36}$.

$M[X]=\dfrac{1}{3}$; $D[X]=\dfrac{5}{18}$.

3. $P(X=i)=C_4^i p^i (1-p)^{4-i}$, $i\in\overline{0,4}$.

$M[X]=0{,}24$; $D[X]=0{,}036$.

4. $P(X=0)=0{,}12$; $P(X=1)=0{,}46$; $P(X=2)=0{,}42$;

$M[X]=1{,}3$; $D[X]=0{,}45$.

5 і 6. $P(X=k-1)=p(1-p)$. Див. задачу **12**.

7. $P(X=0)=\dfrac{7}{15}$; $P(X=1)=\dfrac{7}{15}$; $P(X=2)=\dfrac{1}{15}$;

$M[X]=\dfrac{3}{5}$; $D[X]=\dfrac{28}{75}$.

8. $P(X=k)=C_{3000}^k p^k (1-p)^{3000-k}$, $k\in\overline{0,3000}$.

$M[X]=3$; $D[X]=2{,}997$.

9. $M[X]=10$; $D[X]=9{,}99$.

10. $M[X]=\dfrac{3}{4}$; $D[X]=\dfrac{11}{16}$.

11. $c=0{,}3$; $M[X]$ і $D[X]$ обчислити за допомогою комп'ютерними програмами.

12. $M[X]=\dfrac{n+1}{2}$; $M[X]=\dfrac{n^2-1}{12}$.

13. $P(X=k)=C_{1000}^k p^k (1-p)^{1000-k}$, $p=0{,}96$, $k\in\overline{0,1000}$.

$M[X]=960$; $D[X]=38{,}4$.

14. $M[X]=0$; $D[X]=\dfrac{\pi c^2}{2}$.

15. $M[X]=0$; $D[X]=\dfrac{4}{3}$.

16. $A=\dfrac{1}{2}$; $M[X]=\dfrac{\pi}{2}$; $D[X]=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi^2}{2}-4)$.

17. $M[X]=\dfrac{t}{2}$; $D[X]=\dfrac{t^2}{12}$.

18. $a=\dfrac{1}{2}$; $b=\dfrac{1}{\pi}$; див. задачу 14).

19. Скористатися комп'ютерними програмами.

20. $M[X]=2{,}2$; $M[Y]=2{,}2$; $D[X]=0{,}76$; $D[Y]=0{,}36$. У другого стрільця розсіювання є меншим, ніж у першого.

17. 1) $a=16$; $M[\psi(X)]=\dfrac{17}{320}$; $D[\psi(X)]=\dfrac{22}{2^9\cdot 9}-\dfrac{289}{2^{12}\cdot 25}$.

2) $a=2$; $M[\psi(X)]=2$; $D[\psi(X)]=1$.

3) $a=1$; $M[\psi(X)]=\dfrac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$; $D[\psi(X)]=\dfrac{292\sqrt{2}-387}{225}$.

4) $a=\dfrac{1}{2}$; $M[\psi(X)]=0$; $D[\psi(X)]=\dfrac{1}{3}$.

5) $a=\dfrac{2}{\ln 2}$; $M[\psi(X)]=\dfrac{4}{\ln 2}(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4})$; $D[\psi(X)]=\dfrac{1}{2\ln 2}-\dfrac{16}{\ln^2 2}(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4})^2$.

6) $a=\dfrac{1}{4}$; $M[\psi(X)]=-16$; $D[\psi(X)]=994\dfrac{2}{7}$.

18. 1) $M[X]=\dfrac{\pi}{2}-1$; $D[X]=\pi+1$.

2) $0\le a\le\dfrac{1}{4}$, $M[X]=\dfrac{27-64a}{3}$; $D[X]=81\cdot(1-4a)+4a\cdot\dfrac{287}{15}-(\dfrac{27-64a}{3})^2$.

3) $M[X]=2$, $D[X]=1$, коли $\alpha=1$;

$M[X]=2$, $D[X]=\dfrac{2-\alpha}{\alpha}$, коли $0<\alpha<1$;

$M[X]=1$, $D[X]=0$, коли $\alpha=0$.

4) $M[X]=1$; $D[X]=\pi-3$;

5) $M[X]=\dfrac{5}{2}$; $D[X]=\dfrac{325}{21}-\dfrac{125}{8}$;

6) $M[X]=0{,}3$; $D[X]=0{,}004$.

19. Скористатися тим, що $X+Y=(1+a)X$ і властивостями математичного сподівання.

20. Скористатися тим, що $XY=aX^2$.

21. Обчислити $M[X]$ і $M[\cos X]$.

22. Розглянути $X_1=\sqrt{X^p}$ і $X_2=\sqrt{X^{-p}}$.

23. 1. Обчислити $M[X_1]=\int\limits_{-\infty}^{a} xf_{X_1}(x)\,dx+\int\limits_{a}^{+\infty} xf_{X_1}(x)\,dx$ за допомогою заміни змінної $x=t+a$.

2. Обчислити $M[X_1^k]$ і $M[X_2^k]$ за допомогою інтеграла.

3.10

1. Так – 8; усі інші – ні.

2. Скористатися відповідним означенням і властивостями математичного сподівання.

3. Скористатися відповідними означеннями.

4. 1) 1. $K_{11}=D[X_1]=0{,}171$, $K_{22}=D[X_2]=0{,}44$, $K_{12}=K_{21}=0$.

2. $D[a_1X_1+a_2X_2+b]=a_1^2D[X_1]+a_2^2D[X_2]$.

2) 1. $K_{11}=0{,}1411$, $K_{22}=0{,}2811$, $K_{21}=K_{12}=0{,}0457$.

2. $D[a_1X_1+a_2X_2+b]=a_1^2D[X_1]+2a_1a_2K_{12}+a_2^2D[X_2]$.

3)-8) Скористатися комп'ютерними програмами.

5. 1) 1. $a=6$; $K_{11}=\int\limits_0^1(x-\frac{4}{5})^2\,dx\int\limits_{0,5x}^{x}6(xy+y^2)\,dy=D[X]$,

$$K_{12}=K_{21}=\int\limits_0^1(x-\frac{4}{5})\,dx\int\limits_{0,5x}^{x}6(y-\frac{101}{160})(xy+y^{2)}\,dy=K[X,Y],$$

$$K_{22}=\int\limits_0^1dx\int\limits_{0,5x}^{x}6(y-\frac{101}{160})(xy+y^{2)}\,dy=D[Y].$$

Обчислити інтеграли. X і Y корельовані, а тому й залежні.

2-3. $r[X,Y]=\dfrac{K[X,Y]}{\sqrt{D[X]}\sqrt{D[Y]}}=\cos\varphi$, φ – кут між X та Y у просторі L^2.

2) 1. X і Y незалежні, а тому некорельовані,

$$K_{12}=K_{21}=K[X,Y]=0,\ K_{11}=K_{22}=D[X]=D[Y]=\frac{13}{192}.$$

2-3. $r[X,Y]=0$. Лінійної залежності немає. $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

3) 1. $K_{11}=\sigma_1^2$; $K_{22}=\sigma_2^2$, $K_{12}=K_{21}=\sigma_1\sigma_2 r$. X і Y незалежні тоді й тільки тоді, коли $r=0$.

2. $r[X,Y]=r\neq\pm1$. Лінійної залежності між X і Y немає.

3. $\varphi=\arccos r$.

4) 1. $a=\dfrac{\sqrt{7}}{2\pi}$; $K_{11}=\dfrac{2}{7}$, $K_{22}=\dfrac{4}{7}$, $K_{12}=K_{21}=\dfrac{1}{7}$. X і Y корельовані, а тому й залежні.

2. $r[X,Y]=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\neq\pm1$, а тому лінійної залежності між X і Y немає.

3. $\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

5) 1. $a=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$, $\sigma_1^2=\dfrac{5}{31}$, $\sigma_2^2=\dfrac{2}{31}$, $r=\dfrac{-3}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

$K_{11}=\sigma_1^2$. $K_{22}=\sigma_2^2$, $K_{12}=K_{21}=\sigma_1\sigma_2 r\neq 0$. Тому X і Y корельовані, а отже й залежні.

2. $r[X,Y]=r\neq\pm 1$, а тому лінійної залежності між X і Y немає.

3. $\varphi=\arccos(-\frac{3\sqrt{10}}{20})$.

6) 1. $a=\frac{1}{4}$, X і Y незалежні, а тому й некорельовані; $K_{11}=K_{22}=\frac{2}{9}$, $K[X,Y]=0=K_{12}=K_{21}$.

2. $r[X,Y]=0$, а тому лінійної залежності між X і Y немає.

3. $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

7) 1. $a=\frac{1}{(e-1)^2}$; X і Y незалежні, а тому некорельовані; $K_{12}=K_{21}=K[X,Y]=0$; $K_{11}=K_{22}=D[X]=D[Y]=\frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}$.

2. $r[X,Y]=0$, а тому лінійної залежності між X і Y немає.

3. $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

8) $a=\frac{1}{4}$. Висновки як у 7), тільки $D[X]=\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{2}-4)$.

9) Висновки, як у 7), тільки $D[X]=1$.

10) 1. $K_{11}=K_{22}=D[X]=D[Y]=\frac{5}{48}$; $K_{12}=K_{21}=K[X,Y]=\frac{1}{32}$, а тому X і Y корельовано, отже й залежні.

2. $r[X,Y]=\frac{3}{5}\neq\pm 1$, а тому лінійної залежності між X і Y немає.

3. $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$.

11) 1. $k=\frac{1}{(b-a)^2}$; X і Y незалежні, а тому некорельовані; $K_{11}=K_{22}=\frac{(b-a)^2}{12}$; $K_{12}=K_{21}=K[X,Y]=0$.

2. $r[X,Y]=0$, а тому лінійної залежності між X і Y немає.

3. $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

12) 1. X і Y залежні, проте некорельовані, оскільки $K[X,Y]=0=K_{11}=K_{21}$, $K_{11}=K_{22}=\frac{1}{3}$.

2. $r[X,Y]=0$, а тому лінійної залежності між X і Y немає.

3. $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

6. Позначити $P(X=x_1)=p_x$, $P(X=x_2)=1-p_x$, $P(Y=y_1)=p_y$ і $P(Y=y_2)=1-p_y$. Після цього знайти $M[X]$, $M[Y]$ і $K[X,Y]$. Проаналізувати, коли $K[X,Y]=0$.

7. 1. $K[X_1,X_2]=-np_1p_2$.

2. X_1 і X_2 корельовані, а тому й залежні.

3. $r\{X,Y]=\frac{-1}{\sqrt{1-p_1}\sqrt{1-p_2}}<-1$, а тому лінійної залежності між X і Y немає.

8. $K[X_1,X_6]=0$.

9. Обчислити $M[X_i^*]$, $r[X_1,X_2]$, $r[a_1X_1+b_1,a_2X_2+b_2]$, $D[X_1^*\pm X_2^*]$ і зробити відповідні висновки.

10. $K[X,Y]=0$, проте X і Y залежні.

11. $K[X,Y]=0$, проте X і Y залежні.

12. 1. $\Omega_1^5=\{E=(E_1,\ \ldots,E_5):E_i\in\{Г,Ц\},i\in\overline{1,5}\}$. Див. задачу **9** §3.2.

2. 1)

y_j \ x_i	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{5}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$
2	0	0	$\frac{6}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{3}{32}$	0
3	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0

2)

$z_j \backslash x_i$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{1}{32}$	0	0
2	0	0	$\frac{4}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{1}{32}$	0
3	0	0	0	$\frac{3}{32}$	$\frac{2}{32}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{2}{32}$	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$

3)

$y_i \backslash z_j$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{5}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$
2	0	0	$\frac{6}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	0
3	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0

3. 1) $U = X + Y$

u_i	0	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{5}{32}$

2) $V = XY$

v_i	0	1	2	3	4	5	6	8	9
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

4. $K[U,V] = \frac{23}{16}$.

3.11

1. Так – 1, 4-8, 10; усі інші – ні.

2. 1) $P_{X/Y}(\{x_j\}/\{y_i\}) = \begin{cases} 0, \text{ коли } x_j \neq y_i, \\ 1, \text{ коли } x_j = y_i, \end{cases} = P_{Y/X}(\{y_i\}/\{x_j\})$

x_j	0	1	2	3
$p_j^{(1)}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

y_i	0	1	2	3
$p_i^{(2)}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

X і Y залежні.

$z_{0,i}$	1	0
$p_{0,i}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

$z_{1,i}$	0	1
$p_{1,i}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

$z_{2,i}$	0	1
$p_{2,i}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

$z_{3,i}$	0	1
$p_{3,i}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

Аналогічні таблиці для $W_i = P_{Y/X}(\{y_i\}/X) = (w_{i,j})$.

2)-8) Скористатися комп'ютерними програмами.

3. 1) 1. $k = \frac{1}{2a^2}$; X і Y залежні;

$$f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} 0, \text{ коли } |x|+|y|>a, \\ \frac{1}{2(x+a)}, \text{ коли } |x|+|y|<a, \ -a>x>0, \\ \frac{1}{2(a-x)}, \text{ коли } |x|+|y|<a, \ 0<x<a. \end{cases}$$

Аналогічний вираз для $f_{X/Y}(x/y)$.

2. $P_{X/Y}(B/y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int\limits_{a_1}^{b_1} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx + \int\limits_{a_2}^{b_2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$.

Обчислити ці інтеграли.

2) 1. $k = \frac{1}{a^3}$; $\quad f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} 0, \text{ коли } (x,y) \notin [0;a]\times[0;a], \\ \frac{2(x+y)}{a(2x+a)}, \text{ коли } (x,y) \in [0;a]\times[0;a]. \end{cases}$

X і Y залежні.

2. Див. 1).

3) 1. $k = 4$; $\quad f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} 0, \text{ коли } (x,y) \notin [0;1]\times[0;1], \\ 2y, \text{ коли } (x,y) \in [0;1]\times[0;1]. \end{cases}$

X і Y незалежні.

2. Див. 1).

4) 1. $k=\dfrac{1}{(e-1)^2}$; $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}0, & \text{коли } (x,y)\notin[0;1]\times[0;1],\\ \dfrac{e^x}{e-1}, & \text{коли } (x,y)\in[0;1]\times[0;1].\end{cases}$

X і Y незалежні.

2. Див. 1).

5) 1. $k=\dfrac{6}{7}$; $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}0, & \text{коли } (x,y)\notin[0;1]\times[0;1],\\ \dfrac{(x+y)^2}{3x^2+3x+1}, & \text{коли } (x,y)\in[0;1]\times[0;1].\end{cases}$

X і Y залежні.

2. Див. 1).

6) 1. $k=4$; $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0 \text{ або } y\le 0,\\ 2ye^{-y^2}, & \text{коли } x>0 \text{ і } y>0.\end{cases}$

X і Y незалежні.

2. Див. 1).

7) 1. $k=6$; $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}0, & \text{коли } (x,y)\notin D,\\ \dfrac{6(x-y)}{3x^2}, & \text{коли } (x,y)\in D.\end{cases}$

X і Y залежні.

2. Див. 1).

8) 1. $k=\dfrac{1}{\pi R^2}$; $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x^2+y^2>R^2,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{R^2+x^2}}, & \text{коли } x^2+y^2<R^2.\end{cases}$

X і Y залежні.

2. Див. 1).

4. $k=\dfrac{1}{10}$.

1) $\Omega_Y=\{-1,0,1\}$; $D_Y=\{(2;3),[2,3],(-\infty;2)\bigcup(3;+\infty)\}$;

$$P(A/Y)(E)=\begin{cases}0, & \text{коли } E\in[-2;3],\\ \dfrac{2}{9}, & \text{коли } E\notin[-2;3].\end{cases}$$

2) $\Omega_Y=\{0,-1,1,-2,2,\dots\}$; $D_Y=\{[0;1),[-1;0),[1;2),[-2;-1),[2;3),\dots\}$;

$$P(A/Y)(E)=\begin{cases}1, & \text{коли } E\in(-2;-1)\bigcup(1;2),\\ 0, & \text{коли } E\notin(-2;-1)\bigcup(1;2).\end{cases}$$

3) $\Omega_Y=\{0,-1,1\}$, $D_Y=\{\{k-\text{ціле}\},\ \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(-1+2k;2k),\ \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(2k;1+2k)\}$

$P(A/Y)(E)=0$ майже скрізь.

4) $\Omega_Y = \{1, \frac{\pi}{2}\}$; $D_Y = \{[-1;1], R \setminus [-1;1]\}$;

$$P(A/Y)(E) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{коли} \quad E \in [-1;1], \\ \frac{1}{8}, & \text{коли} \quad E \notin [-1;1]. \end{cases}$$

5) $\Omega_Y = \{-1, 1, 2\}$;

$$D_Y = \{\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z\}, \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)\};$$

$$P(A/Y)(E) = \begin{cases} \text{довільне}, & \text{коли} \quad E = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z, \\ \dfrac{1 + \frac{\pi}{2}}{10 - 2\pi}, & \text{коли} \quad E \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \\ \dfrac{2 - \frac{\pi}{2}}{2\pi}, & \text{коли} \quad E \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi). \end{cases}$$

6) $\Omega_Y = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$, $D_Y = \{[-1;1], R \setminus [-1;1]\}$;

$$P(A/Y)(E) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{коли} \quad E \in [-1;1], \\ \frac{1}{4}, & \text{коли} \quad E \notin [-1;1]. \end{cases}$$

7) $\Omega_Y = \{0, 1, 2, \ldots\}$;

$$D_Y = \{(-1;1), (-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}), (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{3}), \ldots\};$$

$$P(A/Y)(E) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{коли} \quad E \in (-1;1) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}), \\ \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})}, & \text{коли} \quad E \in [-\sqrt{3}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{3}), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5. 1. Скористатися тим, що $(X \le x)(Y > y) = \prod_{k=1}^{n} (y < X_k \le x)$ та незалежністю випадкових величин X_k.

2. Скористатися тим, що

$$P((Y>y)/X=x)=\lim_{h\to 0}\frac{P((Y>y)(x\le X<x+h))}{P(x\le X<x+h)}.$$

3. Скористатися твердженням 2.

3.12

1. Так – 1, 4, 6, 12, 16, 17, 25-27; усі інші – ні.

2. 1) 1. $M[X_1/D](E)=I_{[0;\frac{1}{2})}(E)+2I_{[\frac{1}{2};1)}(E)$; 2. Так.

3. $M[X_1/[0;\frac{1}{3}]]=1$; 4. $M[X_1/W(D)]=I_{[0;\frac{1}{2})}(E)+2I_{[\frac{1}{2};1)}(E)$;

5. $P(B/W(D)=\frac{1}{4}I_{[0;\frac{1}{3})}(E)+I_{[\frac{1}{3};\frac{2}{3})}(E)+\frac{1}{4}I_{[\frac{2}{3};1)}(E)$. 6. $P(B/X_1)=\frac{1}{2}$;

7. $M(X_1/(X_5=-1)]=1$; 8. $M(X_1/X_5)=I_{[0;\frac{1}{2})}(E)+2I_{[\frac{1}{2};1)}(E)$.

2) 1. $M(X_2/D)(E)=\frac{1}{2}I_{[0;\frac{1}{3})}(E)-\frac{1}{2}I_{[\frac{2}{3};1)}(E)$; 2. Ні;

3. $M[X_2/[0;\frac{1}{3})]=\frac{1}{2}$; 4. $M[X_2/W(D)]=\frac{1}{2}I_{[0;\frac{1}{3})}(E)-\frac{1}{2}I_{[\frac{2}{3};1)}(E)$;

5. $P(B/W(D)=\frac{1}{4}I_{[0;\frac{1}{3})}(E)+I_{[\frac{1}{3};\frac{2}{3})}(E)+\frac{1}{4}I_{[\frac{2}{3};1)}(E)$; 6) $P(B/X_2)=\frac{1}{2}$.

3) 1. $M(X_3/D)(E)=\frac{4}{3}I_{[0;\frac{1}{2})}(E)+\frac{8}{3}I_{[\frac{1}{2};1)}(E)$; 2. Ні;

3. $M[X_3/[0;\frac{1}{2})]=\frac{4}{3}$; 4. $M[X_3/W(D)]=\frac{1}{3}I_{[0;\frac{1}{2})}(E)+\frac{8}{3}I_{[\frac{1}{2};1)}(E)$;

5. $P(B/W(D)=\frac{1}{2}I_{[0;1)}(E)$;

6. $P(B/X_3)=\frac{1}{4}I_{[0;\frac{1}{3})}(E)+I_{[\frac{1}{3};\frac{2}{3})}(E)+\frac{1}{4}I_{[\frac{2}{3};1)}(E)$.

4) 1. $M(X_4/D)(E)=\frac{4}{3}I_{[\frac{1}{2};1)}(E)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{2}{n(n+1)}I_{[0;\frac{1}{2})}(E)$; 2. Ні;

3. $M[X_4/[0;\frac{1}{2})]=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$;

4. $M[X_4/W(D)]=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}I_{[0;\frac{1}{2})}(E)+I_{[\frac{1}{2};1)}(E)$; 5. $M(B/W(D)=\frac{1}{2}$;

6. $M(B/X_4)=I_{[\frac{1}{4};\frac{1}{2})}(E)+\frac{1}{2}I_{[\frac{1}{2};\frac{3}{4})}(E)$.

5) 1. $M(X_5/D)(E)=-I_{[0;\frac{1}{2})}(E)+I_{[\frac{1}{2};1)}(E)$; 2. Так;

3. $M[X_5/[\frac{1}{2};1)]=1$; 4. $M[X_5/W(D)]=I_{[\frac{1}{2};1)}(E)-\sum_{n=2}^{\infty}I_{[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n})}(E)$;

5. $P(B/W(D)=I_{[\frac{1}{4};\frac{1}{2})}(E)+\frac{1}{2}I_{[\frac{1}{2};1)}(E)$; 6. $P(B/X_5)=\frac{1}{4}I_{[0;1)}(E)$.

3*. 1. Так; 2. $M[X/S]=X(E), E\in\Omega$.

4. 1) 1. $k=\frac{1}{2}$; $M[X^2/Y]=\begin{cases}0, \text{ коли } Y\le -1 \text{ або } Y\ge 1,\\ \frac{(1+Y)^2}{3}, \text{ коли } -1<Y\le 0,\\ \frac{(1-Y)^2}{3}, \text{ коли } 0<Y\le 1.\end{cases}$

2. $g(X)=M[Y/X]=\begin{cases}0, \text{ коли } X\le -1 \text{ або } X>1,\\ \frac{1+X}{2}, \text{ коли } -1<X\le 0,\\ \frac{1-X}{2}, \text{ коли } 0<X\le 1.\end{cases}$

2) 1. $k=1$; $M[2X+1/Y]=\begin{cases}0, \text{ коли } Y\le 0 \text{ або } Y>1,\\ \frac{2}{2Y}(\frac{7}{6}+2Y), \text{ коли } 0<Y\le 1.\end{cases}$

2. $g(X)=\begin{cases}0, \text{ коли } X\le 0 \text{ або } X>1,\\ \frac{2}{2X+1}(\frac{X}{2}+\frac{1}{3}), \text{ коли } 0<X\le 1.\end{cases}$

3) 1. $k=4$; $M[(1-2X)/Y]=0$.

2. $g(X)=0$.

4) 1. $k=\frac{1}{\pi}$; $M[\sqrt[3]{X}/Y]=0$

2. $g(X)=0$.

5) 1. $k=6$;

$$M[(X^2+1)/Y]=\begin{cases}0, \text{ коли } Y\notin[0;1],\\ \dfrac{3}{1-3Y+3Y^2}\left(\dfrac{8}{15}-\dfrac{3}{2}Y+\dfrac{4}{3}Y^2\right), \text{ коли } Y\in[0;1].\end{cases}$$

2. $g(X)=\begin{cases}0, \text{ коли } X\notin[0;1],\\ \dfrac{3}{1-3Y+3Y^2}\left(\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{2}{3}X+\dfrac{1}{4}\right), \text{ коли } X\in[0;1].\end{cases}$

5. Скористатися тим, що $g(X)=M[Y/X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y/X}(y/x)\,dy$, а $D[Y/X]=M[(Y-M[Y/X])^2/X]$.

6. 1. Скористатися задачею **5** §3.11.

2. $g(X_*)=\dfrac{1+X_*}{2}$.

3. $f_{Y*/X*}(y/x_1)=\begin{cases}0, \text{ коли } y<x_1 \text{ або } y>1,\\ \dfrac{1}{1-x_1}, \text{ коли } x_1<y\le 1.\end{cases}$

7. 1. $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$; $f_{Y/X}(y/x)=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$;

$f_{X/Y}(x/y)=\dfrac{1+y^2}{2\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$.

2. $M[X]$ не існує; $M[Y/X]=0$.

8*. Скористатися задачею **5** §3.11.

3.13

1. Так – 3, 8, 10-12; усі інші – ні.

2. Рівняння регресії: $x=M[X/Y]$ – це X на Y; $y=M[Y/X]$ – це Y на X.

Рівняння лінійної регресії:

$y-m_Y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)$ – це Y на X.

$x-m_X=r\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y)$ – це X на Y.

1) Рівняння регресій та лінійних регресій $x=\dfrac{2}{3}$ та $y=\dfrac{17}{9}$, тому кореляційна залежність між X та Y – лінійна

$$\rho(Y/X)=\rho(X/Y)=r[X,Y]=0.$$

2) Рівняння регресій та лінійних регресій $x = \frac{1}{3} y$ та $y = \frac{9}{15} + \frac{12}{85} x$, тому кореляційна залежність між X та Y – лінійна

$$\rho(Y / X) = \frac{12}{85}; \ \rho(X / Y) = \frac{1}{3}.$$

3) Рівняння регресій та лінійних регресій $x = 0$ та $y = \frac{5}{2}$; $\rho = (Y / X) = \rho(X / Y) = 0$. Кореляційна залежність між X та Y – лінійна.

4) Див. 3).

5) Висновок, як у 3), тільки $x = 2$, $y = 1$.

6) Висновок, як у 4).

7) Рівняння регресій та лінійних регресій $x = y$ та $y = x$; $\rho(X / Y) = \rho = (Y / X) = 1$. Кореляційна залежність між X та Y – лінійна.

8) Рівняння регресій: $x = f(y)$, де $f(0) = 3$, $f(1) = \frac{5}{3}$; $f(2) = \frac{4}{3}$; $f(3) = 0$; $y = g(x)$, де $g(0) = 2$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 1$.

$$\rho(X / Y) = -\frac{5}{6}, \ \rho(Y / X) = -\frac{5}{14}.$$

Рівняння лінійних регресій: $y - \frac{3}{2} = -\frac{5}{14}(x - \frac{3}{2})$, $x - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6}(y - \frac{3}{2})$ не співпадають з рівняннями регресій. Кореляційна залежність між X та Y не є лінійною.

3. 1) $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\rho \in (-1;1)$. Рівняння регресій і лінійних регресій: $y = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x$, $x = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} y$. Кореляційна залежність між X та Y є лінійною.

2) $a > 0$, $b > 0$. Рівняння регресій і лінійних регресій: $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$; $\rho(Y / X) = \rho(X / Y) = 0$. Кореляційна залежність між X та Y лінійна.

3) $k = \frac{1}{\pi}$. Рівняння регресій і лінійних регресій: $x = 0$, $y = 0$; $\rho(Y / X) = \rho(X / Y) = 0$. Кореляційна залежність між X та Y лінійна.

4) $k=\frac{1}{2}$. Рівняння регресій і лінійних регресій: $x=\frac{1}{2}$, $y=1$; $\rho(Y/X)=\rho(X/Y)=0$. Кореляційна залежність між X та Y лінійна.

5) $k=\frac{e}{(e-1)^2}$. Висновок як у 4), тільки $x=\frac{1}{e-1}$, $y=\frac{e-2}{e-1}$.

6) $k=\frac{1}{(e-1)^2}$. Висновок як у 4), тільки $x=\frac{1}{e-1}$, $y=\frac{1}{e-1}$.

7) $k=4$. Висновок як у 4), тільки $x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3.14

1. Так – 1, 2, 8, 13б), 18, 20, 23, 24; усі інші – ні.

2. 1) Випадкова послідовність з траєкторією $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, що відповідає $E_0=0$.

2) Це частинний випадок 1), коли $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$.

3) Послідовність випадкових величин з траєкторією $((1+\frac{1}{1})^1, (1+\frac{1}{2})^2, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n, \ldots)$, що відповідає $E_0=1$.

4) Послідовність випадкових величин з траєкторією $(1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{2}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, \ldots)$, коли $E_0=0\in A$ та $(0,0,\ldots,0,\ldots)$, коли $E_0=0\notin A$.

5) Не є випадковим процесом.

6)-9) – випадкові процеси з неперервним часом.

3. 1. 1) $W=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots): x_1\in[0;1], x_k\in R, k\ge 1\}$;

$$np_{R_1}W=[0;1],\ np_{R_1\times R_2}W=\{(x_1,x_2): x_1\in[0;1], x_2\in R\},$$

$$np_{R_1\times R_2\times R_3}W=\{(x_1,x_2,x_3): x_1\in[0;1], x_2\in R, x_3\in R\}.$$

2) $W=\{(x_1, 0, .x_3, .., x_n, \ldots): x_1\in[0;1], x_2=0, x_k\in R, k\ge 3\}$;

$$np_{R_1}W=np_{R_1\times R_2}W=[0;1],$$

$$np_{R_1\times R_2\times R_3}W=\{(x_1,0,x_3): x_1\in[0;1], x_3\in R\}$$

3) $W=\{(x_1, 0, .0, x_4, .., x_n, \ldots): x_1\in[0;1], x_2=x_3=0, x_k\in R, k\ge 4\}$;

$$np_{R_1}W=np_{R_1\times R_2}W=np_{R_1\times R_2\times R_3}W=[0;1].$$

4) $W=\{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots): x_1 \text{ і } x_2\in[0;1], x_k\in R, k\ge 3\}$

$$np_{R_1}W=[0;1],\ np_{R_1\times R_2}W=[0;1]\times[0;1],$$

$$np_{R_1\times R_2\times R_3}W=[0;1]\times[0;1]\times R.$$

5) $W=\{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots): x_2 \text{ і } x_3\in[0;1], \text{а інші } x_k\in R\}$;

$np_{R_1}W=R_1$; $np_{R_1\times R_2}W=R\times[0;1]$; $np_{R_1\times R_2\times R_3}W=R\times[0;1]\times[0;1]$.

6) $W=\{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots): x_2 \text{ і } x_3 \in[0;1], \text{інші } x_k\in R\}$;

$np_{R_1}W=[0;1]$; $np_{R_1\times R_2}W=[0;1]\times R$; $np_{R_1\times R_2\times R_3}W=[0;1]\times R\times[0;1]$.

7) $W=\{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots): x_1, x_2 \text{ і } x_3 \in[0;1], \text{а інші } x_k\in R\}$;

$$np_{R_1}W=[0;1];\; np_{R_1\times R_2}W=[0;1]\times[0;1];$$

$$np_{R_1\times R_2\times R_3}W=[0;1]\times[0;1]\times[0;1].$$

4. Скористатися тим, що

$$R^T=\{\{(t,\,f(t)):t\in T\}: f-\text{функція визначена на } T\}.$$

1) R^1; 2) R^n; 3) R^∞.

5. Скористатися відповідними означеннями.

6. 1) 1. $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{коли } \exists\; i\in\overline{1,n}: x_i\le 0,\\ a, & \text{коли } x_i>0\;\forall i \text{ і } \exists\; i\in\overline{1,n}: x_i\le 1,\\ 1, & \text{коли усі } x_i>1.\end{cases}$

2. $M[X_t]=\dfrac{t-1}{t^2}$; $D[X_t]=\dfrac{t-1}{t^4}$; $K[X_t,X_s]=\dfrac{t-1}{t^2s^2}\left(\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{s}+\dfrac{t}{s}\right)$,

$\rho(t,s)=\sqrt{\dfrac{t-1}{s-1}\left(\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{s}+\dfrac{t}{s}\right)},\; t<s$.

3. Процес не є стаціонарним.

4. Так.

2) 1. $F_{X_{t_k}}(x_k)=P(X_{t_k}<x_k))=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{A_{x_k,t_k}} dE$,

де $A_{x_k,t_k}=[-\pi;\pi]\bigcap(X_{t_k}<x_k)$, а

$$(X_{t_k}<x_k)=\begin{cases}\varnothing, \text{ коли } x_k\le -1,\\ \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(\arcsin x_k-t-\pi+2\pi k;\arcsin x_k-t+2\pi k) \text{ коли } -1<x_k\le 1,\\ (-\infty;+\infty), \text{ коли } x_k>1.\end{cases}$$

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{2}\int_{A_{x,t}} dE, \text{ де } A_{x,t}=\bigcap_{k=1}^{n}A_{x_k,t_k}.$$

2. $M[X_t]=0=0$, $D[X(t)]=\dfrac{1}{2}$; $K[X_t,X_s]=\dfrac{1}{2}\cos(t-s)$;

$\rho(t,s)=\cos(t-s)$.

3. Процес є стаціонарним.

4. Ні.

3) 1. Висновок аналогічний до 2) 1. Тільки у виразі $(X_{t_k} < x_k)$ фігурує об’єднання

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (2(\arccos \frac{x}{t} - 2t + 2\pi k); 2(2\pi - \arccos \frac{x}{t} - 2t + 2\pi k)) .$$

2. $M[X_t] = 0$; $D[X_t] = \frac{t^2}{2}$; $K[X_t, X_s] = ts \cos 2t \cos 2s$; $\rho(t, s) = 2\cos t \cos 2s$.

3. Процес не є стаціонарним.

4. Ні.

7. 1) Якщо $T = \{0,1\}$, то процес є ланцюгом Маркова, а якщо $T = \{0,1,2,\ldots\}$, то не є.

2) Якщо $T = \{0,1,2\}$ то процес є ланцюгом Маркова, а якщо $T = \{0,1,2,3,\ldots\}$, то не є.

3) 1. Процес є ланцюгом Маркова, $P_n(x_i, x_j) = \frac{1}{2}$. 2. Так. 3. Є, $\pi(1) = (\pi(1))^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. 4. Ні.

4) 1. Процес є ланцюгом Маркова,

$$P_n(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, \text{ коли } x_j > x_i + 1 \text{ або } 0 \ne x_j \le x_i, \\ 2p, \text{ коли } 0 = x_j \le x_i, \\ 1 - p, \text{ коли } x_i + 1 = x_j. \end{cases}$$

2. Так. 3. Є, $\pi(1) = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

4. Ні.

8. (Ω_1, S, P) співпадає з ймовірнісним простором із задачі **7**.1.4), а тому висновки аналогічні до висновків до цієї задачі.

9. $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, перша координата елемента $E = (x, y) \in \Omega$ вказує, куди рухалася точка: 0 – вправо, 1 – вліво, а друга – куди рухається точка: 0 –вправо, 1 – вліво.

$$X_1(E) = X_1(x_1, x_2) = x_1, \; X_2(E) = X_2(x_1, x_2) = x_2$$

$P(\{(0,0)\}) = (1 - p_1)p$; $P(\{(0,1)\}) = p_1 p$; $P(\{(1,0)\}) = p_2(1-p)$; $P(\{(1,1)\}) = (1-p_2)(1-p)$, де $p \in (0;1)$ – довільне фіксоване число – ймовірність того, що у довільний момент часу точка рухається вправо: $P(X_1 = 0) = p$. За цих умов випадковий процес $X_t(E)$, $E \in \Omega$, $t \in \{1, 2\} = T$ описує рух матеріальної точки.

10. 1. Скористатися означенням ланцюга Маркова і умовою незалежності випадкових величин. $P_n(x_i, x_j) = P(X_n = x_j)$ – може залежати від n.

2. Скористатися відповідними означеннями і тим, що $Y_0 = y(t_0) \Leftrightarrow X_0 = y(t_0)$, $Y_1 = y(t_1) \Leftrightarrow X_1 = y(t_1) - y(t_0)$, …, $Y_{n-1} = y(t_{n-1}) \Leftrightarrow X_{n-1} = y(t_{n-1}) - y(t_{n-2})$.

$$P_n(x_i, x_j) = P(X_n = x_j - x_i).$$

3. Взагалі кажучи, ні, оскільки $P_n(x_i, x_j)$ можуть залежати від n.

4.1

1. Так – 1, 2, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 16; усі інші – ні.

2. Скористатися теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.

3. Скористатися тим, що $(X \neq X^*) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(|X - X^*| \geq \frac{1}{n})$ та $(|X - X^*| \geq \varepsilon) \subset (|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + (|X_n - X^*| \geq \frac{\varepsilon}{2})$.

4. Скористатися вказівкою до **3**.

5. Довести існування $n_k \uparrow \infty : \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}) < +\infty$, а потім скористатися лемою Бореля-Кантеллі.

6. Скористатися відповідними означеннями і зв'язками між різними видами збіжності.

7. 1. Скористатися тим, що серед чисел $Z_k(E)$, для кожного фіксованого E, або всі нулі, або лише одне дорівнює 1, а всі інші – нулі.

2. Скористатися тим, що

$$Y_n^2 \geq \sum_{k=1}^{n} Z_k Y_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Z_k (Y_k^2 + 2(Y_n - Y_k)Y_k + (Y_n - Y_k)^2) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} Z_k (Y_k^2 + 2(Y_n - Y_k)Y_k).$$

3. Розглянути два випадки: $Z_k(E) = 0$ і $Z_k(E) \neq 0$.

4. Скористатися тим, що $Z_k Y_k (Y_n - Y_k) = \sum_{i=k+1}^{n} Z_k Y_k X_i$, $M[X_i] = 0$ і X_i, $i > k$ не залежить від $Z_k Y_k$.

5. Скористатися нерівностями 2, 3 і 4.

6. Скористатися тим, що $Y_n^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} X_k X_i$.

7. Скористатися 6, 5 і 1.

8. Скористатися 7.

8. 1) Скористатися тим, що $\exists\, X_{n_k} \xrightarrow{м.н} X$ і розглянути події $A_n = \{E \in \Omega : |X_n(E)| \leq c\}$, $B_n = \{E \in \Omega : X_{n_k}(E) \to X(E)\}$ та переконатися, що $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n B) = 1$.

2) Для фіксованого $\delta > 0$ утворити

$$Y_{n,\delta}(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли} \mid X_n(E) - X(E) \mid \geq \delta, \\ 0, \text{в іншому разі} \end{cases}$$

і довести, що майже скрізь $\mid X_n(E) - X(E) \mid \leq \delta + 2cY_{n,\delta}(E)$.

9. Скористатися відповідними означеннями, нерівністю Чебишова та нерівністю Коші-Буняковського.

10. Скористатися задачею **9**.

4.2

1. Так – 3, 6; усі інші – ні.

2. Скористатися відповідними означеннями.

3. Скористатися властивостями нерівностей та границь.

4. 1. Див. вправу **2.**3.

2. Розглянути X_k, для якої

$$D[X_k] = \begin{cases} k, \text{ коли } k = 2^{i-1} \text{ для деякого } i \in N, \\ 0, \text{ коли } k \neq 2^{i-1} \ \ \forall i \in N, \end{cases}$$

5. 1. Див. задачу **9** §4.1.

2. Розглянути випадок $M[X_k] = a \quad \forall k$.

6. Див. задачу **13.9** §3.1.

7. 1. Скористатися задачею **6**.

2. Див. вправу **2.**1 §4.1.

3. скористатися тим, що

$$P(\bigcap_{n=N}^{\infty} \mid X_n - X \mid \leq \varepsilon) = 1 - P(\sum_{n=1}^{\infty} \mid X_n - X \mid > \varepsilon).$$

8. Скористатися відповідними означеннями і лемою Бореля-Кантеллі.

9. Це наслідок повноти простору L^2.

10. 1. Скористатися тим, що

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{D[X_k]}{k^2} \Leftrightarrow D[X_n] = n^2(b_n - b_{n-1}), \ b_0 = 0.$$

2. Скористатися 1, а також задачами **2** і **5**.

11. 1) Скористатися властивостями нерівностей.

2) Див. задачу **7.**3.

3) Скористатися нерівністю Колмогорова.

4) Скористатися 3) і властивостями рядів та нерівностей.

5) Скористатися 1).

12. 1) Ввести $X_n^{**}(E) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \mid X_n(E) \mid \leq n, \\ X_n(E), & \text{коли} \mid X_n(E) \mid > n, \end{cases}$

і довести, що $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n^{**} = 0) < M[\mid X_1 \mid] < +\infty$ та скористатися лемою Бореля-Кантеллі.

2) Це наслідок 1).

3) Скористатися тим, що $F_{X_k^*}(x)=\begin{cases}0, & \text{коли}\, x\le -k,\\ F_X(x), & \text{коли}\ -k<x\le k,\\ 1, & \text{коли}\, \mathrm{x}>\mathrm{k}.\end{cases}$

4) Скористатися тим, що коли $k-1<|x|\le k$, то $x^2\le k|x|$, а тому $\int\limits_{k-1<|x|\le k} x^2 dF(x)\le k \int\limits_{k-1<|x|\le k} |x|\, dF_X(x)$.

5) Скористатися тим, що $\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n(n-1)}$.

6) Скористатися повною адитивністю інтеграла Лебега-Стілтьєса.

7) Це наслідок 3) – 6).

8) Це наслідок задачі **11**.

9) Скористатися вказівкою до 3 та регулярністю методу середніх арифметичних.

10) Це наслідок 8) і 9).

11) Це наслідок означень X_n^* та X_n^{**}.

12) Це наслідок 11), 2) і 10).

15. Знайти $M[X_k]$ та $D[X_k]$ і показати, що виконано усі умови закону великих чисел.

16. Див. вказівку до задачі **15**.

1) Виконано умови кожної згаданої теореми.

2) 1. Якщо $\alpha=0$, то застосовні усі згадані теореми. Якщо $\alpha\ne 0$, то теорема Чебишова не застосовна. Якщо $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, то застосовні теореми Маркова і Колмогорова.

3) 1. Теорема Чебишова не застосовна, а теореми Маркова і Колмогорова застосовні.

2. $\overline{X}_n \xrightarrow{P} 0$.

4) 1. Якщо $\alpha\le 0$, то застосовні теореми Чебишова, Маркова і Колмогорова. В іншому разі за умови $\alpha<1$ застосовні теореми Маркова і Колмогорова.

2. Якщо $\alpha\le 0$, то $\overline{X}_n \xrightarrow{P} 0$, а якщо $0<\alpha<1$, то $\overline{X}_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha} \xrightarrow{P} 0$, проте не існує числа a, для якого $\overline{X}_n \xrightarrow{P} a$.

5) 1. Теорема Чебишова не застосовна, а теореми Маркова і Колмогорова застосовні, коли $\alpha<1$.

2. $\overline{X}_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}n_k \xrightarrow{P} 0$.

6) 1. Якщо $\underline{\lim}_{k\to\infty} p_k > 0$, то застосовні усі згадані теореми.

2. $\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{p_k} \xrightarrow{P} 0$, коли $\underline{\lim}_{k\to\infty} p_k > 0$.

17. 1) Якщо $\alpha \le 0$, то застосовні усі згадані теореми. Якщо $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, то застосовні лише теореми Маркова і Колмогорова.

2) Усі згадані теореми не застосовні.

3) Див. відповідь до 1).

18. Скористатися нерівністю Чебишова.

4.3

1. Так – для тверджень 1, 2, 6, 7, 9, 10; для усіх інших – ні.

2. 1) Знайти $|e^{iu}-1|$, де $e^{iu} = \cos u + i\sin u$.

2) Скористатися тим, що $|\int_0^{\theta} f(u)du| \le \int_0^{\theta} |f(u)|du$.

3) Див. 2).

4) Скористатися 3) і розкладом e^{it} у степеневий ряд.

5) Скористатися властивістю лінійності математичного сподівання і теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.

6) Скористатися 5), поклавши $\frac{t}{\sqrt{n}}$ замість t.

7) Скористатися формулою Ейлера і властивістю лінійності математичного сподівання.

8) Скористатися тим, що $|g_X(t)| \le |M[e^{itX}]| \le M[|e^{itX}|] = M[1] = 1$.

9) Знайти $g_X(-t) = M[e^{-itX}]$.

10) Скористатися тим, що

$g_{aX+b}(t) = M[e^{it(aX+b)}] = M[e^{itaX}e^{itb}] = e^{itb}M[e^{itaX}]$.

11) Скористатися тим, що

$|g_X(t+\Delta t) - g_X(t)| = |M[e^{i(t+\Delta t)X} - e^{itX}]| = |M[e^{itX}(e^{i\Delta tX} - 1)]| \le M[|e^{i\Delta tX} - 1|]$

і знайти $|e^{i\Delta tX}-1|$.

12) Скористатися 11) і 5).

13) Скористатися 7).

14) Скористатися 7) і 8).

3. Знайти

$g_{X_1+X_2}(t) = M[e^{it(X_1+X_2)}] = M[e^{itX_1}e^{itX_2}] = M[e^{itX_1}]M[e^{itX_2}] = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$, а далі застосувати метод математичної індукції.

4. 1) Скористатися властивістю лінійності математичного сподівання.

2) Врахувати, що $M[e^{itX}]$ не залежить від X.

3) Якщо $f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k e^{it_k X}+\alpha_n(X)$, де $\alpha_n(X)\rightrightarrows 0 \quad (n\to\infty)$ на $[a;b]$, то за теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла дістаємо, що $M[f[X]]=M[f[Y]]+o(1)$, а тому $M[f(X)]=M[f(Y)]$.

4) Це властивість математичного сподівання.

5) Скористатися тим, що для $f(x)=I_{[a;b]}(x)$ існує послідовність неперервних функцій $f_n(x)\to f(x)$ скрізь на R, причому $|f_n(x)|\le 1 \quad \forall x\in R$. Після цього скористатися теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.

5. 1) Показати, що $g_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, а $\frac{dg_X(t)}{dt}=$ $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}(e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}})dx=-t\,g_X(t)$, тобто $g_X{}'(t)=-t\,g_X(t)$. Розв'язати це диференціальне рівняння з початковою умовою $g_X(0)=1$ (див. задачу **2.**8).

В загальному випадку перейти до випадкової величини $Y=\frac{X-a}{\sigma}$ і показати, що $g_X(t)=e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

2) $g_X(t)=\frac{a}{t^2+a^2}$; 3) $g_X(t)=\frac{e^{iat}-1}{iat}$; 4) $g_X(t)=\frac{\sin at}{at}$;

5) $g_X(t)=\frac{2}{a^2t^2}(1-\cos t)$; 6) $g_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{a}(1-\frac{|t|}{a}), & \text{коли} |t|\le a,\\ 0, & \text{коли} |t|>a;\end{cases}$

7) $g_X(t)=e^{-|t|a}$; 8) $g_X(t)=\frac{1}{(1-it)^a}$; 9) $g_X(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{t^2+(2n+1)^2}$.

6. 1) $c=0{,}2$; $g_X(t)=0{,}2\cos 2t+0{,}6\cos t+0{,}2$.

2) $c=0{,}2$ і тоді $g_X(t)=0{,}04e^{it}+0{,}86e^{2it}+0{,}1e^{3it}$ або $c=0{,}6$ і тоді $g_X(t)=0{,}36e^{it}+0{,}54e^{2it}+0{,}1e^{3it}$.

7. 1) Скористатися задачами **3** і **2.**6.

2) Скористатися тим, що $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})=e^x$.

3) Скористатися задачею **5**.1), **7**.2 і теоремою Леві.

8. 1. 1) Безпосередньо обчислити $M[Y]$, $D[Y]$ і $M[|Y|^3]$, де $Y = \dfrac{X_k - p}{\sqrt{pq}}$.

2) Довести, що $\sqrt{\dfrac{n}{pq}}(\dfrac{\mu_n}{n} - p) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{X_k - p}{\sqrt{pq}} \Leftrightarrow \mu_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

3)Скористатися задачею **7**, поклавши $X_k^* = \dfrac{X_k - p}{\sqrt{pq}}$ замість X_k.

4) Скористатися **8**.3) і формулою (3.4).

2. Скористатися **8**.1.

1) $|R_n| \le \dfrac{1{,}6(p^2 + q^2)}{\sqrt{npq}}$; 2) $|R_{m,n}| \le \dfrac{0{,}8(p^2 + q^2)}{\sqrt{npq}}$; 3) $|R_{m,n}| \le \dfrac{1{,}6(q^2 + p^2)}{\sqrt{npq}}$; 4) $|R_{m,n}| \le \dfrac{2{,}6}{\sqrt{npq}}$; 5) $|R_n| \le \dfrac{1{,}6(p^2 + q^2)}{\sqrt{npq}}$.

9. 1. $n \ge 8000$. 2. $\widetilde{P} \approx 0{,}1114$. 3. $\varepsilon = 0{,}01$.

10. 1. $X_n(t,5)$ визначена на $\Omega = [0;1)$ і набуває значень $x \in \overline{0,n}$, причому $P(X_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Окрім цього, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{X}_k$, де

$\overline{X}_k(t) = \begin{cases} 1, \text{ коли } \alpha_k(t) = 5, \\ 0, \text{ коли } \alpha_k(t) \ne 5, \end{cases}$ а $Y_n^{(t)} = \dfrac{X_n^{(t)}}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{X}_k(t)$.

2. $$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & \text{коли } \dfrac{m}{n} < x \le \dfrac{m+1}{n}, m \in \overline{0,(n-1)}, \\ 1, & \text{коли } x > 1; \end{cases}$$

$g_{Y_n}(t) \approx e^{0{,}1it}$, коли $n \approx \infty$.

3. $Y_n \xrightarrow{P} p = 0{,}1$.

4. $P(A_k) = \dfrac{1}{10}$ $\forall k \in N$.

1) $n \approx 139$; 2) $\widetilde{P}(|P_{1000}(A_k) - P(A_k)| < 0{,}05) \approx 1$; 3) $\varepsilon = 0{,}0186$.

5. Результат не зміниться.

11. 1. $n \geq 248$.

2. $P(\mu_{1000} \geq 200) \approx 1$.

3. $m \approx 828$.

5.1

1. Так – 1, 3, 5, 7, 9, 13 – 16; усі інші – ні.
2. Скористатися комп’ютерними програмами.
3. Скористатися комп’ютерними програмами.
4. Знайти $P_n^*([x_i; x_{i+1})) = \dfrac{n_i}{n} = f_n^*(x_i) \cdot h$, де $x_i \in [a_i; b_i) = [x_i; x_{i+1})$, а спостережені значення вважати серединами вказаних проміжків. 1. $h = 0{,}05$. 2. $h = 2$.

5.2

1. Так – 1. а), в), д), 2, 3, 5,8-10, 11. в),12, 14, 15. б), в), 16. в), 17, 18. б), 20, 23; усі інші – ні.
2. 1) Див. **1.**15. а);
2) Див. **1.**15. б);
3) а) так, б) ні.
3. Див. **1.**18. а).
4. Див. **1.**18. б).
5. Скористатися комп’ютерними програмами.
6. Скористатися комп’ютерними програмами.
7. Обчислити $\widetilde{m}_X$, $\widetilde{m}_Y$, $\widetilde{\sigma}_X$, $\widetilde{\sigma}_Y$, $\widetilde{K}[X,Y]$ і скористатися комп’ютерними програмами.
8-9. Скористатися комп’ютерними програмами.

5.3

1. Так – 3, 5. б), г), 7, 8. е), 9, 11, 12-15; усі інші – ні.
2. Вважати $M[X] = 0$, $\sigma[X] = 1$. 1) Скористатися тим, що

$$\mu_u[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx.$$

2) Скористатися **1.** 7) та **2.** 1).
3. 1) Скористатися відповідними формулами для обчислення $M[X]$, $D[X]$, $\mu_n[X]$.

2) Скористатися задачами **1.** 7) та **3.** 1).

4. Скористатися відповідними формулами і таблицями значень $\Phi(t)$ та $q(n,\beta)$ або комп'ютерними програмами.

5. Скористатися відповідними формулами, таблицями значень $\psi(t)$, враховуючи кількість студентів вільності $r = n-1$.

6. Скористатися відповідними формулами і таблицями значень χ^2, враховуючи кількість студентів вільності $r = n-1$ і те, що $\alpha = 1-\beta$.

7. "Справжнє" значення вимірюваної величини χ – це її математичне сподівання $M[X]$, а точність вимірювання – це $\varepsilon = \alpha$.

8. Скористатися тим, що $P(|\overline{X}_n - m| < \varepsilon) = \Phi(t_\beta) = \beta$, де $t_\beta = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$.

9. Аналогічно до **8**.

10. Це частина задачі **7**.

11. За допомогою комп'ютерних програм знайти $\overline{X}_n$, σ_n та n і після цього скористатися задачами **5** та **6**.

12. Скористатися теоремою Мавра-Лапласа і розв'язати відносно p нерівність $P_n^* - t\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} < p < P_n^* + t\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

5.4

1. Так – 2, 4, 5. а), б), д), е), 7. а), б), 8, 9; усі інші – ні.

2 і **3.** Скористатися комп'ютерними програмами.

4. Скористатися прикладом 1.

5. Скористатися прикладом 2.

6. Скористатися прикладом 3.

5.5

1. Так – 2, 3, 5, 7. б), 8, 9, 11, 12; усі інші – ні.

2. 1. Скористатися прикладом 5. 4.

2. Скористатися вправою 1 і прикладом 5. 1.

3. Скористатися відповідною теорією.

4. Скористатися вправою 2.

Література

1. ***Боровков А.А***. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1976. – 288 с.
2. ***Вулих Б. З***. Краткий курс теории функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1965. – 304 с.
3. ***Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.*** Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1988. – 440 с.
4. ***Гнеденко Б. В.*** Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
5. ***Кемени Дж., Снелл Дж.*** Введение в конечную математику. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 486 с.
6. ***Коваленко И. Н., Филиппова А. А.*** Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. Шк., 1973. – 368 с.
7. ***Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б.*** Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
8. ***Колмогоров А.Н.*** Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974. – 120 с.
9. ***Колмогоров А. Н., Фомин С. В.*** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
10. ***Крамер Г.*** Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
11. ***Лоэв М.*** Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.
12. ***Майстров Д.Е.*** Теория вероятностей. Исторический очерк. - М.: Наука, 1967. – 320 с.
13. ***Сборник*** задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
14. ***Толстов Г.П.*** Мера и интеграл. - М.: Наука, 1976. - 392 с.
15. ***Уилкс С.*** Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с.
16. ***Феллер В.*** Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. – М.: Мир, 1964. – Т. 1. – 499 с.; 1967. – Т. 2. – 752 с.
17. ***Чистяков В. П.*** Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
18. ***Ширяев А. Н.*** Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
19. ***Шметтерер Л.*** Введение в математическую статистику. – М., Наука, 1976. – 520 с.

Зміст

Наукове видання

Мирослав Іванович Жалдак

Наталія Миколаївна Кузьміна

Геннадій Олександрович Михалін

ЗБІРНИК ЗАДАЧ І ВПРАВ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник для студентів
фізико-математичних спеціальностей
педагогічних університетів

За загальною редакцією *М.І. Жалдака*

Комп'ютерний набір *Н.П. Франчук*